

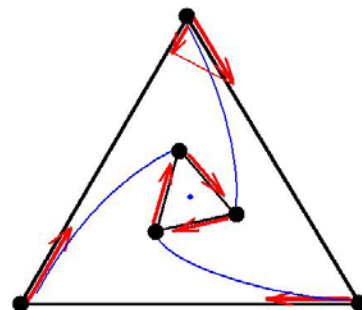


Задачі семінарів для 1 курсу

Теми: Кінематика (1-3), Динаміка (4-5).

Задача 1. (1.12 Иродов).

Три точки знаходяться у вершинах рівностороннього трикутника зі стороною a . Вони починають одночасно рухатися з постійною за модулем швидкістю V , причому перша точка весь час тримає курс на другу, друга - на третю, третя - на першу. Через який час t точки зустрінуться?



Розв'язок.

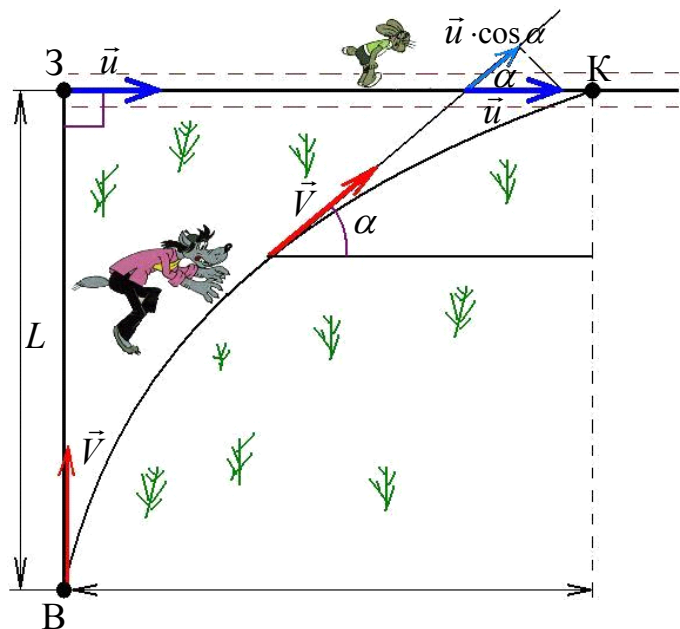
Відносна швидкість двох сусідніх точок (алгебраїчна сума складових швидкості в напрямку лінії, що з'єднує точки) залишатиметься незмінною весь час зближення: $V_{\text{відн}} = V + V \cdot \cos 60^\circ = V + V/2 = 1,5 \cdot V$.

Оскільки початкова відстань між точками - a , то не має ніякого значення траєкторія точок, оскільки їх зближення відбувається зі сталою відносною швидкістю. Тобто час до зустрічі складатиме $t = a / V_{\text{відн}} = a / 1,5 \cdot V = 2a / 3V$.

Задача 2. (1.13 Иродов).

Вовк, знаходячись в точці В, побачив зайця в точці З на відстані L від нього і почав бігти в його напрямку зі швидкістю V , бажаючи якнайшвидше зустрітися, щоб розповісти свіжі лісові плітки. Втім Засць злякався і, намагаючись уникнути зустрічі, одразу ж почав тікати зі сталою швидкістю u ($u < V$) прямо по доріжці в напрямку, перпендикулярному до видимого напрямку на Вовка. Але Вовк біг навпростець із більшою швидкістю, до того ж весь час наведеною точно на зайця і врешті-решт наздогнав його в точці К.

Треба визначити час, що пройшов від початку гонитви до неформальної зустрічі двох залятих друзів.



Розв'язок.

Для наочності в першу чергу зобразимо схематично траєкторії руху обох тварин. Очевидно, що розглядати їх рух в системі відліку землі виявиться занадто складно через складність математичного опису траєкторій такого руху. В той же час, вибір «системи відліку», пов'язаної з відносною відстанню між Вовком і Зайцем, суттєво спрощує розв'язок, оскільки в цьому випадку форма траєкторії руху тіл може не прийматись до уваги, а визначається тільки зміна відстані між тілами, що відбувається із відомою швидкістю.

