

### Лекція 4. Тема: Закони збереження і їх застосування



П  
Л  
А  
Н

- I. 1. Роль законів збереження в механіці. Закон збереження імпульсу.
2. Рух тіла змінної маси (реактивний рух).
3. Центральний і нецентральний пружні співударі.
- II. 4. Робота, потужність, енергія.
5. Поля, характеристики силових полів.

**Вступ.** Як вже зазначалось у попередніх лекціях, знаючи закони руху тіл і стан системи в деякий початковий момент часу, можна передбачити подальшу поведінку цієї системи, тобто визначити всі характеристики руху (координати, швидкості, прискорення тощо). Але нерідко розгляд поведінки системи за допомогою рівнянь руху виявляється досить складним і цілком розв'язати рівняння може бути практично неможливо. У випадках, коли сили невідомі, то взагалі такий підхід (із записом і розв'язком рівнянь руху) непридатний. Отже, необхідний інший підхід або метод опису характеристик руху і таким доволі ефективним методом є застосування 3-х законів збереження – закону збереження енергії, імпульсу і моменту імпульсу. Ці закони є фундаментальними законами фізики, природи і виконуються завжди, незалежно від умов застосування будь-яких систем, впливаючих на них факторів, часу та ін. Вони мають властивість адитивності (тобто їх значення для системи, що складається з частин, дорівнює сумі значень для кожної з окремих частин) і завдяки цьому можуть мати універсальне застосування для будь-яких систем у будь-яких умовах, навіть тоді, коли невідомі діючі сили, або невідомі точно траєкторії (чи інші параметри руху).

#### 1. Закон збереження імпульсу

**Імпульс** (або кількість руху) частинки за означенням:  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ , де  $m$  - маса частинки і  $\vec{v}$  - її швидкість.

Основне рівняння динаміки (2-й закон Ньютона), записане як похідна від імпульсу по часу –

## Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження)

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

є найбільш загальною формою запису цього закону; в такому вигляді закон справедливий і в релятивістській області швидкостей. Якщо цей закон застосовується в неінерційній системі відліку, то сила включає в себе не тільки сили взаємодії частинки, що розглядається, із іншими тілами, але і сили інерції, що виникають як наслідок неінерційності системи. Величину приросту імпульсу за деякий визначений час можна знайти, проінтегрувавши основне рівняння динаміки. Останнє, як відомо, зручно зробити після рознесення змінних, тобто:  $\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_0^t \vec{F} \cdot dt$ , таким чином приріст імпульсу дорівнюватиме т.зв. імпульсу сили.

У випадку застосування цього закону до системи частинок (тіл), маємо на увазі, що відповідно до 3-го закону Ньютона, сили, з якими частинки діють одна на одну рівні і протинаправлені, отже всі внутрішні сили будуть векторно скомпенсовані. А силою, яка фігурує в законі, буде сила зовнішня (або векторна сума всіх зовнішніх сил):  $\vec{F}_{\text{зовн}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ . Імпульсом такої системи частинок буде добуток сумарної маси  $M$  системи частинок на швидкість  $\vec{V}_C$  її центра мас:  $\vec{p} = M \cdot \vec{V}_C$ .

Якщо ж система частинок є **замкненою**, то зовнішні сили на неї не діють. Звідси витікає закон збереження імпульсу: імпульс замкненої системи частинок залишається сталим, тобто не змінюється із часом. Імпульс замкненої системи частинок може зберігатись вздовж одного вибраного координатного напрямку, якщо проекція результуючої зовнішньої сили на цей напрямок дорівнює 0. Наприклад, тіло, що рухається в однорідному вертикальному полі сили тяжіння, зберігає свою проекцію імпульсу на горизонтальні напрями, через що його траєкторія руху приймає форму параболи.

---

## 2. Рух тіла змінної маси (реактивний рух).

В багатьох випадках маса тіла змінюється в процесі руху за рахунок безперервного відділення або приєднання речовини (ракета, реактивний літак, платформа навантажується на ходу та ін.).

## Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження)

Розглянемо це питання для матеріальної точки, називаючи її для стислості тілом. Нехай в деякий момент часу  $t$  маса тіла  $A$ , що рухається дорівнює  $m$ , а речовина, що приєднується (або відокремлюється) має швидкість  $\vec{u}$  щодо даного тіла. Введемо допоміжну інерційну  $K$  - систему відліку, швидкість якої така ж, як і швидкість тіла  $A$  в даний момент  $t$ . Це означає, що в момент  $t$  тіло  $A$  покоїться в  $K$ - системі.

Нехай далі за проміжок часу від  $t$  до  $t+dt$  тіло  $A$  набуває в  $K$  - системі імпульсу  $m \cdot d\vec{v}$ . Цей імпульс тіло  $A$  отримає, по-перше, внаслідок приєднання (відділення) маси  $dm$ , яка приносить (забирає) імпульс  $dm \cdot \vec{u}$  і, по-друге, внаслідок дії сили  $\vec{F}$  з боку оточуючих тіл (наприклад, сила опору повітря) або силового поля. Таким чином, можна записати, що

$$m \cdot d\vec{v} = \vec{F} \cdot dt \pm dm \cdot \vec{u},$$

де знак плюс  $+$  відповідає приєднанню маси, а знак мінус  $-$  відділенню. Обидва ці випадки можна об'єднати, представивши  $\pm dm$  у вигляді збільшення  $dm$  маси тіла  $A$ , маючи на увазі знак  $dm$  залежним від характеру приєднання маси.

Тоді попереднє рівняння набуде вигляду:  $m \cdot d\vec{v} = \vec{F} \cdot dt + dm \cdot \vec{u}$ , і розділивши його на  $dt$ , отримаємо основне рівняння динаміки тіла (точки) змінної маси, або, як воно ще називається, **рівняння реактивного руху**, або **рівняння Мещерського**:

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt} \cdot \vec{u},$$

де  $\vec{u}$  - швидкість речовини, що приєднується або відділяється від тіла, що розглядається.

**Формули Ціолковського.** Якщо сила  $\vec{F}$  на тіло не діє (що як правило, наближено справджується в космосі при віддаленні від планет), то рівняння реактивного руху, після домноження правої і лівої його частин на  $dt$  набуває вигляду:

$m \cdot d\vec{v} = dm \cdot \vec{u}$ . Після розділення змінних рівняння може бути проінтегровано:  $\int_{m_0}^{m_k} \frac{dm}{m} = \int_{v_0}^{v_k} \frac{d\vec{v}}{\vec{u}}$ , і після інтегрування отримується

співвідношення між масою тіла, що прискорюється (уповільнюється) і швидкістю:  $\ln \frac{m_k}{m_0} = \frac{\vec{v}_k - \vec{v}_0}{\vec{u}}$ , з якого можна виразити кінцеву масу як функцію маси початкової і експоненти в степені відношення швидкостей:

$$m_k = m_0 \cdot e^{\frac{v_k - v_0}{u}}$$

і

$$v_k = v_0 + u \cdot \ln \frac{m_k}{m_0}.$$

## Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження)

Ці формули називаються формулами Ціолковського і дозволяють визначити необхідну масу ракети для досягнення заданої швидкості або визначити швидкість, якої набуде ракета після втрати заданої частини маси і т.д.

Ще одним визначним внеском К.Ціолковського у теорію космічних польотів була розробка принципів застосування багатоступеневих ракет і оцінки їх ефективності порівняно із одноступеневими ракетами. Застосовуючи закон збереження імпульсу, можна показати, що безперервне витікання газу в результаті згорання палива, ефективніше розганяє ракету, ніж викид такої ж кількості газу, але окремими (дискретними) порціями. Це обумовлено викидом частини маси газу при більших швидкостях, набутих ракетою.

