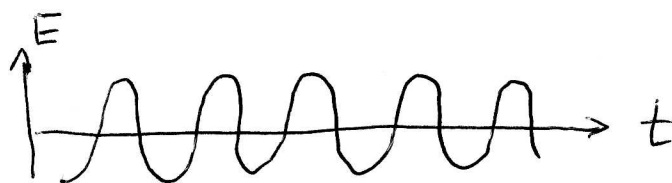


Питання №1

Теоретична межа спектральної ширини випромінювання неперервного одномодового лазера та проблеми її реалізації

Виходячи з класичних міркувань спектральна ширина $\Delta\nu_L$ випромінювання лазера може бути як завгодно малою:

лазер генерує
монохроматичну
хвилю

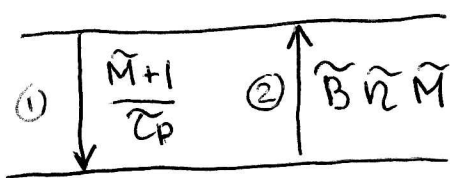


за рахунок вимушеного випромінювання

Але! не все так просто, Бо! є спонтанне випромінюван.

1) Опишемо ідеальну ситуацію - є лише вимушене випромінювання.

Стани
лазера
 $\tilde{M} = \tilde{m} V_L$



стан $(\tilde{M}+1)$ з імовірністю $P[\tilde{M}+1]$

стан $(\tilde{M})$ з імовірністю $P[\tilde{M}]$

За рівноваги:

Інверсія $\frac{d\tilde{n}}{dt} = P_H - B \tilde{n} \tilde{m} = 0 \rightarrow \tilde{n} = \frac{P_H}{B \tilde{m}} = \frac{P_H V_L}{B \tilde{M}}$

①=②: $\frac{\tilde{M}+1}{\tau_p} = \underbrace{B \tilde{n} \tilde{M}}_{\substack{\times \\ P[\tilde{M}]}} = \underbrace{\tilde{B} \cdot \frac{P_H V_L}{B \tilde{M}} \tilde{M}}_{\substack{\times \\ P[\tilde{M}]}} = \underbrace{P_H V_L}_{\substack{\times \\ P[\tilde{M}]}}$

Отже:

$$P[\tilde{M}+1] = \frac{P_H V_L \tau_p}{\tilde{M}+1} \cdot P[\tilde{M}]$$

Окрім цього: середнє значення (зберігання енергії) $\tilde{M}_{сер} = P_H V_L \tau_p \ll$

Створена інверсія за час τ_p в об'ємі V_L

Маючи зв'язок між $P[M]$ і $P[M+1]$ та середнє значення $\tilde{M}_{\text{сер}}$,

Потім знаходимо розподіл імовірностей.
! Це буде розподіл Пуассона!

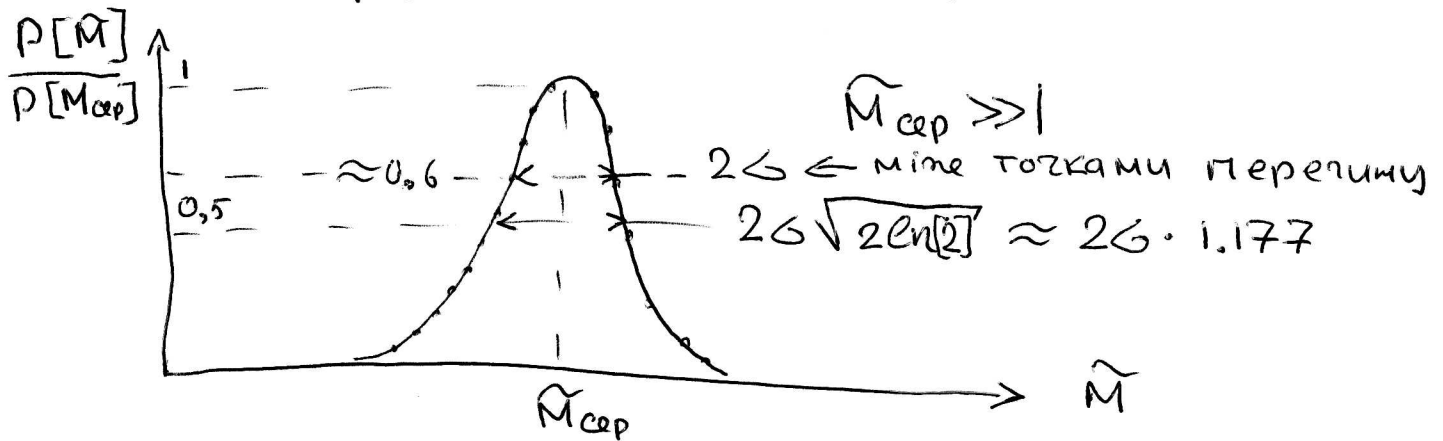
$$P[M] = \exp[-\tilde{M}_{\text{сер}}] \frac{\tilde{M}_{\text{сер}}^M}{M!}$$