Отже, миттєвою відносною швидкістю Вовка і Зайця V_B буде різниця швидкості Вовка \vec{V} і проєкції швидкості Зайця на напрямок, що їх з'єднує:

$$V_B = V - u \cdot \cos \alpha.$$

Модулі швидкостей V і u за умовою є константами, тому їх можна записати у скалярному вигляді.

При відомій початковій відстані L і відомій відносній швидкості зближення (хоча і змінній через змінний кут α), час зближення можна знайти з рівняння для пройденого тілом шляху інтегруванням швидкості по часу.

$$L = \int_0^{\tau} V_B \cdot dt = \int_0^{\tau} (V - u \cdot \cos \alpha) \cdot dt = \int_0^{\tau} V \cdot dt - \int_0^{\tau} u \cdot \cos \alpha \cdot dt = V \cdot \tau - u \cdot \int_0^{\tau} \cos \alpha \cdot dt$$

Для того, щоб взяти другий інтеграл, необхідно знати функціональну залежність кута α від часу t в явному вигляді; визначити ж таку залежність досить складно математично. В той же час, значно простіше визначити цілком весь інтеграл, розглянувши складову руху Вовка по горизонталі на представленому рисунку (тобто спроектувавши його швидкість V на «горизонтальний» напрямок руху Зайця і записавши (аналогічно як і в першому рівнянні) пройдену Вовком відстань по горизонталі (а вона точно дорівнюватиме відстані, пройденій Зайцем - $u \cdot \tau$) і прирівнявши її до інтегралу від «горизонтальної» проєкції швидкості Вовка по часу $V \cdot \cos \alpha$, отримаємо:

$$\vec{u} \cdot \tau = \int_0^{\tau} V \cdot \cos \alpha \cdot dt = V \cdot \int_0^{\tau} \cos \alpha \cdot dt.$$

Тепер з другого рівняння видно, що невідомий інтеграл від $\cos \alpha$ по часу може бути виражений з цього рівняння і записаний як константа:

$$\int_0^{\tau} \cos \alpha \cdot dt = \frac{u \cdot \tau}{V},$$

а після підстановки значення цього інтегралу в перше рівняння:

$$L = V \cdot \tau - \frac{u^2 \cdot \tau}{V},$$

звідки для значення часу бігання τ і отримаємо остаточну відповідь:

$$\tau = \frac{L}{V - \frac{u^2}{V}} = \frac{L \cdot V}{V^2 - u^2}.$$

Задача 3 (1.27 Иродов).

Частинка рухається у площині ХУ з постійним прискоренням a , протилежним позитивному напрямку осі Y . Рівняння траєкторії частинки має вигляд $y = \lambda x - \beta x^2$, де λ і β - позитивні константи. Знайдіть швидкість частинки на початку координат.

Розв'язок. Це приклад задачі, в якій розв'язок неочевидний. В такому випадку краще за все пробувати записати все, що відомо з умови, а потім, співставляючи отримані дані, намагатись шукати якісь шляхи до вирішення поставленого питання. Отже, відомий (заданий) вектор прискорення, який можна записати своїми координатами: $\mathbf{a}(0; -a)$.

Оскільки мова в задачі іде про швидкість, а також про траєкторію, то логічно записати також вектори швидкості та радіус-вектор, відповідно проінтегрувавши вектор прискорення і його координати.

Нагадування: інтегралом (первісною) вектора є вектор з координатами, які є первісними від відповідних координат початкового вектора.

Отже, вектор швидкості, як інтеграл від прискорення, матиме координати: $\mathbf{V}(A; -at+B)$. Тут A – константа, що є первісною від 0, що є Х- координатою вектора $\mathbf{a}(0; -a)$, а $-at+B$ – відповідно є первісною від Y-ї координати прискорення $-a$.

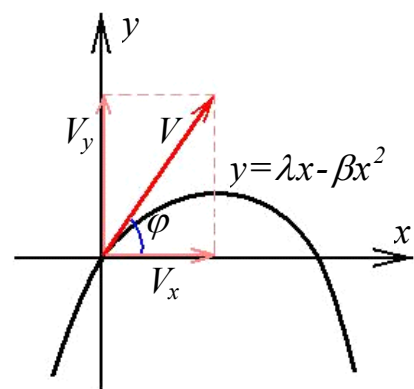
Аналогічно, радіус-вектор, як інтеграл від швидкості запишеться т.ч.: $\mathbf{r}(At+C; -at^2/2+Bt+D)$. В той же час, координатами радіус-вектора є X та Y , що зв'язані між собою рівнянням траєкторії, тому $\mathbf{r}(x; \lambda x - \beta x^2)$.

