



Механіка



Основні відомості з курсу Механіка (короткий конспект лекцій).

Лектор – доцент Сохацький Володимир Петрович

Лекція 3. ДИНАМІКА



П
Л
А
Н

- I. 1. Інерціальні системи відліку. Перетворення Галілея.
2. Закони Ньютона, маса, типи сил. Центр мас системи точок та рівняння руху центра мас.
- II. 3. Неінерціальні системи відліку, основне рівняння динаміки в неінерціальній системі відліку. Сили інерції. Приклади прояву сили Коріоліса, фізичне пояснення явища прецесії гіроскопа.

Закон інерції (1-й закон Механіки). У кінематиці, де мова йде лише про опис рухів і яка не торкається питання про причини, що викликають ці рухи, ніякої принципової різниці між різними системами відліку немає, і всі вони в цьому відношенні рівноправні. Дещо інакше буде в динаміці при вивченні законів руху. Тут між різними системами відліку виявляється істотна відмінність і переваги одного класу систем відліку в порівнянні з іншими відображаються у різному вигляді і складності законів механіки.

Конспект лекцій з курсу Механіка (Лекція 3 ДИНАМІКА)

В принципі можна взяти будь-яку з безлічі систем відліку. Втім, закони механіки в різних системах відліку мають, взагалі кажучи, різний вигляд і може виявитися, що в довільній системі відліку закони навіть зовсім простих явищ будуть досить складними. Природно, виникає задача відшукування такої системи відліку, в якій закони механіки були б максимально простими, тобто в якій було б найбільш зручно описувати механічні явища.

Можна припустити, що існує така система відліку, в якій прискорення матеріальної точки цілком обумовлено тільки взаємодією її з іншими тілами. **Вільна матеріальна точка, на яку не діють ніякі інші тіла, рухається щодо такої системи відліку прямолінійно і рівномірно, або, як кажуть, по інерції.** Таку систему відліку називають інерціальною (або інерціальною). Твердження, що **інерціальні системи відліку існують**, становить зміст **першого закону механіки - закону інерції Галілея - Ньютона**.

Існування інерціальних систем відліку підтверджується досвідом. Початковими дослідженнями було встановлено, що такою системою відліку є Земля. Наступні точніші досліди (дослід Фуко і всі аналогічні йому) показали, що ця система відліку не зовсім інерціальна (хоча в багатьох випадках її можна вважати інерціальною), а саме: були виявлені прискорення, існування яких не можна пояснити дією якихось певних тел. У той же час, спостереження над прискореннями планет показали інерціальність геліоцентричної системи відліку, пов'язаної з центром Сонця і «нерухомими» зірками. В даний час інерціальність геліоцентричної системи відліку підтверджується всією сукупністю дослідів.

Будь-яка інша система відліку, що рухається рівномірно і прямолінійно щодо геліоцентричної системи, є також інерціальною. Дійсно, якщо в геліоцентричній системі відліку прискорення тіла дорівнює нулю, то воно дорівнює нулю і в будь-якій іншій з цих систем відліку.

Таким чином, існує не одна, а безліч інерціальних систем відліку, що рухаються відносно одна однієї прямолінійно і рівномірно. **Системи відліку, що рухаються з прискоренням відносно інерціальних систем, називають неінерціальними.**

Про властивості симетрії простору і часу. Важливою особливістю інерціальних систем відліку є те, що по відношенню до них простір і час мають певні властивості симетрії. А саме: досвід переконує, що в цих системах відліку простір однорідний і изотропний, а час є однорідним.

Однорідність і изотропність простору полягають у тому, що властивості простору однакові в різних точках (однорідність), а в кожній точці однакові у всіх напрямках (ізотропність).

Однорідність часу полягає в тому, що перебіг фізичних явищ (в одних і тих же умовах) в різний час їх спостереження однаковий. Інакше кажучи, різні моменти часу еквівалентні один одному за своїми фізичними властивостями.

