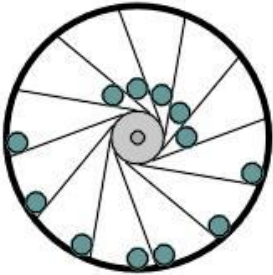


Лекція 6

Тема: Динаміка твердих тіл, момент інерції.



П
Л
А
Н

1. Характеристики обертального руху твердого тіла (повтор матеріалу попередньої лекції).
2. Закон збереження моменту імпульсу.
3. Моменти інерції тіл обертання.
4. Теорема Штейнера.

1. Характеристики обертального руху твердого тіла.

Момент імпульса. Якщо положення деякої матеріальної точки характеризується радіус-вектором \vec{r} відносно деякої точки відліку О, то моментом імпульсу цієї матеріальної точки відносно т.О наз. аксіальний вектор

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] ,$$

де $\vec{p} = m\vec{V}$ - імпульс поступального руху точки.

Моментом сили, що діє на матеріальну точку відносно т.О, наз. аксіальний вектор, перпендикулярний до векторів \vec{r} і \vec{F} :

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] ,$$

де \vec{F} - рівнодіюча всіх сил, що діють на точку.

2. Закон збереження моменту імпульсу

Якщо момент імпульсу продиференціювати по часу, то можна отримати так зване рівняння моментів, або аналог 2-го закону Ньютона для обертального руху:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \right] + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right],$$

і оскільки в першому доданку присутній векторний добуток швидкості $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ на імпульс $\vec{p} = m\vec{V}$, тобто також вектора швидкості, паралельного першому вектору швидкості, то векторний добуток двох паралельних векторів дорівнює 0, а похідною від імпульсу \vec{p} є сила $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt}$, і тоді рівняння моментів прийме остаточний вигляд:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r} \times \vec{F}] \quad \text{або} \quad \boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}.$$

Записане рівняння моментів називають основним рівнянням динаміки обертального руху. Воно фактично є наслідком другого закону Ньютона, оскільки отримується формальним множенням

обох частин рівняння $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ на радіус обертання \vec{r} , в результаті чого і отримується в лівій частині з похідної від імпульсу похідна від моменту імпульсу, а в правій від сили – момент сил. Для ізольованих систем, тобто таких, в яких зовнішні сили не діють, а отже, момент цих сил $\vec{M} = 0$, справедливий **закон збереження моменту імпульсу**:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \text{ або після інтегрування } \vec{L} = \text{const}},$$

тобто момент імпульсу ізольованої системи не змінюється, якщо відсутні зовнішні моменти сил, що діють на систему, або, іншими словами, момент імпульсу ізольованої системи не змінюється під дією будь-яких процесів, що відбуваються всередині системи. Цей

закон справджується і в проекціях на 3 осі декартових координат. Якщо система відліку неінерціальна, то момент сили включає в себе як момент сил взаємодії, так і момент сил інерції.

Векторний добуток $[\vec{r} \times \vec{p}]$ можна представити визначником 3-го порядку:

$$[\vec{r} \times \vec{p}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = (r_y \cdot p_z - p_y \cdot r_z) \cdot \vec{i} - \\ - (r_x \cdot p_z - p_x \cdot r_z) \cdot \vec{j} + (r_x \cdot p_y - p_x \cdot r_y) \cdot \vec{k} .$$

3. Моменти інерції тіл обертання

Моментом інерції I матеріальної точки відносно деякої осі OO' називається добуток маси тіла (точкового) на квадрат радіуса його кола обертання, тобто відстані точки від осі обертання:

$$I = m \cdot r^2$$

Момент інерції є характеристикою інертності тіла при обертальному русі, подібно до того, як маса є характеристикою інертності при поступальному русі. Втім, на відміну від маси, при інерції обертального руху більшу роль відіграє відстань до осі обертання через квадратичний закон залежності від неї моменту інерції.

