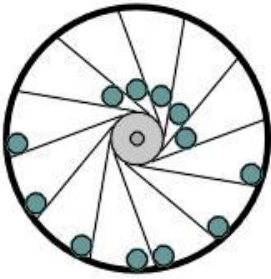


Лекція 5 Тема: Динаміка твердих тіл



П
Л
А
Н

- I. 1. Поля, характеристики силових полів
(закінчення попередньої лекції 3).
2. Теорема Гауса.
- II. 3. Характеристики обертального руху
твердого тіла.
4. Закон збереження моменту імпульсу.
5. Моменти інерції тіл обертання.

1. Характеристики силових полів

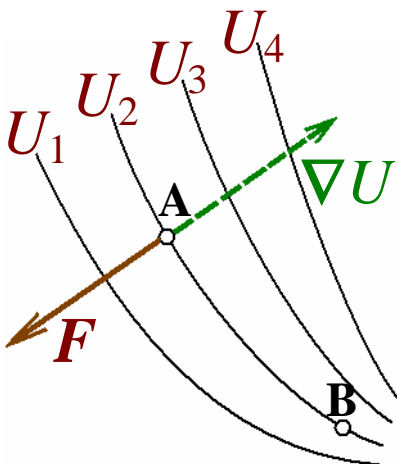
Зміст градієнта, визначеного як $\text{grad } U$, або за допомогою символічного векторного оператора «набла» (оператора Гамільтона)

$$\vec{\nabla} = \left(\vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right) \text{ як } \vec{\nabla} U :$$

$$\text{grad } U = \vec{\nabla} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \vec{k} \right),$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \vec{k} \right)$$

є більш наочним і ясным при введенні поняття еквіпотенціальної поверхні - поверхні, у всіх точках якої потенційна енергія U має одне і те ж значення. Отже, кожному значенню U_i відповідатиме своя еквіпотенціальна поверхня.



З формули для одновимірного випадку

$$F_s = -\frac{\partial U}{\partial s} \text{ впливає, що проекція вектора}$$

\vec{F} на будь-який напрямок, дотичний до еквіпотенціальної поверхні

в даній точці, дорівнює нулю. Це означає, що вектор \mathbf{F} нормальний (перпендикулярний) еквіпотенціальній поверхні в даній точці. Далі, візьмемо переміщення $d\mathbf{s}$ по нормалі до еквіпотенціальної поверхні в бік зменшення U , тоді $\partial U < 0$ і, відповідно, $F_s > 0$, тобто вектор \mathbf{F} направлений в сторону зменшення U . А оскільки \mathbf{F} протилежний за напрямком вектору $\vec{\nabla} U$, то можна зробити висновок, що градієнт U - це вектор, спрямований по нормалі до еквіпотенціальної поверхні в бік зростання потенціальної енергії U .

Поле сили. Силу (напр., гравітаційну) можна представити як добуток маси m на деякий вектор \mathbf{G} : $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{G}$, що залежить як від положення тіла, так і від оточення. Отже, можна вважати, що є деяке поле, яке може характеризуватись цим вектором \mathbf{G} , і який називається напруженістю поля. Його важливою властивістю є адитивність або принцип суперпозиції: $\mathbf{G} = \sum \mathbf{G}_i$, де \mathbf{G}_i - є поле, створене i -м джерелом.

З формули $m \cdot \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = -dU$ можна отримати співвідношення між напруженістю поля і потенціалом поля $\varphi(r)$, якщо останній позначити через $\varphi = U/m$, тоді $\mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = -d\varphi$ або $\int_1^2 \vec{G} \cdot d\vec{r} = \varphi_1 - \varphi_2$. Остання формула дає можливість знайти потенціал будь-якого гравітаційного або електростатичного поля (звичайно ж, електростатичний потенціал φ_e визначатиметься як відношення енергії до електричного заряду $\varphi_e = U/q$). Потенціал, як і потенціальна енергія, визначається з точністю до сталої, але її через несуттєвість, звичайно, опускають.

Описувати поля скалярним потенціалом буває значно простіше з точки зору математичних складнощів, ніж векторною функцією напруженості.