Конспект лекцій з курсу Механіка (Лекція 3 ДИНАМІКА)

Зауважимо, що по відношенню до неінерціальних систем відліку простір є неоднорідним і неізотропним. Це означає, що якщо будь-яке тіло не взаємодіє ні з якими іншими тілами, то тим не менше його різні положення в просторі і його різні орієнтації в механічному відношенні не еквівалентні. Те ж саме відноситься в загальному випадку і до часу, який буде неоднорідним (в неінерціальних системах), тобто його різні моменти не еквівалентні. Ясно, що такі властивості простору і часу вносили б великі ускладнення в опис механічних явищ. Так, наприклад, тіло, на яке не діють інші тіла, не могло б знаходитись у спокої: якщо його швидкість в певний момент часу і дорівнювала нулю, то вже в наступний момент тіло почало б рухатися в певному напрямку.

Принцип відносності Галілея справедливий для інерціальних систем відліку; згідно з ним, **всі інерціальні системи за своїми механічними властивостями еквівалентні одна одній**. Це означає, що ніякими механічними дослідженнями, проведеними «всередині» даної інерціальної системи, не можна встановити, покоїться ця система відліку чи рухається.

Основні закони ньютонівської динаміки. Вивчаючи на дослідах різні рухи, можна виявити, що в інерціальних системах відліку всяке прискорення тіла викликається дією на нього будь-яких інших тіл. При цьому ступінь впливу (дії) кожного з оточуючих тіл на стан руху тіла А, що нас цікавить, - це питання, на яке в кожному конкретному випадку може дати відповідь тільки досвід.

Причиною прискорення тіла є діюча на нього сила. Однією з найважливіших характеристик сили є її матеріальне походження, тобто має бути її джерело у вигляді того чи іншого конкретного тіла або інших тіл.

Всі сили, з якими має справу механіка, зазвичай поділяють на сили, що виникають при безпосередньому контакті тіл (сили тиску, тертя), і сили, що виникають за посередництва створюваних взаємодіючими тілами полів (сили гравітаційні, електромагнітні). Зауважимо, однак, що такий підрозділ сил має умовний характер: по суті і при безпосередньому контакті сили взаємодії обумовлені також наявністю тих чи інших полів, створюваних молекулами або атомами тіл. Таким чином, всі сили взаємодії між тілами обумовлені в кінцевому рахунку полями. Питання про природу сил взаємодії виходить за рамки механіки і розглядається в інших розділах фізики.

Маса. Досвід показує, що будь-яке тіло «чинить опір» при будь-яких спробах змінити його швидкість - як по модулю, так і за напрямком. Цю властивість, що виражає ступінь невідчужуваності тіла до зміни його швидкості, називають інертністю. У різних тіл вона проявляється у різній степені. Мірою інертності служить величина, яка називається масою. Тіло з більшою масою є більш інертним, і навпаки.

Конспект лекцій з курсу Механіка (Лекція 3 ДИНАМІКА)

Введемо поняття маси m , визначивши відношення мас двох різних тіл по зворотньому відношенню прискорень, що надаються їм рівними силами: $m_1/m_2 = a_2/a_1$.

Таким чином, порівняння мас двох тіл, на які діє одна і та ж сила, зводиться до порівняння прискорень цих тіл. Взявши деяке тіло за еталон маси, можна порівняти масу будь-якого тіла з цим еталоном.

Одиницею маси в СІ є, як відомо, кілограм (кг).

Як показує досвід, в рамках ньютонівської механіки **маса має наступні дві важливі властивості:**

- 1) маса - величина адитивна, тобто маса складеного тіла дорівнює сумі мас його частин;
- 2) маса тіла як такого - величина постійна, що не змінюється при його русі.

Сила. Повернемося до досліду з порівняння прискорень двох різних тіл під дією однаково розтягнутої пружини. Той факт, що в обох випадках пружина була розтягнута однаково, дозволяє висловити твердження про однаковість дії пружини, або сили з боку пружини.

