



Механіка



Основні відомості з курсу Механіка (короткий конспект лекцій).

Лектор – доцент Сохацький Володимир Петрович

Лекція 2. Кінематика: міжсистемні перетворення швидкості. Динаміка: закони Ньютона.



**П
Л
А
Н**

- I. 1.** Перетворення швидкості та прискорення при переході між системами відліку.
- II. 1.** Інерціальні системи відліку. Перетворення Галілея.
2. Закони Ньютона, маса, типи сил.
3. Неінерціальні системи відліку, основне рівняння динаміки в неінерціальній системі відліку. Сили інерції. Приклади прояву сили Коріоліса.
- III. 1.** Методи розв'язку простих диференціальних рівнянь.

Перетворення швидкості та прискорення при переході до іншої системи відліку.

Приріст радіус-вектора при поступальному і обертальному русі (в даному випадку русі системи K'): $d\vec{r} = \vec{v}' \cdot dt + [d\vec{\varphi} \times \vec{r}]$

Поділивши цй вираз для приросту радіус-вектора на dt , то отримаємо: $\vec{v} = \vec{v}' + [\vec{\omega} \times \vec{r}]$.

Конспект лекцій з курсу Механіка (Лекція 2 Кінематика, Динаміка)

У випадку наявності прискорення, приріст швидкості складатиме: $d\vec{v} = d\vec{v}' + [\vec{\omega} \times d\vec{r}]$, - що отримано диференціюванням попереднього рівняння для швидкості.

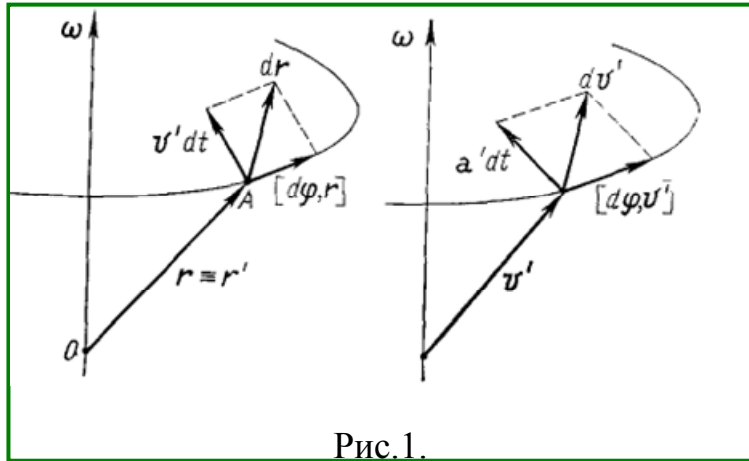


Рис.1.

Для знаходження $d\vec{v}'$ відзначимо, що при повороті вектора \vec{v}' на кут $d\vec{\phi}$, аналогічно до випадку із поворотом вектора \vec{r} , приріст вектора \vec{v}' дорівнюватиме: $d\vec{v}' = [d\vec{\phi} \times \vec{v}']$, а якщо ще до того ж точка **A** матиме прискорення \vec{a}' в рухомій системі, то за час dt вектор \vec{v}' отримає додаткового приросту $\vec{a}' \cdot dt$, в результаті чого вираз для $d\vec{v}'$ матиме вигляд (рис.1 є ілюстрацією до встановлення цих співвідношень):

$$d\vec{v}' = \vec{a}' \cdot dt + [d\vec{\phi} \times \vec{v}'].$$

Підставляючи цей вираз для $d\vec{v}'$ разом із виразом для $d\vec{r}$ в рівність для $d\vec{v}$, і розділивши отримане рівняння на dt , знайдемо формулу для перетворення прискорення \vec{a} в нерухомій системі:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + 2 \cdot [\vec{\omega} \times \vec{v}'] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]]$$

Таким чином, прискорення \vec{a} точки **A** щодо “нерухомої” **K**-системи дорівнює сумі трьох прискорень: прискорення \vec{a}' відносно рухомої системи, коріолісового прискорення $\vec{a}_k = 2 \cdot [\vec{\omega} \times \vec{v}']$ і доцентрового (т.зв. нормального, тобто перпендикулярного до миттєвої тангенціальної швидкості) прискорення $\vec{a}_n = [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]]$.

У випадку додаткового поступального прискорення \vec{a}_0 самої рухомої (штрихованої – **K'**) системи, її прискорення додається до суми прискорень.

