

## Лекція 8. Тема: Коливальний рух



- П** I. 1. Вільні коливання.  
**Л** 2. Додавання коливань.  
**А** II. 3. Затухаючі коливання.  
**Н** 4. Вимушені коливання.

**Вільні коливання.** Гармонічними називають коливання, в яких деяка величина  $x$  (наприклад, зміщення з положення рівноваги) змінюється з часом  $t$  за законом:

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

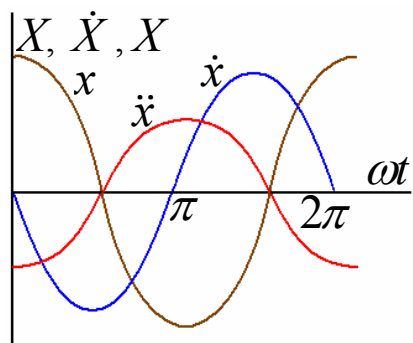
Де  $A$  – амплітуда,  $(\omega t + \varphi)$  – фаза,  $\varphi$  – початкова фаза,  $\omega$  – циклічна або кругова частота коливань. Ця частота пов'язана із періодом  $T$  і лінійною частотою  $f$  як  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ .  
(2)

Продиференціювавши вираз (1) по часу, можна знайти швидкість і прискорення:

$$V = \dot{x} = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi + \pi/2), \quad (3)$$

$$a = \ddot{x} = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi) = A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi + \pi). \quad (4)$$

Т. ч., швидкість і прискорення також змінюються за гармонічним законом з амплітудами відповідно  $A\omega$  та  $A\omega^2$ . При цьому швидкість випереджує зміщення по фазі на  $\pi/2$ , а прискорення – на  $\pi$ , тобто знаходиться у протифазі зі зміщенням. Наочно фазовий зсув можна зобразити на часовій діаграмі (рис.).



Співставивши вирази (1) і (4), можна відзначити їх відмінність лише на множник  $-\omega^2$ , а отже,

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0 \quad (5)$$

- отримаємо диференціальне рівняння вільних гармонічних коливань. Його розв'язок має дві довільні сталі  $A$  та  $\varphi$ , які для кожного конкретного випадку визначаються початковими умовами – зміщенням  $x_0$  і швидкістю  $\dot{x}_0$  в початковий

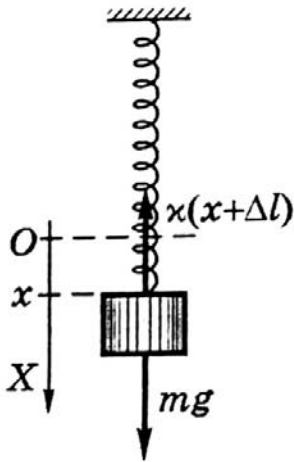
момент часу  $t=0$ :  $x_0 = A \cdot \cos \varphi$ ,  $\dot{x}_0 = -A \cdot \omega \cdot \sin \varphi$ . Звідси і знаходимо ці

константи:  $A = \sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0/\omega)^2}$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}$ .

## Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження, Лекція 8)

Якщо при складанні рівняння динаміки руху виявляється, що воно може бути зведене до вигляду (5), то це означає, що система, яка розглядається, здійснює гармонічні коливання із круговою частотою, квадрат якої дорівнює коефіцієнту при  $x$ .

Наведемо кілька прикладів коливальних рухів.



**Важіль на пружині.** Нехай важіль маси  $m$  підвішений на невагомій пружині жорсткості  $k$ , здійснює вертикальні коливання (рис.). Візьмемо початок  $O$  осі  $X$  в положенні рівноваги, де  $mg = k \cdot \Delta l$ , де  $\Delta l$  - розтягнення пружини в цьому положенні. Тоді, згідно з основним рівнянням динаміки,

