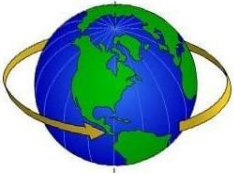


Лекція 7. Тема: Дія гравітаційних сил.



- П** **I. 1. Приклади оцінки дії гравітаційних сил.**
Л
А **II. 2. Закони небесної механіки.**
Н

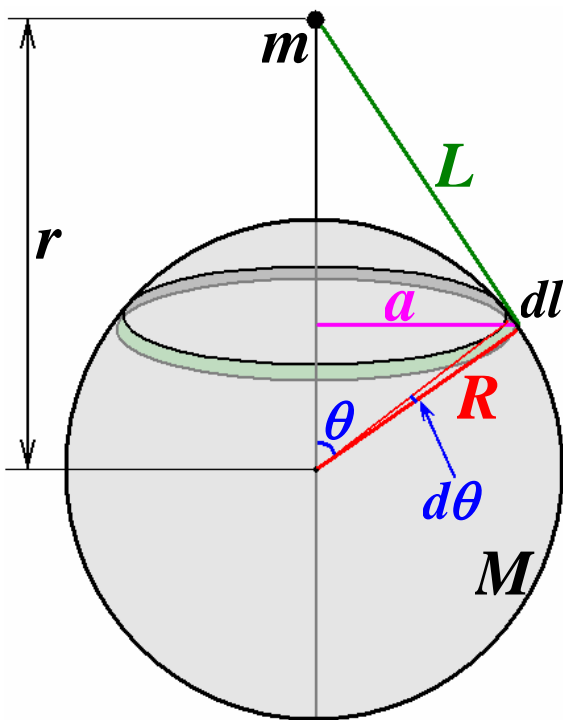
Закон всесвітнього тяжіння.

Сила \vec{F} гравітаційного притягіння між двома точковими масами m_1 і m_2 , які знаходяться на відстані r одна від одної, дорівнює:

$$\vec{F} = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^3} \cdot \vec{r}, \quad \text{де } \gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2 - \text{гравітаційна стала.}$$

Тіла сферичної форми із сферично симетричним розподілом маси в їх об'ємі взаємодіють так само, як і при зосередженні їх мас у точках в центрах куль. Довести це положення можна розглядом сили взаємодії точкової маси з кулею, але через векторний характер силового поля, такий розгляд виявляється дещо громіздким, тому простіше його виконати із застосуванням скалярної характеристики гравітаційного поля – енергії.

Приклад 1. Отже, для визначення характеру гравітаційної взаємодії між однорідною кулею масою M та точковим тілом масою m , що знаходиться на відстані r від центра кулі і встановлення функціональної залежності між характеристикою гравітаційного поля і відстанню між тілами в ньому, скористаємося законом всесвітнього тяжіння для точкових мас і запишемо суму енергій взаємодій усіх точок кулі із точковою масою.



Енергія поля, створеного точковою масою -

$$E_0 = -\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r} \quad \text{і далі розглядатимемо взаємодію}$$

точкової маси m спочатку зі сферою (тобто тонкою оболонкою, порожньою всередині, вся маса якої M зосереджена в оболонці), зокрема, спочатку із тими точками сфери, які знаходяться на однаковій відстані від m . Такими точками є точки будь-якого пояса (тобто кола будь-якого радіуса a) нескінченно тонкої ширини – dl , що охоплює кулю симетрично відносно точки «полюса» – найближчої точки кулі до точкової маси m . Виберемо пояс деякого довільного радіуса a ; радіус кулі R буде направлений у будь-яку точку поверхні пояса. Елементарною площею dS цього нескінченно

Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження, Лекція 7)

