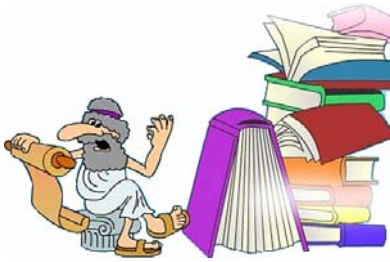


Лекція 2. Кінематика.



П
Л
А
Н

- I. 1.** Кінематика матеріальної точки. Способи опису руху.
2. Поступальний та обертальний рухи.
II. 3. Перетворення швидкості та прискорення при переході між системами відліку.

Кінематика твердих тіл. Основні типи руху: поступальний та обертальний навколо осі. Додатково що виділяють плоский рух, обертальний рух навколо точки та вільний (складний) рух.

1. Поступальний рух – такий рух, при якому будь-яка пряма, що зв'язує дві точки тіла, весь час залишається паралельною сама собі.

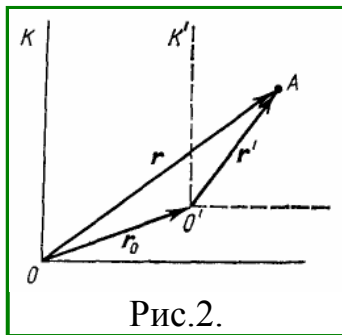


Рис.2.

При введенні додаткової рухомої системи координат (рис.2), радіус-вектори в нерухомій $d\vec{r}$, рухомій системах $d\vec{r}$ і радіус-вектор самої рухомої системи $d\vec{r}_0$ відносно нерухомої зв'язані співвідношенням: $d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}'$.

Якщо цей вираз розділити на dt , то отримаємо формулу перетворення швидкості: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$,

а продиференціювавши останній вираз, отримаємо перетворення прискорень: $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'$

2. Обертальний рух рухомої системи відносно нерухомої осі.

З рис.3 видно, що лінійне переміщення кінця радіус-вектора пов'язано із кутом повороту аксіального вектора $d\vec{\varphi}$ т.ч. - $|d\vec{r}| = \vec{r} \cdot \sin \theta \cdot d\varphi$, або у векторному вигляді:

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \times \vec{r}],$$

причому використання кута $d\vec{\varphi}$ як вектора коректно лише при малих значеннях кутів $d\varphi$. Якщо в цій формулі розділити обидві частини рівняння на dt , то отримаємо:

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}],$$

оскільки $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ і $d\vec{\varphi}/dt = \vec{\omega}$.

Введемо вектори кутової швидкості та кутового прискорення:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \text{ (рад/с) та } \vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \text{ (рад/с}^2\text{)}.$$

Продиференціювавши вираз для швидкості, отримаємо вектор повного прискорення:

$$\vec{a} = [\vec{\beta} \times \vec{r}] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]].$$

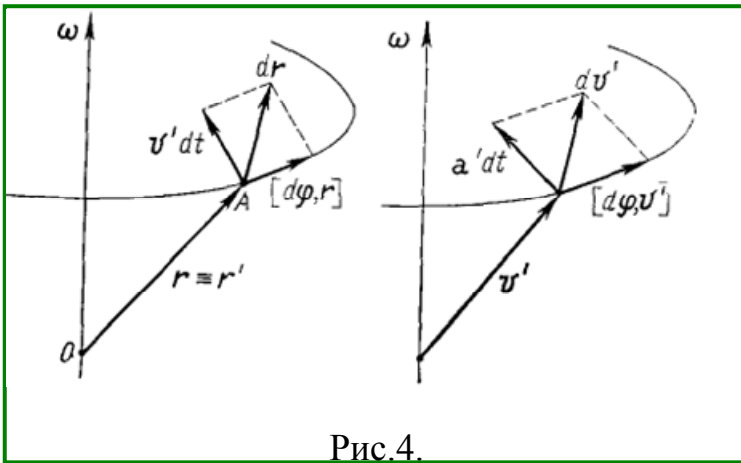


Рис.4.