З іншого боку, сила є причиною прискорення тіла. Прискорення ж різних тіл під дією однієї і тієї ж однаково розтягнутої пружини різні. Тому завдання полягає у тому, щоб так визначити силу, щоб, незважаючи на відмінність прискорень різних тіл у розглянутому досліді, сила була б однією і тією ж. Очевидно, що однаковим в даних дослідах є добуток $m \cdot \vec{a}$. Цю величину і приймають за визначення сили. З огляду на те, що прискорення - вектор, вважатимемо і силу вектором, що збігається за напрямком із вектором прискорення \vec{a} .

Другий закон Ньютона. При дослідному вивченні взаємодії різних матеріальних точок з оточуючими тілами, було виявлено, що вона (взаємодія) залежить від величин, які характеризують як стан самої матеріальної точки, так і стан оточуючих тіл. Це є важливим фізичним фактом, що лежить в основі одного з найбільш фундаментальних узагальнень ньютонівської механіки: добуток маси матеріальної точки на її прискорення є функцією положення цієї точки відносно навколишніх тіл, а іноді також і функцією її швидкості. Цю функцію позначають \vec{F} і називають силою.

Саме в цьому і полягає фактичний зміст другого закону Ньютона, який коротко формулюють як: **добуток маси матеріальної точки на її прискорення дорівнює діючій на неї силі**, тобто: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$.

Це рівняння називають **рівнянням руху матеріальної точки**.

Конспект лекцій з курсу Механіка (Лекція 3 ДИНАМІКА)

Відразу ж підкреслимо, що другий закон Ньютона і його рівняння отримують конкретний зміст тільки після того, як встановлено вид функції \vec{F} - залежність від величин, що її визначають або, як кажуть, закон сили. Встановлення виду цієї залежності в кожному конкретному випадку є одним із основних завдань фізичної механіки.

Одиницею сили в системі одиниць СІ є Ньютон (Н). 1 Н - це така сила, яка надає тілу масою 1 кг прискорення 1 м/с².

В найбільш загальному вигляді 2-й закон Ньютона записується як рівність сумарної сили, що діє на тіло (або систему тіл) похідній від імпульсу $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ цього тіла по часу:

$$\vec{F}_{\Sigma} = \frac{d\vec{p}}{dt} .$$

В такому вигляді закон справедливий навіть при релятивістському русі тіл. При незмінній масі тіла (що характерно для руху твердих тіл), її можна винести з-під диференціала як константу; тоді 2-й закон Ньютона набуває вигляду:

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} ,$$

який є найбільш широко вживаним при розгляді нерівномірного руху твердих тіл незмінної маси.

Додавання сил. На будь-яку матеріальну точку у конкретних умовах діє, строго кажучи, всього лише одна сила \vec{F} , модуль і напрямок якої визначаються розташуванням цієї точки відносно всіх навколишніх тіл, а іноді і її швидкістю. Але часто буває зручно цю силу \vec{F} представляти як сумарний результат дії окремих тіл, або сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_n$. Дослід показує, що якщо тіла, які є джерелами сил, не впливають один на одне і тому не змінюють свого стану від присутності інших тіл, то результуюча сила є векторною сумою всіх діючих окремо сил: $\vec{F}_{\Sigma} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$ - це т.зв. **принцип суперпозиції**.

Третій закон Ньютона. У всіх випадках, коли в досліді беруть участь тільки два тіла - перше і друге, і перше тіло надає прискорення другому тілу, то виявляється, що і друге тіло також надає прискорення першому тілу. Звідси можна зробити висновок, що дія тіл одне на одного має характер взаємодії. Ньютон постулював таку загальну властивість всіх сил взаємодії – т.зв. третій закон Ньютона: **сили, з якими дві матеріальні точки діють одна на одну, завжди рівні за модулем і спрямовані в протилежні боки вздовж прямої, що з'єднує ці точки:** $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

Третій закон має обмежене застосування, зокрема, через принцип далекодії класичної (ньютонівської) механіки, під яким мається на увазі нескінченно швидка передача будь-якої взаємодії між тілами. Але оскільки швидкість передачі