тонкого пояска буде добуток його довжини $2\pi a$ на ширину dl , тобто:

$$dS = 2\pi R^2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta ,$$

причому тут враховано, що $a = R \cdot \sin \theta$, а довжина дуги $dl = R \cdot d\theta$, де θ - кут між радіусом, направленим в точки розташування дуги dl і полярною віссю сфери. Масою цього пояска буде частина загальної маси, пропорційна площі, тобто:

$$dM = M \cdot \frac{dS}{S} = M \cdot \frac{2\pi R^2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta}{4\pi R^2} = \frac{M \cdot \sin \theta \cdot d\theta}{2} ,$$

а гравітаційна енергія взаємодії цих двох мас dM і m :

$$dU = -\gamma \cdot \frac{dM \cdot m}{L} = -\frac{\gamma \cdot M \cdot m \cdot \sin \theta \cdot d\theta}{2 \cdot L} ,$$

де L – відстань від точкової маси m до будь-якої з точок пояска.

Тепер для визначення повної енергії взаємодії двох мас треба взяти суму всіх енергій взаємодій точкової маси m з усіма поясками, що охоплюють сферу. Але, оскільки останній вираз для елементарної енергії (тобто нескінченно малої частини загальної енергії взаємодії) вміщує в правій частині рівняння дві змінні - θ і L , то однієї з них треба позбутись, щоб проінтегрувати праву частину рівняння.

Враховуючи, що за теоремою косинусів:

$$L^2 = r^2 + R^2 - 2 \cdot r \cdot R \cdot \cos \theta ,$$

то після диференціювання цього виразу отримаємо:

$$2 \cdot L \cdot dL = 2 \cdot r \cdot R \cdot \sin \theta \cdot d\theta ,$$

і підставляючи вираз для $\sin \theta \cdot d\theta = \frac{L \cdot dL}{r \cdot R}$ в вираз для елементарної енергії :

$$dU = -\frac{\gamma \cdot M \cdot m \cdot dL}{2 \cdot r \cdot R} , \text{ який інтегрується:}$$

$$U = -\frac{\gamma \cdot M \cdot m}{2 \cdot r \cdot R} \cdot \int_{r-R}^{r+R} dL = -\frac{\gamma \cdot M \cdot m}{2 \cdot r \cdot R} \cdot 2 \cdot R = -\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r} .$$

Отже, енергія U взаємодії точкової маси m зі сферою M точно співпадає з енергією взаємодії точкових мас M і m .

У випадку розташування точкової маси m всередині порожньої сфери весь розгляд повториться, як і у випадку розглянутого зовнішнього розташування з однією лише

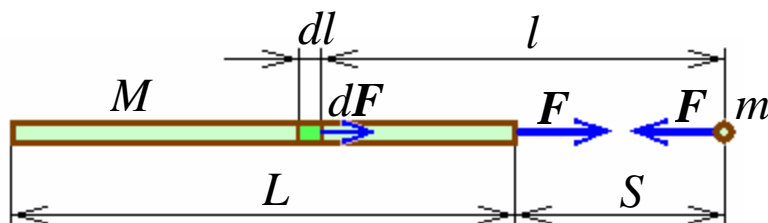
різницею у межах інтегрування по довжині L : $\int_{R-r}^{R+r} dL = 2r$.

Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження, Лекція 7)

У цьому випадку енергія взаємодії мас $U_0 = -\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{R}$ буде сталою величиною, що не залежить від відстані r між центрами цих мас.

Якщо ж ще розглянути набір вкладених одна в одну концентричних сфер, кожна з яких має елементарну масу dM , то результуюча енергія взаємодії точкової маси m з суцільною кулею масою M також буде мати такий самий вигляд, як і енергія взаємодії точкових мас, оскільки
$$-\int_0^M \gamma \cdot \frac{dM \cdot m}{R} = \int_0^U dU = U.$$

Приклад 2. Визначення сили гравітаційної взаємодії між тонким однорідним стержнем масою M та довжиною L і точковим тілом масою m , що розташоване на осі стержня на відстані S від його ближнього кінця.