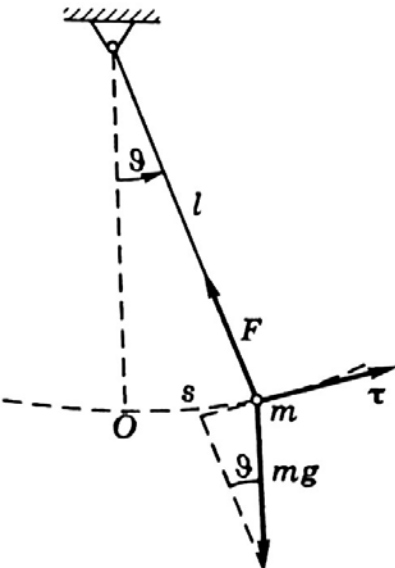
$$m\ddot{x} = mg - k \cdot (x + \Delta l) = -kx, \text{ або}$$

$$\ddot{x} + (k/m) \cdot x = 0.$$

При співставленні цього рівняння з (5) можна побачити, що це рівняння гармонічного осцилятора, який коливається біля положення рівноваги з частотою  $\omega$  і періодом  $T$ , рівними

$$\omega = \sqrt{k/m}, \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{m/k}. \quad (8)$$

**Математичний маятник.** Матеріальна точка маси  $m$ , підвішена на нерозтяжній нитці довжиною  $l$  здійснює коливання у вертикальній площині (рис.). Для опису його руху можна застосувати рівняння динаміки в проекції на тангенціальний напрямок, який збігається з позитивним напрямком відліку дугової координати  $s$  (величина алгебраїчна, на рис. зображений момент, коли  $s > 0$ ). Початок відліку  $s$  візьмемо в положенні рівноваги - в точці  $O$ .



Маючи на увазі, що  $s = l \cdot \theta$ ,  $\ddot{s} = l \cdot \ddot{\theta}$  і що проекція сили натягу  $F_\tau = 0$ , запишемо:  $m\ddot{s} = ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta$ , або

$$\ddot{\theta} + (g/l) \cdot \sin \theta = 0.$$

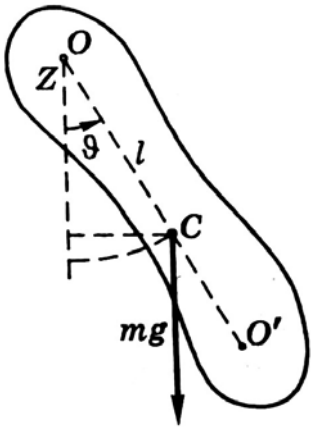
Із співставлення з (5) бачимо, що це рівняння, взагалі кажучи, не є рівнянням гармонічного осцилятора, оскільки в ньому замість зсуву  $\theta$  знаходиться  $\sin \theta$ . Втім, при малих коливаннях, коли  $\sin \theta \approx \theta$ , рівняння збігається з (5):  $\ddot{\theta} + (g/l) \cdot \theta = 0$ , звідки

випливає, що частота  $\omega$  і період  $T$  математичного маятника, що здійснює малі коливання, рівні:

$$\omega = \sqrt{g/l}, \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{l/g}. \quad (9)$$

**Фізичний маятник.** Це тверде тіло, що здійснює коливання навколо нерухомої осі, жорстко пов'язаної з тілом. Розглянемо коливання під дією сили тяжіння (рис.).

## Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження, Лекція 8)



Виберемо позитивний напрямок відліку кута  $\theta$  проти годинникової стрілки (вісь  $Z$  спрямована до нас). Тоді проекція моменту сили тяжіння на вісь  $Z$  запишеться як  $M_Z = -mgl \cdot \sin \theta$  і рівняння динаміки обертального руху твердого тіла набуде вигляду  $I \cdot \ddot{\theta} = -mgl \cdot \sin \theta$  де  $I$  - момент інерції тіла відносно осі  $O$ ,  $l$  - відстань між віссю  $O$  і центром мас  $C$ . Обмежимося розглядом малих коливань, при яких  $\sin \theta \approx \theta$ . При цій умові попереднє рівняння можна записати так:

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I} \cdot \theta = 0 . \quad (10)$$

Коливання будуть гармонічними з частотою  $\omega$  і періодом  $T$ , рівними:

$$\omega = \sqrt{mgl/I} \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{I/mgl} . \quad (11)$$

Таку ж частоту матиме математичний маятник довжини  $l_{np} = I/ml$ , яку називають приведеною довжиною фізичного маятника.

