

навчальним  
**3 Новим роком!**

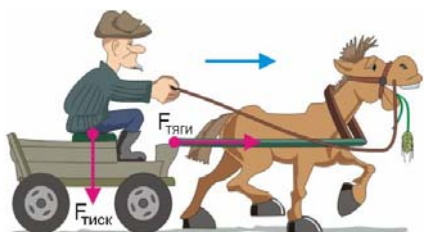
# Механіка



**Основні відомості з курсу Механіка (короткий конспект лекцій).**

**Лектор – доцент Сохацький Володимир Петрович**

## **Лекція 1. Вступ до курсу Механіка. Векторний опис руху.**



**П  
Л  
А  
Н**

- I. 1.** Вступ. Предмет механіки, особливості курсу, основні означення.
- 2.** Векторний опис руху. Основні операції з векторами: задання векторів координатами, ортами, модуль вектора, додавання, віднімання, скалярний та векторний добутки, похідна та інтеграл від вектора, диференціювання (інтегрування) координат.
- II. 3.** Методи опису руху матеріальної точки.

### **I. 1. Вступ.**

**Механіка – розділ фізики, що вивчає механічний рух тіл та взаємодію між ними.**

Історично з механіки починалась і метафізика, і сучасна фізика, оскільки саме механічні явища були першими, які людина змогла якось систематизувати, виявити закономірності, пояснити причини їх прояву і зрозуміти, яким чином різні фактори можуть на ці явища впливати.

Нині Механіка, незважаючи на деяку свою «архаїчність», є досить сучасним розділом науки, техніки, технологій. На основі законів класичної Механіки працює безліч механізмів будь-якого масштабу - від гігантських споруд до нанорозмірних об'єктів.

**Конспект лекцій з курсу Механіка (Лекція 1). Лектор – Сохацький В.П.**

Методи (закони, формули) Механіки є доволі ефективними і застосовуються навіть в областях із квантовими та релятивістськими ефектами. Зважаючи на особливості релятивістських і квантових ефектів, надалі будемо поділяти Механіку на класичну (або ньютонівську), релятивістську і квантову.

Особливістю даного курсу Механіки є векторний опис руху і, головне, - розгляд нерівномірного руху, для опису якого застосовуються диференціальні рівняння і їх розв'язки методами диференціального та інтегрального числення.

### **Роль Механіки в курсі Загальної фізики:**

1. Закони і методи Механіки є основою для усього курсу Загальної фізики, Теоретичної механіки, вони є складовою частиною багатьох фізичних, хімічних та біологічних процесів.
2. Освоєння методик розв'язку задач Механіки - необхідна умова розв'язку задач із будь-якого розділу Загальної фізики.

### **Задачі Механіки:**

1. Вивчення різних рухів та узагальнення їх характеристик у вигляді законів, за допомогою яких можна передбачувати стани системи у майбутньому (закони динаміки).
2. Знаходження спільних властивостей різних систем незалежно від їх типу, характеру взаємодії з іншими системами тощо (закони збереження).

### **Основні означення Механіки:**

1. **Тіло відліку** – тіло, що служить для визначення положення інших тіл; з ним пов'язують систему координат.
2. Тіло відліку разом із системою координат і синхронізованими між собою годинниками утворюють **систему відліку**.
3. Ньютонівська механіка оперує абсолютними простором і часом.
4. **Матеріальна точка** – тіло з нехтовно малими розмірами для заданих умов.
5. **Абсолютно тверде тіло** – система матеріальних точок, відстані між якими не змінюються у процесі руху.
6. **Радіус-вектор**: **полярний** вектор, що бере початок в точці відліку, пов'язаний із тілом відліку і направлений в точку спостереження або на задане точкове тіло. Крім векторів полярного типу існують ще **аксиальні** вектори, які характеризують обертальний рух і направлені перпендикулярно до площини обертання точки або тіла в напрямку за правилом правого гвинта.

**Основні розділи Механіки:** 1. Кінематика. 2. Динаміка. 3. Статика.

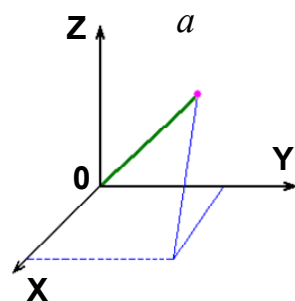
Додатково виділяються в окремі розділи: а) закони збереження; б) коливальний рух; в) релятивістський рух.