Доцентрове прискорення ще можна представити як $\vec{a}_n = -\omega^2 \cdot \vec{R}$, де \vec{R} - радіус-вектор, перпендикулярний осі обертання, який характеризує положення точки **A** щодо цієї осі. Тоді в загальному вигляді формулу перетворення прискорення можна записати таким чином:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 + 2 \cdot [\vec{\omega} \times \vec{v}'] - \omega^2 \cdot \vec{R}$$

Конспект лекцій з курсу Механіка (Лекція 2 Кінематика, Динаміка)

Скориставшись формулою перетворення прискорень \vec{a} , можна записати основне рівняння динаміки в неінерціальній системі (тобто відносно штрихованої системи), домноживши обидві частини рівняння на масу m і записавши останній доданок доцентрового прискорення із зміненим знаком (через відцентровий напрямок відповідної сили) і радіусом кола обертання \vec{R} т.ч.:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0 + 2 \cdot m[\vec{v}' \times \vec{\omega}] + m \cdot \omega^2 \cdot \vec{R},$$

де використано позначення сили $\vec{F} = m\vec{a}$ для інерціальної системи відліку і змінений порядок черговості векторів \vec{v} та $\vec{\omega}$ у векторному добутку через протилежну направленість коріолісового прискорення і коріолісової сили.

Таким чином, отримане (у червоній рамці) **рівняння для неінерціальної системи**, що обертається зі сталою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо осі, яка прискорюється поступально з прискоренням \vec{a}_0 , складається з наступних доданків:

- 1) сили \vec{F} , що діє на частинку маси m з боку інших тіл (або полів);
- 2) **поступальної сили інерції*** $\vec{F} = -m\vec{a}_0$, обумовленої поступальним рухом неінерційної системи;
- 3) **сили Коріоліса**: $\vec{F}_K = 2 \cdot m \cdot [\vec{v}' \times \vec{\omega}]$, обумовленої рухом частинки відносно неінерційної (рухомої) системи відліку;
- 4) **відцентрової сили інерції**: $\vec{F} = m \cdot \omega^2 \cdot \vec{R}$, обумовленої обертанням неінерційної системи відліку.

Прим. * - синім кольором виділені назви і формули для **сил інерції**, які виникають в неінерціальних системах як результат вибору системи відліку.

Для повноцінного використання поняття сили, необхідно попередньо згадати ключові положення і фізичні характеристики, що використовуються в рамках розділу Динаміка.

Закон інерції (1-й закон Механіки). У кінематиці, де мова йде лише про опис рухів і яка не торкається питання про причини, що викликають ці рухи, ніякої принципової різниці між різними системами відліку немає, і всі вони в цьому відношенні рівноправні. Дещо інакше буде в динаміці при вивченні законів руху. Тут між різними системами відліку

виявляється істотна відмінність і переваги одного класу систем відліку в порівнянні з іншими відображаються у різному вигляді і складності законів механіки.

В принципі можна взяти будь-яку з безлічі систем відліку. Втім, закони механіки в різних системах відліку мають, взагалі кажучи, різний вигляд і може виявитися, що в довільній системі відліку закони навіть зовсім простих явищ будуть досить складними. Природно, виникає задача відшукування такої системи відліку, в якій закони механіки були б максимально простими, тобто в якій було б найбільш зручно описувати механічні явища.

Можна припустити, що існує така система відліку, в якій прискорення матеріальної точки цілком обумовлено тільки взаємодією її з іншими тілами. **Вільна матеріальна точка, на яку не діють ніякі інші тіла, рухається щодо такої системи відліку прямолінійно і рівномірно, або, як кажуть, по інерції.** Таку систему відліку називають інерційною (або інерціальною). Твердження, що **інерціальні системи відліку існують**, становить зміст **першого закону механіки - закону інерції Галілея - Ньютона.**

Існування інерційних систем відліку підтверджується досвідом. Початковими дослідженнями було встановлено, що такою системою відліку є Земля. Наступні точніші дослідження (дослід Фуко і всі аналогічні йому) показали, що ця система відліку не зовсім інерціальна (хоча в багатьох випадках її можна вважати інерціальною), а саме: були виявлені прискорення, існування яких не можна пояснити дією якихось певних тел. У той же час спостереження над прискореннями планет показали інерціальність геліоцентричної системи відліку, пов'язаної з центром Сонця і «нерухомими» зірками. В даний час інерціальність геліоцентричної системи відліку підтверджується всією сукупністю дослідів.

Будь-яка інша система відліку, що рухається рівномірно і прямолінійно щодо геліоцентричної системи, є також інерціальною. Дійсно, якщо в геліоцентричній системі відліку прискорення тіла дорівнює нулю, то воно дорівнює нулю і в будь-якій іншій з цих систем відліку.

Таким чином, існує не одна, а безліч інерціальних систем відліку, що рухаються відносно одна однієї прямолінійно і рівномірно. **Системи відліку, що рухаються з прискоренням відносно інерціальних систем, називають неінерціальними.**

Про властивості симетрії простору і часу. Важливою особливістю інерційних систем відліку є те, що по відношенню до них простір і час мають певні властивості симетрії. А саме: досвід переконує, що в цих системах відліку простір однорідний і ізотропний, а час є однорідним.