Визначимо спочатку за Законом всесвітнього тяжіння елементарну силу взаємодії точкової маси m із нескінченно малим (нескінченно коротким) елементом стержня масою dM :

$$dF = \gamma \cdot \frac{m \cdot dM}{l^2}, \quad (1)$$

де елементарна маса dM виділеного елемента стержня довжиною dl : $dM = M \cdot \frac{dl}{L}$. (2)

Інтегруючи вираз для елементарної сили $dF = \gamma \cdot \frac{m \cdot M \cdot dl}{L \cdot l^2}$, отриманий з (1) після підстановки в нього елементарної маси dM , вираженої через повну масу стержня M (2), отримаємо повну силу взаємодії:

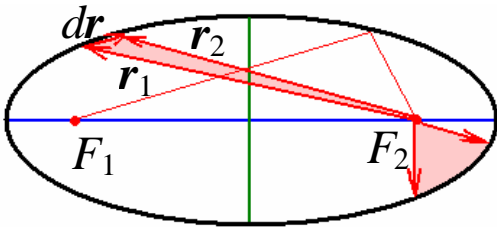
$$\begin{aligned} F &= \int_0^F dF = \int_S^{S+L} \gamma \cdot \frac{m \cdot M \cdot dl}{L \cdot l^2} = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{L} \cdot \int_S^{S+L} \frac{dl}{l^2} = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{L} \cdot \frac{1}{l} \Big|_S^{S+L} = \\ &= \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{L \cdot S} - \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{L \cdot (S+L)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Приводячи результат із рівняння (3) до спільного знаменника, остаточно отримаємо вираз для сили гравітаційної взаємодії між стержнем і точковою масою:
$$F = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{S \cdot (S+L)}.$$

Обертальний рух небесних тіл. Закони Кеплера.

Як ще один приклад гравітаційної взаємодії, можна навести обертання деяких небесних тіл по витягнутій еліптичній траєкторії навколо більш масивного гравітаційного об'єкта. В такому випадку швидкість тіла збільшується на ділянці траєкторії, наближеної до одного з фокусів еліпса, в якому розташована центральна планета і навпаки, зменшується при віддаленні від планети, навколо якої обертається. Тут діє тільки сила гравітаційна і закон збереження моменту імпульсу є тим законом, який описує рух в даній ситуації: момент гравітаційних сил, що виникає через некругову форму орбіти, залежить від витягнутості еліптичної орбіти (ексцентриситету) і від віддаленості планет, і обумовлює різну швидкість на різних ділянках траєкторії. Ця ситуація в свій час була відмічена Кеплером і носить назву другого закону Кеплера з трьох основних законів небесної механіки, які описують рух тих небесних тіл, які ще спостерігались Кеплером власноруч (тобто спочатку навіть не телескопом, а оком!).

1-й закон Кеплера: всі планети рухаються по орбітах, формою яких є еліпс, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце.



Еліпс математично описується рівнянням $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

, де a та b – велика і мала напівосі, а його форма

характеризується ексцентриситетом $\varepsilon = \frac{c}{a}$, де c –

відстань від центра до одного з фокусів еліпса.

Для доведення 1-го закону Кеплера звичайно виконують розрахунок орбіти в полярних координатах, розкладаючи приріст переміщення $d\vec{r}$ планети по складових, з

якого можна отримати рівняння траєкторії планети: $r = \frac{\rho}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)}$ – конічний

переріз, який при $\varepsilon < 1$ є еліпсом.

2-й закон Кеплера: відрізок, що з'єднує Сонце з планетою описує за рівні проміжки часу рівні площі. Цей закон є наслідком закону збереження моменту імпульсу.

$$\vec{L} = [\vec{r} \times m\vec{v}] = \text{const}, \text{ або } \left[m\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \text{const}, \text{ звідки витікає, що елементарне}$$

переміщення $d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$ і радіус-вектор \vec{r} лежать в одній площині, перпендикулярній вектору \vec{L} . А отже, рух відбувається в одній площині, тобто є плоским.