Момент інерції тіла довільної форми визначається як сума добутків мас нескінченної кількості матеріальних точок, що складають це тіло, на квадрат радіуса – відстані кожної з точок до осі обертання твердого тіла:

$$I = \int_V \rho \cdot r^2 \cdot dV .$$

Взаємозв'язок між моментом кількості руху (або моментом імпульсу) і моментом інерції легко встановити, якщо записати їх у скалярному вигляді: $L = m \cdot V \cdot r = (m \cdot r^2) \cdot \left(\frac{V}{r} \right) = I \cdot \omega$.

Т. ч., підставляючи в основний закон динаміки обертального руху (або рівняння моментів) замість момента імпульсу $L = I \cdot \omega$, пропорційний йому момент інерції I , можна записати цей закон для тіла з незмінним моментом інерції у такому вигляді:

$$I \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M} \quad \text{або} \quad I \cdot \vec{\beta} = \vec{M},$$

де $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ - кутове прискорення (аксіальний вектор).

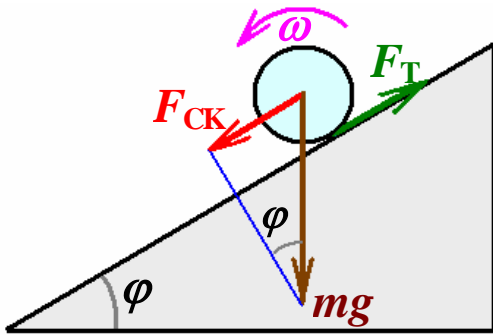
Цей закон динаміки обертального руху є повним аналогом 2-го закону динаміки (Ньютона) для поступального руху: $m \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}$ і може бути отриманий з нього множенням обох частин останнього рівняння на радіус обертання r . В такому вигляді закон найбільш часто використовується для опису обертального руху тіл із незмінним моментом інерції.

Ще одним аналогом формул поступального руху є кінетична енергія обертального руху E_o , цілком подібна за формою звичайній кінетичній енергії $E_k = \frac{m \cdot V^2}{2}$: $E_o = \frac{I \cdot \omega^2}{2}$. Легко переконатись в тому, що ці формули переходять одна в іншу, якщо, наприклад, першу з них домножити і розділити на r^2 , а добуток $m \cdot r^2$ записати як момент інерції I , а відношення $\frac{\omega^2}{r^2}$ як V^2 .

4. Приклад застосування рівняння динаміки обертального руху.

При розгляді поступального руху тіл, що обертаються, в рівняннях динаміки необхідно враховувати також і обертальний рух. Наприклад, по похилій площині, що має кут нахилу до горизонту φ , скочується без проковзування суцільний однорідний циліндр. Для знаходження лінійного прискорення його центра мас необхідно записати спочатку рівняння поступального руху (1) центра мас циліндра (при скочуванні вздовж похилої площини):

$$mg \cdot \sin \varphi - F_T = ma, \quad (1)$$



а потім рівняння обертального руху (далі, 2).

В рівнянні (1) F_T - сила тертя, яка протидіє проєкції сили тяжіння на напрямок похилої площини, тобто силі, яка скочує.

Хоч сила тертя і прикладена не до центра мас, а до точки торкання циліндра із поверхнею, вона все одно в рівнянні закону динаміки записується протилежною напрямку силі скочування!

Крім протидії скочуванню, сила тертя також є причиною закручування тіла (інакше без тертя циліндр просто зісковзував би з похилої площини, не обертаючись), тому для повного опису руху такого тіла, додатково має бути записано рівняння моментів (основне рівняння динаміки обертального руху):

$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} = F_T \cdot r, \quad (2)$$

де позначено: $I = mr^2/2$ – момент інерції циліндра (такий самий, як і у тонкого диска), m та r – відповідно маса та радіус циліндра.