---

### За. Центральний пружний співудар куль

Центральним називається удар двох однорідних куль, при якому швидкості куль, що співударяються, до удару співпадають за напрямком із лінією, яка з'єднує центри куль. Не розглядаючи досить складний процес деформації куль при ударі, внаслідок якого відбувається їх пружне зіткнення, розглянемо методику визначення швидкості куль після співудару на основі закону збереження імпульсу (а також і енергії). Отже, згадані закони збереження для співудару куль:

$$\text{імпульсу} - m_1 \cdot \vec{v}_{10} + m_2 \cdot \vec{v}_{20} = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2$$

$$\text{і енергії} - \frac{1}{2} \cdot (m_1 \cdot v_{10}^2 + m_2 \cdot v_{20}^2) = \frac{1}{2} \cdot (m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot v_2^2).$$

де  $m_1$   $m_2$  - маси кульок,  $\vec{v}_{10}$  і  $\vec{v}_{20}$  їх швидкості до зіткнення, а  $\vec{v}_1$  і  $\vec{v}_2$  - після зіткнення.

Ці рівняння можна представити у такому вигляді:

$$m_1 \cdot (\vec{v}_{10} - \vec{v}_1) = m_2 \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_{20}) \quad (*)$$

$$m_1 \cdot (\vec{v}_{10}^2 - \vec{v}_1^2) = m_2 \cdot (\vec{v}_2^2 - \vec{v}_{20}^2)$$

Розділивши останнє рівняння на передостаннє, отримаємо:

$$\vec{v}_{10} + \vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_{20}.$$

## Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження)

Домножаючи це рівняння на  $m_1$  і складаючи його з рівнянням, позначеним (\*), визначимо швидкість другої кулі після удару:

$$\vec{v}_2 = \frac{2m_1 \cdot \vec{v}_{10} - (m_1 - m_2) \cdot \vec{v}_{20}}{m_1 + m_2}.$$

Аналогічно (або просто замінивши індекси 1 на 2 і 2 на 1 в останній формулі) можна отримати вираз для швидкості першої кулі:

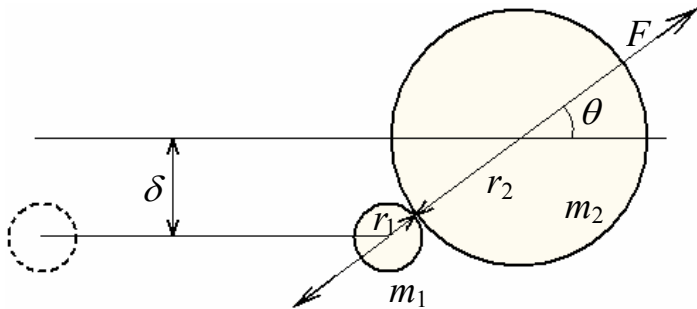
$$\vec{v}_1 = \frac{2m_2 \cdot \vec{v}_{20} - (m_2 - m_1) \cdot \vec{v}_{10}}{m_1 + m_2}.$$

Якщо маси куль однакові і одна з них є нерухомою (напр.  $\vec{v}_{20} = 0$ ), то після зіткнення швидкість першої кулі стане рівною 0, а друга буде рухатись із швидкістю першої, що відповідає законам збереження енергії та імпульсу.

### 36. Нецентральний пружний співудар куль

Виберемо систему координат т.ч., щоб друга частинка (куля масою  $m_2$ ) до зіткнення знаходилась у спокої. Тоді закони збереження енергії та імпульсу запишуться так:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}, \quad \vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'.$$



Тут використано співвідношення між імпульсом та енергією  $E = \frac{p^2}{2m}$ , яке

легко отримується із звичного  $E = \frac{mv^2}{2}$  множенням чисельника і знаменника на  $m$ .