Однорідність і ізотропність простору полягають у тому, що властивості простору однакові в різних точках (однорідність), а в кожній точці однакові у всіх напрямках (ізотропність).

Однорідність часу полягає в тому, що перебіг фізичних явищ (в одних і тих же умовах) в різний час їх спостереження однаковий. Інакше кажучи, різні моменти часу еквівалентні один одному за своїми фізичними властивостями.

Зауважимо, що по відношенню до неінерціальних систем відліку простір є неоднорідним і неізотропним. Це означає, що якщо будь-яке тіло не взаємодіє ні з якими іншими тілами, то тим не менше його різні положення в просторі і його різні орієнтації в механічному відношенні не еквівалентні. Те ж саме відноситься в загальному випадку і до часу, який буде неоднорідним (в неінерційних системах), тобто його різні моменти не еквівалентні. Ясно, що такі властивості простору і часу вносили б великі ускладнення в опис механічних явищ. Так, наприклад, тіло, на яке не діють інші тіла, не могло б знаходитись у спокої: якщо його швидкість в певний момент часу і дорівнювала нулю, то вже в наступний момент тіло почало б рухатися в певному напрямку.

Принцип відносності Галілея справедливий для інерціальних систем відліку; згідно з ним, **всі інерціальні системи за своїми механічними властивостями еквівалентні одна одній**. Це означає, що ніякими механічними дослідженнями, проведеними «всередині» даної інерціальної системи, не можна встановити, покоїться ця система відліку чи рухається.

Основні закони ньютонівської динаміки. Вивчаючи на дослідах різні рухи, можна виявити, що в інерційних системах відліку всяке прискорення тіла викликається дією на нього будь-яких інших тіл. При цьому ступінь впливу (дії) кожного з оточуючих тіл на стан руху тіла А, що нас цікавить, - це питання, на яке в кожному конкретному випадку може дати відповідь тільки досвід.

Причиною прискорення тіла є діюча на нього сила. Однією з найважливіших характеристик сили є її матеріальне походження, тобто має бути її джерело у вигляді того чи іншого конкретного тіла або інших тіл.

Всі сили, з якими має справу механіка, зазвичай поділяють на сили, що виникають при безпосередньому контакті тіл (сили тиску, тертя), і сили, що виникають за посередництвом створюваних взаємодіючими тілами полів (сили гравітаційні, електромагнітні). Зауважимо, однак, що такий підрозділ сил має умовний характер: по суті і при безпосередньому контакті сили взаємодії обумовлені також наявністю тих чи інших полів, створюваних молекулами або атомами тіл. Таким чином, всі сили взаємодії між тілами обумовлені в кінцевому рахунку полями. Питання про природу сил взаємодії виходить за рамки механіки і розглядається в інших розділах фізики.

Маса. Досвід показує, що будь-яке тіло «чинить опір» при будь-яких спробах змінити його швидкість - як по модулю, так і за напрямком. Цю властивість, що виражає ступінь непіддатливості тіла до зміни його швидкості, називають інертністю.

Конспект лекцій з курсу Механіка (Лекція 2 Кінематика, Динаміка)

У різних тіл вона проявляється у різній степені. Мірою інертності служить величина, яка називається масою. Тіло з більшою масою є більш інертним, і навпаки.

Введемо поняття маси m , визначивши відношення мас двох різних тіл по зворотньому відношенню прискорень, що надаються їм рівними силами: $m_1/m_2 = a_2/a_1$.

Таким чином, порівняння мас двох тіл, на які діє одна і та ж сила, зводиться до порівняння прискорень цих тіл. Взявши деяке тіло за еталон маси, можна порівняти масу будь-якого тіла з цим еталоном.

Одиницею маси в СІ є, як відомо, кілограм (кг).

Як показує досвід, в рамках ньютонівської механіки **маса має наступні дві важливі властивості:**

- 1) маса - величина адитивна, тобто маса складеного тіла дорівнює сумі мас його частин;
- 2) маса тіла як такого - величина постійна, що не змінюється при його русі.

Сила. Повернемося до досліду з порівняння прискорень двох різних тіл під дією однаково розтягнутої пружини. Той факт, що в обох випадках пружина була розтягнута однаково, дозволяє висловити твердження про однаковість дії пружини, або сили з боку пружини.