Підставляючи замість кутової швидкості її значення $\omega = V/r$ і враховуючи, що $\frac{dV}{dt} = a$, перепишемо рівняння (2) як:

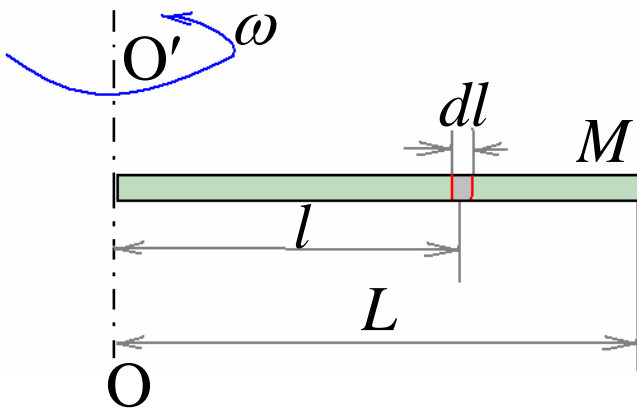
$$\frac{mr^2}{2} \cdot \frac{dV}{r \cdot dt} = F_T \cdot r, \text{ після чого отримане рівняння для сили тертя:}$$

$$F_T = m \cdot a / 2 \text{ підставляємо в рівняння (1): } mg \cdot \sin \varphi - \frac{m}{2} \cdot a = ma,$$

з якого і отримаємо прискорення a центра мас циліндра при скочуванні по похилій площині: $a = \frac{2}{3} \cdot g \cdot \sin \varphi$.

5. Визначення моментів інерції тіл найбільш типової форми.

1. Момент інерції тонкого стержня. Стержень масою M та довжиною L , що обертається в горизонтальній площині навколо вертикальної осі, торкаючись її одним кінцем.



Виберемо на цьому тонкому стержні «точку», тобто частину його об'єму нескінченно малої довжини dl . Всі точки цього об'єму вважатимемо такими, що знаходяться на однаковій відстані l від осі обертання. Тоді

елементарний момент інерції dI цього малого «об'ємчика» $dV = S \cdot dl$ дорівнюватиме: $dI = dM \cdot l^2$, а оскільки маса цього «об'ємчика» буде пропорційною його довжині dl , тобто

$$dM = M \cdot \frac{dl}{L}, \text{ то } dI = M \cdot \frac{l^2 \cdot dl}{L} \text{ і цей вираз вже можна}$$

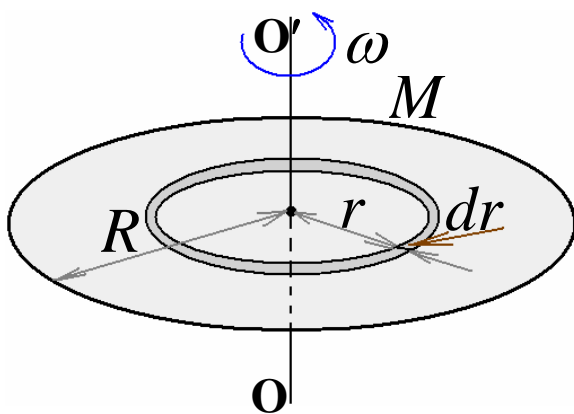
проінтегрувати, скористатись адитивністю моменту інерції і взяти суму всіх елементарних моментів інерції стержня:

$$I_c = \frac{M}{L} \cdot \int_0^L l^2 \cdot dl = \frac{M}{L} \cdot \frac{l^3}{3} \Big|_0^L = \frac{M \cdot L^2}{3}.$$

Подібним же чином можна визначити момент інерції цього ж стержня, якщо вісь обертання закріпити на його середині. В такому випадку зміняться тільки межі інтегрування – від $-\frac{L}{2}$ до $+\frac{L}{2}$, або

можна взяти подвійний момент інерції при половинній межі – від 0 до $+\frac{L}{2}$:

$$I = \frac{M}{L} \cdot 2 \cdot \int_0^{L/2} l^2 \cdot dl = \frac{M}{L} \cdot 2 \cdot \frac{l^3}{3} \Big|_0^{L/2} = \frac{M \cdot L^2}{12}.$$



