

Механіка

Задачі семінарів для 1 курсу. Тема: Кінематика.

Приклад 1.

Залежність пройденого тілом шляху від часу задається функцією $S=a \cdot t^4-b \cdot t^2$ (де константи $a=0,25 \text{ м/с}^4$, $b=9 \text{ м/с}^2$). Знайдіть максимальне абсолютне значення швидкості за перші 5 секунд його руху та побудуйте графічно залежність $V=f(t)$ в цьому діапазоні часу.

Розв'язок.

Запишемо залежність швидкості від часу, зважаючи на те, що швидкість є похідною від пройденого шляху по часу:

$$V(t)=S'_t=dS/dt=(a \cdot t^4-b \cdot t^2)'_t=4a \cdot t^3-2b \cdot t.$$

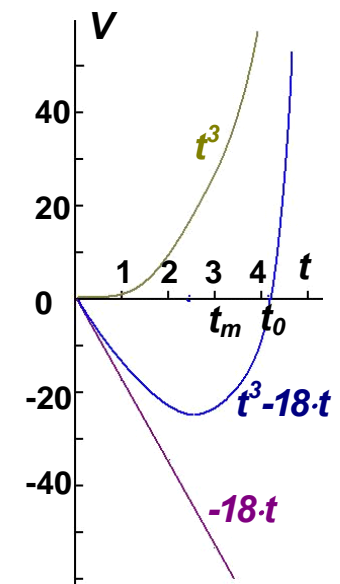
Далі будуємо графік отриманої залежності $V(t)$ як суму двох доданків (графіків): $(4a \cdot t^3)$ і $(-2b \cdot t)$. Результуючий графік $V(t)$ отримується як послідовність точок, що є алгебраїчними сумами відповідних точок графіків часових залежностей $(4a \cdot t^3=1 \cdot t^3)$ та $(-2b \cdot t=-18 \cdot t)$.

Наостанок, максимальне (екстремальне, в даному випадку зі знаком “-“, тобто мінімальне!) значення швидкості визначимо прирівнюванням до 0 похідної від швидкості (прискорення):

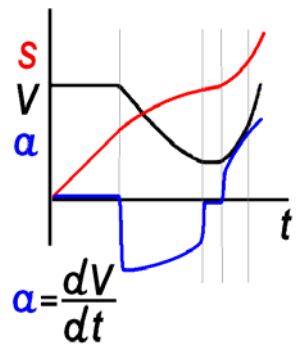
$$V'(t)=V'_t=dV/dt=(4a \cdot t^3-2b \cdot t)'_t=12a \cdot t^2-2b=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12a \cdot t^2=2b \Rightarrow t_m=\sqrt{\frac{b}{6a}} \approx 3,46 \text{ с},$$

$$\text{а час } t_0, \text{ при якому швидкість дорівнює 0: } V(t)=4a \cdot t^3-2b \cdot t=0 \Rightarrow t_0=\sqrt{\frac{b}{2a}}=\sqrt{18} \approx 4,24 \text{ с}.$$



Приклад 2.



$$a = \frac{dv}{dt}$$
$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow s = \int v \cdot dt$$

Виходячи з поданої часової залежності швидкості **V** тіла, що рухається прямолінійно, зобразіть на графіку якісно хід часових залежностей відстані цього тіла від точки початку руху **S** та прискорення цього тіла - **a**.

← **Розв'язок (графічний).**

Можливі варіанти умови:

а) Зобразіть на графіку якісно хід залежності швидкості та прискорення тіла від часу, виходячи з поданої часової залежності пройденого тілом шляху;

б) зобразіть на графіку якісно хід залежностей пройденого тілом шляху та зміни його прискорення від часу, виходячи з поданої часової залежності швидкості тіла;

Приклад для самостійного розгляду: в) на графіку зображено залежність від часу прискорення, яке мало тіло, що рухалось прямолінійно. Зобразіть приблизний графік часової залежності швидкості та відстані від початкової точки руху цього тіла.