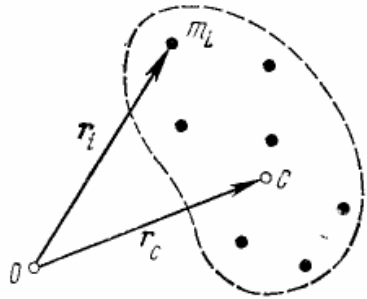
Конспект лекцій з курсу Механіка (Лекція 3 ДИНАМІКА)

взаємодії не може перевищувати швидкість світла у вакуумі $c=3 \cdot 10^8$ м/с, то в багатьох випадках така швидкість є співрозмірною із процесами, що відбуваються в фізичних системах і тоді 3-й закон Ньютона не справджується. Втім, у переважній кількості випадків, фізичних явищ, він усе ж справджується із досить високою точністю.

Типи сил. Фундаментальні сили, що лежать в основі механічних явищ – це гравітаційні і електричні, які асоціюються із законом всесвітнього тяжіння: $\vec{F}_g = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^3} \cdot \vec{r}$ і законом Кулона: $\vec{F}_e = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^3} \cdot \vec{r}$ (обидва записані у векторній формі).

***Прим.** Детальніше різні типи сил та їх різновиди будуть викладені у конспектах наступних лекцій.*

Центр мас системи матеріальних точок. В будь-якій системі частинок (матеріальних точок) є особлива точка, яка називається центром мас і положення якої відносно точки початку відліку даної системи можна визначити як:



$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

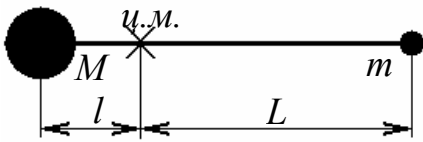
Якщо цей вираз продиференціювати по часу, то можна отримати швидкість

руху центра мас системи частинок (точок):
$$\vec{v}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Для такої системи частинок можна записати 2-й закон Ньютона як рівняння руху центра мас системи:

$$\vec{F}_\Sigma = m \cdot \frac{d\vec{v}_c}{dt}, \text{ де } m = \sum_{i=1}^n m_i \text{ - сумарна маса, а } \vec{F}_\Sigma \text{ - результуюча всіх зовнішніх сил, що діють на частинки системи.}$$

Отже, центр мас системи частинок рухатиметься таким чином, немов би вся маса системи була б зосереджена в його точці центра мас і до неї були б прикладені всі зовнішні сили.



Для двох точкових мас m та M центр мас знаходиться на лінії, що з'єднує ці точки на відстанях до відповідних мас, обернено пропорційних до величин цих мас: $M/m = L/l$.

НЕІНЕРЦІАЛЬНІ СИСТЕМИ ВІДЛІКУ

Скориставшись формулою перетворення прискорень \vec{a} із попередньої лекції №2:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + 2 \cdot [\vec{\omega} \times \vec{v}'] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]],$$

можна записати основне рівняння динаміки в неінерціальній системі (тобто відносно штрихованої системи), домноживши обидві частини рівняння на масу m і записавши останній доданок доцентрового прискорення із зміненим знаком (через відцентровий напрямок відповідної сили) і радіусом кола обертання \vec{R} т.ч.:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0 + 2 \cdot m[\vec{v}' \times \vec{\omega}] + m \cdot \omega^2 \cdot \vec{R},$$

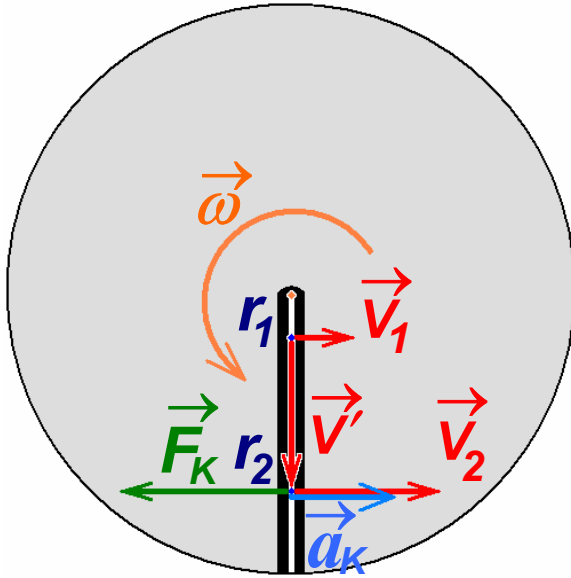
де використано позначення сили $\vec{F} = m\vec{a}$ для інерціальної системи відліку і змінений порядок черговості векторів \vec{v} та $\vec{\omega}$ у векторному добутку через протилежну направленість коріолісового прискорення і коріолісової сили.