Підставляючи тепер в перше рівняння значення імпульсу

$$\vec{p}_1' = \vec{p}_1 - \vec{p}_2' (**),$$

## Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження)

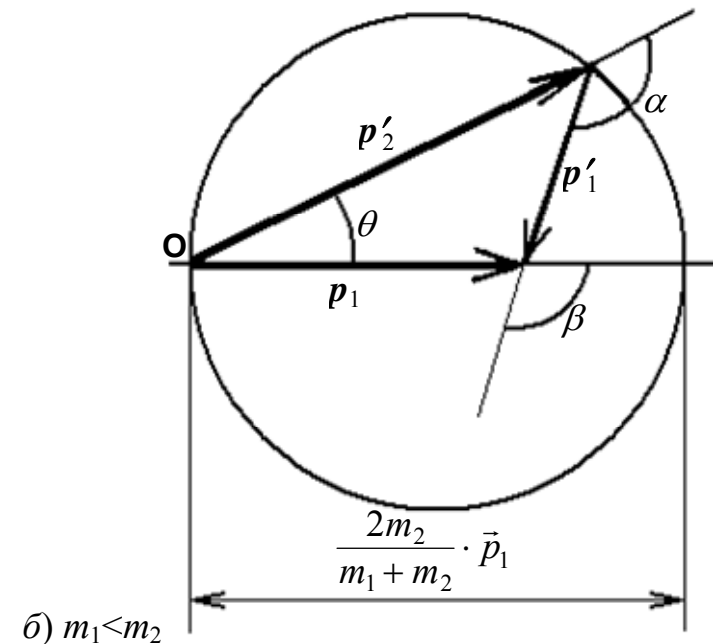
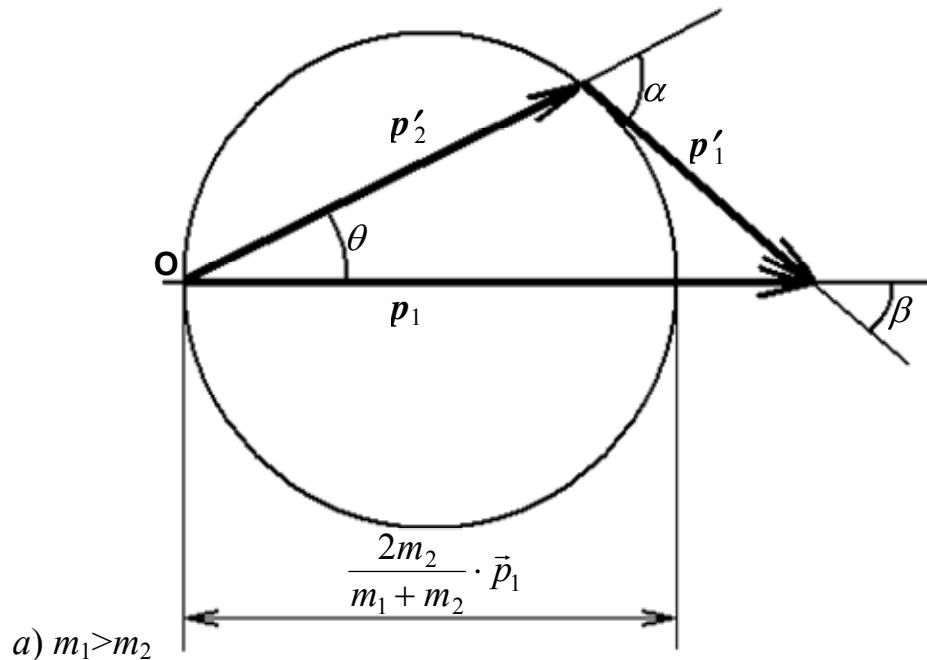
з другого рівняння, отримаємо:  $p_1 \cdot p'_2 = p_2'^2 \cdot \frac{(m_1 + m_2)}{2m_2}$ .