Таким чином, характеристиками взаємодії (зокрема, на прикладі гравітаційної взаємодії) є 4 основні функції (*записані у спрощеному вигляді відповідно до їх розмірності для кращого запам'ятовування!*):

1) **Сила**: $F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ - векторна функція;

2) **Напруженість поля**: $G = \frac{F}{m} = \gamma \cdot \frac{m}{r^2}$ - векторна функція;

3) **Енергія поля**: $U = F \cdot r = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r}$ - скалярна функція;

4) **Потенціал поля**: $\varphi = \frac{U}{m} = \gamma \cdot \frac{m}{r}$ - скалярна функція.

Кінетична енергія. Якщо частинка маси m рухається під дією деякої сили \mathbf{F} , то елементарна робота, яку вона виконує на шляху $d\mathbf{r}$ буде:

$$\delta A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (m \cdot dV/dt) \cdot \mathbf{V} \cdot dt = m \cdot \mathbf{V} \cdot d\mathbf{V},$$

оскільки $\mathbf{F} = m \cdot d\mathbf{V}/dt$, а $d\mathbf{r} = \mathbf{V} \cdot dt$. Інтегруючи цей вираз для роботи, отримаємо звичайну кінетичну енергію $E_K = mV^2/2$ – тобто енергію, приріст якої обумовлений роботою сили \mathbf{F} .

Повною механічною енергією називають суму кінетичної і потенціальної енергій; приріст повної механічної енергії на деякому шляху дорівнює алгебраїчній сумі всіх робіт сторонніх сил, що діють на тіло на цьому шляху. Звідси витікає **закон збереження механічної енергії**: повна механічна енергія тіла в

стаціонарному полі консервативних сил залишається сталою на протязі такого проміжку часу, поки сторонні сили відсутні або не виконують роботи на протязі цього проміжку часу.

Або: механічна енергія замкнутої системи частинок, в якій немає дисипативних сил (тобто сил тертя і опору), зберігається в процесі руху.

В такій простій формі закон збереження механічної енергії дозволяє в багатьох випадках відносно легко визначати характеристики руху різних систем навіть без залучення рівнянь руху і законів динаміки.

На відміну від кінетичної енергії, власна потенціальна енергія* системи U не є величиною адитивною, тобто вона не дорівнює сумі потенціальних енергій її частин - $\sum U_n$. Необхідно також враховувати ще потенціальну енергію взаємодії $U_{вз}$ окремих частин системи:

$$U = \sum U_n + U_{вз}$$

- **Прим.** Власною потенціальною енергією називають функцію, яка залежить тільки від роботи внутрішніх сил системи, залежить від відносного розташування частинок системи (на відміну від зовнішньої потенційної енергії, яка характеризує взаємодію системи з іншими тілами).

Поняття приведеної маси. Приведена маса μ системи двох частинок визначається як: $\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$.

Це поняття більш широко використовується, наприклад, в електриці, при розгляді руху електричних зарядів в напівпровідниках. Але в механіці це поняття теж зустрічається, наприклад, при розгляді взаємодії двох гравітаційних мас із зовнішніми силами.

2. Теорема Гауса.

Потік вектора $d\vec{N}$ – це добуток вектора \vec{G} на нормальну (перпендикулярну) елементарну площадку dS .

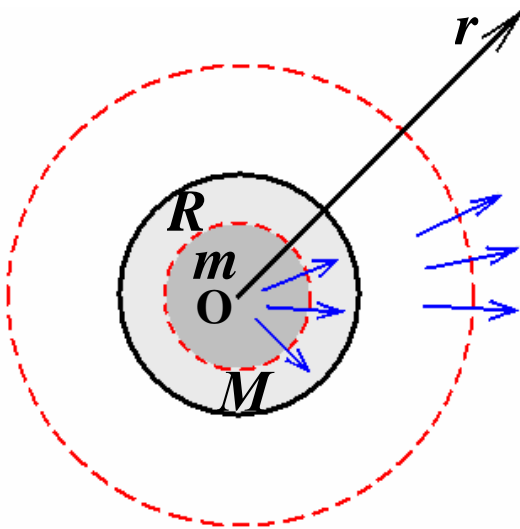
$$d\vec{N} = G_n \cdot dS = G \cdot \cos \alpha \cdot dS = G \cdot dS_n.$$