3. Перетворення швидкості та прискорення при переході до іншої системи відліку.

$$d\vec{r} = \vec{v}' \cdot dt + [d\vec{\varphi} \times \vec{r}]$$

Поділивши вираз для приросту радіус-вектора на dt , то отримаємо: $\vec{v} = \vec{v}' + [\vec{\omega} \times \vec{r}]$.

У випадку наявності прискорення, приріст швидкості складатиме: $d\vec{v} = d\vec{v}' + [\vec{\omega} \times d\vec{r}]$.

Для знаходження $d\vec{v}'$ відзначимо, що при повороті вектора \vec{v}' на кут $d\vec{\varphi}$, аналогічно до випадку із поворотом вектора \vec{r} , приріст вектора \vec{v}' дорівнюватиме: $d\vec{v}' = [d\vec{\varphi} \times \vec{v}']$, а якщо ще до того ж точка **A** матиме прискорення \vec{a}' в рухомій системі, то за час dt вектор \vec{v}' отримає додаткового приросту $\vec{a}' \cdot dt$, в результаті чого вираз для $d\vec{v}'$ матиме вигляд:

$$d\vec{v}' = \vec{a}' \cdot dt + [d\vec{\varphi} \times \vec{v}'].$$

Підставляючи цей вираз для $d\vec{v}'$ разом із виразом для $d\vec{r}$ в рівність для $d\vec{v}$, і розділивши отримане рівняння на dt , знайдемо формулу для перетворення прискорення \vec{a} в нерухомій системі:

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2 \cdot [\vec{\omega} \times \vec{v}'] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]].$$

Таким чином, прискорення \vec{a} точки **A** щодо “нерухомої” **K**-системи дорівнює сумі трьох прискорень: прискорення \vec{a}' відносно рухомої системи, коріолісового прискорення $\vec{a}_k = 2 \cdot [\vec{\omega} \times \vec{v}']$ і доцентрового (т.зв. нормального, тобто перпендикулярного до миттєвої тангенціальної швидкості) прискорення $\vec{a}_n = [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]]$.

У випадку додаткового поступального прискорення \vec{a}_0 самої рухомої (штрихованої – **K'**) системи, її прискорення додається до суми прискорень.

Доцентрове прискорення ще можна представити як $\vec{a}_n = -\omega^2 \cdot \vec{R}$, де \vec{R} - радіус-вектор, перпендикулярний осі обертання, який характеризує положення точки **A** щодо цієї осі. Тоді в загальному вигляді формулу перетворення прискорення можна записати таким чином:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 + 2 \cdot [\vec{\omega} \times \vec{v}'] - \omega^2 \cdot \vec{R}$$

Методи розв'язку простих диференціальних рівнянь.

Диференціальним називається рівняння, в якому деяка функція знаходиться під знаком похідної (або диференціалу). Ця функція може бути невідомою і задачею розв'язку такого рівняння є відшукування цієї функції.

1. Найбільш простим випадком диференціального рівняння є рівняння рівності деякої функції $y(x)$ своїй похідній - $y'(x)$, тобто: $y(x)=y'(x)$. Розв'язком такого рівняння може бути експоненціальна функція $y(x)=e^x$ ($e=2,71828..$ – основа натурального логарифма), похідна від якої дорівнює самій цій функції, а в загальному вигляді експонента може бути ще домножена на деяку константу C :

$$y(x)=C \cdot e^x.$$

Ця константа C може бути розмірною величиною (що важливо для фізичних задач) і для її однозначного визначення необхідні додаткові умови.

2. Якщо перенести обидві функції в один бік рівняння і поставити між ними знак додавання (+) : $y(x)+y'(x)=0$, то очевидно, що розв'язком такого рівняння буде функція $y(x)=C \cdot e^{-x}$, що легко перевіряється підстановкою.

