

Механіка

Лекція 9. СТВ. Тема: Перетворення Лоренца.

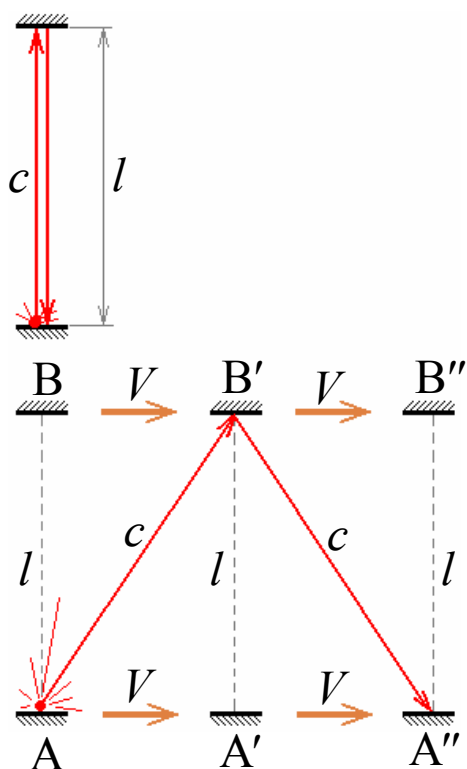


- П** I. 1. Перетворення часових інтервалів, координат,
Л довжин, швидкостей, прискорень.
А 2. Наслідки з перетворень Лоренца.
Н II. 3. Релятивістська динаміка.

1. Уповільнення часу.

Розглянемо роботу годинників в «нерухомій» і в рухомій інерціальних системах. За годинник приймемо оптичний промінь, що рухається між дзеркалами в напрямку, поперечному до напрямку руху K' -системи і, відповідно, дзеркал в цій системі. Отже, при нерухомих дзеркалах («нерухома» K -система відліку), що знаходяться на відстані l одне від одного, світло проходить відстань між ними зі швидкістю c за проміжок часу:

$$\Delta t_0 = \frac{2l}{c}. \quad (1)$$



Тепер уявімо, що наш годинник, тобто дзеркала стали рухатись у напрямку, перпендикулярному до напрямку руху світла між ними, коли були нерухоми. При цьому відстань між дзеркалами l залишатиметься незмінною при будь-яких швидкостях, оскільки поперечні розміри тіл залишаються незмінними (інакше різні інерційні системи, нерухомі у деякому напрямку, можна було б розрізняти, тобто вони б не були рівноправними, що протирічить принципу відносності).

В той же час, при русі світла до другого дзеркала, останнє встигне зміститись на величину $V \cdot \Delta t_1$ і світлу, щоб досягти цього дзеркала, доведеться вже здолати шлях, більший ніж l :

$$l' = \sqrt{l^2 + (V \cdot \Delta t_1)^2}, \quad \text{або} \\ (c \cdot \Delta t_1)^2 = l^2 + (V \cdot \Delta t_1)^2,$$

звідки для проміжку часу проходження променя в один бік до другого дзеркала:

Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження, Лекція 9)

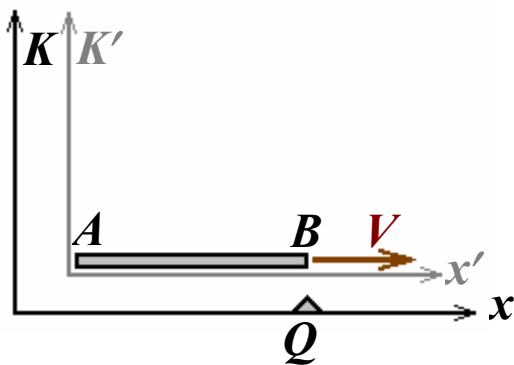
$$\Delta t_1^2 \cdot (c^2 - V^2) = l^2 \quad \text{або} \quad \Delta t_1 = \frac{l}{c \cdot \sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (2)$$

Отже, проміжок часу Δt , необхідний для повернення променя у початкову точку (період рухомого годинника) буде вдвічі перевищувати Δt_1 , тому враховуючи (1), з виразу (2) остаточно отримаємо:

$$\Delta t = 2 \cdot \Delta t_1 = \frac{2 \cdot \Delta t_0 \cdot \phi}{2 \cdot \phi \cdot \sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (3)$$

- перетворення Лоренца для часу, відповідно до якого інтервали часу в рухомій системі Δt виявляються більшими, ніж інтервали в нерухомій Δt_0 . Тобто годинник в рухомій системі іде повільніше, ніж в нерухомій. **Власним часом** вважається час, що відраховується годинником **власної системи**, тобто такої, відносно якої тіло покоїться.