Якщо переписати рівність для $\vec{L}' = 0$ (або $\vec{L} = \text{const}$) т.ч.: $[\vec{r} \times d\vec{r}] = \frac{\vec{L}}{m} \cdot dt$, то векторний добуток \vec{r} і $d\vec{r}$ за модулем дорівнюватиме подвійній площі трикутника,

Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження, Лекція 7)

побудованого на цих векторах. Тоді вектор елементарної площадки

$d\vec{S} = \frac{[\vec{r} \times d\vec{r}]}{2} = \frac{\vec{L}}{2m} \cdot dt$, і оскільки \vec{L} - стала, то інтегруючи обидві частини останнього рівняння по часу, отримаємо:

$$\Delta\vec{S} = \vec{S} - \vec{S}_0 = \frac{\vec{L}}{2m} \cdot (t - t_0) = \frac{\vec{L}}{2m} \cdot \Delta t ,$$

тобто 2-й закон Кеплера, що за рівні проміжки часу Δt радіус-вектор планети описує рівні площі ΔS .

3-й закон Кеплера: квадрати часу обертання планет навколо Сонця відносяться як кубу великих напівосей еліпсів їх орбіт.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma \cdot M} .$$

Якщо вважати орбіту планет приблизно круговою (що і є у більшості планет сонячної системи, крім Плутона) то доведення цього закону витікає із закону всесвітнього тяжіння, відповідно до якого, гравітаційна сила притягіння врівноважується відцентровою силою

розбіжності: $\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} = \frac{m \cdot V^2}{R}$, звідки $V^2 = \gamma \cdot \frac{M}{R}$ і після підстановки V^2 в формулу

для періоду $T = \frac{2\pi R}{V}$, і отримується згадане вище співвідношення між T^2 і $R^3 = a^3$

для 3-го закону Кеплера: $T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{\gamma M}$, або воно ж записане на початку цього розділу.

Такий же вираз (лише замість R^3 буде a^3) можна отримати і для еліпса, якщо скористатись формулою з 2-го закону Кеплера: $S = \frac{L}{2m} \cdot T$, тут T буде періодом обертання, а $S = \pi \cdot a \cdot b$ – площею еліпса.

Робота зовнішніх сил при обертальному русі.

Робота зовнішніх сил, що діють на тіло, дорівнює приросту його кінетичної енергії, отже $\delta A = dE_K$, або відповідно

$$\delta A = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I \cdot \omega \cdot d\omega = \omega \cdot N \cdot dt = N \cdot d\varphi ,$$

де N - повний момент зовнішніх сил, що діють на тіло і його скалярний добуток на кут $d\varphi$.

Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження, Лекція 7)

Повна робота зовнішніх сил при повороті твердого тіла на деякий кут φ визначатиметься:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \vec{N} \cdot d\vec{\varphi}.$$

Якщо тіло рухається поступально (в деякій інерціальній системі відліку) і одночасно обертається (навколо осі, що проходить через його центр мас), то його повна кінетична енергія K_{Σ} дорівнює сумі кінетичних енергій поступального і обертального рухів:

$$K_{\Sigma} = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

Питання для самостійного обмірковування.

Якщо тіло на деякій відстані $R-r$ від спостерігача рухається паралельно цьому земному спостерігачу (r – радіус Землі) зі швидкістю V_r , рівною лінійній швидкості обертання точок Землі зі спостерігачем ($V_r = \omega r$), то воно має здаватись нерухомим відносно системи зірок.

Якщо ж поруч із цим тілом рухається ще одне тіло зі швидкістю V_R ($V_R = \omega R$), більшою у кількість разів, що дорівнює відношенню відстаней R і r від центра Землі цього тіла і спостерігача: $V_R / V_r = R/r$, (тобто $V_R > V_r$), то воно на протязі короткого моменту часу також має бути нерухомим для спостерігача, оскільки обертається синхронно разом із Землею, а отже є видимим в одному напрямі, тобто нерухомим. Т.ч., два тіла, рухаючись поруч із суттєво різними швидкостями, мають виглядати однаково нерухомими для земного спостерігача.

Спробуйте пояснити цей парадокс.