

Питання №1

Порогові умови генерації лазера та
стаціонарний коефіцієнт підсилення

Аналізуємо систему швидкісних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{n}}{dt} = P_n - \tilde{B}\tilde{m}\tilde{n} - \frac{\tilde{n}}{\tau_e} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{m}}{dt} = \tilde{B}\tilde{n}(\tilde{m} + \frac{1}{V_L}) - \frac{\tilde{m}}{\tau_p} \end{cases} \quad (2)$$

для інверсії $\tilde{n}$ та концентрації фотонів $\tilde{m}$

а) знайдемо необхідну умову генерації для
лазера щодо $\tilde{n}$:

з другого рівняння

$$\frac{d\tilde{m}}{dt} > 0 \quad \text{якщо} \quad \tilde{n} > \frac{\tilde{m}}{\tilde{m} + 1/V_L} \cdot \frac{1}{\tilde{B}\tau_p}$$

при $\tilde{m} = 0$ маємо умову $\boxed{\tilde{n} > 0} \in$ інверсія

б) знайдемо достатню умову генерації для $\tilde{n}$
з другого рівняння

$$\frac{d\tilde{m}}{dt} > 0 \quad \text{при} \quad \tilde{m} \gg 1. \quad \text{за умови}$$

$$\tilde{n} > \frac{1}{\tilde{B}\tau_p} \Rightarrow \tilde{n}_{\text{пор.}}$$

$$\boxed{\tilde{n}_{\text{пор}} = \frac{1}{\tilde{B}\tau_p}}$$

інверсія має
перевищувати
деяку порогову
величину

в) знайдемо умову для коефіцієнта підсилення
в активному середовищі:

$$\text{за } \tilde{n} = \tilde{n}_{\text{пор}}$$

(а власне фізичний зміст умови „б”)
„порогова умова для коефіцієнта підсилення”

Для коефіцієнта поглинання в 2-х рівняннях
схемі було 12

$$K_U = \left(n_2 - \frac{q_2}{q_3} n_3 \right) B_{23} \frac{h\nu}{c} g = - \left(n_3 - n_2 \frac{q_3}{q_2} \right) B_{32} \frac{h\nu}{c} g$$

Переходячи до нових позначень: $\tilde{B}$ та $\tilde{n}$
маємо

$$K_U = -\tilde{n} \tilde{B} \frac{1}{c}, \quad \text{Очевидно якщо } \tilde{n} > 0 \text{ то } K_U < 0 \text{ і буде підсилення}$$

Введемо нове позначення

$$\boxed{K_U^{(+)} = \tilde{n} \tilde{B} \frac{1}{c}} \quad - \text{коефіцієнт підсилення}$$

Розрахуємо

$$K_{U, \text{пор}}^{(+)} = K_U^{(+)} \Big|_{\tilde{n}_{\text{пор}}} = \frac{1}{\tilde{B} \tilde{\tau}_p} \cdot \tilde{B} \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{\tilde{\tau}_p \cdot c}$$

Отже

$$K_{U, \text{пор}}^{(+)} = K_U = -\frac{1}{2L} \ln \left(R_1 R_2 - \frac{1}{N} \right)$$

2) Знайдемо порогову умову для наказки: (та інше)

Розв'яжемо систему швидкісних рівнянь
для стаціонарного режиму роботи лазера
без врахування спонтанного випромінювання

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tilde{n}_{\text{ст}}}{dt} &= P_n - \tilde{B} \tilde{m}_{\text{ст}} \tilde{n}_{\text{ст}} - \frac{\tilde{n}_{\text{ст}}}{\tilde{\tau}_c} = 0 \\ \frac{d\tilde{m}_{\text{ст}}}{dt} &= \tilde{B} \tilde{n}_{\text{ст}} \tilde{m}_{\text{ст}} - \frac{\tilde{m}_{\text{ст}}}{\tilde{\tau}_p} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{де введено} \\ \text{позначення} \\ \tilde{n}_{\text{ст}} \text{ та } \tilde{m}_{\text{ст}} \\ \text{для стаціонарних} \\ \text{значень} \end{array}$$