Таким чином, отримане (у червоній рамці) **рівняння для неінерціальної системи**, що обертається зі сталою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо осі, яка прискорюється поступально з прискоренням \vec{a}_0 , складається з наступних доданків:

- 1) сили \vec{F} , що діє на частинку маси m з боку інших тіл (або полів);
- 2) **поступальної сили інерції*** $\vec{F} = -m\vec{a}_0$, обумовленої поступальним рухом неінерціальної системи;
- 3) **сили Коріоліса**: $\vec{F}_K = 2 \cdot m \cdot [\vec{v}' \times \vec{\omega}]$, обумовленої рухом частинки відносно неінерціальної (рухомої) системи відліку;
- 4) **відцентрової сили інерції**: $\vec{F} = m \cdot \omega^2 \cdot \vec{R}$, обумовленої обертанням неінерціальної системи відліку.

Прим. * - синім кольором виділені назви і формули для **сил інерції**, які виникають в неінерціальних системах як результат вибору системи відліку.

Пояснення виникнення сили Коріоліса.



Сила Коріоліса – сила інерції, що виникає при русі тіла відносно неінерціальної системи відліку. Наприклад, якщо неінерціальна система відліку обертається, то її точки, по-різному віддалені від центра (або від осі обертання), рухаються із різними швидкостями. Тіло, рухаючись в неінерціальній (рухомій) системі, опиняється в точках із різними лінійними швидкостями обертання цієї системи (або пов'язаного із нею тіла). Різниці швидкостей тіла і системи в різних точках призводять до різних величин зміщення тіла від того напрямку руху, який воно мало би без обертання системи відліку.

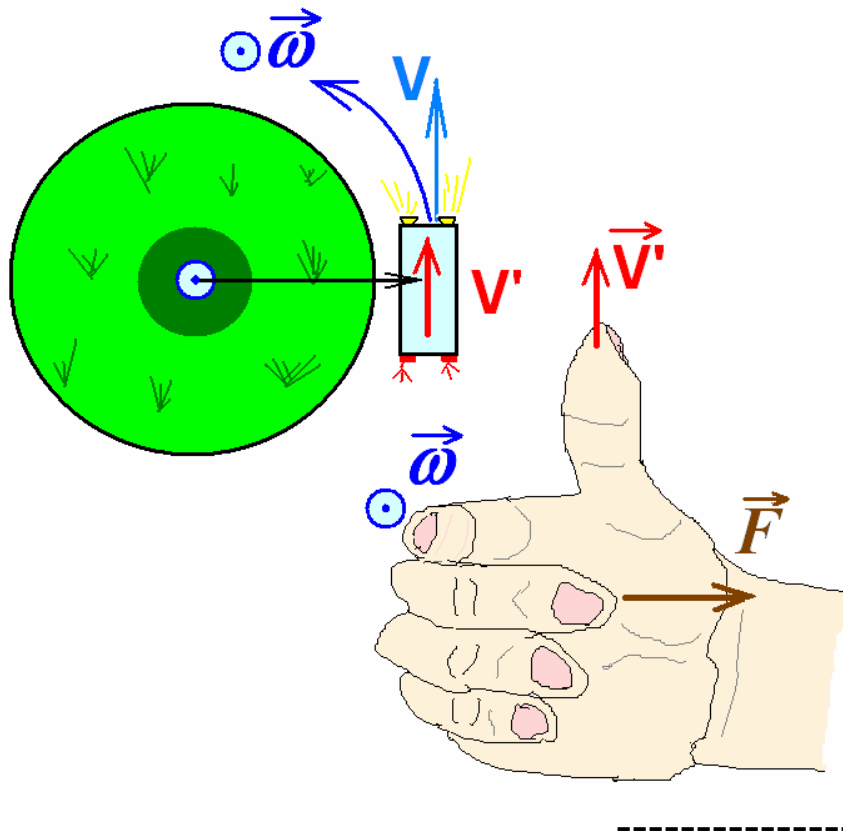
Якщо рухоме тіло механічно зв'язане із рухомою неінерціальною системою (як, наприклад, на представленому рис. тіло рухається по направляючій вздовж радіуса), то направляюча пружньо тисне на тіло, надаючи йому коріолісового прискорення вздовж тангенціального напрямку лінійної швидкості обертання. Через це тангенціальна складова швидкості тіла поступово збільшується від V_1 в точці на відстані r_1 від центра до V_2 в точці r_2 . Тіло, відповідно до принципу протидії, з такою ж протилежно направленою силою (яка і називається силою Коріоліса) у відповідь тисне на направляючу. Т.ч., коріолісове прискорення і коріолісова сила виявляються направленими протилежно.