Точку  $O'$  (рис.), яка знаходиться на прямій, що проходить крізь точку підвісу  $O$  і центр мас  $C$ , і відстоїть від точки  $O$  на відстані  $l_{np}$  називають центром гойдання фізичного маятника. Центр гойдання  $O'$  має визначну властивість: якщо маятник перевернути і змусити здійснювати малі коливання навколо осі  $O'$ , то їх період не зміниться. На цій властивості оснований визначення прискорення вільного падіння за допомогою оборотного маятника: експериментально встановлюють положення двох «сполучених» точок (осей)  $O$  і  $O'$ , малі коливання навколо яких відбуваються з однаковою частотою. Це означає, що відстань  $OO' = l_{np}$ . Визначивши  $\omega$  і  $l_{np}$  з формули  $\omega = \sqrt{g/l_{np}}$  знаходимо  $g$ .

**Загальні висновки.** Розглянуті приклади відносяться до вільних коливань без тертя, які відбуваються в системі, що залишена наодинці сама з собою після того, як вона була тим чи іншим способом виведена зі стану рівноваги. Можна стверджувати, що вільні коливання будь-якого осцилятора у відсутності тертя будуть гармонічними, якщо діюча в ньому сила (або момент сили) є квазіпружньою, тобто силою, спрямованою до положення рівноваги, яка залежить від зміщення з цього положення лінійно. Саме квазіпружний характер сили (або моменту сили) править і за критерій малих коливань. Крім того, частота і період вільних коливань без тертя залежать тільки від властивостей самого осцилятора на відміну від амплітуди коливань і початкової фази, які визначаються початковими умовами.

**Енергія гармонічного осцилятора.** Розглянемо на прикладі матеріальної точки, що коливається під дією квазіпружньої сили  $F_x = -kx$ .

Потенціальна енергія: 
$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cdot \cos^2(\omega t + \varphi) , \quad (12)$$

## Конспект лекцій з курсу Механіки (продовження, Лекція 8)

Кінетична енергія: 
$$K = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{mA^2 \cdot \omega^2}{2} \cdot \sin^2(\omega t + \varphi). \quad (13)$$

З цих формул видно, що значення  $U$  та  $K$  зсунуті по фазі один відносно одного на  $\pi/2$ .

При цьому повна енергія зберігається: 
$$E = U + K = \frac{kA^2}{2} + \frac{mA^2 \cdot \omega^2}{2}. \quad (14)$$

Тоді, формули для енергій можна переписати як: 
$$U = E \cdot \cos^2(\omega t + \varphi), \quad (15)$$

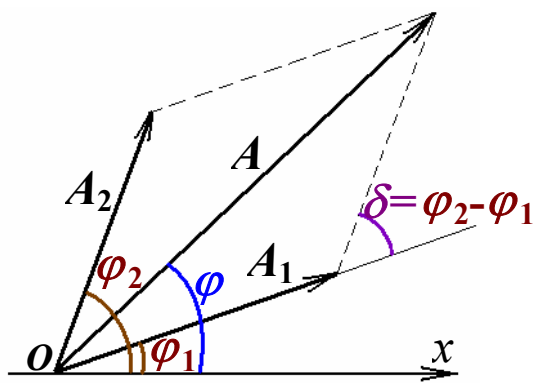
$K = E \cdot \sin^2(\omega t + \varphi)$ . Таким чином, відбувається перетікання потенціальної енергії в кінетичну і навпаки. Середні значення енергій за період дорівнюють  $E/2$  через те, що середні значення квадратів тригонометричних функцій за період дорівнюють  $1/2$ .

### Додавання гармонічних коливань.

Якщо тіло здійснює одночасно коливання в кількох напрямках, або хоч і в одному напрямку, але під дією різних факторів, кожен з яких призводить до коливального руху зі своєю частотою, амплітудою і фазою, то для визначення результуючого характеру руху тіла необхідно всі коливання додавати, отримуючи т.ч. сумарне складне коливання з кількох простих гармонічних коливань. Одним із наочних методів додавання коливань одного напрямку є побудова векторних діаграм.