Позначимо кут між векторами  $\vec{p}_1$  і  $\vec{p}'_2$  через  $\theta$ . Тоді  $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}'_2 = p_1 \cdot p'_2 \cdot \cos \theta$  і з попереднього рівняння отримується вираз для  $p'_2$ , який дозволяє визначити швидкість та напрямки розльоту кульок після зіткнення.

$$p'_2 = \frac{2m_2}{(m_1 + m_2)} \cdot p_1 \cdot \cos \theta \quad (**)$$

Отже, тепер можна побудувати отриманий результат на діаграммах за наступною послідовністю:

1. Проведемо з деякої точки  $O$  вектор  $\vec{p}_1$ , що відображає імпульс налітаючої частинки.



## Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження)

2. Побудуємо коло діаметром  $\frac{2m_2}{(m_1 + m_2)} \cdot p_1$  із центром, що буде лежати на прямій, яка співпадатиме з вектором  $\vec{p}_1$

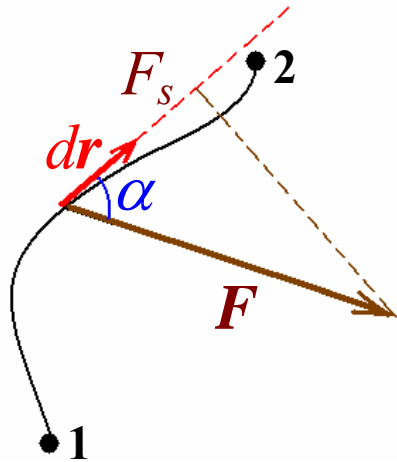
таким чином, щоб коло проходило через точку **O**. Оскільки вписаний в коло кут, що спирається на діаметр є прямим, то відрізки, проведені з точки **O** до точок кола під кутом  $\theta$ , визначатимуться через  $\cos$  кута  $\theta$  між ними і діаметром, відповідно до рівняння (\*\*). Отже, ці відрізки будуть визначати імпульс  $\vec{p}'_2$  - тієї кулі, яка до зіткнення була нерухомою.

3. Імпульс налітаючої частинки після зіткнення  $\vec{p}'_1$  може бути визначений із закону збереження імпульсу (\*\*) як різниця векторів-імпульсів  $\vec{p}_1$  та  $\vec{p}'_2$  і побудований із кінця другого вектора до кінця першого.

4. Кут між імпульсами першої і другої куль після зіткнення дорівнює  $\alpha$ . Кут  $\beta$  є кутом відхилення налітаючої кулі від напрямку руху до зіткнення.

Таким чином, за допомогою такої побудови можна отримати і проаналізувати всі характеристики руху тіл (кульок) після нецентрального пружного зіткнення, зокрема визначити межі зміни кутів між векторами – напрямками їх руху, різницю напрямків розльоту при різних співвідношеннях мас кульок і т.д. і т.п.

Також можна визначити співвідношення енергій, що перерозподіляються між кулями. Зокрема, при центральному ударі, як уже відзначалось у попередньому розділі, максимальна передача енергії відбуватиметься при рівності мас куль, а при значній різниці цих мас енергія, що передається, виявляється мінімальною. Цей факт використовується, наприклад, в ядерних реакторах для уповільнення нейтронів, що вивільнюються при діленні важких ядер урану. Зменшити енергію нейтронів необхідно для більш ефективного їх захоплення наступними ядрами для продовження ланцюгової реакції. Отже, для ефективного уповільнення нейтронів необхідно вводити в активну зону реактора речовину із невеликою масою ядер (легкі елементи, наприклад вуглець - графіт), тоді при зіткненнях швидкі нейтрони ефективніше втрачатимуть енергію і відповідно швидше захоплюватись ядрами урану.



### 4. Робота і потужність

При русі частинки під дією сили  $\mathbf{F}$  по деякій траєкторії 1-2 (рис.1), сила  $\mathbf{F}$  в процесі руху частинки може змінюватися як за модулем, так і за напрямком. В такому випадку силу  $\mathbf{F}$  можна вважати постійною лише в межах деякого елементарного переміщення  $d\mathbf{r}$  (тобто переміщення нескінченно малої довжини).