**Конспект лекцій з курсу Механіка (Лекція 1). Лектор – Сохацький В.П.**

## Рекомендована література з курсу «Загальна фізика. Механіка».

- [1]. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. К.: Вид-во “Техніка”, 1999. - 536 с.
- [2]. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. М., 1988. - 416 с.
- [3]. Коваленко В.Ф. Загальна фізика у прикладах, запитаннях і відповідях: Механіка. Київ, ВПЦ “Київський ун-т”, 2011.-224с.
- [4]. Слободянюк О.В. “Механіка”. ВПЦ “Київський університет”, 2016. - 478 с.
- [5]. Сивухин Д.В. “Общий курс физики. Том I. Механика”, М., Наука, 1979.- 520 с.
- [6]. Савельев И.В. “Курс общей физики”, т. 1, т2, т.3. М., 1987.
- [7]. Матвеев О.М. “Механіка і теорія відносності”, Київ, “Вища школа”, 1993.-320с.
- [8]. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. М., 2006. - 310 с.
- [9]. Яворський Б.М., Детлаф А.А. та ін. Курс фізики. Київ, “Вища школа”, 1970.-356с.

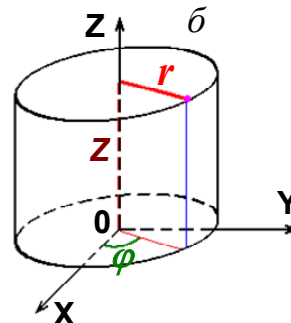
Найбільш поширені системи координат: Декартова (а), Циліндрична (б), Сферична (в).



Координати:

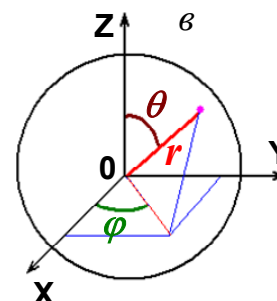
**X, Y, Z**

Зв'язок із декартовими координатами:



**r, phi, Z,**

$$\begin{aligned} X &= r \cdot \cos \varphi \\ Y &= r \cdot \sin \varphi \\ Z &= Z \end{aligned}$$



**r, phi, theta**

$$\begin{aligned} X &= r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ Y &= r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ Z &= r \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

Перехід від декартових до циліндричних:  $r = \sqrt{X^2 + Y^2}$ ;  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{Y}{X}$  та сферичних:  $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ ;  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{Y}{X}$ ;  $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{Z}$   
координат.

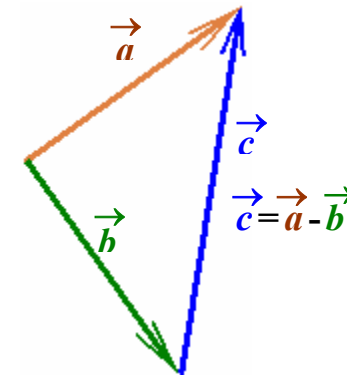
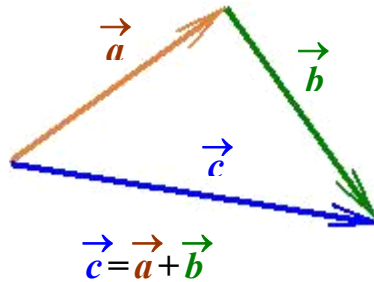
## 2. ОПЕРАЦІЇ З ВЕКТОРАМИ.

### 1. Задання векторів декартовими координатами:

$$\vec{a}(a_x, a_y, a_z); \vec{b}(b_x, b_y, b_z)$$

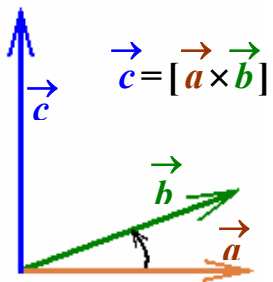
2. Задання векторів ортами. Запис вектора у вигляді суми ортів (векторів одиничної довжини, направлених вздовж відповідних осей  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$  :  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  :  $\vec{c} = c_x \cdot \vec{i} + c_y \cdot \vec{j} + c_z \cdot \vec{k}$ , де  $c_x, c_y, c_z$  - декартові координати вектора  $\vec{c}$  .

3. Додавання. Віднімання векторів.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$  .