Повний потік через замкнену поверхню:

$$N = \int_S dN = \int_S G \cdot dS_n = \gamma M \cdot \int_S \frac{dS_n}{R^2} = \gamma M \cdot \int_{\Omega} d\Omega = 4\pi\gamma M.$$

Отже, **формулювання теореми Гауса**: Потік вектора напруженості гравітаційного поля через довільну замкнену поверхню, що охоплює розміщену всередині масу, дорівнює цій масі, домноженій на коефіцієнт з гравітаційної сталої, помноженої на 4π :

$$\int_S G \cdot dS_n = 4\pi\gamma M$$



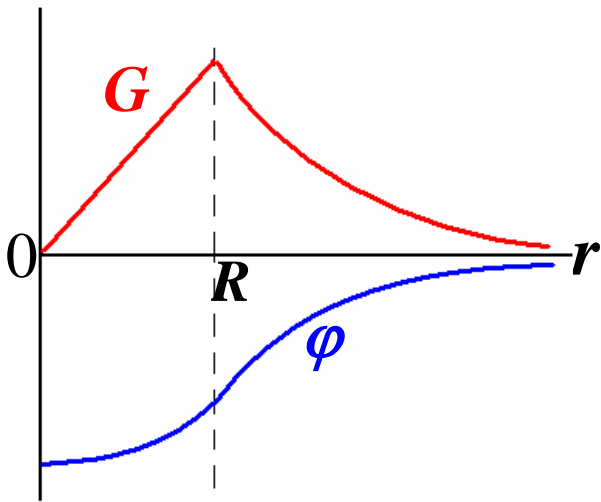
Теорема Гауса дозволяє легко визначати характеристики полів тіл симетричної форми. Наприклад, можна побудувати напруженість або потенціал гравітаційного поля всередині та зовні сферичної оболонки або суцільної кулі.

Зовні сфери або суцільної кулі:

$$N = \int_S G \cdot dS = G \cdot \int_S dS = G \cdot 4\pi r^2 = \gamma \cdot \frac{M}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi\gamma M.$$

Звідси визначимо напруженість гравітаційного поля: $G = \gamma \cdot \frac{M}{r^2}$.

Всередині порожньої сфери $G = 0$, оскільки в просторі, який в цьому випадку охоплюватиме замкнена поверхня, відсутня маса.



Всередині суцільної сфери:

$$\int_S G \cdot dS = G \cdot 4\pi r^2 =$$

$$4\pi\gamma m = 4\pi\gamma M \cdot \frac{r^3}{R^3},$$

звідки $G = \gamma M \cdot \frac{r}{R^3}$, отже буде

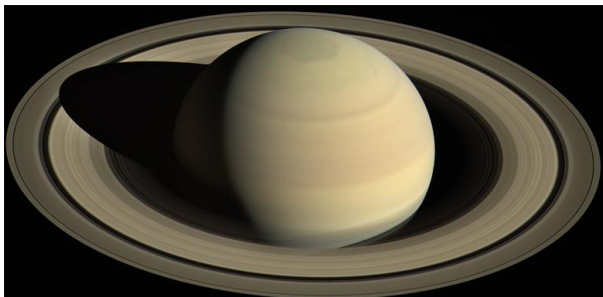
лінійна залежність $G(r)$ при $r < R$ і обернено квадратична при $r > R$.

Для визначення потенціалу поля треба скористатись формулою $G = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}$, з якої потенціал буде інтегралом від напруженості

поля по радіусу: $\varphi = -\int G \cdot dr$, причому на нескінченності потенціал звичайно приймається рівним 0 (оскільки він визначається з точністю до константи).

Тоді на ділянці $r < R$ $\varphi \sim r^2$, а при $r > R$ потенціал $\varphi \sim \frac{1}{r}$.

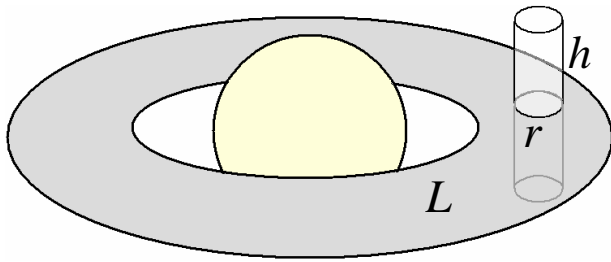
Приклад застосування теореми Гауса.