Дію сили  $\mathbf{F}$  на переміщенні  $d\mathbf{r}$  характеризують скалярним добутком  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , який називають елементарною роботою  $\delta A$  сили  $\mathbf{F}$  на переміщенні  $d\mathbf{r}$ . Вона є величиною алгебраїчною і може бути представлена у вигляді:

$$\delta A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \cdot \cos \alpha \cdot ds = F_s \cdot ds ,$$

де  $\alpha$  - кут між векторами  $\mathbf{F}$  і  $d\mathbf{r}$ ,  $ds = |d\mathbf{r}|$  - елементарний шлях,  $F_s$  - проекція вектора  $\mathbf{F}$  на вектор  $d\mathbf{r}$  (рис.).

Робота  $A$  на деякому відрізку шляху дорівнюватиме сумі всіх елементарних робіт на цьому шляху, тобто:

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 F_s \cdot ds$$

Наочно роботу можна представити як площу під графіком кривої  $F(s)$ , причому із різним знаком, в залежності від розташування площі вище або нижче горизонтальної осі  $S$ .

### Приклади роботи деяких сил

**Пружної:**  $\mathbf{F} = -k \cdot \mathbf{r}$ , де  $\mathbf{r}$  - радіус-вектор деякої частинки відносно точки відліку (точки O). Визначимо роботу на шляху 1-2.

На елементарному переміщенні  $d\mathbf{r}$  відповідно елементарна робота дорівнюватиме:  $\delta A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -k \cdot \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$ .



## Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження)

Тоді повна робота на шляху між точками 1-2:  $A = -\int_1^2 k \cdot r \cdot dr = \frac{kr_1^2}{2} - \frac{kr_2^2}{2}$ .

**Гравітаційної** (або **кулонівської**, в якій замість добутку мас добуток зарядів і електрична стала замість гравітаційної):

$$\mathbf{F} = (\gamma \cdot m_1 \cdot m_2) / r^2 \cdot \mathbf{e}_r$$

Елементарна робота на переміщенні  $d\mathbf{r}$ :

$$\delta A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (\gamma \cdot m_1 \cdot m_2) / r^2 \cdot \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r} ,$$

**Прим.** Знак  $\delta$  перед роботою  $A$  має зміст диференціалу або нескінченно малого приросту функції. Він часто (але не обов'язково!) застосовується для запису елементарної роботи замість звичайного  $dA$  через особливості функції роботи, яка не є т.зв. повним диференціалом.

Скалярний добуток  $\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r} = dr$  – дорівнює приросту модуля  $d\mathbf{r}$ .

Робота сили на шляху 1-2:

$$A = -\int_1^2 \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot dr = \gamma \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

З гравітаційної сили нерідко окремо виділяють **однорідну силу тяжіння**:

$$A = \int_1^2 \delta A = -\int_1^2 mg dh = mg(h_1 - h_2)$$

Робота розглянутих зараз сил не залежить від форми шляху між точками 1 і 2, а тільки від положення цих точок. Така властивість не притаманна, наприклад, силам тертя, які залежать також і від форми шляху між точками 1 і 2.

## Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження)

У випадку дії на тіло кількох сил, сумарна робота дорівнюватиме алгебраїчній сумі робіт, що здійснює кожна сила окремо:

$$A = \int (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) \cdot d\vec{r} = \int \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \dots + \int \vec{F}_n \cdot d\vec{r} = A_1 + A_2 + \dots + A_n.$$

Одиниця роботи – Джоуль (в СІ) або ерг (в СГС).  $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

**Потужність** – робота сили за одиницю часу.

$P = \vec{F} \cdot d\vec{r} / dt = \vec{F} \cdot \vec{V}$  - скалярний добуток вектора сили на швидкість, величина алгебраїчна. По відомій потужності можна знайти виконану роботу за деякий час:

$$A = \int_0^t P \cdot dt$$

Одиниця потужності – Ватт (Вт);  $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}$ .