3. Також зовсім нескладно підібрати розв'язок для більш складної форми диференціального рівняння: $y'(x)+A \cdot y(x)=0$ (A – деяка стала). Тут необхідно підібрати функцію, яка при диференціюванні дасть додатково множник A . Очевидно, що такою функцією-розв'язком може бути $y(x)=C \cdot e^{-Ax}$.

Перевіряємо: $y'(x)=(-A) \cdot C \cdot e^{-Ax}$, яка в сумі із заданою функцією $y(x)$, помноженою на $(+A)$, дасть 0.

4. Ускладнимо далі запис диференціального рівняння $y'(x)+A \cdot y(x)=B$ (B – деяка стала). Тепер методом підбору знайти розв'язок трохи складніше, але також можна

підібрати функцію, напр. такого вигляду: $y(x)=\frac{B}{A} \cdot (1 - e^{-Ax})$.

Перевіряємо: $y'(x)=(-A) \cdot \left(-\frac{B}{A} \cdot e^{-Ax}\right) = B \cdot e^{-Ax}$ і підставляючи у наведене вище диференціальне рівняння, переконуємось у справедливості рівності:

$$B \cdot e^{-Ax} + A \cdot \left[\frac{B}{A} \cdot (1 - e^{-Ax})\right] \equiv B.$$

5. Стандартною формою лінійного (немає функцій у квадраті, кубі тощо) диференціального рівняння першого ступеню (входять тільки перші похідні) є:

$$y'(x)+A(x) \cdot y(x)+B(x)=0,$$

де $A(x)$ і $B(x)$ є функціями незалежної змінної x .

Таке рівняння має точний розв'язок: $y(x)=\left[\int B(x) \cdot e^{\int A(x)dx} + C\right] \cdot e^{-\int A(x)dx}$ (C – стала інтегрування), що дозволяє розв'язувати до кінця лінійні диф. рівняння 1-го порядку.

6. Лінійним диференціальним рівнянням другого ступеню є, наприклад, т.зв. рівняння вільних коливань: $\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0$, де x – координата, яка є функцією часу $x(t)$, а через \ddot{x} позначено другу похідну по часу від змінної координати $x(t)$.

Розв'язок такого рівняння також можна легко отримати методом підбору, вибравши як розв'язок гармонічну функцію (\sin або \cos) від часу і додатково врахувавши, що при диференціюванні двічі має з'явитись циклічна частота коливання ω : $x(t) = X_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, де φ – стала початкова фаза, а X_0 – амплітудне значення координати $x(t)$.

7. Дещо іншим методом розв'язку диференціальних рівнянь є метод рознесення змінних*.

Прим. * – строго кажучи, назва «метод» застосована умовно, оскільки під цим мається на увазі елементарна математична операція, що виконується для зручності початківців, які освоюють роботу з диф. рівняннями.

Наприклад, рівняння 2-го закону Ньютона для тіла незмінної маси m , на яке діє стала сила \vec{F} :

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

має дві змінні величини – \vec{v} та t , які знаходяться під знаками диференціалів і які (тобто їх диференціали) можна рознести по різні боки рівняння: $m \cdot d\vec{v} = \vec{F} \cdot dt$, а вже після

цього отримане рівняння проінтегрувати: $m \cdot \int_{v_1}^{v_2} d\vec{v} = \vec{F} \cdot \int_{t_1}^{t_2} dt$, отримавши в явному

вигляді залежність $v(t)$: $m \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{F} \cdot (t_2 - t_1)$ або $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \frac{\vec{F}}{m} \cdot (t_2 - t_1)$.