є два розв'язки

1) $\tilde{m}_{\text{ст}} = 0$; (задовільняє друге рівняння)

$\tilde{n}_{\text{ст}} = P_n \tilde{\tau}_c$ (після підстановки $\tilde{m}_{\text{ст}} = 0$
в перше рівняння)

$$2) \quad n_{\text{ст}} = \frac{1}{\tau_r \bar{V}}; \quad \left(\begin{array}{l} \text{з другого рівняння,} \\ \text{коли } \tilde{m} = 0 \end{array} \right) \quad [3]$$

$$\tilde{m}_{\text{ст}} = \frac{P_H - \frac{1}{\tau_c \tau_r \bar{V}}}{1/\tau_r} \quad \left(\begin{array}{l} \text{підставивши} \\ n_{\text{ст}} = \frac{1}{\tau_r \bar{V}} \text{ в перше} \\ \text{рівняння} \end{array} \right)$$

Перший розв'язок - відсутність генерації;

Другий розв'язок - лазер працює

дає (з урахуванням $m_{\text{ст}} > 0$)

$$P_H > \boxed{P_{H,\text{пор}} = \frac{1}{\tau_r \tau_c \bar{V}}} \quad \begin{array}{l} \text{порогова умова} \\ \text{для накачки} \end{array}$$

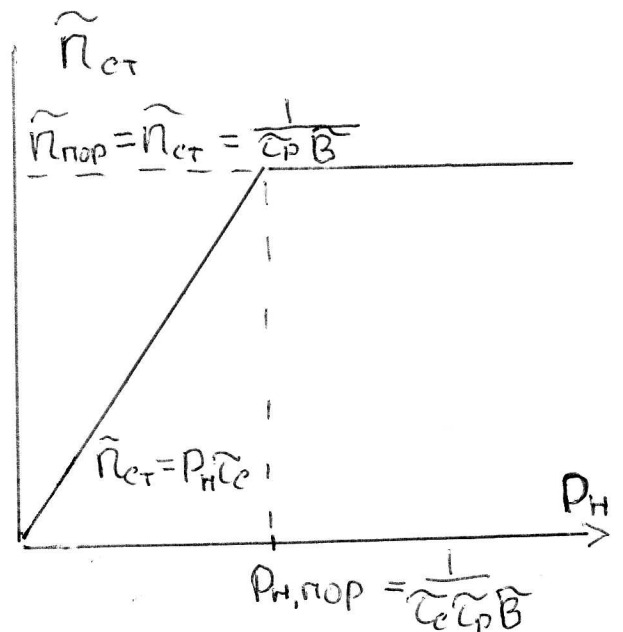
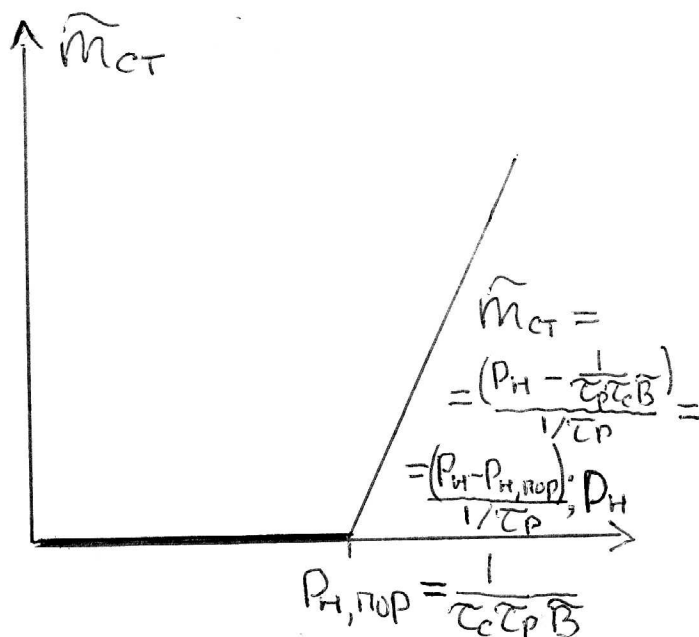
а також

$$\boxed{\tilde{n}_{\text{ст}} = \tilde{n}_{\text{пор}} = \frac{1}{\tau_r \bar{V}}}!$$