$$V_1 = \omega \cdot r_1 ; \quad V_2 = \omega \cdot r_2 ; \quad a_K = 2 \cdot [\omega \cdot V'] ; \quad F_K = -2 \cdot m \cdot [\omega \cdot V'] = 2 \cdot m \cdot [V' \cdot \omega] .$$

ПРИКЛАДИ ДІЇ СИЛИ КОРІОЛІСА

Приклад 1. Як діятиме сила Коріоліса на людину, яка проходить вперед по салону автобуса, що рухається навколо площі по круговій траєкторії?

$$\vec{V} = [\vec{\omega} \times \vec{r}] \quad \vec{F} = 2m \cdot [\vec{V}' \times \vec{\omega}]$$



Формула для перетворення прискорення \vec{a} в нерухомій системі відліку:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + 2 \cdot [\vec{\omega} \times \vec{V}'] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]].$$

Сила Коріоліса дорівнює:

$$\vec{F}_K = -2m \cdot [\vec{\omega} \times \vec{V}'] = 2m \cdot [\vec{V}' \times \vec{\omega}]$$

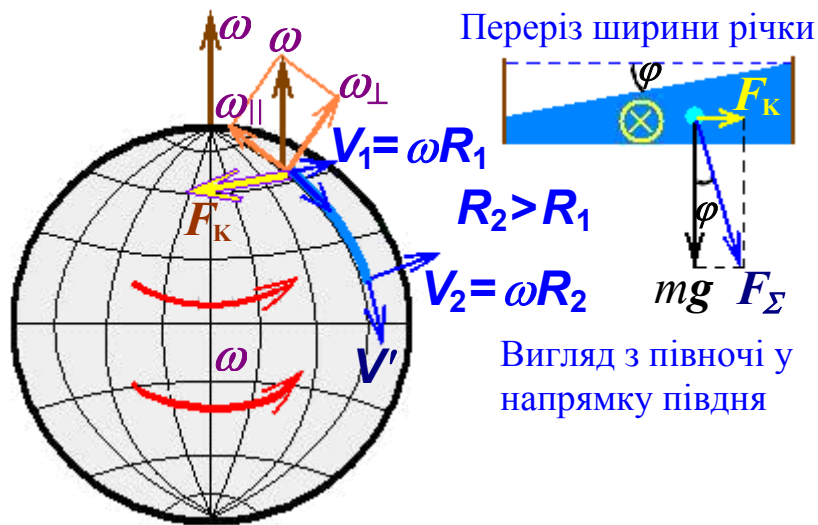
і направлена протилежно коріолісовому прискоренню:

$$\vec{a}_K = 2 \cdot [\vec{\omega} \times \vec{V}']$$

Очевидно, що в даному випадку коріолісова сила буде додаватись до відцентрової в радіальному напрямку, оскільки фактично людина збільшує загальну швидкість свого руху по колу навколо площі.