2. Скорочення довжини.



Припустимо, стержень, довжина якого у його власній системі l_0 , рухається вздовж напрямку своєї осі та осі x координатної системи зі сталою швидкістю V . Для визначення довжини цього стержня у лабораторній («нерухомій») K -системі встановимо на осі x годинник у деякій точці Q і поміряємо ним час Δt_0 прольоту стержня повз цю точку. Тоді

довжина стержня в K -системі складе:

$$l = V \cdot \Delta t_0. \quad (4)$$

Але для спостерігача в (рухомій) системі стержня час буде іншим, оскільки K -годинник, що показав час Δt_0 , рухається відносно нього зі швидкістю V . Тому його власний час буде більшим $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$, а відповідно, довжина стержня, яку

він визначатиме, буде:

$$l_0 = V \cdot \Delta t = \frac{V \cdot \Delta t_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{l}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (5)$$

Отже, довжина рухомого стержня з точки зору нерухомої системи - l , здаватиметься меншою порівняно із його власною довжиною l_0 в пов'язаній із ним системі відліку -

Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження, Лекція 9)

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - V^2/c^2} . \quad (6)$$

Т. ч., розміри тіл у напрямку руху зазнають лоренцевого скорочення, величина якого залежить від швидкості руху тіла в цьому напрямку.

3. Уповільнення часу під час поздовжнього руху “світлового” годинника.

Тепер, користуючись формулою лоренцевого скорочення довжини, можна легко показати справедливість співвідношення інтервалів часу (3) для «дзеркально-світлового» годинника, що рухатиметься зі швидкістю V вздовж напрямку розповсюдження променя (і вздовж осі x). Цей випадок відрізнятиметься нерівністю двох інтервалів часу Δt_1 і Δt_2 ($\Delta t_1 + \Delta t_2 = \Delta t$) для прямого і оберненого проходження світла між дзеркалами, а також лоренцевим скороченням відстані між дзеркалами відповідно до співвідношення (6).

Час на перше (пряме) проходження світла між дзеркалами: $\Delta t_1 = \frac{l + V \cdot \Delta t_1}{c}$,

$$\Rightarrow \Delta t_1 \cdot c = l + V \cdot \Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{l}{c \cdot (1 - V/c)}, \text{ і, аналогічно, час другого}$$

$$\text{(оберненого) проходження: } \Delta t_2 = \frac{l - V \cdot \Delta t_2}{c} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{l}{c \cdot (1 + V/c)} .$$

Сума цих часів із врахуванням скорочення довжини l (6) дасть загальний інтервал часу повернення світла:

$$\begin{aligned} \Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 &= \frac{l_0 \cdot \sqrt{1 - V^2/c^2}}{c \cdot (1 - V/c)} + \frac{l_0 \cdot \sqrt{1 - V^2/c^2}}{c \cdot (1 + V/c)} = \\ &= \frac{2l_0}{c \cdot \sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \end{aligned} \quad (7)$$

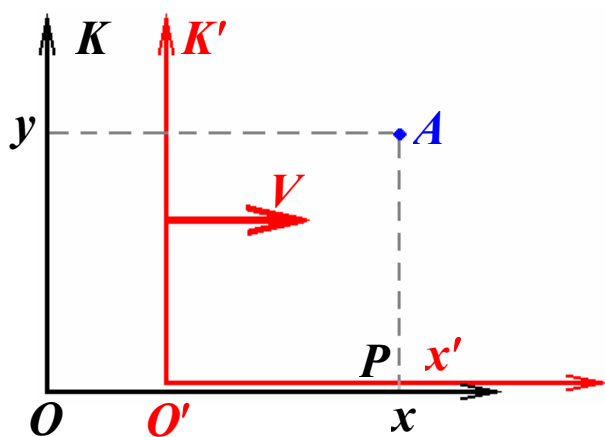
тобто отримали таке саме співвідношення, як і при розгляді перпендикулярного руху світла і K' -системи дзеркал (3).

4. Перетворення координат.

Формули перетворення координат і часу деякої події в різних інерційних системах мають враховувати зміни довжин і часових інтервалів і переходити в перетворення Галілея при малих швидкостях. Розглядаємо K - і K' - системи, що рухаються таким же чином, як це представлено на рис.

Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження, Лекція 9)

Припустимо, що в момент часу t в K -системі відбулась деяка подія A в точці з координатами x, y . Координата $y=y'$, а координата x' характеризує власну довжину відрізка $O'P$, нерухомого в K' -системі. Довжина ж цього відрізка в K -системі $x - Vt$. Зв'язок між цими довжинами:



$x - Vt = x' \cdot \sqrt{1 - V^2/c^2}$, звідки

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (8)$$

В той же час, координата x характеризує власну довжину відрізка OP , нерухомого в K -системі. Довжина ж цього відрізка в K' -системі, де виміри проводяться в момент t' , дорівнює $x + Vt'$. Знову, враховуючи перетворення довжини, отримаємо:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (9)$$

З цих формул (8) та (9) можна отримати перетворення моментів часу, якщо позбутись x і x' :

$$t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad t = \frac{t' - x'V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (10 a, б)$$

Формули (8)-(10) називаються **перетвореннями Лоренца** при переході від K -до K' -системи і навпаки. Майже однаковий вигляд цих формул (різниця тільки в знаках) обумовлений рівноправністю інерційних систем відліку, що відрізняються тільки напрямком руху. При припущенні $c = \infty$ (тобто у припущенні, що швидкість розповсюдження взаємодій нескінченна) перетворення Лоренца переходять у перетворення Галілея, так само, як і при $V \ll c$. При $V \geq c$ вирази під корнем стають від'ємними (або рівними 0) і формули втрачають фізичний зміст; інакше кажучи, з формул на пряму витікає, що рух зі швидкостями вище швидкості світла неможливий.

5. Перетворення швидкостей.

Якщо в двовимірній K -системі рухається частинка, вектор швидкості якої $\vec{V}(V_x; V_y)$, то знайти перетворення проєкцій швидкості можна т. ч.:

Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження, Лекція 9)

$$V_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'/dt}{dt'/dt}, \quad V_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'/dt}{dt'/dt}. \quad (11a, б)$$

Продиференціювавши вирази (8) та (10a) по часу t і підставивши результати в формули (11a, б), можна отримати формули перетворення складових (проекцій) вектора швидкості:

$$V_x' = \frac{V_x - V}{1 - \frac{V_x \cdot V}{c^2}}, \quad V_y' = \frac{V_y \cdot \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \frac{V_x \cdot V}{c^2}}. \quad (12a, б)$$

Ці формули також при малих швидкостях переходять у звичайні перетворення швидкостей класичної або ньютонівської механіки.

6. Наслідки з перетворень Лоренца.

6.1. Одночасність – поняття відносне. Якщо дві події – 1 і 2, задані своїми двовимірними координатами і моментами часу, відбуваються в K -системі, то інтервал часу між цими подіями

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - (x_2 - x_1) \cdot V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

звідки витікає, що події, одночасні в K -системі, не будуть одночасними в K' -системі (якщо тільки відрізняються їх x координати).

6.2. Інваріанти перетворень Лоренца. Для перетворень Лоренца, так само, як і для перетворень Галілея, існують абсолютні величини, або т. зв. *інваріанти*, тобто величини, що залишаються незмінними при переходах між різними інерційними системами відліку.

Першою такою величиною є *швидкість світла* у вакуумі.

Другою визначальною величиною є *інтервал* s_{12} між подіями 1 та 2, який визначається із співвідношення:

$$s_{12}^2 = c^2 \cdot t_{12}^2 - l_{12}^2,$$

де t_{12} – проміжок часу між подіями;

l_{12} – відстань між двома точками, в яких відбуваються дані події.

$$l_{12}^2 = x_{12}^2 + y_{12}^2 + z_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

В інваріантності інтервала можна переконатись, розрахувавши його безпосередньо в K' - та K -системах відліку.

Інтервал називається *просторовоподібним* у випадку $l_{12} > c \cdot t_{12}$, *часоподібним* при $c \cdot t_{12} > l_{12}$ і *світлоподібним* при $c \cdot t_{12} = l_{12}$. Для просторово