Визначимо напруженість гравітаційного поля, що створюється кільцями Сатурна, неподалік від їх поверхні, якщо маса одиниці площі кільця - m .

Виділяємо на поверхні кільця циліндр з радіусом основи r і висотою h ($r, h \ll L$), тобто розмірами, значно меншими за ширину кільця L . h - це відстань до

точки визначення напруженості поля, як зображено на рис. Гравітацію самої планети тут не розглядаємо.



Очевидно, що при таких умовах (тобто циліндр далеко від країв кільця) потік вектора напруженості гравітаційного поля, створений масою кільця буде дорівнювати нулю через бічну поверхню циліндра. Це витікає з міркувань симетрії, через що результуюча напруженість над площиною буде направлена перпендикулярно до площини кільця. І тому потік через дві торцеві поверхні (зверху і знизу кільця через такий же торець циліндра) складе:

$$G \cdot 2 \cdot \pi r^2 = 4\pi u m \cdot \pi r^2 \Rightarrow G = 2\pi u m,$$

тобто напруженість поля не залежить від відстані до площини кільця на висотах, значно менших за відстань до країв. Підставляючи чисельні значення маси одиничної площі кільця (1 м^2) $m = 500 \text{ кг/м}^2$, отримаємо $G \approx 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}^2$.

3. Характеристики обертального руху твердого тіла.

Момент імпульса. Якщо положення деякої матеріальної точки характеризується радіус-вектором \vec{r} відносно деякої точки відліку О, то моментом імпульсу цієї матеріальної точки відносно т.О наз. аксіальний вектор

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}],$$

де $\vec{p} = m\vec{V}$ - імпульс поступального руху точки.

Моментом сили, що діє на матеріальну точку відносно т.О, наз. аксіальний вектор, перпендикулярний до векторів \vec{r} і \vec{F} :

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}],$$

де \vec{F} - рівнодіюча всіх сил, що діють на точку.

4. Закон збереження моменту імпульсу

Якщо момент імпульсу продиференціювати по часу, то можна отримати так зване рівняння моментів, або аналог 2-го закону Ньютона для обертального руху:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \right] + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right],$$

і оскільки в першому доданку присутній векторний добуток швидкості $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ на імпульс $\vec{p} = m\vec{V}$, тобто також вектора

швидкості, паралельного першому вектору швидкості, то векторний добуток двох паралельних векторів дорівнює 0, а похідною від

імпульсу \vec{p} є сила $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt}$, і тоді рівняння моментів

прийме остаточний вигляд:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r} \times \vec{F}] \quad \text{або} \quad \boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}.$$

Записане рівняння моментів називають основним рівнянням динаміки обертального руху. Воно фактично є наслідком другого закону Ньютона, оскільки отримується формальним множенням

обох частин рівняння $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ на радіус обертання \vec{r} , в результаті

чого і отримується в лівій частині з похідної від імпульсу похідна від моменту імпульсу, а в правій від сили – момент сил. Для ізольованих систем, тобто таких, в яких зовнішні сили не діють, а отже, момент цих сил $\vec{M} = 0$, справедливий **закон збереження моменту імпульсу**:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \text{ або після інтегрування } \vec{L} = \text{const} ,$$

тобто момент імпульсу ізольованої системи не змінюється, якщо відсутні зовнішні моменти сил, що діють на систему, або, іншими словами, момент імпульсу ізольованої системи не змінюється під дією будь-яких процесів, що відбуваються всередині системи. Цей закон справджується і в проекціях на 3 осі декартових координат. Якщо система відліку неінерціальна, то момент сили включає в себе як момент сил взаємодії, так і момент сил інерції.

Вектор моменту імпульсу L , що дорівнює векторному добутку $[\vec{r} \times \vec{p}]$ можна представити визначником 3-го порядку:

$$[\vec{r} \times \vec{p}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = (r_y \cdot p_z - p_y \cdot r_z) \cdot \vec{i} - \\ - (r_x \cdot p_z - p_x \cdot r_z) \cdot \vec{j} + (r_x \cdot p_y - p_x \cdot r_y) \cdot \vec{k} .$$