Другою ж похідною від y -ї координати радіус-вектора по часу буде відома за умовою стала величина $-a$. Таким чином, можна взяти двічі похідну по цій y -вій координаті по часу, якщо тільки записати її як функцію часу. Останнє з очевидністю витікає з того, що x координата радіус-вектора дорівнює $x=At+C$. Отже, беремо послідовно двічі похідну по часу t від виразу для $y(t)$ і прирівнюємо її до значення Y-ї координати прискорення $-a$:

$$y'' = [\lambda(At+C) - \beta(At+C)^2]'' = [\lambda A - 2\beta A(At+C)]' = -2\beta A^2 \equiv -a,$$

в результаті отримаємо вираз для константи $A = \sqrt{\frac{a}{2\beta}}$, яка є X - координатою (тобто X -

складовою) вектора швидкості \mathbf{V} , тобто $\vec{V}_x = \sqrt{\frac{a}{2\beta}}$.



Y -ву координату вектора швидкості можна визначити як тангенс кута нахилу вектора швидкості \mathbf{V} до осі x . Оскільки вектор швидкості направлений по дотичній до траєкторії руху, то, зважаючи на геометричний зміст похідної, як тангенса кута φ нахилу дотичної, можна записати, що похідна від y по x і буде відношенням складових вектора швидкості (рис.):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{V_y}{V_x} = y'_x = (\lambda x - \beta x^2)' = \lambda - 2\beta x,$$

$$\text{а в точці } X=0: y'_{x=0} = \lambda = V_y/V_x, \text{ звідки } V_y = \lambda \cdot V_x = \lambda \cdot \sqrt{\frac{a}{2\beta}}.$$

По двох відомих складових (координатах) вектора швидкості визначаємо його модуль в точці $X=0$, тобто визначаємо шукану швидкість V_0 :

$$|\vec{V}| \equiv V_0 = \sqrt{\frac{a}{2\beta} + \lambda^2 \cdot \frac{a}{2\beta}} = \sqrt{\frac{a}{2\beta} \cdot (1 + \lambda^2)}.$$

Задача 4

Тіло масою $m=2$ кг рухається прямолінійно під дією сили $F=At$ (константа $A=12$ Н/с), направленої в напрямку руху. В деякий момент часу $t=0$ швидкість тіла становила $V_0=5$ м/с. Який шлях пройде тіло за наступні дві секунди його руху?

Розв'язок

Запишемо 2-й закон Ньютона для цього тіла: $m \cdot \frac{dV}{dt} = A \cdot t$ і проінтегруємо після

рознесення змінних:
$$m \cdot \int_{V_0}^V dV = A \cdot \int_0^t t \cdot dt \Rightarrow mV - mV_0 = \frac{At^2}{2}.$$

Для визначення величини пройденого шляху, представимо поточну швидкість як диференціальну функцію від часу $V = \frac{dS}{dt}$ і після підстановки в попереднє рівняння і рознесення змінних (домноження обох частин р-ня на dt), проінтегруємо його ще раз:

$$m \cdot \int_0^{S_0} dS = \frac{A}{2} \cdot \int_0^{\tau} t^2 \cdot dt + \int_0^{\tau} mV_0 \cdot dt \Rightarrow S_0 = \frac{A\tau^3}{6m} + V_0 \cdot \tau = \frac{12 \cdot 2^3}{6 \cdot 2} + 5 \cdot 2 = 18 \text{ м.}$$

Задача 5 (Иродов, 1.88 або 1.85 – по різних виданням).

Пуля, пробиваючи стінку товщиною h змінює свою швидкість від початкової V_0 до кінцевої V_k . Знайдіть час τ руху пулі в стіні, вважаючи силу опору руху пропорційною квадрату швидкості.