З іншого боку, сила є причиною прискорення тіла. Прискорення ж різних тіл під дією однієї і тієї ж однаково розтягнутої пружини різні. Тому завдання полягає у тому, щоб так визначити силу, щоб, незважаючи на відмінність прискорень різних тіл у розглянутому досліді, сила була б однією і тією ж. Очевидно, що однаковим в даних дослідах є добуток $m \cdot \vec{a}$. Цю величину і приймають за визначення сили. З огляду на те, що прискорення - вектор, вважатимемо і силу вектором, що збігається за напрямком із вектором прискорення \vec{a} .

Другий закон Ньютона. При дослідному вивченні взаємодії різних матеріальних точок з оточуючими тілами, було виявлено, що вона (взаємодія) залежить від величин, які характеризують як стан самої матеріальної точки, так і стан оточуючих тіл. Це є важливим фізичним фактом, що лежить в основі одного з найбільш фундаментальних узагальнень ньютонівської механіки: добуток маси матеріальної точки на її прискорення є функцією положення цієї точки відносно навколишніх тіл, а іноді також і функцією її швидкості. Цю функцію позначають \vec{F} і називають силою.

Саме в цьому і полягає фактичний зміст другого закону Ньютона, який коротко формулюють як: **добуток маси матеріальної точки на її прискорення дорівнює діючій на неї силі**, тобто: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$.

Це рівняння називають **рівнянням руху матеріальної точки**.

Відразу ж підкреслимо, що другий закон Ньютона і його рівняння отримують конкретний зміст тільки після того, як встановлено вид функції \vec{F} - залежність від величин, що її визначають або, як кажуть, закон сили. Встановлення виду цієї залежності в кожному конкретному випадку є одним із основних завдань фізичної механіки.

Одиницею сили в системі одиниць СІ є Ньютон (Н). 1 Н - це така сила, яка надає тілу масою 1 кг прискорення 1 м/с².

В найбільш загальному вигляді 2-й закон Ньютона записується як рівність сумарної сили, що діє на тіло (або систему тіл) похідній від імпульсу $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ цього тіла по часу:

$$\vec{F}_{\Sigma} = \frac{d\vec{p}}{dt} .$$

В такому вигляді закон справедливий навіть при релятивістському русі тіл. При незмінній масі тіла (що характерно для руху твердих тіл), її можна винести з-під диференціала як константу; тоді 2-й закон Ньютона набуває вигляду:

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} ,$$

який є найбільш широко вживаним при розгляді нерівномірного руху твердих тіл незмінної маси.

Додавання сил. На будь-яку матеріальну точку у конкретних умовах діє, строго кажучи, всього лише одна сила \vec{F} , модуль і напрямок якої визначаються розташуванням цієї точки відносно всіх навколишніх тіл, а іноді і її швидкістю. Але часто буває зручно цю силу \vec{F} представляти як сумарний результат дії окремих тіл, або сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_n$. Дослід показує, що якщо тіла, які є джерелами сил, не впливають один на одне і тому не змінюють свого стану від присутності інших тіл, то результуюча сила є векторною сумою всіх діючих окремо сил: $\vec{F}_{\Sigma} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$ - це т.зв. **принцип суперпозиції**.

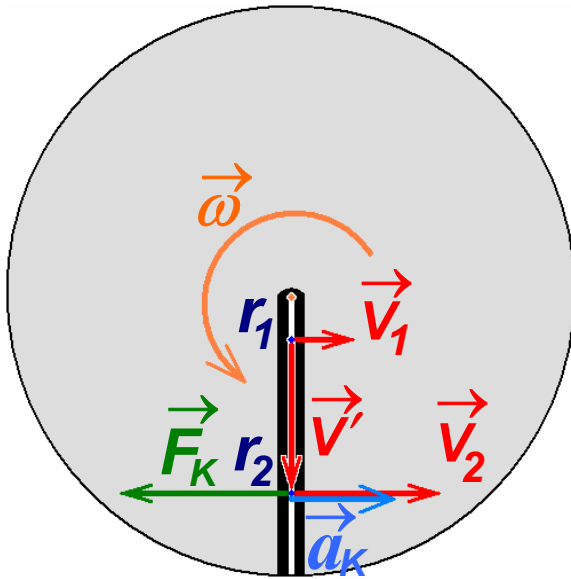
Третій закон Ньютона. У всіх випадках, коли в досліді беруть участь тільки два тіла - перше і друге, і перше тіло надає прискорення другому тілу, то виявляється, що і друге тіло також надає прискорення тілу першому тілу. Звідси можна зробити висновок, що дія тіл одне на одного має характер взаємодії. Ньютон постулював таку загальну властивість всіх сил взаємодії – т.зв. третій закон Ньютона: **сили, з якими дві матеріальні точки діють одна на одну, завжди рівні за модулем і спрямовані в протилежні боки вздовж прямої, що з'єднує ці точки:** $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

Третій закон має обмежене застосування, зокрема, через принцип далекодії класичної (ньютонівської) механіки, під яким мається на увазі нескінченно швидка передача будь-якої взаємодії між тілами. Але оскільки швидкість передачі взаємодії не може перевищувати швидкість світла у вакуумі $c=3 \cdot 10^8$ м/с, то в багатьох випадках така швидкість є співрозмірною із процесами, що відбуваються в фізичних системах і тоді 3-й закон Ньютона не справджується. Втім, у переважній кількості випадків, фізичних явищ, він усе ж справджується із досить високою точністю.