(експерим.
лаз.
оптика"
Іванісік, 2003)

який є „дискретним“, але не відрізняється від розподілу Гауса для $\tilde{M}_{\text{сер}} \gg 1$ у випадку „недискретних величин“, коли $\hbar\omega \rightarrow 0$

Для Пуассонівського розподілу:
середньоквадратичне відхилення

$$\Delta = \sqrt{(\tilde{M} - \tilde{M}_{\text{сер}})^2} = \sqrt{\tilde{M}_{\text{сер}}}$$



!! А яким змінам електричного поля хвилі відповідають такі флуктуації $\tilde{M}$?

Середнє значення амплітуди поля $\bar{E}_0$.

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 \bar{E}_0^2 = \frac{\tilde{M}_{\text{сер}}}{V_L} \hbar\omega \leftarrow \text{енергія поля в одиниці об'єму}$$

Тоді:

$$\bar{E}_0 = \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{\epsilon_0 V_L} \tilde{M}_{\text{сер}}}; \quad (E_0 = \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{\epsilon_0 V_L} \tilde{M}})$$

Флуктуації ΔE оцінюють так:

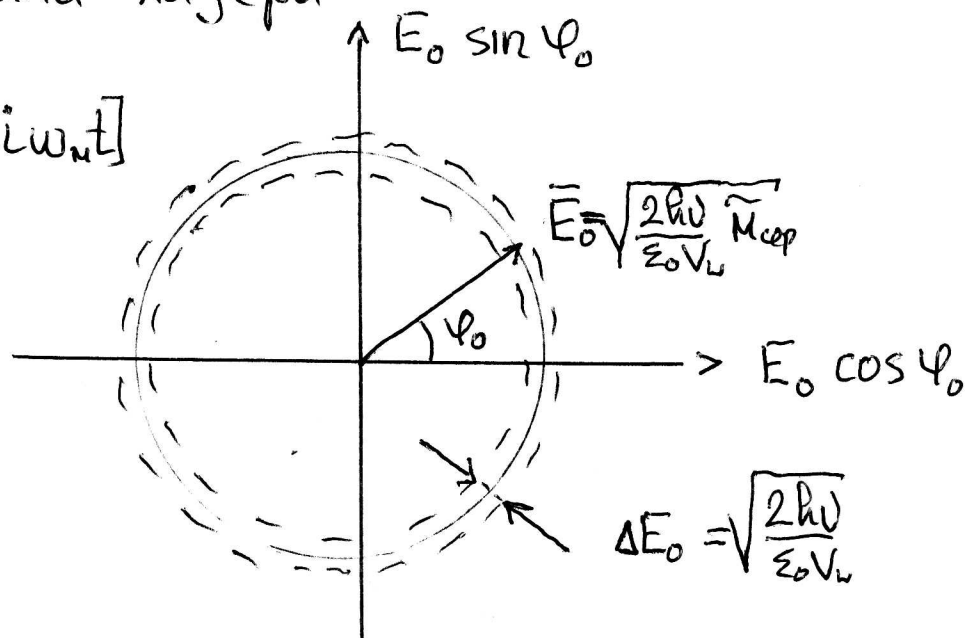
3

$$\begin{aligned}\Delta E_0 &\approx E_0 (\tilde{M}_{\text{сер}} + \sqrt{\tilde{M}_{\text{сер}}}) - E_0 (\tilde{M}_{\text{сер}} - \sqrt{\tilde{M}_{\text{сер}}}) = \\ &= \sqrt{\frac{2\hbar U}{\epsilon_0 V_L}} \cdot (\sqrt{\tilde{M}_{\text{сер}}} + \sqrt{\tilde{M}_{\text{сер}}} - \sqrt{\tilde{M}_{\text{сер}}} + \sqrt{\tilde{M}_{\text{сер}}}) = \\ &= \sqrt{\frac{2\hbar U}{\epsilon_0 V_L}} \cdot \sqrt{\tilde{M}_{\text{сер}}} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{M}_{\text{сер}}}}} - \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{\tilde{M}_{\text{сер}}}}} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2\hbar U}{\epsilon_0 V_L}} \sqrt{\tilde{M}_{\text{сер}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{\tilde{M}_{\text{сер}}}} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{\tilde{M}_{\text{сер}}}} \right) = \sqrt{\frac{2\hbar U}{\epsilon_0 V_L}}\end{aligned}$$

Отже $\Delta E_0 = \sqrt{\frac{2\hbar U}{\epsilon_0 V_L}}$, що дорівнює
амплітуді поля E_0 при $\tilde{M} = 1$!

Намалюємо діаграму Ергенда, яка описує
можливі стани лазера
з полем

$$E = E_0 \exp[-i\psi_0 - i\omega_n t]$$



$E_0 \sin \psi_0 = \text{Im} [E_0 \cdot \exp[-\psi_0 i]]$ - уявна частина
комплексної амплітуди
поля

$E_0 \cos \psi_0 = \text{Re} [E_0 \cdot \exp[-\psi_0 i]]$ - дійсна частина
комплексної амплітуди
поля

1. Бачимо розмитий

"бублик" з великим діаметром та малою товщиною

Початкова фаза ψ_0 поля невизначена, але $\psi_0 = \text{const}$

2) Врахуємо спонтанне випромінювання 4

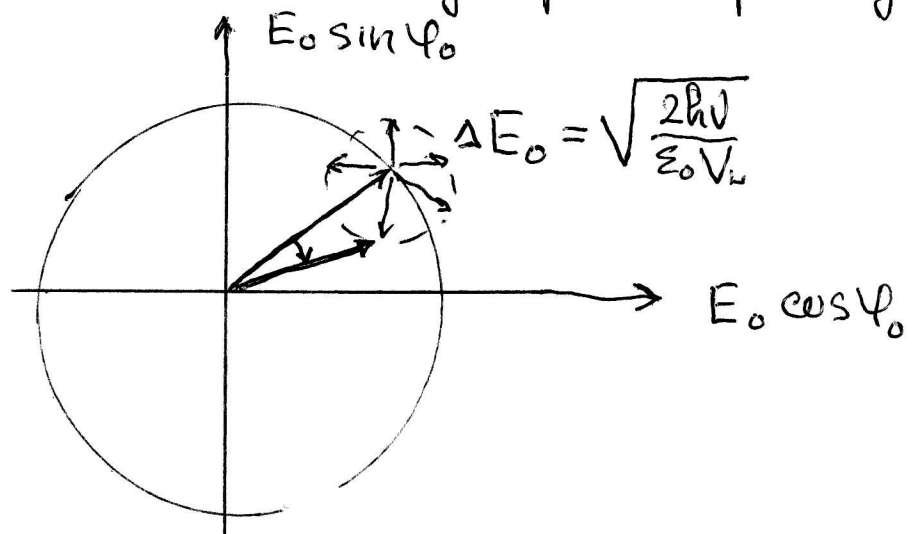
В резонаторі є в середньому один спонтанний фотон, як було показано при виведенні швидкісних рівнянь.