4. Скалярний добуток.  $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ ;  $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$

5. Векторний добуток.  $[\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{c}$ , де модуль вектора  $\vec{c}$  :  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$ , а сам вектор  $\vec{c}$  направлений перпендикулярно до



площини, в якій лежать вектори  $\vec{a}$  та  $\vec{b}$  за правим гвинтом при повороті ручки гвинта (буравчика) від вектора  $\vec{a}$  до вектора  $\vec{b}$  .

Або загальним правилом визначення напрямку вектора  $\vec{c}$  є так звана «права трійка» - розчепірені 3 перших пальці правої руки – великий, вказівний та середній палець відповідають послідовно векторам  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , отже результуючий вектор векторного добутку  $\vec{c}$  буде направлений вздовж третього (середнього) пальця.

Запис вектора  $\vec{c}$  - результата векторного добутку - у вигляді визначника третього порядку:

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k}, \text{ або } \vec{c} = (a_y \cdot b_z - b_y \cdot a_z) \cdot \vec{i} - (a_x \cdot b_z - b_x \cdot a_z) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - b_x \cdot a_y) \cdot \vec{k}.$$

Отже, декартовими координатами вектора  $\vec{c}$  будуть:  $\vec{c}_x = a_y \cdot b_z - b_y \cdot a_z$ ;  $\vec{c}_y = a_x \cdot b_z - b_x \cdot a_z$ ;  $\vec{c}_z = a_x \cdot b_y - b_x \cdot a_y$ .

## 6. Диференціювання векторів (знаходження похідної векторної функції).

**Радіус-вектор**, означення: полярний вектор, що бере початок в точці відліку, пов'язаний із тілом відліку і направлений в точку спостереження або на задане точкове тіло. Радіус-вектор може бути заданий своїми координатами:  $\vec{r}(r_x, r_y, r_z)$ .

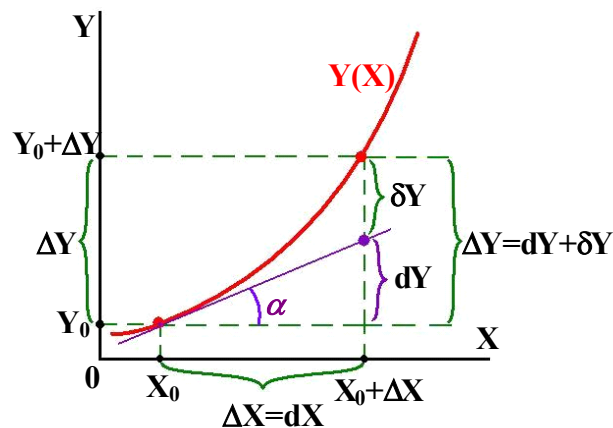
**Матеріальна точка** – тіло, розмірами якого можна знехтувати в даних умовах.

Тіло відліку, пов'язана з ним система координат і синхронізовані годинники утворюють **систему відліку**.

Похідна від радіус-вектора - це границя відношення приросту функції (радіус-вектора, як функції часу) до приросту аргумента (часу), коли останній прямує до 0:  $\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Модуль радіус-вектора (відстань від точки відліку до точки спостереження):  $|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$ .

**Диференціал** функції - це нескінченно малий лінійний приріст  $dY$  функції  $Y(X)$  відносно приросту аргумента. Нескінченно малий приріст аргумента (незалежної змінної  $X$ ) -  $\Delta X$  приймається диференціалом аргумента  $dX$ :  $\Delta X = dX$ . Приріст функції  $\Delta Y$ , відповідний приросту аргумента  $\Delta X$ , складатиметься з лінійної  $dY$  та нелінійної  $\delta Y$  частин:  $\Delta Y = dY + \delta Y$ . Зважаючи на геометричний зміст похідної, як тангенса кута нахилу дотичної, можна записати:  $Y'(X) = \tan \alpha = dY/dX$ , звідки з очевидністю витікає основна формула диференціального числення:



$$dY = Y'(X) \cdot dX,$$

зміст якої полягає в тому, що лінійний приріст (диференціал) функції пропорційний приросту аргумента, помноженому на похідну функції по цьому аргументу. Тобто, чим

більша величина похідної (а отже, чим більший нахил кривої графіка і, відповідно, дотичної до неї), тим швидше зростає функція відносно приросту аргумента і навпаки, чим менша похідна, тим повільніше зростає функція на визначеному (нескінченно малому) відрізку приросту аргумента.