Типи сил. Фундаментальні сили, що лежать в основі механічних явищ – це гравітаційні і електричні, які асоціюються із законом всесвітнього тяжіння: $\vec{F}_g = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^3} \cdot \vec{r}$ і законом Кулона: $\vec{F}_e = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^3} \cdot \vec{r}$ (обидва записані у векторній формі).

Прим. Детальніше різні типи сил та їх особливості будуть розглянуті у наступних лекціях.

НЕІНЕРЦІАЛЬНІ СИСТЕМИ ВІДЛІКУ. Пояснення виникнення сили Коріоліса.



Сила Коріоліса – сила інерції, що виникає при русі тіла відносно неінерціальної системи відліку. Наприклад, якщо неінерціальна система відліку обертається, то її точки, по-різному віддалені від центра (або від осі обертання), рухаються із різними швидкостями. Тіло, рухаючись в неінерціальній (рухомій) системі, опиняється в точках із різними лінійними (тангенціальними) швидкостями обертання цієї системи (або пов'язаного із нею тіла). Різниця швидкостей тіла і системи в різних точках призводять до різних величин зміщення тіла від того напрямку руху, який воно мало би без обертання системи відліку.

Якщо рухоме тіло механічно зв'язане із рухомою неінерціальною системою як, наприклад, на представленій рис. горизонтальній каруселі (вигляд зверху) тіло рухається по направляючій (напр., канавці) вздовж радіуса, то направляюча пружно тисне на тіло, надаючи йому коріолісового прискорення вздовж тангенціального напрямку лінійної швидкості обертання. Через це тангенціальна складова швидкості тіла поступово збільшується від V_1 в точці на відстані r_1 від центра до V_2 в точці r_2 ,

тобто має місце прискорення \mathbf{a}_K , яке називається коріолісовим. Це прискорення в даному випадку викликано пружним тиском стінок радіально направленої канавки на тіло, що по ній рухається. Тіло, відповідно до принципу протидії (відповідно до 3-го закону Ньютона), з такою ж протилежно направленою силою (яка і називається силою Коріоліса) у відповідь тисне на направляючу. Т.ч., коріолісове прискорення і коріолісова сила виявляються направленими протилежно.

$$\mathbf{V}_1 = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_1 ; \quad \mathbf{V}_2 = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_2 ; \quad \mathbf{a}_K = 2 \cdot [\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{V}'] ; \quad \mathbf{F}_K = -2 \cdot m \cdot [\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{V}'] = 2 \cdot m \cdot [\mathbf{V}' \cdot \boldsymbol{\omega}] .$$

$$\vec{V} = [\vec{\omega} \times \vec{r}] \quad \vec{F} = 2m \cdot [\vec{V}' \times \vec{\omega}]$$

ПРИКЛАДИ ДІЇ СИЛИ КОРІОЛІСА

Приклад 1. Як діятиме сила Коріоліса на людину, яка проходить вперед по салону автобуса, що рухається навколо площі по круговій траєкторії?

Формула для перетворення прискорення \vec{a} в нерухомій системі відліку:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + 2 \cdot [\vec{\omega} \times \vec{v}'] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]] .$$