Такі фотони покидають резонатор за час $\tilde{\tau}_p$, але на зміну появляється наступний

Відповідно за час Δt в резонаторі лазера появиться та зникне $\Delta t / \tilde{\tau}_p$ фотонів

Кожен з таких фотонів викликати

Зрушення комплексної амплітуди поля на комплексній площині — на діаграмі Ерзенда



Зміни $\bar{E}_0$ будуть несуттєвими $\sim \Delta E_0$

Але фаза ψ_0 поступово може суттєво відхилитися: кожен новий спонтанний фотон дає незначну зміну ψ_0 , проте ця зміна підтримується вимушеним випромінюванням

Кажуть про „дифузцію фази”

Виявляється, що, наприклад, за умови

$$\psi_0|_{t=0} = 0$$

через час Δt будемо мати деяку іншу фазу з середнім значенням

$$\cos \bar{\Phi}_0 = \exp \left(- \frac{\Delta t / \tilde{\tau}_p}{4 \tilde{M}_{\text{сер}}} \right)$$

Зміни фази поля ведуть до спектрального розширення випромінювання лазера $\Delta \omega_L$:

$$\Delta \omega_L = \frac{1}{2 \tilde{M}_{\text{сер}} \tilde{\tau}_p}$$

Виконаємо деякі перетворення: врахуємо $\tilde{\tau}_p = \frac{1}{\Delta \omega_M}$, тоді $\Delta \omega_L = \frac{1}{2} \frac{\Delta \omega_M}{\tilde{M}_{\text{сер}}}$, а для

$$\Delta \nu_L = \frac{1}{2} \frac{\Delta \nu_M}{\tilde{M}_{\text{сер}}} \quad (\text{звичайні частоти!})$$

Крім цього, врахуємо, що $P_L \approx \frac{\tilde{M}_{\text{сер}} \hbar \nu}{\tilde{\tau}_p} = \tilde{M}_{\text{сер}} \hbar \nu \cdot 2\pi \Delta \nu_M$

Остаточний результат:

$\Delta \nu_L = \frac{\pi \hbar \nu \cdot \Delta \nu_M^2}{P_L}$	« Співвідношення Шавлова - Таунса »
---	--

Чим добротніший резонатор і більша потужність лазера, тим монохроматичнішим буде його випромінювання

Приклад: $R_1 = 1$; $R_2 = 0,9$; $N \uparrow$; $L = 1 \text{ м}$
 $P_L = 1 \text{ мВт}$; $\lambda = 0,6 \text{ мкм}$

Ширина спектра: $\Delta \nu_L \approx 0,1 \text{ Гц}$

Спектральна густота випромін.
 $\Delta \nu_L / \nu_L \approx 2 \cdot 10^{-16}$

Загалом виявляється: теоретична
 метя є настільки малою, що її
 складно досягнути, бо на перший план
 виступають „технічні“ обмеження

Наприклад, врахуємо нестабільність
 довжини резонатора:

Беремо $\nu_\lambda \equiv \frac{c}{2L} \ell$ та диференціюємо

$$|d\nu_\lambda| = \left| \frac{c}{2L^2} \ell dL \right| = \left| \nu_\lambda \frac{dL}{L} \right|$$

Тоді $\left| \frac{d\nu_\lambda}{\nu_\lambda} \right| = \left| \frac{dL}{L} \right| \rightarrow \left| \frac{\Delta\nu_\lambda}{\nu_\lambda} \right| = \left| \frac{\Delta L}{L} \right|$

Отже, якщо $\frac{\Delta\nu_\lambda}{\nu_\lambda} = 2 \cdot 10^{-16}$ - як в розглянутому прикладі
 при $L = 1 \text{ м}$

То необхідно підтримувати довжину
 резонатора з точністю

$$\Delta L = L \cdot \frac{\Delta\nu_\lambda}{\nu_\lambda} = 2 \cdot 10^{-16} \text{ м},$$

що практично неможливо або
 надзвичайно складно!