2. Момент інерції диска. Для визначення моменту інерції I тонкого диска масою M і радіусом R , що обертається навколо осі симетрії, перпендикулярної до його поверхні, виділимо нескінченно тонке коло радіуса r і визначимо його момент інерції як момент інерції сукупності

точок на одній відстані від осі:

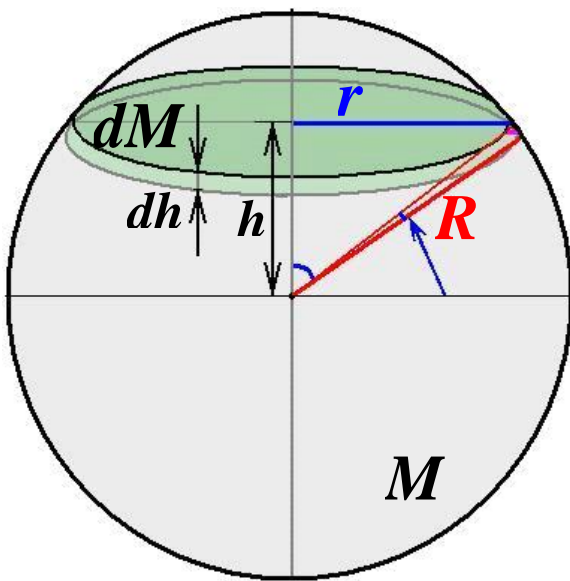
$$dI_D = M \cdot \frac{dS}{S} \cdot r^2 = M \cdot \frac{2\pi r \cdot dr}{\pi R^2} \cdot r^2 = \frac{2Mr^3 \cdot dr}{R^2},$$

після чого проінтегруємо цей вираз і отримаємо момент інерції диска при обертанні навколо його осі симетрії, перпендикулярної до площини диска:

$$I_D = \frac{2M}{R^2} \cdot \int_0^R r^3 \cdot dr = \boxed{\frac{MR^2}{2}}.$$

Якщо уявити суцільний однорідний барабан (циліндр) як набір поставлених один на одного дисків, то можна отримати для циліндра точно таку ж формулу для моменту інерції.

3. Момент інерції кулі. Момент інерції кулі масою M і



радіусом R визначатимемо відносно центральної осі симетрії кулі (співпадає з діаметром), а кулю представимо як набір дисків із діаметрами, що змінюються від 0 (на полюсах) до $2R$ - діаметра кулі.

Отже, виберемо довільний нескінченно тонкий диск радіусом r на деякій відстані h від центра кулі і запишемо його елементарний

момент інерції, який для диска нам відомий з попереднього розгляду:

$$dI = \frac{dM \cdot r^2}{2} = M \cdot \frac{3\pi r^4 \cdot dh}{8\pi R^3} = M \cdot \frac{3\pi (R^2 - h^2)^2 \cdot dh}{8\pi R^3},$$

і цей вже вираз може бути проінтегрований, оскільки в правій частині залишилась одна змінна h . Для інтегрування необхідно розкрити дужки (піднести до квадрата) і взяти послідовно три інтеграли. Інтегрувати можна як по усьому діаметру кола, так і тільки по одній напівсфері (але в цьому випадку домножити момент інерції на 2).

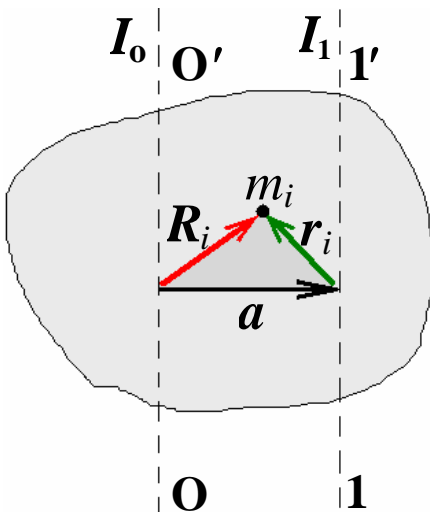
Прим. Інтегрування таких симетричних фігур треба виконувати обережно, щоб не отримати нульове значення

інтегралу, як наприклад, при інтегруванні функції \sin за період, коли додатний напівперіод компенсується від'ємним.