1. При рівних частотах двох коливань, або якщо вони мало відрізняються, то зміщення:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (16)$$



гармонічним і матиме вигляд:

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi), \quad (17)$$

де  $A$  та  $\varphi$  можна знайти з діаграми, представленій на рис.:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cos \delta, \quad (18)$$

## Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження, Лекція 8)

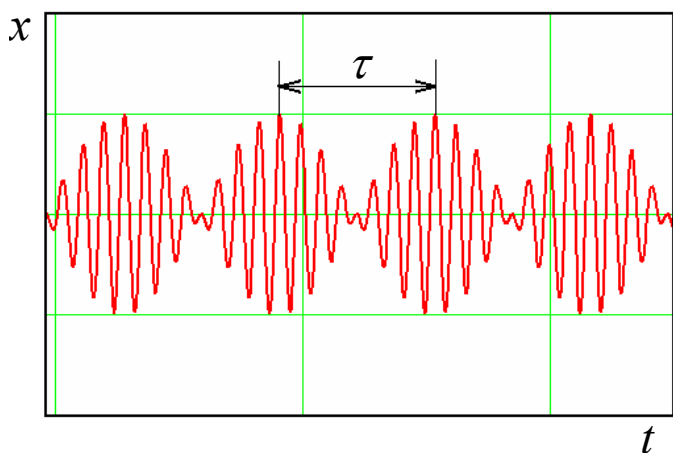
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \cdot \sin \varphi_1 + A_2 \cdot \sin \varphi_2}{A_1 \cdot \cos \varphi_1 + A_2 \cdot \cos \varphi_2}. \quad (19)$$

Різниця фаз у даному випадку не залежить від часу і дорівнює:  $\delta = \varphi_1 - \varphi_2$ .

Амплітуда ж результуючого коливання суттєво залежить від різниці фаз  $\delta$ . При синфазних (синхронних) коливаннях вона максимальна, а протифазних – мінімальна. Енергія коливань також залежить від різниці фаз і через останній доданок у виразі (18) для результуючої амплітуди  $A$ , енергія не може бути представлена як сума енергій коливань, що додаються.

2. Дещо відмінний випадок реалізується коли частоти різні, але відрізняються мало:

$$|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 \text{ або } \omega_2.$$



Тут також справедливе співвідношення (18), але оскільки тепер вектори  $\vec{A}_1$  і  $\vec{A}_2$  обертаються із трохи різними кутовими швидкостями, то модуль результуючого вектора  $\vec{A}$  повільно змінюватиметься від  $A_{\min}$  до  $A_{\max}$ , причому сам вектор  $\vec{A}$  обертається із кутовою швидкістю, близькою до  $\omega_1$  та  $\omega_2$ . І хоча результуюче коливання вже не буде строго гармонічним, його можна

представляти як гармонічне з амплітудою, що повільно періодично міняється. Такі коливання називаються **біття**. Різниця фаз  $\delta$  залежатиме від часу:  $\delta = (A_2 + \omega_2 t) - (A_1 + \omega_1 t) = (A_2 - A_1) + (\omega_2 - \omega_1)t$ .

Проміжок часу між сусідніми моментами, коли амплітуда максимальна, називають періодом біття  $\tau$ . За цей час різниця фаз  $\delta$  змінюється на  $2\pi$ .

**Додавання взаємно перпендикулярних коливань.** При однакових частотах траєкторією частинки буде еліпс, або коло ( $\delta = \pi/2$ ,  $A_1 = A_2$ ), або пряма ( $\delta = 0$ ), в залежності від співвідношень фаз і амплітуд. При різних частотах утворюються т. зв. Фігури Ліссажу, які будуть детальніше досліджуватись в курсах електрики, радіотехніки та ін.