**Повним диференціалом** функції багатьох змінних називається сума добутків частинних похідних по відповідних змінних на диференціали відповідних змінних:  $dY(X_1, X_2, \dots, X_n) = (\partial Y / \partial X_1) \cdot dX_1 + (\partial Y / \partial X_2) \cdot dX_2 + \dots + (\partial Y / \partial X_n) \cdot dX_n$ , де  $\partial Y / \partial X_n$  - частинна похідна по  $n$ -й змінній (яка береться по зазначеній змінній, при цьому інші змінні вважаються сталими).

Похідною від радіус-вектора по часу є швидкість:  $\vec{v} = \vec{r}'(t) \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}$  (похідна записана у вигляді відношення диференціалів).

Швидкість є вектором зі своїми координатами, які є похідними від відповідних координат радіус-вектора по часу:  $\vec{v}(v_x, v_y, v_z) = \vec{v}(r_x', r_y', r_z')$ . Таким чином, щоб знайти вектор, який є похідною від заданого вектора, необхідно продиференціювати всі його координати і отриманий вектор з відповідними координатами-похідними і буде результатом диференціювання вектора.

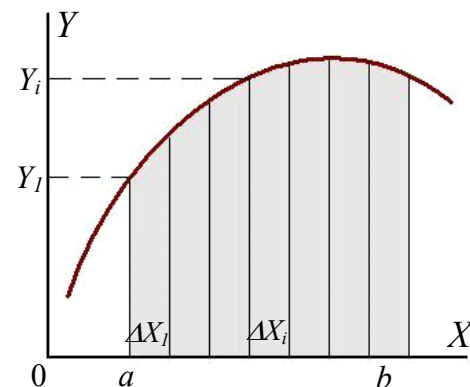
Справедлива і обернена операція: для інтегрування векторної функції необхідно проінтегрувати (знайти первісну) від всіх його координат по часу і записати т.ч. вектор з координатами-первісними, який і буде векторною інтегральною функцією від заданого початково вектора.

\* \* \*

Геометричний зміст інтеграла  $\int_a^b f(X) \cdot dX = F(X) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ : площа під кривою (функцією)  $Y=f(X)$ ,  $F(X)$  – первісна від функції  $f(X)$ .

Площа під кривою визначається як сума площ прямокутників, на які розбито всю ділянку від  $a$  до  $b$ :  $S = Y_1 \cdot \Delta X + Y_2 \cdot \Delta X + \dots + Y_n \cdot \Delta X = \sum_{i=1}^n Y_i \cdot \Delta X$ .

При розбитті ділянки від  $a$  до  $b$  на нескінченну кількість нескінченно малих інтервалів  $\Delta X \rightarrow dX$ , площею під кривою  $S$  (сумою множників інтервалів  $\Delta X$  на відповідні послідовні значення функції  $Y_i$ ) буде інтеграл:  $S = \int_a^b f(X) \cdot dX = F(X) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ .



## II. Методи опису руху матеріальної точки:

1. Векторний: положення точки знаходиться із залежності від часу радіус-вектора  $\vec{r}(t)$ .
2. Координатний: положення точки знаходиться із залежності її координат від часу  $\vec{r}(r_x(t); r_y(t); r_z(t))$ .
3. “Природний” (метод узагальнених координат): положення точки визначається як дугова координата  $l(t)$  на відомій траєкторії її руху.

**Кінематика твердих тіл.** Основні типи руху: поступальний та обертальний навколо осі. Додатково що виділяють плоский рух, обертальний рух навколо точки та вільний (складний) рух.

**1. Поступальний рух** – такий рух, при якому будь-яка пряма, що зв’язує дві точки тіла, весь час залишається паралельною сама собі.

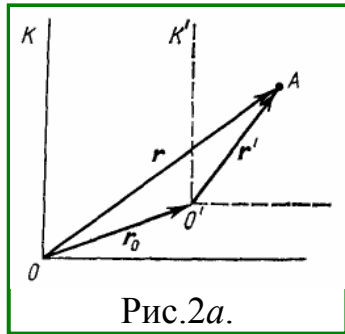


Рис.2а.