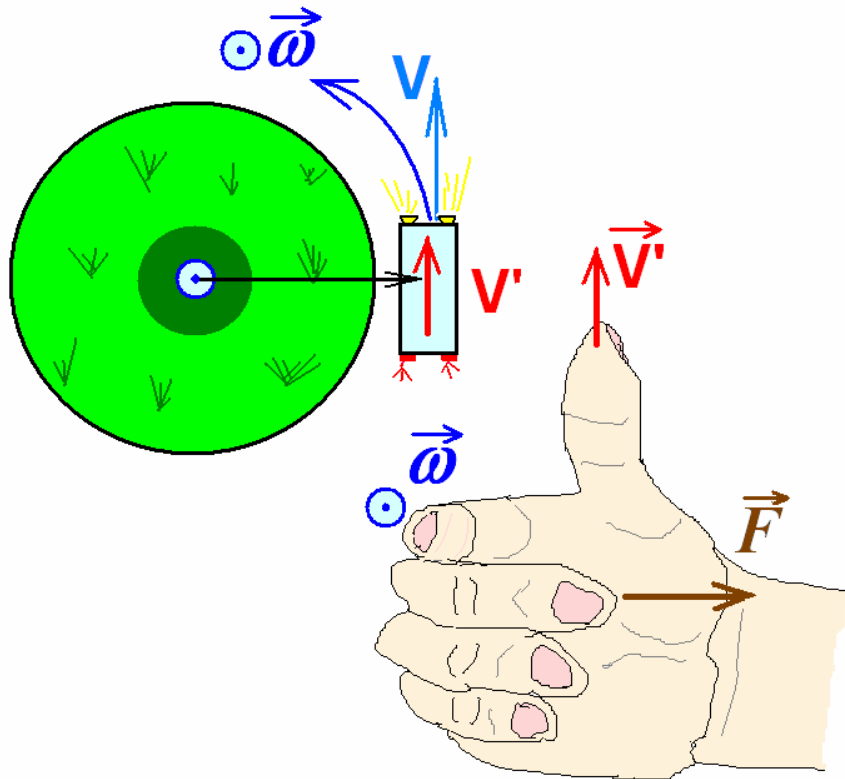
Сила Коріоліса дорівнює:

$$\vec{F}_K = -2m \cdot [\vec{\omega} \times \vec{v}'] = 2m \cdot [\vec{v}' \times \vec{\omega}]$$

і направлена протилежно коріолісовому прискоренню:

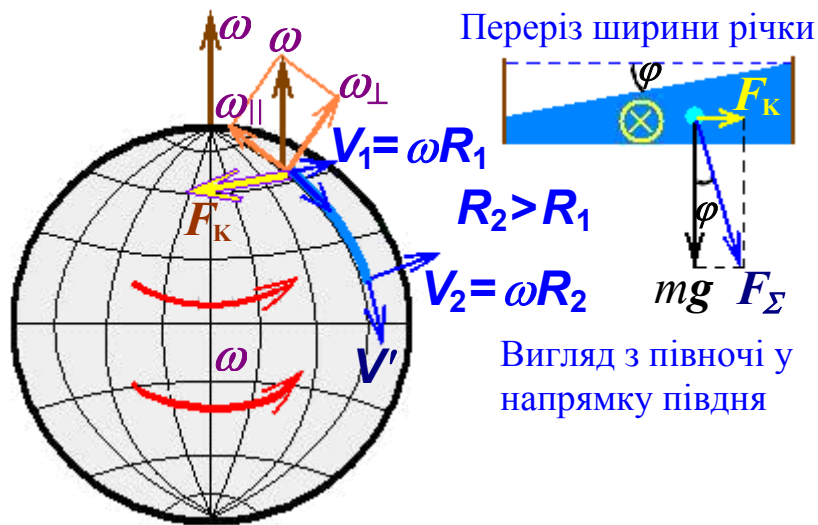
$$\vec{a}_K = 2 \cdot [\vec{\omega} \times \vec{v}'] .$$

Очевидно, що в даному випадку коріолісова сила буде додаватись до відцентрової в радіальному напрямку, оскільки фактично людина збільшує загальну швидкість свого руху по колу навколо площі.



Приклад 2.

Швидкість течії річки 2 км/год. Який кут нахилу поверхні води до горизонту на широті 50° п.ш.?



Розв'язок

Води річки, що протікає у північній півкулі із півночі на південь, зазнає коріолісового прискорення внаслідок того, що вона перетікає з високих (північних) широт, де швидкість її (тобто води) обертання разом із Землею менша, до південних широт із більшою лінійною (тангенціальною) швидкістю обертання внаслідок більшої віддаленості точок поверхні Землі у південних широтах від земної осі. Таким чином, зміна (збільшення) швидкості тангенціального руху води означає прискорення, якого вона (вода) набуває внаслідок додаткового тиску з боку одного з берегів. Через тиск води у відповідь, берег (правий у північній півкулі) постійно підмивається і набуває обривистого рельєфу. Протилежний берег навпаки, стає переважно зглаженим і пологим через стікання води з нього.

Крім розмивання берегів, дія сили Коріоліса також призводить до поперечного нахилу поверхні води, визначити який можна наступним чином. На вибраний невеликий об'єм води діє, крім сили тяжіння $m\vec{g}$, ще і сила Коріоліса – $\vec{F} = 2m \cdot [\vec{V}' \times \vec{\omega}]$, направлена горизонтально в поперечному напрямку до течії. Поверхня води буде перпендикулярною до рівнодіючої цих сил, яка утворює кут φ з вертикальним напрямком (силою тяжіння).
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_K}{mg} = \frac{2 \cdot V' \cdot \omega \cdot \sin \varphi}{g}.$$

$\varphi \sim 1,3''$. Отже, при ширині річки 100 м «коріолісова» різниця рівнів води на берегах не перевищить товщини леза - 0,1 мм.