### Затухаючі коливання.

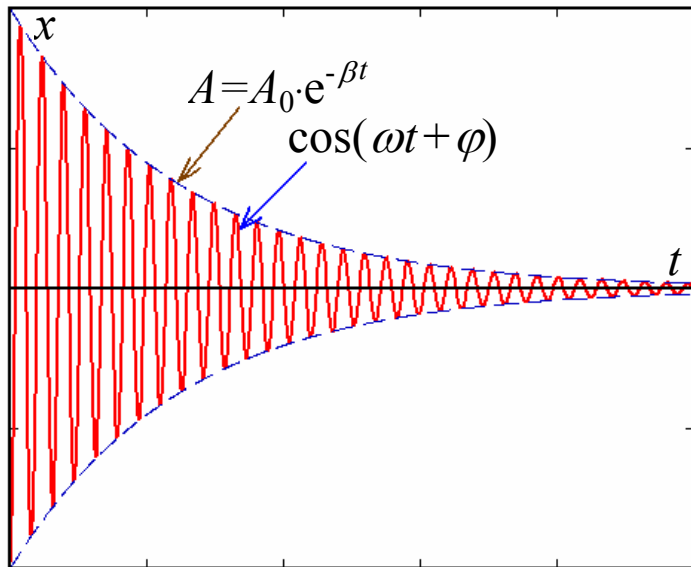
Коливання, що відбуваються при наявності дисипативних сил (тертя), дія яких призводить до зменшення амплітуди та енергії з часом, називаються затухаючими. Вважаючи силу опору пропорційною швидкості  $F_x = -r\dot{x}$ , отримаємо рівняння:  $m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$ , або

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = 0,$$

## Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження, Лекція 8)

де  $2\beta = r/m$ ,  $\omega^2 = k/m$ ,  $\beta$  - коефіцієнт затухання. Причому  $\omega$  - це частота вільних коливань без тертя (т. зв. частота власних коливань осцилятора).

При умові  $\beta < \omega$  останнє рівняння описує затухаючі коливання. Його розв'язок має вигляд:  $x = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ .



Частота затухаючих коливань:  $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$ , а відповідно, період:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}.$$

Множник  $A = A_0 \cdot e^{-\beta t}$  грає роль амплітуди затухаючих коливань, що мають типовий вигляд (рис.).

**Характеристики затухання.**

**1. Коефіцієнт затухання  $\beta$ :**  $\beta = r/2m$ .

**2. Час релаксації  $\tau$**  - час, за який

амплітуда коливань зменшується в  $e=2,71828$  разів:  $\tau = 1/\beta$ .

**3. Логарифмічний декремент затухання.**

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta \cdot T$$

З попередніх двох формул:  $\lambda = 1/N_e$ , де  $N_e$  - кількість коливань за час  $\tau$ , на протязі якого амплітуда зменшується в  $e$  разів.

**4. Добротність осцилятора.** За означенням:  $Q = \pi/\lambda = \pi \cdot N_e$  - характеризує «якість» коливальної системи, тобто її здатність зберігати коливання якнайдовше.

## Вимушені коливання.

Якщо в коливальній системі є дисипація (затухання), то для підтримання сталої амплітуди коливань необхідно періодично компенсувати втрати енергії системою. Це можна зробити, наприклад, за допомогою зовнішньої сили, що діятиме на систему, змінюючись по величині за гармонічним законом  $F_x = F_m \cdot \cos \Omega t$ . Коливання, які при цьому відбуваються, називають вимушеними. Відповідно до основного рівняння динаміки:

$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_m \cdot \cos \Omega t$ , або у більш зручному вигляді:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = f_m \cdot \cos \Omega t, \quad (1)$$



## Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження, Лекція 8)

де  $f_m = F_m/m$ .

В такій системі, після початку дії періодичної сили, за деякий перехідний час встановлюються коливання із частотою вимушуючої сили, але зсунуті по фазі на кут  $\varphi$ :

$$x = A \cdot \cos(\Omega t - \varphi). \quad (2)$$

Для прояснення характеру коливань, необхідно визначити величини  $A$  та  $\varphi$ .

Продиференціюємо останнє рівняння (2) двічі по часу:

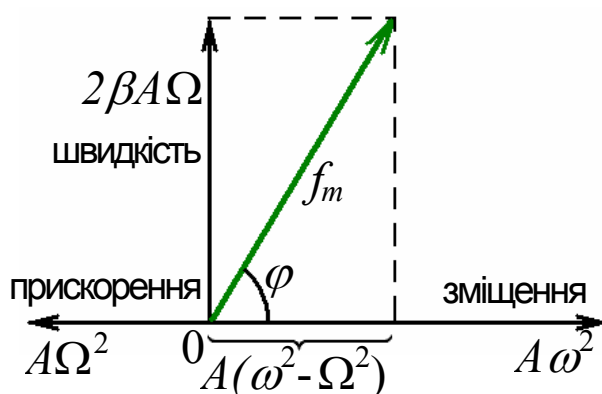
$$\dot{x} = -A \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega t - \varphi) = A \cdot \Omega \cdot \cos(\Omega t - \varphi + \pi/2), \quad (3)$$

$$\ddot{x} = -A \cdot \Omega^2 \cdot \cos(\Omega t - \varphi) = A \cdot \Omega^2 \cdot \cos(\Omega t - \varphi + \pi) \quad (4)$$