8. Якщо в умові сила – величина змінна і задана, наприклад, як функція швидкості v : $F = \alpha \cdot v$, то рознесення змінних лише незначно ускладнюється (векторні величини записані як скаляри для спрощення):

Рознесемо змінні у рівнянні: ↓	Розділили та помножили обидві частини рівняння відповідно на v і dt : ↓	Інтегруємо отримане рівняння: ↓	Результат інтегрування з підстановкою: ↓
$m \cdot \frac{dv}{dt} = \alpha \cdot v$	$\Rightarrow m \cdot \frac{dv}{v} = \alpha \cdot dt$	$\Rightarrow m \cdot \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = \alpha \cdot \int_{t_1}^{t_2} dt$	$\Rightarrow \ln \frac{v_2}{v_1} = \frac{\alpha}{m} \cdot (t_2 - t_1)$
$\Rightarrow v_2 = v_1 \cdot e^{\frac{\alpha}{m} \cdot (t_2 - t_1)}$			

Виразимо v як функцію t : ↑

9. Ще трохи складнішим випадком є залежність сили від іншої (третьої) змінної, наприклад, пройденого шляху: $F = \beta \cdot s$. Тоді рівняння 2-го закону Ньютона виглядатиме як: $m \cdot \frac{dv}{dt} = \beta \cdot s$ і в ньому вже неможливо рознести змінні як у попередньому випадку, тому що цих змінних вже 3. Але, знаючи залежність між цими

величинами – v , s та t : $v = \frac{ds}{dt}$, можна позбутись однієї з них, зокрема в даному випадку найбільш ефективно виразити $dt = \frac{ds}{v}$ і далі підставити його в рівняння 2-го закону Ньютона: $m \cdot \frac{v \cdot dv}{ds} = \alpha \cdot s$. Таким чином, отримане рівняння тепер має тільки 2 змінні – v та s , які вже можуть бути рознесені по різні боки рівняння: $m \cdot v \cdot dv = \alpha \cdot s \cdot ds$ і проінтегровані (кожна частина рівняння по своїй змінній): $m \cdot \int_{v_1}^{v_2} v \cdot dv = \alpha \cdot \int_{s_1}^{s_2} s \cdot ds \Rightarrow$

Після чого отримаємо первісні для підстановки граничних значень: $m \cdot \frac{v^2}{2} \Big|_{v_1}^{v_2} = \alpha \cdot \frac{s^2}{2} \Big|_{s_1}^{s_2}$ і після підстановки (верхньої граничної межі мінус вираз із нижньою граничною межею) отримаємо звичайне рівняння: $\frac{m}{2} \cdot (v_2^2 - v_1^2) = \frac{\alpha}{2} \cdot (s_2^2 - s_1^2)$, з якого вже можемо отримувати в явному вигляді необхідні аналітичні залежності одних величин від інших залежно від умови задачі.

10. Також типовим випадком, що нерідко зустрічається в задачах з Механіки, є залежність сили від двох доданків, один з яких F_0 – константа, а інший – залежний від якоїсь із змінних величин. Наприклад, $F = F_0 + \alpha \cdot v$; тоді рівняння 2-го закону Ньютона набуватиме вигляду: $m \cdot \frac{dv}{dt} = F_0 + \alpha \cdot v$ і в ньому вже неможливо буде розділити змінні так, як у попередніх випадках. Але проблема в даному випадку просто вирішується діленням обох частин рівняння на всю праву його частину і множенням на dt :

$$m \cdot \frac{dv}{F_0 + \alpha \cdot v} = dt.$$

Після такого рознесення змінних рівняння вже може бути проінтегроване:

$$m \cdot \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{F_0 + \alpha \cdot v} = \int_{t_1}^{t_2} dt, \text{ в результаті чого отримаємо логарифм знаменника в лівій частині}$$

$$\text{із врахуванням винесення множника } \alpha: \ln \frac{F_0 + \alpha \cdot v_2}{F_0 + \alpha \cdot v_1} = \frac{\alpha}{m} \cdot (t_2 - t_1), \text{ і звідки вже,}$$

позбувшись логарифма: $F_0 + \alpha \cdot v_2 = (F_0 + \alpha \cdot v_1) \cdot e^{\frac{\alpha}{m} \cdot (t_2 - t_1)}$, можна виражати явно величини одні через інші в залежності від постановки задачі.