Методи розв'язку простих диференціальних рівнянь.

Диференціальним називається рівняння, в якому деяка функція знаходиться під знаком похідної (або диференціалу). Ця функція може бути невідомою і задачею розв'язку такого рівняння є відшукування цієї функції.

1. Найбільш простим випадком диференціального рівняння є рівняння рівності деякої функції $y(x)$ своїй похідній - $y'(x)$, тобто: $y(x)=y'(x)$.

Розв'язком такого рівняння може бути експоненціальна функція $y(x)=e^x$ ($e=2,71828..$ – основа натурального логарифма), похідна від якої дорівнює самій цій функції, а в загальному вигляді експонента може бути ще домножена на деяку константу C :

$$y(x)=C \cdot e^x.$$

Ця константа C може бути розмірною величиною (що важливо для фізичних задач) і для її однозначного визначення необхідні додаткові умови.

2. Якщо перенести обидві функції в один бік рівняння і поставити між ними знак додавання (+) : $y(x)+y'(x)=0$, то очевидно, що розв'язком такого рівняння буде функція $y(x)=C \cdot e^{-x}$, що легко перевіряється підстановкою.

3. Також зовсім нескладно підібрати розв'язок для більш складної форми диференціального рівняння: $y'(x)+A \cdot y(x)=0$ (A – деяка стала). Тут необхідно підібрати функцію, яка при диференціюванні дасть додатково множник A . Очевидно, що такою функцією-розв'язком може бути $y(x)=C \cdot e^{-Ax}$.

Перевіряємо: $y'(x)=(-A) \cdot C \cdot e^{-Ax}$, яка в сумі із заданою функцією $y(x)$, помноженою на $(+A)$, дасть 0.

4. Ускладнимо далі запис диференціального рівняння $y'(x)+A \cdot y(x)=B$ (B – деяка стала). Тепер методом підбору знайти розв'язок трохи складніше, але також можна підібрати функцію, напр. такого вигляду: $y(x)=\frac{B}{A} \cdot (1 - e^{-Ax})$.

Перевіряємо: $y'(x)=(-A) \cdot \left(-\frac{B}{A} \cdot e^{-Ax} \right) = B \cdot e^{-Ax}$ і підставляючи у наведене вище диференціальне рівняння, переконуємось у справедливості рівності:

Конспект лекцій з курсу Механіка (Лекція 2 Кінематика, Динаміка)

$$B \cdot e^{-Ax} + A \cdot \left[\frac{B}{A} \cdot (1 - e^{-Ax}) \right] \equiv B.$$

5. Стандартною формою лінійного (немає функцій у квадраті, кубі тощо) диференціального рівняння першого ступеню (входять тільки перші похідні) є:

$$y'(x) + A(x) \cdot y(x) + B(x) = 0,$$

де $A(x)$ і $B(x)$ є функціями незалежної змінної x .

Таке рівняння має точний розв'язок: $y(x) = \left[\int B(x) \cdot e^{\int A(x) dx} + C_0 \right] \cdot e^{-\int A(x) dx}$ (C_0 – стала інтегрування), що дозволяє розв'язувати до кінця лінійні диф. рівняння 1-го порядку.

6. Лінійним диференціальним рівнянням другого ступеню є, наприклад, т.зв. рівняння вільних коливань: $\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0$, де x – координата, яка є функцією часу $x(t)$, а через \ddot{x} позначено другу похідну по часу від змінної координати $x(t)$.

Розв'язок такого рівняння також можна легко отримати методом підбору, вибравши як розв'язок гармонічну функцію (\sin або \cos) від часу і додатково врахувавши, що при диференціюванні двічі має з'явитись циклічна частота коливання ω : $x(t) = X_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, де φ – стала початкова фаза, а X_0 – амплітудне значення координати $x(t)$.

7. Дещо іншим методом розв'язку диференціальних рівнянь є метод рознесення змінних*.

Прим. * – строго кажучи, назва «метод» застосована умовно, оскільки під цим мається на увазі елементарна математична операція, що виконується для зручності початківців, які освоюють роботу з диф. рівняннями.