і підставимо вирази для  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$  в початкове диференціальне рівняння вимушених коливань. Сума 3-х гармонічних функцій в лівій частині рівняння має дорівнювати правій частині, отже можна представити фазові зсуви між  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$  у вигляді векторної діаграми.

З цієї діаграми за теоремою Піфагора витікає, що  $A^2 \cdot (\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \cdot \Omega^2 \cdot A^2 = f_m^2$ ,

Звідки 
$$A = \frac{f_m}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \cdot \Omega^2}}.$$

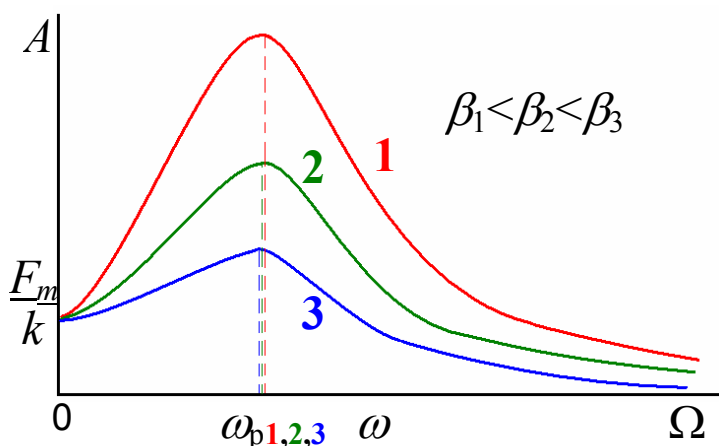


З діаграми також видно, що відставання зміщення по фазі на  $\varphi$  від вимушуючої сили визначається як  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta \cdot \Omega}{\omega^2 - \Omega^2}$ . З останніх

формул видно, що амплітуда  $A$  коливань та відставання зміщення по фазі на  $\varphi$  від вимушуючої сили визначається властивостями самого осцилятора ( $\omega$ ,  $\beta$ ) і вимушуючої сили ( $f_m$ ,  $\Omega$ ), а не початковими умовами.

Ну і важливою властивістю систем, що здійснюють вимушені коливання, є **резонанс**,

тобто існування максимуму на залежності амплітуди коливань від частоти вимушуючої сили. Частоту, при якій має місце максимум амплітуди коливань (резонанс), легко визначити з умови  $dA/d\Omega = 0$ . Це і буде резонансна частота  $\omega_p = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2}$ , а амплітуду резонансу можна отримати, підставляючи вираз для резонансної частоти в рівняння для амплітуди:



## Конспект лекцій з курсу Механіка (продовження, Лекція 8)

$$A_m = \frac{f_m}{2\beta \cdot \sqrt{\omega^2 - \beta^2}}.$$

Чим менше затухання в системі, тим сильніше виражений резонанс. Важливою характеристикою резонансної кривої, що визначає «гостроту» резонанса, є її ширина  $\Delta\omega$  на половині висоти (резонансної амплітуди) для частотної залежності потужності, або на рівні  $0,707$  ( $1/\sqrt{2}$ ) від максимальної амплітуди для АЧХ (амплітудно-частотної характеристики). При невеликому затуханні ( $\beta \ll \omega$ ) «гострота» резонансу – відношення резонансної частоти  $\omega_p$  до ширини кривої  $\Delta\omega$  дорівнює добротності коливальної системи:

$$Q = \omega_p / \Delta\omega.$$

Також можна визначити добротність через відношення амплітуди в резонансі до амплітуди при найнижчих частотах (*відповідне співвідношення можна спробувати вивести самостійно*).

Явище резонансу відіграє надзвичайно велику роль в фізиці, техніці, природі.