Приклад 3.

Визначить середню швидкість тіла, яке після початку руху проїхало $t = 8$ секунд із прискоренням $\vec{a} = A \cdot t \cdot \vec{i} + B \cdot t \cdot \vec{j}$, де $A = 4 \text{ м/с}^3$; $B = 3 \text{ м/с}^3$.

Розв'язок.

Для визначення середньої швидкості необхідно визначити весь пройдений шлях і віднести його до часу, за який цей шлях пройдений.

Швидкість визначимо інтегруванням прискорення по часу:

$$\vec{V} = \frac{A t^2}{2} \cdot \vec{i} + \frac{B t^2}{2} \cdot \vec{j},$$

при цьому були прийняті нульові початкові умови (щоб не використовувати константи інтегрування), які неявно витікають із умови задачі.

Аналогічно інтегруванням визначається і залежність від часу пройденого шляху (радіус-вектор):

$$\vec{r} = \frac{A t^3}{6} \cdot \vec{i} + \frac{B t^3}{6} \cdot \vec{j},$$

- тут також були прийняті «нульові початкові умови» (тобто в момент початку руху початкові координати тіла дорівнювали 0), оскільки вони не відіграють ролі у визначенні середньої швидкості.

Зважаючи на те, що траєкторією руху тіла є пряма* (оскільки обидві координати X та Y радіус-вектора пропорційні t^3 , то між X та Y існуватиме лінійна залежність: $Y = (B/A) \cdot X$. Наступний крок чисто технічний – визначення координат X та Y в момент часу $t = 8 \text{ с}$: $X = \frac{A t^3}{6} = 341,33$; $Y = \frac{B t^3}{6} = 256$, а також відстані від початку координат (точки 0,0, від якої почато рух) до точки X, Y : $S = \sqrt{X^2 + Y^2} \approx 426,66 \text{ м}$.

Отже, середня швидкість \bar{V} тіла за час $t = 8$ секунд після початку руху складатиме: $\bar{V} = \frac{S}{t} \approx 53,33 \text{ м/с}$.

* **Примітка.** Оскільки залежність координат тіла від часу по обох осях однакова, то очевидно, що воно рухалось прямолінійно по найкоротшій траєкторії між початковою і кінцевою точками.

Задача 1. (1.6 Иродов).

Корабель рухається екватором на схід зі швидкістю $u=30$ км/год. З південного сходу під кутом $\varphi=60^\circ$ до екватора дме вітер зі швидкістю $V_0=15$ км/год. Знайдіть швидкість V вітру відносно корабля і кут θ між екватором і напрямком вітру в системі відліку, пов'язаній із кораблем.

Розв'язок.

Приклад задачі, яку зручно розв'язувати за допомогою векторів, які зобразимо на діаграмі, відповідно до їх напрямків з умови. Очевидно, що результуючий вітер буде векторною сумою зустрічного і бічного вітру:

$\vec{V} = \vec{u} + \vec{V}_0$, а визначити його можна, склавши відповідні координати векторів-доданків: $\vec{u}(-30; 0)$ та $\vec{V}_0(-7,5; -7,5 \cdot \sqrt{3})$,

Склавши ці координати (відповідно X та Y), отримаємо вектор $\vec{V}(-37,5; -7,5 \cdot \sqrt{3})$, довжина (модуль) якого визначиться як $|\vec{V}| = \sqrt{37,5^2 + 7,5^2 \cdot 3} \approx 40$, тобто результуюча швидкість вітру відносно корабля становитиме $V \approx 40$ км/год.

Кут напрямку вітру відносно екватора (горизонтальної осі X на рис.) можна визначити за допомогою будь-якої тригонометричної функції через відношення

координат вектора \vec{V} , наприклад, $\theta = \arctg \frac{7,5 \cdot \sqrt{3}}{37,5} \approx 19^\circ$.