Наприклад, рівняння 2-го закону Ньютона для тіл незмінної маси:

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

має дві змінні величини - \vec{v} та \vec{F} , які можна рознести по різні боки рівняння $m \cdot d\vec{v} = \vec{F} \cdot dt$ і після цього його проінтегрувати:

$$m \cdot \int_{v_1}^{v_2} d\vec{v} = \vec{F} \cdot \int_{t_1}^{t_2} dt, \text{ отримавши в явному вигляді залежність } v(t): m \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{F} \cdot (t_2 - t_1) \text{ або } \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \frac{\vec{F}}{m} \cdot (t_2 - t_1).$$

Конспект лекцій з курсу Механіка (Лекція 2 Кінематика, Динаміка)

8. Якщо в умові сила задана як функція, напр., швидкості v : $F = \alpha \cdot v$, то рознесення змінних лише незначно ускладнюється (векторні величини записані як скаляри для спрощення):

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Рознесемо} & & \text{Розділили та помножили} & & \text{Інтегруємо} & & \text{Результат} \\
 \text{змінні у} & & \text{обидві частини рівняння} & & \text{отримане рівняння:} & & \text{інтегрування} \\
 \text{рівнянні:} & \Downarrow & \text{відповідно на } v \text{ і } dt: & \Downarrow & & \Downarrow & \text{з підстановкою:} \\
 & & & & & & \Downarrow \text{ Виразимо } v \text{ як функцію } t: \\
 m \cdot \frac{dv}{dt} = \alpha \cdot v & \Rightarrow & m \cdot \frac{dv}{v} = \alpha \cdot dt & \Rightarrow & m \cdot \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = \alpha \cdot \int_{t_1}^{t_2} dt & \Rightarrow & \ln \frac{v_2}{v_1} = \frac{\alpha}{m} \cdot (t_2 - t_1) & \Rightarrow & v_2 = v_1 \cdot e^{\frac{\alpha}{m} \cdot (t_2 - t_1)}
 \end{array}$$

↑

9. Ще трохи складнішим випадком є залежність сили від іншої (третьої) змінної, наприклад, пройденого шляху: $F = \beta \cdot s$. Тоді рівняння 2-го закону Ньютона виглядатиме як: $m \cdot \frac{dv}{dt} = \alpha \cdot s$ і в ньому вже неможливо рознести змінні як у

попередньому випадку тому що цих змінних вже 3. Але, знаючи залежність між цими величинами – v , s та t : $v = \frac{ds}{dt}$, можна

позбутись однієї з них, зокрема в даному випадку найбільш ефективно виразити $dt = \frac{ds}{v}$ і підставити його в рівняння 2-го

закону Ньютона: $m \cdot \frac{v \cdot dv}{ds} = \alpha \cdot s$. Таким чином, отримане рівняння має тільки 2 змінні - v та s , які вже можуть бути рознесені по різні боки рівняння: $m \cdot v \cdot dv = \alpha \cdot s \cdot ds$ і проінтегровані (кожна частина рівняння по своїй змінній):

$$m \cdot \int_{v_1}^{v_2} v \cdot dv = \alpha \cdot \int_{s_1}^{s_2} s \cdot ds \Rightarrow$$

Після чого отримаємо первісні для підстановки граничних значень: $m \cdot \frac{v^2}{2} \Big|_{v_1}^{v_2} = \alpha \cdot \frac{s^2}{2} \Big|_{s_1}^{s_2}$ і після підстановки (верхньої граничної

межі мінус вираз із нижньою граничною межею) отримаємо звичайне рівняння: $\frac{m}{2} \cdot (v_2^2 - v_1^2) = \frac{\alpha}{2} \cdot (s_2^2 - s_1^2)$, з якого вже можемо отримувати в явному вигляді необхідні аналітичні залежності величин.

Конспект лекцій з курсу Механіка (Лекція 2 Кінематика, Динаміка)

10. Також типовим випадком, що нерідко зустрічається в задачах з Механіки, є залежність сили від двох доданків, один з яких F_0 - константа, а інший – залежний від якоїсь із змінних величин. Наприклад, $F = F_0 + \alpha \cdot v$; тоді рівняння 2-го закону Ньютона набуде вигляду: $m \cdot \frac{dv}{dt} = F_0 + \alpha \cdot v$ і в ньому вже неможливо буде розділити змінні так, як у попередніх випадках. Але проблема в даному випадку просто вирішується діленням обох частин рівняння на всю праву його частину і множенням на dt :

$$m \cdot \frac{dv}{F_0 + \alpha \cdot v} = dt .$$

Після такого рознесення змінних рівняння вже може бути проінтегроване:

$m \cdot \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{F_0 + \alpha \cdot v} = \int_{t_1}^{t_2} dt$, в результаті чого отримаємо логарифм знаменника в лівій частині із врахуванням винесення множника

α : $\ln \frac{F_0 + \alpha \cdot v_2}{F_0 + \alpha \cdot v_1} = \frac{\alpha}{m} \cdot (t_2 - t_1)$, і звідки вже, позбувшись логарифма: $F_0 + \alpha \cdot v_2 = (F_0 + \alpha \cdot v_1) \cdot e^{\frac{\alpha}{m} \cdot (t_2 - t_1)}$, можна виражати явно величини одні через інші в залежності від постановки задачі.