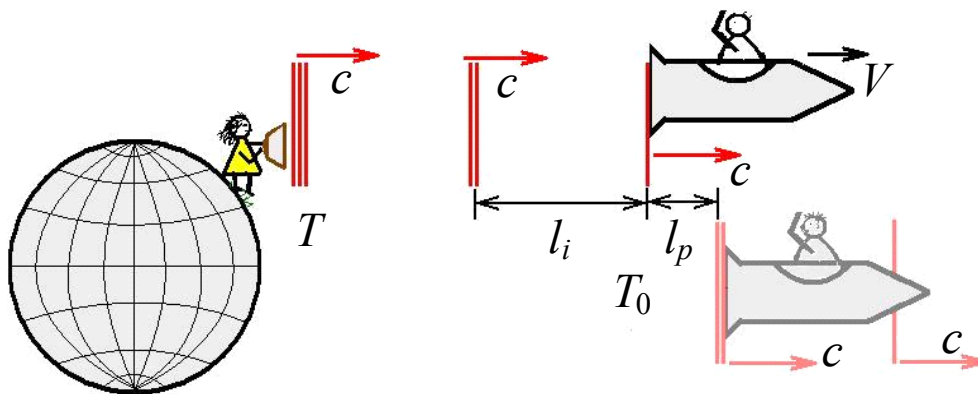
Лектор – Сохацький В.П.

Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження, Лекція 9)

подібного інтервалу завжди можна знайти таку K' -систему відліку, в якій ці події відбуваються одночасно ($t'_{12} = 0$), але в жодній системі відліку події не можуть вплинути одна на одну. Для часоподібного інтервалу завжди можна знайти таку систему відліку, в якій події відбуваються в одній точці ($l'_{12} = 0$) і для часоподібних інтервалів події можуть бути зв'язані між собою причинно-наслідковими зв'язками.

7. Релятивістський ефект Доплера.

Якщо з точки початку відліку (K -система Землі) в деякому напрямку надсилати імпульсні сигнали з періодичністю T (в «нерухомій» K -системі відліку), то інтервали часу, через який ці імпульси будуть приходити до спостерігача в рухомій системі K' , (яка рухається вздовж напрямку розповсюдження імпульсів світла зі швидкістю V), будуть залежати від швидкості V рухомої системи за формулою релятивістського ефекта Доплера.



Якщо джерело світла покоїться в системі K , а спостерігач – в системі K' , то з точки зору відправника імпульсів в системі K , спостерігач в K' буде приймати ці імпульси через проміжки часу T_0 (за годинником K -системи):

$$T_0 = \frac{T}{1 - \frac{V}{c}}. \quad (*)$$

Цей вираз було отримано з наступних міркувань: відстань між сусідніми імпульсами $l_i = c \cdot T$; відстань, яку пролетить ракета за той час, що пройшов від приходу на ракету чергового імпульсу (з точки зору земного спостерігача) до моменту, поки ракету наздожене наступний імпульс: $l_p = V \cdot T_0$, - тут застосовано час T_0 , з яким бачить прихід імпульсів на ракету земний спостерігач.

$$T_0 = \frac{l_i + l_p}{c} = \frac{cT + VT_0}{c} = T + \frac{V}{c} \cdot T_0, \text{ звідки і отримується вираз } (*).$$

Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження, Лекція 9)

Щоб отримати проміжок часу за годинником спостерігача в K' , необхідно

перейти до власного часу спостерігача T_0' , для якого $T_0' = T_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$, в результаті чого для співвідношення часів випромінювання імпульсів T і їх прийняття рухомим спостерігачем T_0' отримаємо вираз: $T_0' = \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} \cdot T$.

Переходячи до частот, можна записати: $\omega' = \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} \cdot \omega$, де $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

8. Перетворення прискорення.

Для отримання закону перетворення прискорення, розглянемо приклад із визначенням часу, що пройде на ракеті при польоті від Землі до центру Галактики ($R=30000$ світлових років), якщо першу половину шляху космічний корабель рухатиметься з прискоренням $g=10 \text{ м/с}^2$ у своїй (власній) K' -системі відліку (т. зв. “гіперболічний” рух), а другу половину – так само уповільнюватиметься.

В даному прикладі ми маємо справу з неінерціальною системою відліку, пов’язаною з ракетою, оскільки вона рухається з прискоренням. Перетворення Лоренца, як відомо, справедливі тільки в інерціальних системах відліку, але в деяких випадках їх можна застосувати у диференціальній формі, розглядаючи нескінченно короткі інтервали часу, шляху, зміни швидкості тощо.

Пов’яжемо нерухому K -систему відліку із Землею і умовно візьмемо момент часу, коли ракета набула швидкості u . В цей момент із ракетою пов’яжемо рухому інерційну систему відліку, що рухатиметься далі в напрямку x із цією ж швидкістю.

Отже, в момент t система відліку з ракетою K' матиме швидкість u (тобто може вважатись інерціальною), тоді в наступний нескінченно близький момент часу $t+dt$ швидкість ракети в K -системі становитиме $u+du$, а в K' -системі - du' .