Приклад 2.

Швидкість течії річки 2 км/год. Який кут нахилу поверхні води до горизонту на широті 50° п.ш.?



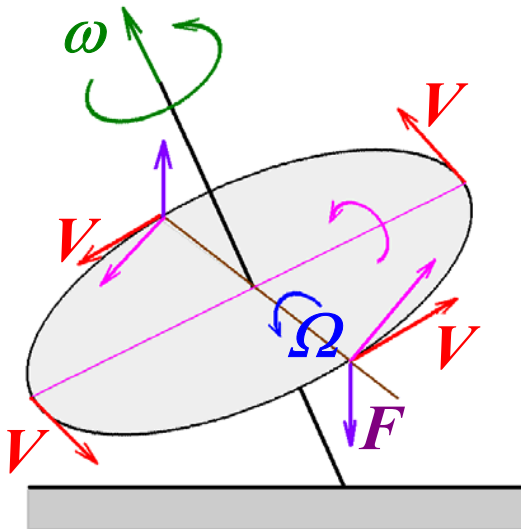
Розв'язок

Води річки, що протікає у північній півкулі із півночі на південь, зазнає коріолісового прискорення внаслідок того, що вона перетікає з високих (північних) широт, де швидкість її (тобто води) обертання разом із Землею менша, до південних широт із більшою лінійною (тангенціальною) швидкістю обертання внаслідок більшої віддаленості точок поверхні Землі у південних широтах від земної осі. Таким чином, зміна (збільшення) швидкості тангенціального руху води означає прискорення, якого вона (вода) набуває внаслідок додаткового тиску з боку одного з берегів. Через тиск води у відповідь, берег (правий у північній півкулі) постійно підмивається і набуває обривистого рельєфу. Протилежний берег навпаки, стає переважно зглаженим і пологим через стікання води з нього.

Крім розмивання берегів, дія сили Коріоліса також призводить до поперечного нахилу поверхні води, визначити який можна наступним чином. На вибраний невеликий об'єм води діє, крім сили тяжіння $m\vec{g}$, ще і сила Коріоліса – $\vec{F} = 2m \cdot [\vec{V}' \times \vec{\omega}]$, направлена горизонтально в поперечному напрямку до течії. Поверхня води буде перпендикулярною до рівнодіючої цих сил, яка утворює кут φ з вертикальним напрямком (силою тяжіння).
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_K}{mg} = \frac{2 \cdot V' \cdot \omega \cdot \sin \varphi}{g}.$$

$\varphi \sim 1,3''$. Отже, при ширині річки 100 м «коріолісова» різниця рівнів води на берегах не перевищить товщини леза - 0,1 мм.

Приклад 3. Прецесійний рух гіроскопа.



Момент сил $[\vec{r} \times \vec{F}]$, що нахиляє площину гіроскопа перпендикулярно до напрямку

нахилу-«падіння», виникає через вимушений поворот векторів швидкості \mathbf{V} , які намагаються зберегти свій напрямок лінійної швидкості при обертанні, а отже, створюють інерціальну силу Коріоліса (фактично точки гіроскопа віддаляються чи наближаються до осі повороту Ω , тому вектори швидкості обертання цих точок навколо осі Ω будуть різними, а отже, при їх переході в область інших швидкостей (тобто зміні швидкості) виникне сила інерції, як намагання точок зберегти свою попередню швидкість).

$$d\vec{L} = \vec{N} \cdot dt = L \cdot d\psi \Rightarrow \frac{d\psi}{dt} = \Omega = \frac{N}{L} = \frac{N}{I \cdot \omega}. \quad \vec{N} - \text{момент зовнішніх сил, що діє на}$$

гіроскоп (дзигу); Ω - частота прецесії гіроскопу (вона ж є кутовою швидкістю повороту площини гіроскопа внаслідок «падіння» на підлогу).