В результаті такої нескладної математичної операції можна отримати момент інерції суцільної однорідної кулі відносно осі, що

співпадає з діаметром: $I_K = \frac{2}{5}MR^2$.

6. Теорема Штейнера.



Формулювання теореми: Момент інерції тіла відносно деякої осі I_1 дорівнює моменту інерції I_0 цього тіла відносно паралельної осі, що проходить крізь його центр мас плюс добуток маси тіла на квадрат відстані a між цими паралельними осями:

$$I_1 = I_0 + M \cdot a^2$$

Довести цю теорему можна, зобразивши осі і вектори між точками тіла.

$$R_i \perp OO' ; R_i \perp 11' ; r_i \perp OO' ; r_i \perp 11' .$$

$$I_0 = \sum m_i \cdot R_i^2, \quad I = \sum m_i \cdot r_i^2, \quad \vec{r}_i = \vec{R}_i - \vec{a}.$$

$$\text{Отже } r_i^2 = a^2 + R_i^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{R}_i \text{ і тому:}$$

$$I = \sum m_i \cdot r_i^2 = \sum m_i \cdot R_i^2 + \sum m_i \cdot a^2 - 2\vec{a} \cdot \sum m_i R_i.$$

Останній доданок дорівнює 0 як означення осі, що проходить крізь центр мас, $\sum m_i = m$ - маса тіла.

$$I = \sum m_i \cdot r_i^2 = \sum m_i \cdot R_i^2 + a^2 \cdot \sum m_i = I_0 + M \cdot a^2$$

За допомогою цієї теореми можна визначати моменти інерції різних тіл відносно довільних осей. Наприклад, момент інерції I_1 тонкого стержня відносно перпендикулярної до нього осі, що торкається краю, можна визначити через відомий момент інерції

відносно центра мас
$$I_o = \frac{M \cdot L^2}{12}.$$

Тоді
$$I_1 = I_o + M \cdot a^2 = \frac{M \cdot L^2}{12} + M \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{M \cdot L^2}{3},$$

тобто, врахувавши що відстань між осями a в цьому випадку

$a = \frac{L}{2}$, отримали той самий результат, що і раніше методом інтегрування.

Але є багато задач, в яких досить складно визначити момент інерції відносно довільної осі, наприклад, якщо тонкий диск обертати не навколо центра, а навколо осі, що торкається його краю і перпендикулярна до площини диска. В такому випадку, за теоремою Штейнера (яку ще часто називають теоремою Гюйгенса-Штейнера) можна визначити такий момент інерції дуже просто:

$$I_{1D} = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3MR^2}{2},$$

оскільки відстань між осями a в цьому випадку $a=R$.

Особливістю плоских тіл є те, що сума їх моментів інерції відносно осей, що лежать в площині перпендикулярно одна одній і проходять через центр мас, дорівнює моменту інерції цього тіла відносно перпендикулярної до площини осі, що також проходить через точку центра мас: $I_x + I_y = I_z$. Переконатись в цьому можна, якщо в декартовій координатній системі взяти довільну точку на площині uX і записати її моменти інерції відносно кожної з осей координат: $I_x = m \cdot y^2$; $I_y = m \cdot x^2$; $I_z = m \cdot (x^2 + y^2)$, оскільки

Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження, Лекція 4)

плече (радіус) обертання точки навколо осі визначається через координати y та x . Після підстановки значень цих моментів інерції, наведене вище твердження стає очевидним.

Завдяки цьому можна визначити, наприклад, момент інерції диска відносно осі, що лежить в його площині, співпадаючи з діаметром. Таких осей буде дві (перпендикулярні), отже

$$I_x + I_y = I_z = \frac{MR^2}{2}, \text{ звідки } I_x = I_y = \frac{MR^2}{4}.$$