Застосуємо формулу додавання швидкостей систем K і K' , оскільки вони рухаються одна відносно одної зі швидкістю u :

$$u + du = \frac{u + du'}{1 + \frac{u \cdot du'}{c^2}}$$

і звідси, домноживши рівняння на знаменник, виражаємо du' :

$$du' = \frac{du}{1 - u^2/c^2}.$$

Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження, Лекція 9)

Проміжки часу пов'язані між собою як $dt' = dt \cdot \sqrt{1 - u^2/c^2}$, а отже, прискорення можна отримати, розділивши два останні рівняння:

$$\frac{du'}{dt'} = \frac{1}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \cdot \frac{du}{dt}, \text{ або } a_x = (1 - u^2/c^2)^{3/2} \cdot a'_x.$$

Ця формула є **перетворенням прискорення** (точніше тільки його \mathbf{x} – складової вздовж напрямку швидкості руху) при переході між інерціальними \mathbf{K} і \mathbf{K}' системами. Подібним же чином можна записати **перетворення прискорення** для перпендикулярних до \mathbf{x} напрямків \mathbf{y} та \mathbf{z} :

$$a_{y,z} = (1 - u^2/c^2) \cdot a'_{y,z}.$$

Відмінність від перетворення прискорення по \mathbf{x} пов'язана із різними перетвореннями швидкостей і координат по напрямках вздовж і перпендикулярно до напрямку руху.

За умовою «гіперболічного» польоту $\frac{du'}{dt'} = g = \text{const}$, отже

$\frac{du}{dt} = g \cdot (1 - u^2/c^2)^{3/2}$ і проінтегрувавши цей вираз з початковими умовами $t=0$,

$u=0$, можна отримати, зокрема, залежність швидкості ракети від часу:

$$u = \frac{gt}{\sqrt{1 + g^2 t^2 / c^2}}. \text{ Представляючи далі швидкість, як похідну від пройденого}$$

шляху, можна повторно проінтегрувати останнє рівняння по шляху і по часу, і отримати функціональну залежність пройденого шляху від часу.

9. Релятивістський імпульс. Релятивістська динаміка.

Рівняння Ньютона інваріантні по відношенню до перетворень Галілея, в той же час вони виявляються не інваріантними по відношенню до перетворень Лоренца. Зокрема, закон збереження імпульсу, який витікає із ньютонівських рівнянь динаміки, також не є інваріантним у класичній формі його запису. Але можна знайти таку форму запису згаданих вище законів, щоб вони були інваріантними і до перетворень Лоренца. Наприклад, якщо імпульс релятивістської частинки записати у вигляді:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0 \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (*)$$

тоді закон збереження імпульсу буде справедливий для будь-якої інерціальної системи відліку. Але в цьому випадку імпульс залежатиме від швидкості більш

Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження, Лекція 9)

складно, ніж це було у ньютонівській механіці. При невисоких швидкостях, коли $V \ll c$ формула для імпульсу переходить у звичайну класичну форму добутку маси та швидкості. Така форма запису імпульсу допускає наступну трактовку: маса може бути представлена не як інваріантна величина, а як залежна від швидкості по

закону: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$. У цьому випадку інваріантну масу m_0 можна назвати

масою спокою, а залежну від швидкості неінваріантну масу - **релятивістською масою**.

І тепер, застосовуючи імпульс у формі, наведеній вище, можна записати 2-й закон Ньютона таким чином, щоб він був інваріантним відносно перетворень Лоренца. Отже, основне **рівняння релятивістської динаміки** у вигляді:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

задовольняє вимогам принципу відносності, тобто має однаковий вигляд при переходах між інерціальними системами за допомогою перетворень Лоренца. Підставляючи в це рівняння вираз для релятивістського імпульсу, отримаємо:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \right) = \vec{F}.$$

10. Взаємозв'язок маси та енергії.

Якщо обидві частини написаного вище рівняння Ньютона домножити на переміщення $d\vec{s} = \vec{v} \cdot dt$, то в результаті можна отримати в правій частині роботу,

що виконується за час dt : $\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \right) \cdot \vec{v} \cdot dt = \vec{F} \cdot d\vec{s}$.