При введенні додаткової рухомої системи координат (рис.2а), радіус-вектори в нерухомій  $\vec{r}$ , рухомій системах  $\vec{r}'$  і радіус-вектор самої рухомої системи  $\vec{r}_0$  відносно нерухомої зв’язані співвідношенням:  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$ .

Рис.2б ілюструє мале зміщення  $d\vec{r}$  точки  $A$  внаслідок руху, яке є сумою векторів  $d\vec{r}_0$  та  $d\vec{r}'$ :  $d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}'$ , тобто мале зміщення, визначене в нерухомій системі, дорівнює сумі величин зміщення системи і зміщення точки  $A$  в системі

рухомій.

Якщо у виразі для  $d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}'$  кожен доданок розділити на  $dt$ , то отримаємо формулу перетворення швидкості:  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$ , а продиференціювавши останній вираз, отримаємо перетворення прискорень:  $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'$ , де швидкість  $\vec{v}$  та прискорення  $\vec{a}$  без індексів відносяться до нерухомої системи, з підстрочним

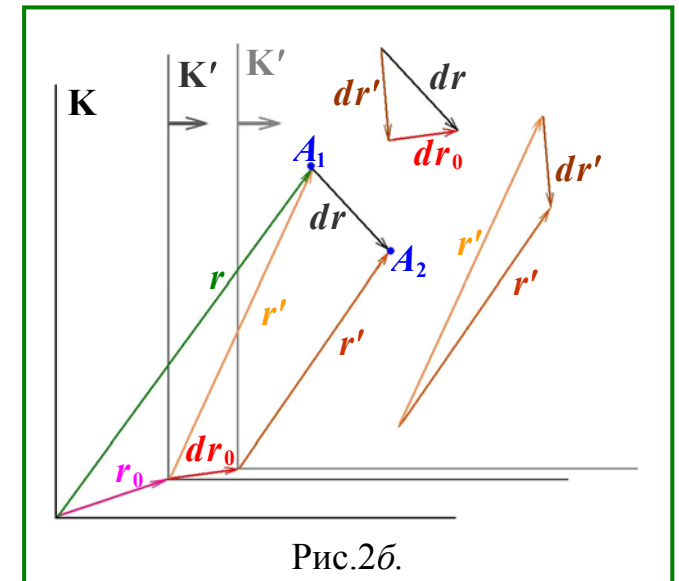
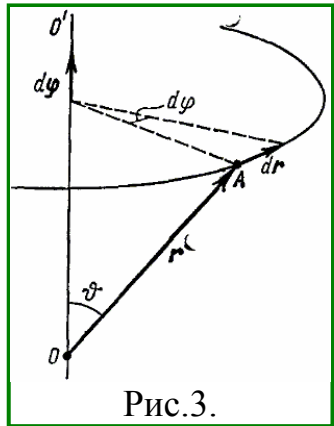


Рис.2б.



індексом «0» – до параметрів самої рухомої системи в нерухомій і з індексом штрих – до параметрів рухомої системи.

## 2. Обертальний рух рухомої системи відносно нерухомої осі.



З рис.3 видно, що лінійне переміщення кінця радіус-вектора пов'язано із кутом повороту аксіального вектора  $d\varphi$  т.ч. -  $|d\vec{r}| = \vec{r} \cdot \sin \theta \cdot d\varphi$ , або у векторному вигляді:  $d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \times \vec{r}]$ , причому використання кута  $d\vec{\varphi}$  як вектора коректно лише при малих значеннях кутів  $d\varphi$ . Якщо в цій формулі розділити обидві частини рівняння на  $dt$ , то отримаємо:

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}], \quad \text{оскільки } d\vec{r}/dt = \vec{v} \quad \text{і} \quad d\vec{\varphi}/dt = \vec{\omega}.$$

Введемо вектори кутової швидкості та кутового прискорення:  $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$  (рад/с) та  $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$  (рад/с<sup>2</sup>).

Продиференціювавши вираз для швидкості, отримаємо вектор повного прискорення:

$$\vec{a} = [\vec{\beta} \times \vec{r}] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]].$$

Отже, повне прискорення при русі по криволінійній траєкторії складається з тангенціального прискорення (вздовж напрямку дотичної до траєкторії) -  $\vec{a}_\tau = [\vec{\beta} \times \vec{r}]$  та нормального (тобто перпендикулярного до дотичної у вибраній точці) прискорення –  $\vec{a}_n = [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]]$ .