Розв'язок. Запишемо силу як $F = -\alpha V^2$ (α - деяка невідома позитивна константа, а знак “-” через те, що сила опору направлена проти швидкості руху) і застосуємо рівняння 2-го закону Ньютона до прольоту кулі крізь стіну:

$$m \cdot \frac{dV}{dt} = -\alpha V^2, \quad (1)$$

де введено невідому масу пулі m .

Для розв'язку цього рівняння і знаходження явної залежності між невідомими величинами (V і t) необхідно його проінтегрувати, попередньо рознесявши змінні по різні боки рівняння. Для цього обидві частини рівняння домножимо на dt і розділимо на V^2 і на m (на масу m ділимо для того, щоб перенести її вправо, розташувавши разом із іншою невідомою α).

$$\int_{V_0}^{V_k} \frac{dV}{V^2} = -\frac{\alpha}{m} \cdot \int_0^{\tau} dt. \quad (2)$$

Інтегруючи і підставляючи межі інтегрування, отримаємо:

$$\frac{1}{V_k} - \frac{1}{V_0} = \frac{\alpha}{m} \cdot \tau. \quad (3)$$

З цього виразу можна було вже отримати значення часу прольоту τ , якби було відоме відношення $\frac{\alpha}{m}$. Для того ж, щоб його визначити, треба ще раз проінтегрувати рівняння руху (4), далі; тобто рівняння (1) проінтегрувати двічі) щоб перейти до пройдених шляхів і скористатись відомим значення усього пройденого пулею шляху h .

Для такого другого інтегрування необхідно спершу таким же самим чином проінтегрувати рівняння (2), але не до кінцевих значень швидкості і часу - V_k і τ , а до деяких проміжних (кінцевих) значень V і t , тобто таких, що можуть змінюватись. Тоді вираз після інтегрування виглядатиме подібно до (3), тільки швидкість V і час t будуть величинами змінними:

$$\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0} = \frac{\alpha}{m} \cdot t, \quad (4)$$

з цього рівняння можна виразити швидкість V як функцію часу t :

$$V = \frac{1}{\frac{\alpha}{m} \cdot t + \frac{1}{V_0}} \quad (5)$$

Зважаючи на те, що $V = \frac{ds}{dt}$, останнє рівняння можна також проінтегрувати, рознесши змінні s і t по різні боки рівняння (фактично просто домноживши обидві частини рівняння на dt):

$$\int_0^h ds = \int_0^\tau \frac{dt}{\frac{\alpha}{m} \cdot t + \frac{1}{V_0}} \quad (6)$$

Хоча на перший погляд це рівняння і здається складним для інтегрування, але насправді це проста лінійна гіперболічна функція, первісною від якої є звичайний натуральний логарифм: $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$. Єдиною різницею є наявність множника $\frac{\alpha}{m}$, який при диференціюванні складної функції під знаком логарифма вийде наперед як множник, тому при інтегруванні на нього треба розділити, щоб його "скоротити", тобто щоб його не було в підінтегральній функції. Отже, в результаті інтегрування рівняння (6) отримаємо:

$$h = \frac{m}{\alpha} \cdot \ln \left(\frac{\alpha}{m} \cdot t + \frac{1}{V_0} \right)^\tau = \frac{m}{\alpha} \cdot \ln \frac{\frac{\alpha}{m} \cdot \tau + \frac{1}{V_0}}{\frac{1}{V_0}} \quad (7)$$

Порівнюючи вираз у чисельнику під логарифмом із рівнянням (3), можна побачити, що цей

вираз $\frac{\alpha}{m} \cdot t + \frac{1}{V_0} = \frac{1}{V_k}$, отже $h = \frac{m}{\alpha} \cdot \ln \frac{\frac{1}{V_k}}{\frac{1}{V_0}} = \frac{m}{\alpha} \cdot \ln \frac{V_0}{V_k}$, звідки і виражається невідоме

співвідношення $\frac{m}{\alpha} = \frac{h}{\ln \frac{V_0}{V_k}}$, підставляючи яке в рівняння (3) отримуємо остаточний вираз

для часу прольоту пулі крізь стіну: $\tau = \frac{\left(\frac{1}{V_k} - \frac{1}{V_0} \right) \cdot h}{\ln \frac{V_0}{V_k}}.$