Ця робота витрачається на приріст кінетичної енергії, тоді ліва частина може розглядатись як приріст кінетичної енергії за час dt . Отже,

$$dE = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \right) \cdot \vec{v} \cdot dt = \vec{v} \cdot d \left(\frac{m_0 \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \right),$$

що при врахуванні $\vec{v} \cdot d\vec{v} = d(V^2/2)$ можна нескладно перетворити на

$$dE = d \left(\frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \right), \text{ і після інтегрування } E = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} + C,$$

де C – константа, що має дорівнювати $C = -m_0 \cdot c^2$, оскільки кінетична енергія має дорівнювати 0 при $V=0$.

Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження, Лекція 9)

Отже, в результаті получается вираз для кінетичної енергії:

$$E = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - 1 \right),$$

Який при малих швидкостях $V \ll c$ переходить у звичайне $E = \frac{mV^2}{2}$.

Частину енергії

$$E_0 = m_0 \cdot c^2 \quad (**)$$

називають енергією спокою (загальною внутрішньою енергією тіла), не пов'язаною із рухом тіла. Ця енергія вміщує в собі енергію спокою складових частинок системи, кінетичну енергію їх можливого руху відносно спільного центра мас та енергію взаємодії між собою.

Повна енергія тіла E_Σ складатиме:

$$E_\Sigma = m \cdot c^2 = E_0 + E = m_0 \cdot c^2 + m_0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - 1 \right) = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (***)$$

Аналізуючи це рівняння, Ейнштейн прийшов до висновку, що $E_0 = m_0 \cdot c^2$ є загальною внутрішньою енергією тіла, з яких би видів енергії вона не складалась. А сума цієї внутрішньої енергії з кінетичною енергією дасть повну енергію тіла (частинки) (***). Причому можлива потенціальна енергія тіла в силовому полі тут не враховується. Ну а співвідношення (**) виражає один з найбільш фундаментальних законів природи – **закон взаємозв'язку маси та енергії спокою тіла**. Таким чином, маса, яка в законі динаміки Ньютона виступала як міра інертності, а в законі всесвітнього тяжіння як міра гравітаційної взаємодії, тут виступає в ролі **енерговміщуючої характеристики тіла**. Зміна енергії спокою тіла супроводжується відповідною зміною його маси, втім при більшості макроскопічних процесів ці зміни виявляються надзвичайно малими, практично недоступними для експериментальних вимірів.

Якщо в рівнянні для енергії E замінити швидкість V на імпульс p за допомогою виразу для їх релятивістського зв'язку (записаного вище (*)), то можна отримати зв'язок енергії з імпульсом у вигляді:

$$E = c \cdot \sqrt{p^2 + m^2 \cdot c^2}, \quad (****)$$

або $E^2 - p^2 \cdot c^2 = m_0^2 \cdot c^4$, **і цей вираз - енергетичний інваріант**, - є третім за значенням інваріантом перетворень Лоренца; величина, що дорівнює $E^2 - p^2 c^2$, де $p = mV$ - імпульс частинки, E - її повна енергія, m_0 - маса спокою, є незмінною

Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження, Лекція 9)

(інваріантною) величиною для різних інерціальних систем, оскільки вона дорівнює добутку інваріантних величин – маси спокою і швидкості світла.

11. Частинки з нульовою масою спокою.

Якщо у виразі (****) покласти $m=0$, то отримаємо співвідношення $E=c \cdot p$, яке узгоджується з рівнянням зв'язку енергії та імпульса $\vec{p} = \frac{E}{c^2} \cdot \vec{V}$ тільки при $V=c$.

Прим. Формула для імпульса може бути отримана з класичного рівняння зв'язку енергії та імпульсу $E=p^2/2m$ і релятивістського рівняння імпульсу (*).

Таким чином, частинка, наприклад, фотон, що має нульову масу спокою, рухається зі швидкістю світла. Його енергія і імпульс визначаються формулами:

$$E = h\nu ; \quad p = h\nu/c .$$

Фотони створюють тиск (експеримент Лебедева П.Н. у 1900 р.), а в гравітаційному полі поведуть себе як частинка з гравітаційною масою $m = h\nu/c^2$. Отже, при русі від Землі, фотон має витрачати частину своєї енергії на роботу $A = mgH$ (H - висота підйому, g вважаємо незмінним) проти сил тяжіння, $mgH = h\nu gH/c^2 = \Delta(h\nu) = \Delta E$, через це його початкова енергія зменшуватиметься при такому русі, що призводить до зміни його частоти $\Delta\nu = \nu gH/c^2$ і її відносної зміни $\Delta\nu/\nu = gH/c^2$ (так зване, явище гравітаційного червоного зміщення, що спостерігалось експериментально).