і відповідно $K_{\omega,\text{ст}}^{(+)} = K_{\omega,\text{пор}}^{(+)} -$

стаціонарний коефіцієнт підсилення та
стаціонарна інверсія рівні їх пороговим
значенням

Намалюємо обидва розв'язки на графіку



Питання №2

Вихідна потужність і оптимальні корисні втрати лазерного резонатора

Якщо є декілька каналів втрат, що обмежують час життя фотона у резонаторі то

$$\frac{1}{\tau_p} = \frac{1}{\tau_p^{(+)}} + \frac{1}{\tau_p^{(-)}}$$

де $\tau_p^{(+)}$ – корисні втрати – вихід випромінювання через „вихідне” дзеркало

$\tau_p^{(-)}$ – некорисні – інші

Очевидно, що потужність лазера пов'язана з корисними втратами

$$P_L = \frac{V_L \tilde{n} \hbar \nu}{\tau_p^{(+)}}$$

де $V_L \cdot \tilde{n}$ – кількість фотонів у резонаторі, що мають середній час життя по відношенню до процесу вихода з резонатора через вихідне дзеркало $\tau_p^{(+)}$ та енергію $\hbar \nu$
(! можливі й інші схеми виведення)

Існує оптимальне значення $\tau_p^{(+)}$ що дає максимальне значення P_L

Дійсно:

$\tau_p^{(+)} \rightarrow \infty$ – не оптимальне бо фотони „підуть” по іншим „каналам”

$\tau_p^{(+)} \rightarrow 0$ – не оптимальне бо вимушене випромінювання не „буде підтримуватися”

Пошук оптимального $\tilde{\epsilon}_{p, \text{опт}}^{(+)}$

5

Розпишемо $P_L = \frac{V_L \tilde{m} \hbar \omega}{\tilde{\epsilon}_p^{(+)}}$ з використанням

$$\tilde{m} = \left(P_H - \frac{1}{\tilde{\epsilon}_c \tilde{\epsilon}_p \tilde{B}} \right) \tilde{\epsilon}_p; \text{ та } \tilde{\epsilon}_p = \frac{\tilde{\epsilon}_p^{(+)} \cdot \tilde{\epsilon}_p^{(-)}}{\tilde{\epsilon}_p^{(+)} + \tilde{\epsilon}_p^{(-)}}.$$

$$P_L = V_L \cdot \hbar \omega \left(P_H \cdot \frac{\tilde{\epsilon}_p^{(-)}}{\tilde{\epsilon}_p^{(+)} + \tilde{\epsilon}_p^{(-)}} - \frac{1}{\tilde{\epsilon}_p^{(+)} \tilde{\epsilon}_c \tilde{B}} \right)$$

знаходимо похідну

$\frac{dP_L}{d\tilde{\epsilon}_p^{(+)}}$ та прирівнюємо до нуля, тоді

отримаємо

$$-P_H \frac{\tilde{\epsilon}_p^{(-)}}{(\tilde{\epsilon}_p^{(+)} + \tilde{\epsilon}_p^{(-)})^2} + \frac{1}{\tilde{\epsilon}_c \tilde{B} (\tilde{\epsilon}_p^{(+)})^2} = 0$$

яке дає розв'язок

$$\tilde{\epsilon}_p^{(+)} = \left[\tilde{\epsilon}_p^{(+)} = \tilde{\epsilon}_p^{(-)} \sqrt{\frac{P_H}{P_{H, \text{пор}}^{(-)}} - 1} \right],$$

де введено позначення

$P_{H, \text{пор}}^{(-)} = \frac{1}{\tilde{\epsilon}_p^{(-)} \cdot \tilde{\epsilon}_c \cdot \tilde{B}}$ - порогова навантаження за відсутності корисних втрат

Ілюстрація