### Консервативні сили

Якщо в кожній точці простору на тіло діє сила, то кажуть, що тіло перебуває в полі сил. Так, наприклад, може перебувати в полі сил тяжіння, в полі пружних сил, в полі сил опору (в потоці рідини, газу) і т. ін.

Поле, яке залишається постійним у часі, називають стаціонарним. Стаціонарне поле в одній системі відліку може виявитися нестаціонарним в іншій системі відліку. У стаціонарному силовому полі сила, що діє на частинку, залежить тільки від її положення.

Робота, яку здійснюють сили поля при переміщенні частинки з точки 1 в точку 2, залежить, взагалі кажучи, від шляху між цими точками. Разом з тим є стаціонарні силові поля, в яких робота, що здійснюється над часткою силами поля, не залежить від шляху між точками 1 і 2. Сили, що мають таку властивість, наз. консервативними. Робота консервативних сил

## Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження)

на замкненому шляху дорівнює 0; і навпаки, сили, робота яких на замкненому шляху дорівнює 0, є консервативними (або іноді їх називають потенційними).

Робота неконсервативних сил (це сили тертя, опору) залежить від шляху між початковим і кінцевим станами.

**Центральні сили** – які залежать тільки від відстані між частинками, що взаємодіють і направлені по прямій, що проходить через ці частинки. Центральні сили є консервативними. Незалежність роботи від шляху дає можливість ввести поняття потенційної енергії. Оскільки робота сил поля залежить від положення однієї точки 2 (при фіксованій другій 1), то вона буде функцією радіус-вектора нефіксованої точки. Позначимо цю функцію, що називається потенційною енергією  $U(\mathbf{r})$ , записавши роботу сил поля на шляху від 1 до 2:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(\vec{r}) = U_1 - U_2$$

Отже, робота сил поля на шляху 1→2 дорівнює зменшенню потенційної енергії частинки в даному полі. Таким чином, можна визначити потенційну енергію для будь-якого стаціонарного поля консервативних сил, наприклад:

в полі пружних сил -  $U(r) = kr^2/2$  ;

в гравітаційному полі -  $U(r) = \alpha/r$  ,  $(\alpha = \gamma \cdot m_1 \cdot m_2)$  ;

в однорідному полі сил тяжіння -  $U(r) = m \cdot g \cdot h$  .

Потенціальна енергія – функція, що визначається з точністю до сталої. Але її часто не записують через те, що в формули входить різниця значень енергії в двох різних положеннях.

Взаємодію тіл можна описувати як за допомогою сил, так і за допомогою потенційної енергії. Перший спосіб дозволяє описати більше типів сил (напр., сили тертя), а другий використовується лише у випадку консервативних сил. Зв'язок між потенційною енергією і силою поля:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - dU,$$

оскільки вони обидві дорівнюють роботі на елементарному переміщенні. Таким чином,

## Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження)

$$F_s = -\frac{\partial U}{\partial s}.$$

Аналогічний вираз можна записати для проекцій по будь-якій з осей, наприклад:  $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$ . Якщо таким же чином взяти проекції по трьох осях  $x, y, z$ , то можна записати вектор сили через орти (одичні вектори вздовж декартових координатних осей):

$$\mathbf{F} = F_x \cdot \mathbf{i} + F_y \cdot \mathbf{j} + F_z \cdot \mathbf{k}, \text{ або } \vec{F} = -\left( \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \vec{k} \right).$$

Величина в дужках – градієнт скалярної функції, який позначають як  $\text{grad } U$ , або за допомогою символічного векторного оператора «набла» як  $\nabla U$ .

$$\vec{\nabla} = -\left( \vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

який формально діє на скалярну функцію  $U$ :  $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ , тобто сила поля дорівнює зі знаком “-” градієнту потенціальної енергії частинки в даній точці поля. Отже, відома функція  $U(r)$  дозволяє відновити поле сил  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ .