Глава 8

ВОЛНОВОДЫ И РЕЗОНАТОРЫ [1])

Изучение электромагнитных полей, ограниченных металлическими стенками, представляет значительный практический интерес. При высоких частотах, когда длины волн имеют величину порядка метра или меньше, единственным практически разумным способом генерирования и передачи электромагнитного излучения является использование металлических конструкций, размеры которых сравнимы с длиной волны. В этой главе мы рассмотрим сначала поля вблизи поверхности проводника и изучим проникновение поля в проводник, сопровождаемое омическими потерями. Далее в довольно общем виде рассматривается задача об электромагнитных волнах в полых металлических трубах (волноводах) и резонаторах, причем по ходу изложения обсуждаются различные частные случаи. В заключение мы вкратце остановимся на теории диэлектрических волноводов, которые также пригодны для передачи электромагнитных волн.

---

[1]) Некоторые формулы этой главы, отмеченные звездочкой (*) при их порядковом номере, написаны таким образом, что из них можно легко получить соответствующую формулу в единицах МКС. Для этого достаточно опустить множитель в квадратных скобках. Например, для соотношения (8.12)

$$\frac{dP_{\text{пт}}}{da} = \left[\frac{1}{4\pi}\right] \frac{\mu\omega\delta}{4} |\mathbf{H}_{||}|^2$$

соответствующее равенство в системе МКС будет

$$\frac{dP_{\text{пт}}}{da} = \frac{\mu\omega\delta}{4} |\mathbf{H}_{||}|^2,$$

где все величины берутся в единицах МКС и, следовательно, могут отличаться как по величине, так и по размерности от соответствующих величин в гауссовой системе.

Если формула помечена звездочкой, но в ней нет квадратных скобок, то она имеет одинаковый вид как в гауссовой системе, так и в системе МКС.

Общие правила преобразования уравнений в систему МКС даны в приложении в табл. 3.

§ 1. Поля на поверхности и внутри проводника

В конце § 7 предыдущей главы отмечалось, что задача об отражении и преломлении волн на границе двух проводящих сред довольно сложна. Однако наиболее важные и полезные особенности этого явления можно выяснить приближенным методом, если одна из сред является хорошим проводником. Этот приближенный метод в пределах области своей применимости оказывается пригодным для решения существенно более общих задач, чем падение плоских волн.

Рассмотрим сначала поверхность с единичной нормалью $\mathbf{n}$, направленной от *идеального* проводника, расположенного с одной стороны от этой поверхности, в сторону непроводящей среды, расположенной по другую сторону. Так же как и в статическом случае, внутри проводника электрическое поле отсутствует. Заряды внутри идеального проводника предполагаются столь подвижными, что они мгновенно реагируют на сколь угодно быстрые изменения поля, всегда создавая на поверхности требуемую поверхностную плотность заряда Σ, обеспечивающую нулевое электрическое поле внутри проводника. Эта поверхностная плотность заряда определяется из соотношения

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}=[4\pi]\,\Sigma. \tag{8.1}^{\star}$$

Аналогично при изменении во времени магнитного поля поверхностные заряды движутся под действием тангенциального магнитного поля, создавая поверхностный ток $\mathbf{K}$, обеспечивающий отсутствие магнитного поля внутри идеального проводника

$$\mathbf{n}\times\mathbf{H}=\left[\frac{4\pi}{c}\right]\mathbf{K}. \tag{8.2}^{\star}$$

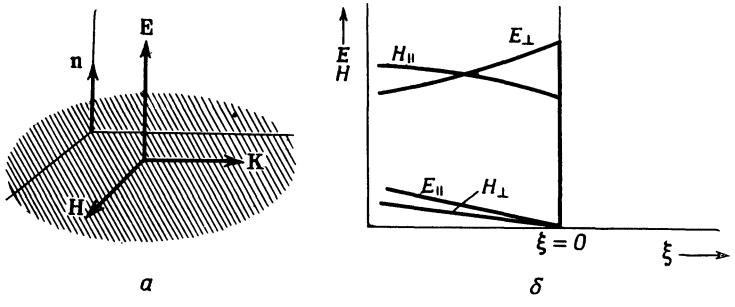
Остальные два граничных условия для нормальной составляющей $\mathbf{B}$ и тангенциальной составляющей $\mathbf{E}$ имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}-\mathbf{B}_c)&=0,\\ \mathbf{n}\times(\mathbf{E}-\mathbf{E}_c)&=0.\end{aligned} \tag{8.3}^{\star}$$

Здесь индекс c относится к полю в проводнике. Граничные условия (8.3) показывают, что на внешней стороне поверхности идеального проводника электрическое поле $\mathbf{E}$ имеет только *нормальную* составляющую, а магнитное поле $\mathbf{H}$ — только *тангенциальную* составляющую и что внутри идеального проводника поля́ скачком спадают до нуля (фиг. 8.1).

Поля вблизи поверхности неидеального, но хорошего проводника должны вести себя приблизительно так же, как и в случае

идеального проводника. Как мы видели в § 7 предыдущей главы, внутри проводника поля уменьшаются в e раз на характеристической длине δ, называемой *толщиной скин-слоя*. Для хороших проводников δ измеряется при средних частотах долями сантиметра. Следовательно, граничные условия (8.1) и (8.2) приближенно выполняются для хороших проводников, если не считать тонкого переходного поверхностного слоя.



Ф и г. 8.1. Поля вблизи поверхности идеального проводника.

Рассмотрение самого переходного слоя требует, однако, известной осторожности. Прежде всего из закона Ома (7.68) следует, что при конечной проводимости, строго говоря, не может быть поверхностного тока, как это предполагается в (8.2). Вместо этого граничные условия для магнитного поля будут иметь вид

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H} - \mathbf{H}_c) = 0. \qquad (8.4)^*$$

Для оценки эффектов, обусловленных конечной проводимостью, мы применим метод последовательных приближений. Предположим сначала, что на внешней стороне проводника имеется только нормальное электрическое поле $\mathbf{E}_\perp$ и тангенциальное магнитное поле $\mathbf{H}_\parallel$, как и в случае идеального проводника. Величины этих полей мы будем считать известными из решения соответствующей граничной задачи. Затем мы используем граничные условия и уравнения Максвелла в проводнике для нахождения полей внутри переходного слоя, а также малых поправок к полям вне проводника. При решении уравнений Максвелла внутри проводника мы воспользуемся тем, что поля меняются по нормали к поверхности гораздо быстрее, чем в направлении, параллельном поверхности. Поэтому всеми производными по координатам, параллельным поверхности, вполне можно пренебречь по сравнению с нормальными производными.

Если вне поверхности имеется тангенциальное поле $\mathbf{H}_\parallel$, то из граничного условия (8.4) следует, что такое же поле должно быть

и внутри тела. Если пренебречь током смещения в проводнике, то роторные уравнения (7.69) дают

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_c &\approx \frac{c}{4\pi\sigma}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}_c, \\ \mathbf{H}_c &= -\frac{ic}{\mu\omega}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_c, \end{aligned} \tag{8.5}$$

где предполагается, что поля изменяются по гармоническому закону $\sim e^{-i\omega t}$. Если $\mathbf{n}$ — *внешняя* единичная нормаль к проводнику, а ξ — координата, отсчитываемая по нормали *внутрь* проводника, то оператор градиента может быть записан в виде

$$\mathrm{grad} \approx -\mathbf{n}\frac{\partial}{\partial\xi};$$

остальными производными от полей внутри проводника мы пренебрегаем. В этом приближении уравнения (8.5) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_c &\approx -\frac{c}{4\pi\sigma}\,\mathbf{n}\times\frac{\partial\mathbf{H}_c}{\partial\xi}, \\ \mathbf{H}_c &\approx \frac{ic}{\mu\omega}\,\mathbf{n}\times\frac{\partial\mathbf{E}_c}{\partial\xi}. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Объединяя эти уравнения, получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(\mathbf{n}\times\mathbf{H}_c)+\frac{2i}{\delta^2}(\mathbf{n}\times\mathbf{H}_c)\approx 0, \tag{8.7}$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}_c \approx 0, \tag{8.8}$$

где δ — толщина скин-слоя, определяемая формулой (7.85). Второе из этих уравнений показывает, что $\mathbf{H}$ внутри проводника параллельно его поверхности, в согласии с нашими граничными условиями. Решение уравнения (8.7) для $\mathbf{H}_c$ имеет вид

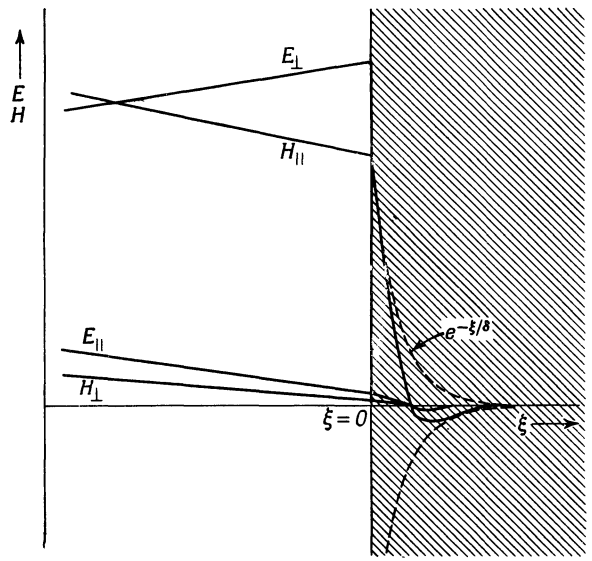
$$\mathbf{H}_c = \mathbf{H}_{||}e^{-\xi/\delta}e^{i\xi/\delta}, \tag{8.9}$$

где $\mathbf{H}_{||}$ — тангенциальное магнитное поле вне поверхности. Согласно (8.6), электрическое поле в проводнике приближенно можно записать как

$$\mathbf{E}_c \approx \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}}(1-i)(\mathbf{n}\times\mathbf{H}_{||})e^{-\xi/\delta}e^{i\xi/\delta}. \tag{8.10}$$

Полученные решения для $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ внутри проводника обладают всеми свойствами, указанными в § 7 предыдущей главы, а именно: а) они быстро экспоненциально спадают; б) электрическое и магнитное поля сдвинуты по фазе; в) магнитное поле много больше

электрического. Кроме того, из этих решений видно, что поля внутри хорошего проводника параллельны его поверхности [1]) и распространяются по нормали к поверхности, причем их величины полностью определяются тангенциальной составляющей магнитного поля $\mathbf{H}_{\parallel}$ на внешней стороне поверхности.



Ф и г. 8.2. Поля вблизи поверхности хорошего, но не идеального проводника.

Из граничного условия (8.3) для тангенциальной составляющей $\mathbf{E}$ мы находим, что на внешней стороне поверхности имеется небольшая тангенциальная составляющая электрического поля, определяемая формулой (8.10) при $\xi = 0$:

$$\mathbf{E}_{\parallel} \approx \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}}\,(1-i)\,(\mathbf{n}\times\mathbf{H}_{\parallel}). \tag{8.11}$$

В рассматриваемом приближении на внешней стороне поверхности имеется также и малая нормальная составляющая $\mathbf{B}_{\perp}$. Она может быть найдена из фарадеевского закона индукции и оказы-

[1]) Из непрерывности тангенциальных составляющих $\mathbf{H}$ и уравнения, связывающего $\mathbf{E}$ и $\mathrm{rot}\,\mathbf{H}$ на обеих сторонах поверхности, вытекает, что в проводнике существует небольшая нормальная составляющая электрического поля $\mathbf{E}_c\cdot\mathbf{n} \approx (i\omega\varepsilon/4\pi\sigma)\,E_\perp$, однако она имеет следующий порядок малости по сравнению с (8.10).

вается такого же порядка, как и $\mathbf{E}_{\|}$. Амплитуды полей внутри и вне проводника схематически показаны на фиг. 8.2.

Существование малой тангенциальной составляющей $\mathbf{E}$ вне поверхности наряду с нормальной составляющей $\mathbf{E}$ и тангенциальной составляющей $\mathbf{H}$ указывает на наличие потока энергии, направленного в проводник. Средняя по времени мощность, поглощаемая единицей поверхности, равна

$$\frac{dP_{\text{пт}}}{da} = -\frac{c}{8\pi}\operatorname{Re}[\mathbf{n}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*)] = \left[\frac{1}{4\pi}\right]\frac{\mu\omega\delta}{4}|\mathbf{H}_{\|}|^2. \qquad (8.12)^*$$

Эта мощность представляет собой омические потери в толще проводника, в чем нетрудно убедиться. Действительно, согласно закону Ома, плотность тока $\mathbf{J}$ вблизи поверхности проводника можно представить следующим образом:

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}_c = \sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{8\pi}}(1-i)(\mathbf{n}\times\mathbf{H}_{\|})\,e^{-\xi(1-i)/\delta}. \qquad (8.13)$$

Средняя по времени скорость диссипации энергии (на единицу объема), обусловленной омическими потерями, равна $^1/_2\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}^* = (1/2\sigma)|\mathbf{J}|^2$, поэтому мощность, выделяющаяся в объеме проводника, лежащем под элементом его поверхности ΔA, будет

$$\frac{1}{2\sigma}\Delta A\int_0^\infty d\xi\,\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}^* = \Delta A\frac{\mu\omega}{8\pi}|\mathbf{H}_{\|}|^2\int_0^\infty e^{-2\xi/\delta}\,d\xi = \Delta A\frac{\mu\omega\delta}{16\pi}|\mathbf{H}_{\|}|^2.$$

Полученное значение мощности потерь в точности совпадает с найденным выше с помощью вектора Пойнтинга [см. (8.12)].

Поскольку ток $\mathbf{J}$ течет в тонком слое, примыкающем к поверхности проводника, то его можно считать эквивалентным некоторому эффективному поверхностному току с плотностью $\mathbf{K}_{\text{эфф}}$

$$\mathbf{K}_{\text{эфф}} = \int_0^\infty \mathbf{J}\,d\xi = \left[\frac{c}{4\pi}\right]\mathbf{n}\times\mathbf{H}_{\|}. \qquad (8.14)^*$$

Сравнение с (8.2) показывает, что хороший проводник ведет себя так же, как идеальный проводник, если идеализированный поверхностный ток заменить эффективным током, распределенным в очень тонком, но конечном поверхностном слое. Мощность потерь можно выразить через эффективный поверхностный ток:

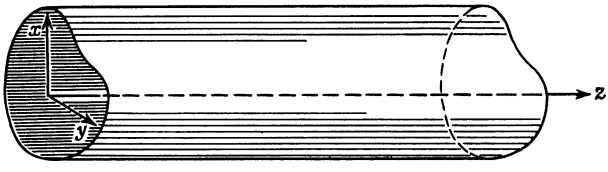
$$\frac{dP_{\text{пт}}}{da} = \frac{1}{2\sigma\delta}|\mathbf{K}_{\text{эфф}}|^2. \qquad (8.15)^*$$

Это выражение показывает, что величина $1/\sigma\delta$ играет роль поверхностного сопротивления проводника. Формула (8.15), где $\mathbf{K}_{\text{эфф}}$ определяется соотношением (8.14), позволяет приближенно рассчиты-

вать омические потери в резонаторах, линиях передачи и волноводах, если известны поля для соответствующей идеализированной задачи с бесконечной проводимостью.

§ 2. Цилиндрические резонаторы и волноводы

Возбуждение и распространение электромагнитных волн в полых металлических трубах имеет широкое практическое применение. Если труба имеет торцовые поверхности, то она называется



Ф и г. 8.3. Полый цилиндрический волновод с произвольным поперечным сечением.

резонатором, в противном случае — волноводом. В дальнейшем мы будем считать граничные поверхности идеально проводящими. Имеющиеся в действительности потери можно рассчитать методом, изложенным в § 1. Цилиндрическая поверхность S произвольного поперечного сечения изображена на фиг. 8.3. Мы предполагаем для простоты, что размеры и форма поперечного сечения не меняются вдоль оси цилиндра. При синусоидальной зависимости от времени $\sim e^{-i\omega t}$ уравнения Максвелла для полей внутри цилиндра принимают вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E} &= i\frac{\omega}{c}\mathbf{B}, & \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{B} &= -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\mathbf{E}, & \operatorname{div}\mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \tag{8.16}$$

Здесь предполагается, что цилиндр заполнен однородной непроводящей средой с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ. Из (8.16) следует, что $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ удовлетворяют уравнению

$$\left(\nabla^2 + \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}\right)\begin{Bmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{B}\end{Bmatrix} = 0. \tag{8.17}$$

Благодаря цилиндрической симметрии можно выделить зависимость от координаты z и положить

$$\left.\begin{matrix}\mathbf{E}(x, y, z, t)\\ \mathbf{B}(x, y, z, t)\end{matrix}\right\} = \begin{cases}\mathbf{E}(x, y)\, e^{\pm ikz - i\omega t},\\ \mathbf{B}(x, y)\, e^{\pm ikz - i\omega t}.\end{cases} \tag{8.18}$$

Беря соответствующие линейные комбинации, можно получить как бегущие, так и стоячие волны. Волновое число k является пока неизвестным параметром и может быть как действительным, так и комплексным. При выбранной зависимости полей от z волновое уравнение сводится к двумерному уравнению

$$\left[\nabla_t^2 + \left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\right]\left\{\begin{matrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{B}\end{matrix}\right\} = 0, \tag{8.19}$$

где ∇_t^2 — поперечная часть оператора Лапласа

$$\nabla_t^2 = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \tag{8.20}$$

Удобно также разбить поля на две части — параллельную и перпендикулярную оси z:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_z + \mathbf{E}_t. \tag{8.21}$$

Продольное электрическое поле равно

$$\mathbf{E}_z = (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E})\,\mathbf{e}_3, \tag{8.22}$$

а поперечное

$$\mathbf{E}_t = (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}) \times \mathbf{e}_3, \tag{8.23}$$

где $\mathbf{e}_3$ — единичный вектор, направленный вдоль оси z. Аналогичные обозначения введем и для вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$. Преобразуя роторные уравнения (8.16) и используя явную зависимость (8.18) от z, можно выразить поперечные составляющие полей через их продольные составляющие:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_t &= \frac{1}{\mu\varepsilon\,(\omega^2/c^2) - k^2}\left[\operatorname{grad}_t \frac{\partial B_z}{\partial z} + i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\,\mathbf{e}_3 \times \operatorname{grad}_t E_z\right],\\ \mathbf{E}_t &= \frac{1}{\mu\varepsilon\,(\omega^2/c^2) - k^2}\left[\operatorname{grad}_t \frac{\partial E_z}{\partial z} - i\frac{\omega}{c}\,\mathbf{e}_3 \times \operatorname{grad}_t B_z\right].\end{aligned} \tag{8.24}$$

Из этих соотношений следует, что для определения полей достаточно знать решения двумерного уравнения (8.19) для E_z и B_z; остальные составляющие могут быть определены с помощью (8.24).

В качестве граничных условий на поверхности цилиндра примем условия для идеального проводника

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{n}\times\mathbf{E} = 0, \tag{8.25}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности. Поскольку уравнения Максвелла и граничные условия внутренне согласованы, достаточно использовать условие обращения в нуль z-составляющей электрического поля на поверхности

$$E_z|_S = 0. \tag{8.26}$$

Для нормальной составляющей **B**, используя первое соотношение (8.24) для $\mathbf{B}_t$, мы находим, что из условия $\mathbf{n}\cdot\mathbf{B} = 0$ следует необходимость выполнения равенства

$$\frac{\partial B_z}{\partial n}\Big|_S = 0, \tag{8.27}$$

где $\partial/\partial n$ — нормальная производная, взятая на поверхности S.

Двумерное волновое уравнение (8.19) для E_z и B_z вместе с граничными условиями для E_z и B_z на поверхности цилиндра образуют обычную задачу на собственные значения. При заданной частоте ω дифференциальное уравнение и граничные условия удовлетворяются только при определенных значениях продольного волнового числа k (такая ситуация типична для волноводов); при заданном k допустимы только определенные частоты (типичная ситуация для резонаторов). Так как граничные условия для E_z и B_z различны, они не могут, вообще говоря, удовлетворяться одновременно. Соответственно поля делятся на две различные группы:

поперечно-магнитные (TM-волны)

$$B_z = 0 \text{ везде}$$

с граничным условием

$$E_z|_S = 0;$$

поперечно-электрические (TE-волны)

$$E_z = 0 \text{ везде}$$

с граничным условием

$$\frac{\partial B_z}{\partial n}\Big|_S = 0.$$

Вместо названий «поперечно-магнитные» и «поперечно-электрические» волны иногда используют названия «электрические» или «магнитные» волны (или E- и H-волны), отмечая этим наличие соответствующей продольной составляющей электрического или магнитного поля. Кроме этих двух типов волн, имеется еще вырожденный тип, так называемые *поперечные электромагнитные волны* (TEM), в которых равны нулю обе продольные составляющие E_z и B_z. Из (8.24) видно, что при E_z и B_z, равных нулю, отличные от нуля поперечные составляющие полей могут существовать только в том случае, когда продольное волновое число удовлетворяет условию

$$k = \sqrt{\mu\varepsilon}\,\frac{\omega}{c}. \tag{8.28}$$

Следовательно, ТЕМ-волны распространяются с той же скоростью, что и волны в свободном пространстве (без ограничивающих поверхностей). Из двумерного волнового уравнения (8.19) следует, что

$$\nabla_t^2 \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_{\text{ТЕМ}} \\ \mathbf{B}_{\text{ТЕМ}} \end{Bmatrix} = 0, \tag{8.29}$$

т. е. каждая составляющая поперечных полей удовлетворяет электростатическому двумерному уравнению Лапласа. Легко убедиться, что $\mathbf{E}_{\text{ТЕМ}}$ и $\mathbf{B}_{\text{ТЕМ}}$ являются градиентами скалярных потенциалов, удовлетворяющих уравнению Лапласа, и что поле $\mathbf{B}_{\text{ТЕМ}}$ всюду перпендикулярно $\mathbf{E}_{\text{ТЕМ}}$. Действительно, из закона индукции Фарадея следует

$$\mathbf{B}_{\text{ТЕМ}} = \frac{c}{i\omega} \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}_{\text{ТЕМ}}). \tag{8.30}$$

Поскольку зависимость от z выражается множителем $\exp\left(i\sqrt{\mu\varepsilon}\,\omega z/c\right)$, то

$$\mathbf{B}_{\text{ТЕМ}} = \sqrt{\mu\varepsilon}\,(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}_{\text{ТЕМ}}). \tag{8.31}^{\star}$$

Точно так же связаны $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ в плоской волне, распространяющейся в неограниченном пространстве.

Из (8.29) следует, что ТЕМ-волны не могут существовать внутри односвязного полого цилиндрического идеально проводящего проводника. Его поверхность является эквипотенциальной, и, следовательно, электрическое поле внутри нее должно обращаться в нуль. Для получения ТЕМ-волн необходимо иметь две (или более) цилиндрические поверхности. Эти волны являются основными для таких систем, как коаксиальный кабель или двухпроводная линия передачи (см. задачи 8.1 и 8.2).

§ 3. Волноводы

Рассмотрим теперь распространение электромагнитных волн в полом волноводе постоянного поперечного сечения. При зависимости от z вида e^{ikz} поперечные составляющие полей для двух типов волн связаны, согласно (8.24), соотношениями

ТМ-волны

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{B}_t &= \frac{\mu\varepsilon\omega}{ck}\,\mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}_t, \\ \text{ТЕ-волны} \qquad \mathbf{E}_t &= -\frac{\omega}{ck}\,\mathbf{e}_3 \times \mathbf{B}_t. \end{aligned}\right\} \tag{8.32}$$

В свою очередь поперечные поля определяются через продольные:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ТМ-волны} & \mathbf{E}_t = \dfrac{ik}{\gamma^2}\operatorname{grad}_t \psi, \\ \text{ТЕ-волны} & \mathbf{B}_t = \dfrac{ik}{\gamma^2}\operatorname{grad}_t \psi; \end{array}\right\} \tag{8.33}$$

здесь $\psi = E_z$ для ТМ-волн и $\psi = B_z$ для ТЕ-волн. Скалярная функция ψ удовлетворяет двумерному волновому уравнению (8.19)

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2)\,\psi = 0, \tag{8.34}$$

где

$$\gamma^2 = \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2, \tag{8.35}$$

и граничным условиям

$$\psi|_S = 0 \quad \text{или} \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_S = 0 \tag{8.36}$$

соответственно для ТМ- и ТЕ-волн.

Уравнение (8.34) для ψ вместе с граничным условием (8.36) определяет задачу на собственные значения. Легко видеть, что введенная константа γ^2 не может быть отрицательной. Грубо говоря, это следует из того, что функция ψ должна иметь колебательный характер, для того чтобы удовлетворить граничным условиям (8.36) на противоположных сторонах цилиндра. Имеется спектр собственных значений γ_λ^2 и соответствующих им собственных функций ψ_λ ($\lambda = 1, 2, 3, \ldots$), которые составляют ортогональную систему. Получающиеся при этом различные решения называются *модами*, или *типами волн* [1]). При заданной частоте ω волновое число определяется для каждого значения λ соотношением

$$k_\lambda^2 = \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - \gamma_\lambda^2. \tag{8.37}$$

Определим *граничную частоту* ω_λ следующим образом:

$$\omega_\lambda = [c]\frac{\gamma_\lambda}{\sqrt{\mu\varepsilon}}. \tag{8.38}\star$$

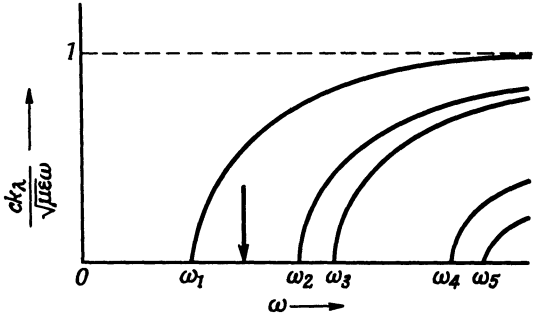
Тогда волновое число k_λ можно записать в виде

$$k_\lambda = \left[\frac{1}{c}\right]\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2}. \tag{8.39}\star$$

---

[1]) Хотя термин «тип волны» имеет и другой, более широкий смысл (волны электрического и магнитного типов), в русской литературе он более распространен, и мы его примем в этой книге.— *Прим. ред.*

Если $\omega > \omega_\lambda$, то волновое число k_λ вещественно и волны λ-типа могут распространяться в волноводе. Для частот, меньших граничной частоты, k_λ оказывается мнимым; такие типы волн не могут распространяться. Зависимость продольного волнового числа от частоты качественно показана на фиг. 8.4. Мы видим, что на каждой данной частоте может распространяться только конечное число типов волн. Размеры волновода обычно выбирают таким образом, чтобы при рабочей частоте мог распространяться только наинизший тип волн. (Примерное положение рабочей частоты показано на фиг. 8.4 вертикальной стрелкой.)



Фиг. 8.4. Зависимость волнового числа k_λ от частоты ω для различных λ. ω_λ — граничная частота.

Так как волновое число k_λ всегда меньше, чем постоянная распространения $\sqrt{\mu\varepsilon}\,\omega/c$ для свободного пространства, то длина волны в волноводе всегда больше, чем в свободном пространстве. Соответственно фазовая скорость $v_{\text{фаз}}$ в волноводе также больше, чем в свободном пространстве:

$$v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k_\lambda} = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{1-(\omega_\lambda^2/\omega^2)}} > \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \tag{8.40}$$

и стремится к бесконечности, когда частота ω приближается к граничной частоте ω_λ.

§ 4. Волны в прямоугольном волноводе

В качестве иллюстрации общих свойств волн, описанных в предыдущем параграфе, рассмотрим распространение ТЕ-волн в прямоугольном волноводе с внутренними размерами a, b (фиг. 8.5). Функция $\psi = B_z$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2\right)\psi = 0 \tag{8.41}$$

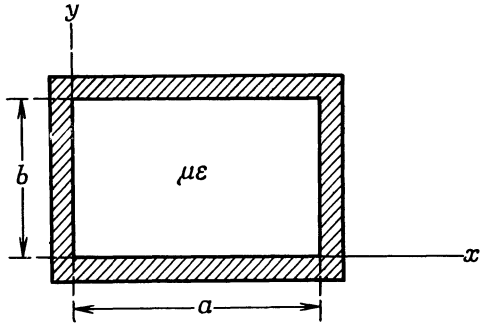
с граничными условиями $\partial\psi/\partial n = 0$ при $x = 0, a$ и $y = 0, b$. Очевидно, решение имеет вид

$$\psi_{mn}(x, y) = B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \tag{8.42}$$

где

$$\gamma_{mn}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right). \tag{8.43}$$

Индекс λ, определяющий тип волны, заменен здесь двумя положительными целочисленными индексами m, n. Чтобы решение было



Ф и г. 8.5.

нетривиальным, m и n не должны быть одновременно равны нулю. Граничная частота ω_{mn} определяется соотношением

$$\omega_{mn} = [c] \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^{1/2}. \tag{8.44}^{\star}$$

Если $a > b$, то наинизшая граничная частота, соответствующая основному ТЕ-типу, получается при $m = 1$, $n = 0$:

$$\omega_{10} = \frac{\pi c}{\sqrt{\mu\varepsilon}\, a}. \tag{8.45}$$

При этом на стороне a укладывается половина длины волны в свободном пространстве. Явные выражения для полей волн этого типа, обозначаемого TE_{10}, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} B_z &= B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{ikz - i\omega t}, \\ B_x &= -\frac{ika}{\pi} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{ikz - i\omega t}, \\ E_y &= i\frac{\omega a}{\pi c} B_a \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{ikz - i\omega t}. \end{aligned} \tag{8.46}$$

Наличие множителя i в B_x (и E_y) означает, что B_x и E_y сдвинуты в пространстве и во времени по фазе на 90° по отношению к B_z. Оказывается, что TE_{10}-волна имеет наинизшую граничную частоту из всех TE- и TM-волн [1]) и поэтому именно она обычно используется практически. Для типичного случая $a = 2b$ отношение граничных частот ω_{mn}/ω_{10} для нескольких типов волн дается следующей таблицей:

m	ω_{mn}/ω_{10}			
	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
0		2,00	4,00	6,00
1	1,00	2,24	4,13	
2	2,00	2,84	4,48	
3	3,00	3,61	5,00	
4	4,00	4,48	5,66	
5	5,00	5,39		
6	6,00			

В интервале частот от граничной частоты до ее удвоенного значения распространяется только TE_{10}-волна. Выше этой удвоенной частоты начинают быстро появляться другие типы волн. Конфигурации полей TE_{10}-волны и других изображены во многих книгах (см., например, [5]).

§ 5. Поток энергии и затухание в волноводах

Общее обсуждение цилиндрических волноводов с произвольной формой поперечного сечения, проведенное в § 3, можно продолжить, рассмотрев также поток энергии вдоль волновода и затухание волн, обусловленное потерями в стенках с конечной проводимостью. Мы ограничимся рассмотрением одного отдельного типа волны; общий случай может быть получен суперпозицией.

---

[1]) Это становится очевидным, если мы заметим, что E_z для TM-волн имеет вид

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right),$$

причем тогда и γ^2 определяется выражением (8.43). Волне низшего типа соответствует здесь $m = n = 1$. Ее граничная частота больше граничной частоты TE_{10}-волны в $[1 + (a^2/b^2)]^{1/2}$ раз.

Средний по времени поток энергии дается действительной частью комплексного вектора Пойнтинга

$$\mathbf{S}=\left[\frac{c}{4\pi}\right]\frac{1}{2}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*). \tag{8.47}$$

Для введенных выше двух типов волн, используя (8.24), найдем

$$\mathbf{S}=\frac{\omega k}{8\pi\gamma^4}\begin{cases}\varepsilon\left[\mathbf{e}_3\,|\,\mathrm{grad}_t\,\psi|^2+i\,\dfrac{\gamma^2}{k}\,\psi\,\mathrm{grad}_t\,\psi^*\right],\\ \dfrac{1}{\mu}\left[\mathbf{e}_3\,|\,\mathrm{grad}_t\,\psi|^2-i\,\dfrac{\gamma^2}{k}\,\psi^*\,\mathrm{grad}_t\,\psi\right],\end{cases} \tag{8.48}$$

где верхняя строчка соответствует ТМ-волнам, а нижняя — ТЕ-волнам. Так как функция ψ обычно вещественна [1]), то поперечная составляющая $\mathbf{S}$ представляет лишь реактивный поток энергии и не дает вклада в средний по времени поток энергии. Наоборот, аксиальная составляющая $\mathbf{S}$ определяет среднюю плотность потока энергии вдоль волновода. Для получения полного потока мощности P через сечение волновода проинтегрируем продольную составляющую $\mathbf{S}$ по площади поперечного сечения волновода A:

$$P=\int_A \mathbf{S}\cdot\mathbf{e}_3\,da=\frac{\omega k}{8\pi\gamma^4}\begin{Bmatrix}\varepsilon\\ 1/\mu\end{Bmatrix}\int_A(\mathrm{grad}_t\,\psi)^*\cdot(\mathrm{grad}_t\,\psi)\,da. \tag{8.49}$$

Применяя первую формулу Грина (1.34) к поверхностному интегралу (8.49), мы можем написать P в виде

$$P=\frac{\omega k}{8\pi\gamma^4}\begin{Bmatrix}\varepsilon\\ 1/\mu\end{Bmatrix}\left[\oint_C\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial n}\,dl-\int_A\psi^*\nabla_t^2\psi\,da\right], \tag{8.50}$$

где первый интеграл берется по контуру C, ограничивающему поперечное сечение цилиндра. В силу граничных условий (8.36) этот интеграл равен нулю для обоих типов волн. С учетом волнового уравнения (8.34) второй интеграл сводится к нормировочному интегралу для ψ. Таким образом, проходящая мощность оказывается равной

$$P=\left[\frac{c}{4\pi}\right]\frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}}\left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^2\left(1-\frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/2}\begin{Bmatrix}\varepsilon\\ 1/\mu\end{Bmatrix}\int_A\psi^*\psi\,da, \tag{8.51}$$

где верхняя строчка в фигурных скобках соответствует ТМ-волнам, а нижняя — ТЕ-волнам и явно выделена зависимость от частоты ω.

[1]) Можно возбудить волновод таким образом, что данный тип волн или линейная комбинация волн будут характеризоваться комплексной функцией ψ. Тогда может появиться средний по времени поперечный поток энергии. Этот поток может быть только циркулярным, соответствуя некоторой запасенной энергии поля, и большого практического значения не имеет.

Непосредственное вычисление энергии на единицу длины волновода производится аналогично и дает

$$U=\left[\frac{1}{4\pi}\right]\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^2\left\{\begin{array}{c}\varepsilon\\ \dfrac{1}{\mu}\end{array}\right\}\int\limits_A \psi^*\psi\, da. \qquad (8.52)^\star$$

Сравнивая это выражение с потоком мощности P, мы видим, что P и U пропорциональны друг другу. Коэффициент пропорциональности имеет размерность скорости (скорость потока энергии) и совпадает с групповой скоростью

$$\frac{P}{U}=\frac{k}{\omega}\frac{c^2}{\mu\varepsilon}=\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{1-\frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}}=v_{\text{гр}}. \qquad (8.53)$$

В последнем легко убедиться, вычисляя $v_{\text{гр}}=d\omega/dk$ из (8.39) в предположении, что диэлектрик, заполняющий волновод, является недиспергирующей средой. Отметим, что групповая скорость всегда меньше скорости волн в неограниченной среде и обращается в нуль при стремлении ω к граничной частоте ω_λ. Произведение фазовой скорости (8.40) на групповую скорость равно константе

$$v_{\text{фаз}}v_{\text{гр}}=\frac{c^2}{\mu\varepsilon}\,, \qquad (8.54)$$

что является прямым следствием соотношения $\omega\Delta\omega\sim k\Delta k$.

Наше рассмотрение до сих пор относилось к волноводам с идеально проводящими стенками. Аксиальное волновое число k_λ было либо действительным, либо чисто мнимым. Если стенки имеют конечную проводимость, то из-за омических потерь в стенках поток мощности будет затухать вдоль волновода. При большой проводимости стенок к волновому числу добавляется малая мнимая часть

$$k_\lambda\approx k_\lambda^{(0)}+i\beta_\lambda, \qquad (8.55)^\star$$

где $k_\lambda^{(0)}$ — волновое число для идеально проводящих стенок. Постоянную затухания β_λ можно определить, либо решая заново задачу с граничными условиями, учитывающими конечную проводимость, либо рассчитывая омические потери методом, изложенным в § 1 этой главы, и привлекая закон сохранения энергии. Мы пойдем по второму пути. Поток мощности вдоль волновода определяется выражением

$$P(z)=P_0e^{-2\beta_\lambda z}. \qquad (8.56)^\star$$

Отсюда постоянная затухания равна

$$\beta_\lambda=-\frac{1}{2P}\frac{dP}{dz}\,, \qquad (8.57)^\star$$

где — dP/dz — мощность, расходуемая на омический нагрев на единицу длины волновода. В соответствии с результатами § 1 эта мощность потерь равна

$$-\frac{dP}{dz}=\left[\frac{c^2}{16\pi^2}\right]\frac{1}{2\sigma\delta\mu^2}\oint\limits_C|\mathbf{n}\times\mathbf{B}|^2\,dl, \qquad (8.58)^\star$$

где интегрирование производится по контуру поперечного сечения волновода. Подставляя сюда поля (8.32) и (8.33), получаем

$$-\frac{dP}{dz}=\frac{c^2}{32\pi^2\sigma\delta\mu^2}\left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^2\times$$
$$\times\oint\limits_C dl\left\{\begin{array}{l}\dfrac{c^2}{\omega_\lambda^2}\left|\dfrac{\partial\psi}{\partial n}\right|^2,\\[2ex] \dfrac{c^2}{\mu\varepsilon\omega_\lambda^2}\left(1-\dfrac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}\right)|\mathbf{n}\times\operatorname{grad}_t\psi|^2+\dfrac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}|\psi|^2,\end{array}\right\} \qquad (8.59)$$

где снова верхняя строчка относится к ТМ-волнам, а нижняя — к ТЕ-волнам.

Так как поперечные производные ψ полностью определяются размером и формой волновода, то (8.59) дает явную зависимость потерь мощности от частоты. Интегралы в выражении (8.59) можно просто оценить, учитывая, что для обоих типов волн справедливо соотношение

$$\left(\nabla_t^2+\frac{\mu\varepsilon\omega_\lambda^2}{c^2}\right)\psi=0. \qquad (8.60)$$

Отсюда следует, что (за исключением особых случаев) поперечные производные ψ по порядку величины равны $\sqrt{\mu\varepsilon}\,(\omega_\lambda/c)\,\psi$ и, следовательно,

$$\left\langle\left|\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|^2\right\rangle\sim\langle|\mathbf{n}\times\operatorname{grad}_t\psi|^2\rangle\sim\mu\varepsilon\frac{\omega_\lambda^2}{c^2}\langle|\psi|^2\rangle. \qquad (8.61)$$

Это позволяет связать криволинейные интегралы в (8.59) с интегралом от $|\psi|^2$ по площади поперечного сечения. Например,

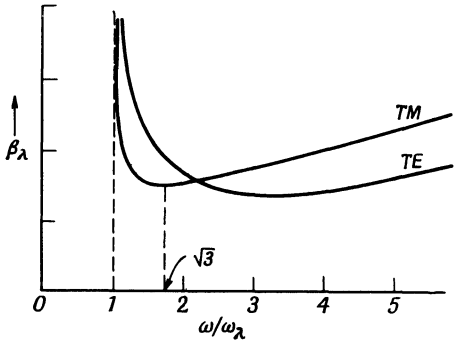
$$\oint\limits_C\frac{c^2}{\omega_\lambda^2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|^2dl=\xi_\lambda\mu\varepsilon\frac{C}{A}\int\limits_A|\psi|^2\,da, \qquad (8.62)$$

где C — длина контура, A — площадь поперечного сечения, а ξ_λ — безразмерное число порядка единицы. Таким образом, не конкретизируя форму волновода, мы можем найти порядок величины постоянной затухания β_λ и ее зависимость от частоты. Используя (8.59), (8.62) и (8.51), а также зависимость толщины скин-слоя

(7.85) от частоты, получаем

$$\beta_\lambda = \left[\frac{c}{4\pi}\right]\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\frac{1}{\sigma\delta_\lambda}\,\frac{C}{2A}\,\frac{(\omega/\omega_\lambda)^{1/2}}{(1-\omega_\lambda^2/\omega^2)^{1/2}}\left[\xi_\lambda+\eta_\lambda\left(\frac{\omega_\lambda}{\omega}\right)^2\right]; \qquad (8.63)^*$$

здесь σ — проводимость (которая предполагается не зависящей от частоты), δ_λ — толщина скин-слоя при граничной частоте ω_λ, а ξ_λ и η_λ — безразмерные числа порядка единицы. Для ТМ-волн $\eta_\lambda = 0$.



Фиг. 8.6. Зависимость постоянной затухания β_λ от частоты ω для типичных ТЕ- и ТМ-волн.

Для ТМ-волн минимум затухания достигается при $\omega/\omega_\lambda = \sqrt{3}$ независимо от формы поперечного сечения.

Зависимость постоянной затухания β_λ от частоты показана на фиг. 8.6. При $\omega \to \omega_\lambda$ она стремится к бесконечности (из-за обращения в нуль потока мощности P), достигает минимума при частоте порядка нескольких ω_λ и затем снова возрастает примерно пропорционально $\omega^{1/2}$ при $\omega \gg \omega_\lambda$. Для ТМ-волн минимум поглощения лежит при $\omega_{\text{мин}} = \sqrt{3}\,\omega_\lambda$ независимо от формы волновода. Для ТЕ-волн отношение величин ξ_λ и η_λ зависит от формы волновода и от λ. Поэтому нельзя в общем случае указать частоту, при которой затухание будет минимальным. В микроволновом диапазоне характерные значения постоянной затухания для меди соответствуют уменьшению мощности потока в e раз на длине 200—400 *м*, т. е. затуханию $\sim$ 20—40 *дб/км*.

При заданной форме поперечного сечения волновода безразмерные константы ξ_λ и η_λ, входящие в (8.63), легко вычисляются. Для ТЕ-волн в прямоугольном волноводе имеем

$$\xi_{mn} = \frac{2b}{a+b}\,\frac{m^2(b/a)+n^2}{m^2(b^2/a^2)+n^2}, \qquad \eta_{mn} = \frac{2a}{a+b}\,\frac{m^2(b^3/a^3)+n^2}{m^2(b^2/a^2)+n^2}, \qquad (8.64)$$

где использованы обозначения из § 4 и $m \neq 0$, $n \neq 0$. Соответствующие выражения для ТЕ-волн с $n = 0$ имеют вид

$$\xi_{m0} = \frac{a}{a+b}, \qquad \eta_{m0} = \frac{2b}{a+b}. \tag{8.65}$$

Мы видим, что при разумных соотношениях между a и b эти параметры имеют порядок единицы независимо от величин m и n. Расчет параметров ξ_{mn} и η_{mn} для ТМ-волн мы предоставляем читателю в качестве упражнения. Другие формы поперечного сечения рассматриваются в задачах к этой главе.

В реальных случаях затухание волн связано также и с потерями в диэлектрике, заполняющем волновод. Если поглощающая способность диэлектрика известна, то это дополнительное затухание может быть найдено методом, аналогичным использованному при определении потерь в стенках волновода.

§ 6. Резонаторы

Электромагнитные резонаторы могут иметь самые разнообразные формы. Особо важным классом являются резонаторы, представляющие собой цилиндрические волноводы с закрытыми торцами. Мы будем считать, что торцовые поверхности являются плоскостями, перпендикулярными оси цилиндра. Как обычно, примем, что стенки резонатора имеют бесконечную проводимость и что резонатор заполнен диэлектриком без потерь, имеющим характеристики ε, μ. Вследствие отражения от торцовых поверхностей зависимость полей от z должна соответствовать стоячим волнам

$$A \sin kz + B \cos kz.$$

Если торцовые стенки расположены при $z = 0$ и $z = d$, то граничные условия на них выполняются только при значениях k, удовлетворяющих соотношению

$$k = p\frac{\pi}{d}, \quad p = 0, 1, 2, \ldots. \tag{8.66}$$

Для ТМ-колебаний из условия обращения в нуль поля $\mathbf{E}_t$ при $z = 0$ и $z = d$ получаем

$$E_z = \psi(x, y) \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right), \quad p = 0, 1, 2, \ldots. \tag{8.67}$$

Аналогично для ТЕ-колебаний условие обращения B_z в нуль при $z = 0$ и $z = d$ дает

$$B_z = \psi(x, y) \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right), \quad p = 1, 2, 3, \ldots. \tag{8.68}$$

Поперечные составляющие полей находятся из (8.24):

ТМ-колебания

$$\mathbf{E}_t = -\frac{p\pi}{\gamma^2 d}\sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\operatorname{grad}_t\psi,$$
$$\mathbf{B}_t = \frac{i\mu\varepsilon\omega}{\gamma^2 c}\cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\mathbf{e}_3\times\operatorname{grad}_t\psi \tag{8.69}$$

ТЕ-колебания

$$\mathbf{E}_t = -\frac{i\omega}{\gamma^2 c}\sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\mathbf{e}_3\times\operatorname{grad}_t\psi,$$
$$\mathbf{B}_t = \frac{p\pi}{\gamma^2 d}\cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\operatorname{grad}_t\psi. \tag{8.70}$$

Граничные условия на торцах резонатора здесь, очевидно, выполнены, и мы, как и ранее, приходим к задаче на собственные значения (8.34) — (8.36). Однако теперь постоянная γ^2 равна

$$\gamma^2 = \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2. \tag{8.71}$$

Для каждого p собственное значение γ_λ^2 определяет собственное значение резонансной частоты

$$\omega_{\lambda p}^2 = [c^2]\frac{1}{\mu\varepsilon}\left[\gamma_\lambda^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2\right] \tag{8.72}^*$$

и поля, соответствующие этому резонансному типу волны. Резонансные частоты образуют дискретный спектр и могут быть определены из графика зависимости аксиального волнового числа k от частоты в волноводе (см. фиг. 8.4), если учесть, что $k = p\pi/d$. Обычно желательно выбирать размеры резонатора так, чтобы рабочая резонансная частота была достаточно удалена от других резонансных частот. В этом случае резонатор будет более стабилен в работе и нечувствителен к возмущающим эффектам, связанным с изменением частоты, нагрузки и т. д.

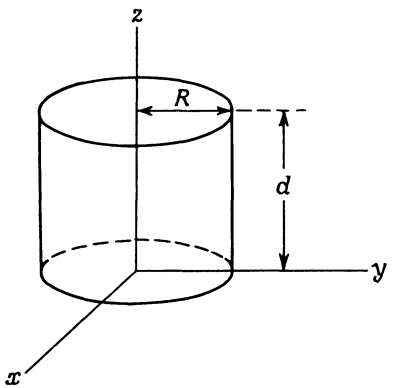
Очень часто применяется резонатор в виде прямого круглого цилиндра, иногда с поршнем, позволяющим производить настройку путем изменения длины резонатора. На фиг. 8.7 показан такой цилиндр с внутренним радиусом R и длиной d. Для ТМ-колебаний решение поперечного волнового уравнения для $\psi = E_z$, удовлетворяющее граничному условию $E_z = 0$ при $\varrho = R$, имеет вид

$$\psi(\varrho, \varphi) = J_m(\gamma_{mn}\varrho)\,e^{\pm im\varphi}, \tag{8.73}$$

где

$$\gamma_{mn} = \frac{x_{mn}}{R}, \tag{8.74}$$

а x_{mn} представляет собой n-й корень уравнения $J_m(x) = 0$. Эти корни приведены на стр. 90 после уравнения (3.92). Число m



Ф и г. 8.7.

принимает значения $m = 0, 1, 2, \ldots$, число n—значения $n = 1, 2, 3, \ldots$, а резонансные частоты определяются формулой

$$\omega_{mnp} = [c]\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\frac{x_{mn}^2}{R^2} + \frac{p^2\pi^2}{d^2}}\,. \qquad (8.75)^{\star}$$

Низшую частоту имеет TM-колебание, соответствующее $m = 0$, $n = 1$, $p = 0$ и обозначаемое через TM_{010}. Эта резонансная частота равна

$$\omega_{010} = \frac{2{,}405}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{c}{R}\,. \qquad (8.76)$$

Поля в этом случае описываются соотношениями

$$\begin{aligned} E_z &= E_0 J_0\left(\frac{2{,}405\varrho}{R}\right)e^{-i\omega t},\\ B_\varphi &= -i\sqrt{\mu\varepsilon}E_0 J_1\left(\frac{2{,}405\varrho}{R}\right)e^{-i\omega t}. \end{aligned} \qquad (8.77)$$

Резонансная частота этого типа колебаний не зависит от d, поэтому простая настройка перемещением поршня в данном случае невозможна.

Для TE-колебаний также применимо основное решение (8.73), однако граничное условие для $B_z\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varrho}\Big|_R = 0\right)$ приводит теперь к равенству

$$\gamma_{mn} = \frac{x'_{mn}}{R}\,, \qquad (8.78)$$

где x'_{mn} является n-м корнем уравнения $J'_m(x) = 0$. Эти корни для первых нескольких значений m и n приводятся ниже:

Корни уравнения $J'_m(x) = 0$

$m = 0$: $x'_{0n} = 3{,}832,\ 7{,}016,\ 10{,}174,\ \ldots$

$m = 1$: $x'_{1n} = 1{,}841,\ 5{,}331,\ 8{,}536,\ \ldots$

$m = 2$: $x'_{2n} = 3{,}054,\ 6{,}706,\ 9{,}970,\ \ldots$

$m = 3$: $x'_{3n} = 4{,}201,\ 8{,}015,\ 11{,}336,\ \ldots$

Резонансные частоты определяются выражением

$$\omega_{mnp} = [c]\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left(\frac{x'^2_{mn}}{R^2} + \frac{p^2\pi^2}{d^2}\right)^{1/2}, \qquad (8.79)^*$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$, а $n, p = 1, 2, 3, \ldots$. Низшее колебание ТЕ-типа соответствует $m = n = p = 1$ и обозначается TE_{111}. Его резонансная частота равна

$$\omega_{111} = \frac{1{,}841}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{c}{R}\left(1 + 2{,}912\frac{R^2}{d^2}\right)^{1/2}, \qquad (8.80)$$

а поля выражаются с помощью (8.70) через B_z:

$$B_z = B_0 J_1\left(\frac{1{,}841\varrho}{R}\right)\cos\varphi\sin\left(\frac{\pi z}{d}\right)e^{-i\omega t}. \qquad (8.81)$$

При достаточно большом d ($d > 2{,}03\ R$) резонансная частота ω_{111} меньше, чем низшая частота ТМ-колебания [см. (8.76)]. В этом случае TE_{111}-колебание представляет собой основной тип колебаний резонатора. Поскольку эта частота зависит от отношения d/R, то имеется возможность производить настройку резонатора путем перемещения его торцовых стенок.

§ 7. Потери мощности в резонаторе. Добротность резонатора

В предыдущем параграфе мы показали, что резонаторы имеют дискретные резонансные частоты колебаний, которым соответствуют определенные конфигурации полей. Это означает, что каким бы способом мы ни пытались возбудить колебания данного типа, никаких полей правильной формы не возникнет до тех пор, пока частота возбуждения не будет в точности равна резонансной частоте. В действительности резонансная кривая не имеет вида δ-функции, а вокруг резонансной частоты имеется некоторый весьма узкий интервал частот, внутри которого возможно заметное возбуждение резонатора. Наиболее существенной причиной расплывания резонанс-

ного пика являются потери энергии в стенках резонатора, а также в заполняющем его диэлектрике. Мерой остроты резонанса по отношению к внешнему возбуждению является добротность резонатора Q, определяемая как отношение средней энергии, запасенной в резонаторе, к энергии, теряемой за период колебаний:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\pi} \frac{\text{Запасенная энергия}}{\text{Мощность потерь}}; \qquad (8.82)^*$$

здесь ω_0 — резонансная частота при отсутствии потерь. Согласно закону сохранения энергии, мощность омических потерь равна взятой с обратным знаком производной по времени от запасенной энергии U. Поэтому формулу (8.82) можно записать в виде уравнения для U

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dU}{dt} = -\frac{\omega_0}{2\pi Q} U, \\ \text{откуда} \quad &U(t) = U_0 e^{-\omega_0 t/2\pi Q}. \end{aligned}\right\} \qquad (8.83)$$

Запасенная в начальный момент энергия U_0 экспоненциально убывает со скоростью, обратно пропорциональной Q. Временна́я зависимость (8.83) означает, что колебания поля в резонаторе затухают по закону

$$E(t) = E_0 e^{-\omega_0 t/4\pi Q} e^{-i\omega_0 t}. \qquad (8.84)$$

Такого рода затухающие колебания имеют не одну частоту, а представляют собой суперпозицию частот, расположенных в окрестности $\omega = \omega_0$. Таким образом,

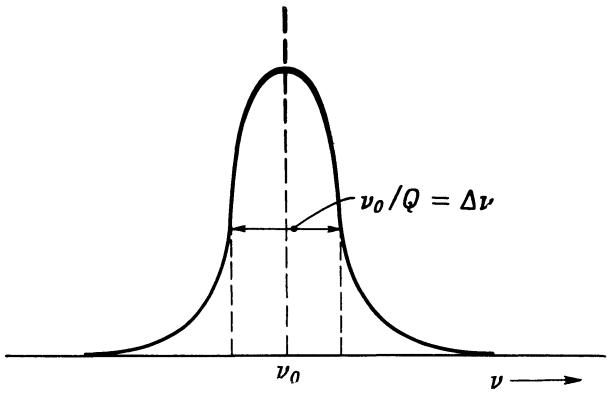
$$\left.\begin{aligned} &E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega)\, e^{-i\omega t} d\omega, \\ \text{где} \quad &E(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} E_0 e^{-\omega_0 t/4\pi Q} e^{i(\omega-\omega_0)t} dt. \end{aligned}\right\} \qquad (8.85)$$

Интегрирование в (8.85) производится элементарно и приводит к частотному распределению энергии в резонаторе, имеющему вид лоренцовского пика:

$$|E(\omega)|^2 \sim \frac{1}{(\nu-\nu_0)^2 + (\nu_0/2Q)^2}. \qquad (8.86)$$

В (8.86) мы перешли от угловых частот ω и ω_0 к линейным $\nu = \omega/2\pi$ и $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ в соответствии с определением Q. У резонансного пика (8.86), изображенного на фиг. 8.8, полная ширина

на высоте, равной половине максимальной (которую, к сожалению, часто называют «полушириной»), составляет ν_0/Q. При постоянном возбуждающем напряжении энергия колебаний в резонаторе в зависимости от частоты будет изменяться в окрестности резонансной



Ф и г. 8.8. Резонансный пик.
Полная ширина $\Delta\nu$ на половине максимума (по мощности) равна отношению центральной частоты ν_0 к добротности резонатора Q.

частоты, следуя резонансной кривой. Если $\Delta\nu$ — разность частот, соответствующих точкам половинной мощности, то добротность резонатора равна

$$Q = \frac{\nu_0}{\Delta\nu}. \tag{8.87}$$

Величина Q для микроволновых резонаторов обычно имеет порядок сотен или тысяч.

Для определения добротности необходимо рассчитать среднюю по времени энергию, накопленную в резонаторе, а затем найти мощность, поглощаемую в стенках. Вычисления аналогичны проведенным в § 5 при расчете затухания в волноводах. Мы ограничимся здесь рассмотрением цилиндрического резонатора, описанного в § 6. Энергия, запасенная в резонаторе для возбуждения колебания λ,p-типа в соответствии с (8.67) — (8.70), равна

$$U = \left[\frac{1}{4\pi}\right]\frac{d}{4}\left\{\begin{matrix}\varepsilon\\ \dfrac{1}{\mu}\end{matrix}\right\}\left[1+\left(\frac{p\pi}{\gamma_\lambda d}\right)^2\right]\int\limits_A |\psi|^2\,da, \tag{8.88}^*$$

где верхняя строчка относится к ТМ-, а нижняя — к ТЕ-типу колебаний. Для ТМ-типа при $p = 0$ следует еще ввести множитель 2.

Мощность потерь можно рассчитать по несколько измененной формуле (8.58)

$$P_{\text{пт}} = \left[\frac{c^2}{16\pi^2}\right] \frac{1}{2\sigma\delta\mu^2} \left[\oint_C dl \int_0^d dz\, |\,\mathbf{n}\times\mathbf{B}\,|^2_{\text{бок}} + \right.$$

$$\left. + 2\int_A da\,|\,\mathbf{n}\times\mathbf{B}\,|^2_{\text{торц}}\right]. \quad (8.89)^*$$

Для ТМ-типов колебаний с $p \neq 0$ легко показать, что

$$P_{\text{пт}} = \left[\frac{c^2}{16\pi^2}\right] \frac{\varepsilon}{\sigma\delta\mu} \left[1 + \left(\frac{p\pi}{\gamma_\lambda d}\right)^2\right] \left(1 + \xi_\lambda \frac{Cd}{4A}\right) \int_A |\,\psi\,|^2\, da; \quad (8.90)^*$$

здесь ξ_λ — то же самое безразмерное число, что и в (8.62), C — длина контура поперечного сечения резонатора, а A — площадь этого сечения. Для $p = 0$ величину ξ_λ следует заменить на $2\xi_\lambda$. Подставляя (8.88) и (8.89) в выражение (8.82) и используя определение (7.85) толщины скин-слоя, найдем добротность резонатора Q:

$$Q = \frac{\mu}{\mu_c} \frac{d}{\delta} \frac{1}{4\pi(1+\xi_\lambda Cd/4A)}, \quad (8.91)^*$$

где μ_c — магнитная проницаемость металлических стенок резонатора. Для $p = 0$ следует в (8.91) умножить правую часть на 2, а ξ_λ заменить на $2\xi_\lambda$. Выражению для Q можно дать простую физическую интерпретацию, если записать его в виде

$$Q = \frac{\mu}{\mu_c} \frac{V}{S\delta} G, \quad (8.92)^*$$

где G — некоторый геометрический множитель, V — объем резонансной полости, а S — площадь его поверхности. Отвлекаясь от геометрического множителя, мы видим, что добротность Q равна отношению объема, занятого полем, к объему проводника, в который поле проникает вследствие конечной проводимости. Для ТМ-колебаний в цилиндрическом резонаторе геометрический множитель имеет вид

$$G = \frac{1}{2\pi} \frac{1+Cd/2A}{1+\xi_\lambda Cd/4A} \quad (8.93)$$

для $p \neq 0$ и

$$G = \frac{1}{\pi} \frac{1+Cd/2A}{1+\xi_\lambda Cd/2A} \quad (8.94)$$

для $p = 0$. Для ТЕ-колебаний в цилиндрическом резонаторе геометрический множитель несколько более сложен, но имеет такой же

порядок величины. Для TM_{010}-типа в круглом цилиндрическом резонаторе, поле в котором описывается выражением (8.77), $\xi_\lambda = 1$ (это верно для всех TM-типов), так что геометрический множитель равен $1/\pi$ и

$$Q = \frac{1}{2\pi} \frac{\mu}{\mu_c} \frac{1}{1+d/R} \frac{d}{\delta} . \qquad (8.95)^\star$$

Для TE_{111}-типа геометрический множитель [1]), как показывают вычисления, имеет следующий вид:

$$G = \frac{1+d/R}{2\pi} \frac{1+0{,}344d^2/R^2}{1+0{,}209d/R+0{,}242d^3/R^3} \qquad (8.96)$$

и соответственно

$$Q = \frac{\mu}{4\pi\mu_c} \frac{d}{\delta} \frac{1+0{,}344d^2/R^2}{1+0{,}209d/R+0{,}242d^3/R^3} . \qquad (8.97)^\star$$

Соотношение (8.92) для Q применимо не только к цилиндрическим резонаторам, но и к резонаторам произвольной формы, причем множитель G обычно имеет величину порядка $1/2\pi$.

§ 8. Диэлектрические волноводы

В § 2—5 мы рассматривали волноводы, представляющие собой полые металлические трубы с полем внутри. Возможны и другие волноводные системы. Простейшим примером может служить двухпроводная линия передачи. Отличительной чертой электромагнитных волноводов является то, что энергия в них может распространяться только вдоль волновода, а не в перпендикулярном направлении. Это означает, что поля локализованы в основном лишь в непосредственной окрестности волноводной системы. Для полых волноводов это требование удовлетворяется тривиальным образом. Но для открытых систем, таких, как двухпроводная линия, поля простираются на некоторое расстояние в сторону от проводников, спадая как $1/\varrho^2$ для ТЕМ-волны и экспоненциально для волн высших типов.

Диэлектрический цилиндр типа показанного на фиг. 8.9 также может служить волноводом, причем при достаточно большой диэлектрической проницаемости он по свойствам весьма близок к полому металлическому волноводу. Имеются, однако, характерные особенности, связанные с существенным различием граничных условий. Общие выводы § 2 здесь также справедливы, но поведение полей в поперечном направлении описывается теперь двумя уравнениями типа (8.19): одно для области внутри цилиндра, а дру-

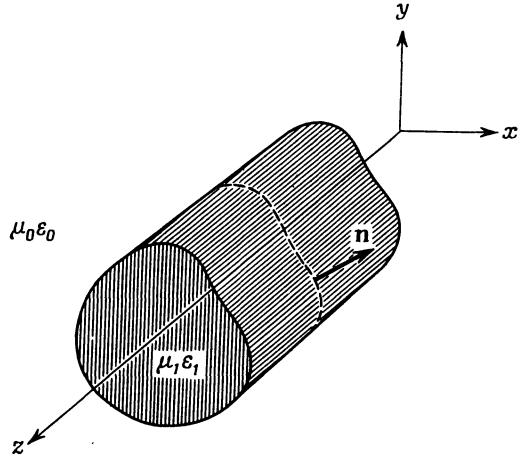
[1]) Отметим, что этот множитель меняется всего на 30% при изменении отношения d/R от $d/R \gg 1$ до $d/R \ll 1$.

гое для внешней области. Эти уравнения имеют вид

$$\left[\nabla_t^2 + \left(\mu_1\varepsilon_1\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\right]\left\{\begin{matrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{B}\end{matrix}\right\} = 0, \tag{8.98}$$

$$\left[\nabla_t^2 + \left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\right]\left\{\begin{matrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{B}\end{matrix}\right\} = 0, \tag{8.99}$$

причем (8.98) соответствует внутренней, а (8.99) — внешней области. Как диэлектрик (μ_1, ε_1), так и окружающее пространство (μ_0, ε_0) предполагаются здесь однородными и изотропными. Чтобы



Ф и г. 8.9. Отрезок диэлектрического волновода.

граничные условия удовлетворялись во всех точках поверхности цилиндра в произвольный момент времени, постоянная распространения (волновое число) k должна быть одинаковой внутри и вне цилиндра.

Как обычно, внутри диэлектрического цилиндра двумерный оператор Лапласа ∇_t^2 должен быть отрицательным, так что постоянная

$$\gamma^2 = \mu_1\varepsilon_1\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \tag{8.100}$$

положительна. Вне цилиндра условие отсутствия поперечного потока энергии приводит к требованию экспоненциального убывания полей. (В диэлектрическом волноводе не существует ТЕМ-волны.) Соответственно величина в круглых скобках в (8.99) должна быть отрицательной. Введем обозначение

$$\beta^2 = k^2 - \mu_0\varepsilon_0\frac{\omega^2}{c^2} \tag{8.101}$$

и будем требовать далее, чтобы волноводному решению соответствовало положительное значение β^2 (действительное β).

На границе диэлектрического цилиндра следует сшить осциллирующие решения внутри цилиндра с экспоненциальными решениями вне него. Граничными условиями являются непрерывность нормальных составляющих **B** и **D** и тангенциальных составляющих **E** и **H** (а не обращение в нуль нормальной составляющей **B** и тангенциальной **E**, как это было в случае полых металлических волноводов). Из-за более сложных граничных условий поля не могут быть разделены на TE- и TM-волны, за исключением частных случаев, как, например, аксиально-симметричные волны в круглом цилиндре, которые и будут рассмотрены ниже. В общем же случае существуют продольные составляющие как **E**, так и **B**. Такие волны иногда обозначаются как *HE*-волны.

Для иллюстрации некоторых свойств диэлектрического волновода рассмотрим круглый цилиндр радиусом a из немагнитного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε_1, расположенный во внешней немагнитной среде с диэлектрической проницаемостью ε_0. Будем считать для простоты, что поля не зависят от азимутального угла. При этом радиальные уравнения для E_z и B_z являются уравнениями Бесселя:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d^2}{d\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}+\gamma^2\right)\psi=0, \quad \varrho\leqslant a,\\ &\left(\frac{d^2}{d\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}-\beta^2\right)\psi=0, \quad \varrho>a. \end{aligned} \tag{8.102}$$

Решения, удовлетворяющие требованиям конечности в нуле и на бесконечности, согласно гл. 3, § 6, имеют вид

$$\psi=\begin{cases} J_0(\gamma\varrho), & \varrho\leqslant a,\\ AK_0(\beta\varrho), & \varrho>a. \end{cases} \tag{8.103}$$

При известных E_z и B_z остальные составляющие **E** и **B** можно определить с помощью (8.24). При отсутствии зависимости от азимутального угла φ соотношения (8.24) внутри цилиндра принимают вид

$$\begin{aligned} B_\rho&=\frac{ik}{\gamma^2}\frac{\partial B_z}{\partial\varrho}, \qquad B_\varphi=\frac{i\varepsilon_1\omega}{\gamma^2 c}\frac{\partial E_z}{\partial\varrho},\\ E_\varphi&=-\frac{\omega}{ck}B_\rho, \qquad E_\rho=\frac{ck}{\varepsilon_1\omega}B_\varphi. \end{aligned} \tag{8.104}$$

Аналогичные соотношения имеют место для $\varrho>a$. Тот факт, что поля разбиваются на две группы (B_ρ и E_φ зависят от B_z, а B_φ и E_ρ зависят от E_z), дает возможность получить решения TE- и TM-типов, как и в металлическом волноводе. Для TE-типов яв-

ные выражения для составляющих поля имеют вид

$$\left.\begin{aligned} B_z &= J_0(\gamma\varrho), \\ B_\varrho &= -\frac{ik}{\gamma} J_1(\gamma\varrho), \\ E_\varphi &= \frac{i\omega}{c\gamma} J_1(\gamma\varrho) \end{aligned}\right\} \quad \varrho \leqslant a \tag{8.105}$$

и

$$\left.\begin{aligned} B_z &= AK_0(\beta\varrho), \\ B_\varrho &= \frac{ikA}{\beta} K_1(\beta\varrho), \\ E_\varphi &= -\frac{i\omega A}{c\beta} K_1(\beta\varrho). \end{aligned}\right\} \quad \varrho > a \tag{8.106}$$

Эти поля должны удовлетворять известным граничным условиям при $\varrho = a$, которые приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} AK_0(\beta a) &= J_0(\gamma a), \\ -\frac{A}{\beta} K_1(\beta a) &= \frac{J_1(\gamma a)}{\gamma}. \end{aligned} \tag{8.107}$$

Исключая константу A, получаем уравнения для определения γ, β, а следовательно, и k:

$$\begin{aligned} &\frac{J_1(\gamma a)}{\gamma J_0(\gamma a)} + \frac{K_1(\beta a)}{\beta K_0(\beta a)} = 0, \\ &\gamma^2 + \beta^2 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\frac{\omega^2}{c^2}. \end{aligned} \tag{8.108}$$

Последнее равенство вытекает из (8.100) и (8.101). Поведение обоих слагаемых первого соотношения (8.108) изображено на фиг. 8.10,*а*. На фиг.8.10,*б* обе кривые изображены в функции γa в соответствии со вторым соотношением (8.108). На графике изображен случай достаточно большой частоты, при которой существуют два типа волн, обозначенных кружками на пересечении кривых. Вертикальные асимптоты дают корни $J_0(x) = 0$. Если максимальная величина γa меньше первого корня $x_{01} = 2{,}405$, то при действительном β кривые не пересекаются. Таким образом, нижняя «граничная» частота для TE_{0n}-волн равна

$$\omega_{01} = \frac{2{,}405c}{\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}\, a}. \tag{8.109}$$

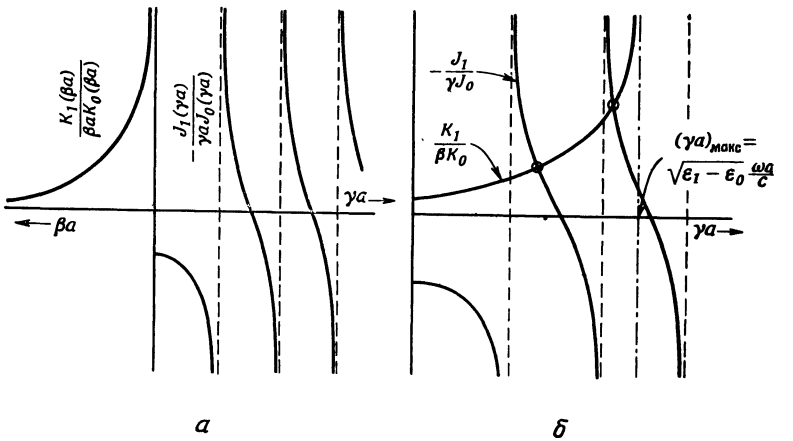
При этой частоте $\beta^2 = 0$, но продольное волновое число k еще остается действительным и равно волновому числу $\sqrt{\varepsilon_0}\omega/c$ в свободном пространстве. Для частот ниже «граничной» частоты система перестает быть волноводом и становится антенной, излу-

чающей энергию в радиальном направлении. Для частот, существенно больших граничной, β и k имеют один порядок величины, и если разница между ε_1 и ε_0 не очень мала, то β и k много больше γ.

Для ТМ-волн первое соотношение (8.108) заменяется соотношением

$$\frac{J_1(\gamma a)}{\gamma J_0(\gamma a)} + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\frac{K_1(\beta a)}{\beta K_0(\beta a)} = 0. \qquad (8.110)$$

Очевидно, все качественные характеристики, которые видны на фиг. 8.10, сохраняются и для ТМ-волн. Ясно также, что низшая

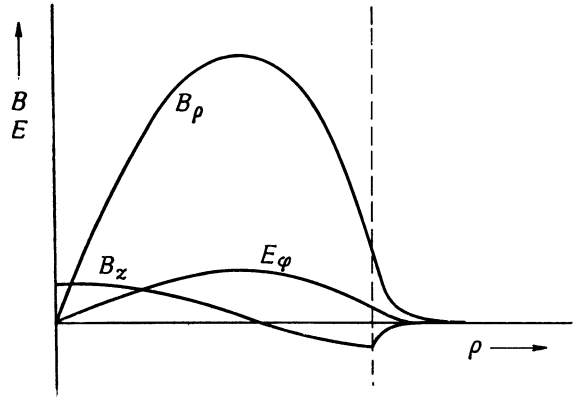


Фиг. 8.10. К графическому определению продольной постоянной распространения для диэлектрического волновода.

граничная частота для TM_{0n}-волн та же самая, что и для TE_{0n}-волн. При $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_0$ постоянная распространения, согласно (8.110), приближенно определяется уравнением $J_1(\gamma a) \approx 0$, если только максимальная величина γa не лежит слишком близко к одному из корней уравнения $J_0(x) = 0$. Таким же уравнением определяется и постоянная распространения для ТЕ-волн в металлическом волноводе. Причиной эквивалентности ТМ-волн в диэлектрическом волноводе и ТЕ-волн в полом металлическом волноводе является симметрия уравнений Максвелла относительно перестановки **E** и **B** (с необходимым изменением знака и введением множителей $\sqrt{\mu\varepsilon}$) и соответствие между граничными условиями обращения в нуль нормальной составляющей **B** на металлической поверхности и почти нулевой нормальной составляющей **E** на поверхности диэлектрика (вследствие непрерывности нормальной слагающей **D** при $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_0$).

Если $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_0$, то из (8.100) и (8.101) следует, что внешняя постоянная затухания β много больше γ (за исключением окрестности граничной частоты). Это означает, что поля быстро убывают

при удалении от цилиндра. На фиг. 8.11 качественно показано поведение полей для TE_{01}-волны. Другие типы волн ведут себя аналогично. Как отмечалось ранее, у типов волн с азимутальной зависимостью полей продольные составляющие как **E**, так и **B** отличны от нуля. Хотя их математический анализ и более сложен (см. задачу 8.6), однако качественно характер распространения — малая



Ф и г. 8.11. Радиальная зависимость полей TE_{01}-волны в диэлектрическом волноводе.

При $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_0$ поля в ссновном сосредоточены внутри диэлектрика. Пунктиром изображена граница диэлектрика.

длина волны вдоль цилиндра, быстрое убывание полей вне цилиндра и т. д.— остается тем же самым, что и в случае аксиально-симметричных волн.

До сих пор диэлектрические волноводы не использовались для передачи микроволн, кроме некоторых специальных приложений. Одной из причин этого является трудность получения подходящего диэлектрика, имеющего достаточно малые потери в микроволновом диапазоне частот. Недавно для оптических частот начали применять очень тонкие диэлектрические волокна, покрытые тонким слоем из материала с существенно меньшим показателем преломления. Плотно перевитый пучок таких волокон служит для передачи оптических изображений [21]. Диаметр волокон достаточно мал ($\sim$ 10 *мк*), чтобы к ним были применимы понятия волновода, хотя по ним обычно распространяется смесь различных типов волн.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Волноводы и резонаторы описаны в многочисленных книгах по электротехнике и связи. Среди физических учебников, где рассматриваются волноводы, линии передачи и резонаторы, отметим книги Пановского и Филипс

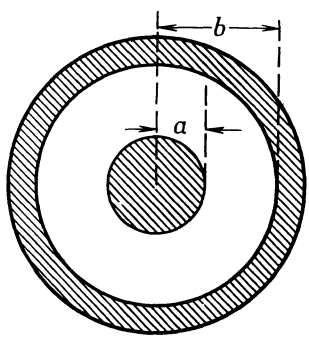
[78], гл. 12, Слэтера [97], Зоммерфельда [102] и Стрэттона [106]. Математические методы решения граничных задач приведены в книге Морса и Фешбаха [77], особенно гл. 13. Сведения о специальных функциях можно найти в книге Магнуса и Оберхеттингера [70]. Численные значения бесселевых функций приведены в таблицах Янке и Эмде [54] и в книге Ватсона [114].

Дополнение редактора. См. также монографию Вайнштейна [122], посвященную главным образом исследованию электромагнитных волн в волноводах и резонаторах.

Вопросы дифракции подробно рассмотрены в работе [132]; см. также [122].

ЗАДАЧИ

8.1. Линия передачи, состоящая из двух коаксиальных круглых металлических цилиндров с проводимостью σ и толщиной скин-слоя δ (фиг. 8.12), заполнена однородным диэлектриком (μ, ε), потери в котором отсутствуют. Вдоль линии распространяется поперечная ТЕМ-волна.



Фиг. 8.12.

а) Показать, что средний по времени поток мощности вдоль линии равен

$$P = \left[\frac{c}{4\pi}\right]\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\pi a^2 |H_0|^2 \ln\frac{b}{a},$$

где H_0— амплитудное значение азимутального магнитного поля на поверхности внутреннего проводника.

б) Показать, что мощность убывает с расстоянием вдоль линии по закону

$$P(z) = P_0 e^{-2\gamma z},$$

где

$$\gamma = \left[\frac{c}{4\pi}\right]\frac{1}{2\sigma\delta}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\frac{1/a + 1/b}{\ln b/a}.$$

в) Характеристический импеданс линии Z_0 определяется как отношение напряжения между цилиндрами при любом заданном z к продольному току, текущему по одному из цилиндров. Показать, что для такой линии

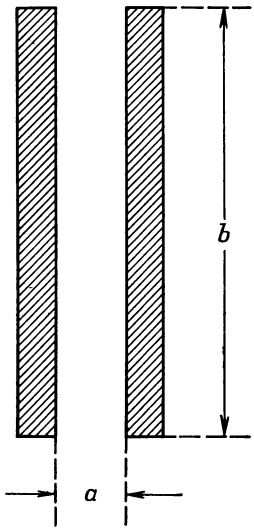
$$Z_0 = \left[\frac{4\pi}{c}\right]\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ln\frac{b}{a}.$$

г) Показать, что сопротивление и индуктивность на единицу длины линии описываются выражениями

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma\delta}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right),$$

$$L = \left[\frac{4\pi}{c^2}\right]\left\{\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a}+\frac{\mu_c\delta}{4\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right\},$$

где μ_c — магнитная проницаемость проводника. Поправка к индуктивности связана с проникновением поля на глубину порядка δ внутрь проводника.



Фиг. 8.13.

8.2. Линия передачи состоит из двух одинаковых тонких металлических полос, показанных в поперечном сечении на фиг. 8.13. Предполагая, что $b \gg a$, рассмотреть распространение ТЕМ-волны в такой линии аналогично задаче 8.1. Показать, что

$$P = \left[\frac{c}{4\pi}\right]\frac{ab}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,|H_0|^2,$$

$$\gamma = \left[\frac{c}{4\pi}\right]\frac{1}{a\sigma\delta}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}},$$

$$Z_0 = \left[\frac{4\pi}{c}\right]\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{a}{b},$$

$$R = \frac{1}{2\sigma\delta b},$$

$$L = \left[\frac{4\pi}{c^2}\right]\left(\frac{\mu a+\mu_c\delta}{b}\right),$$

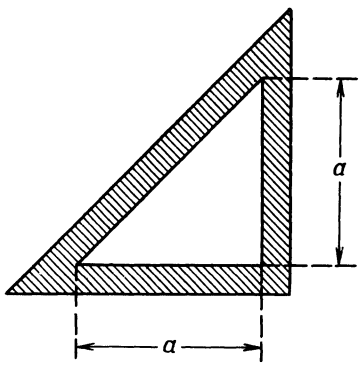
где использованы те же обозначения, что и в задаче 8.1.

8.3. Поперечные электрические и магнитные волны распространяются вдоль полого прямого круглого медного цилиндра с внутренним радиусом R.

а) Найти граничные частоты для различных TE- и TM-волн. Определить численно низшую граничную частоту, выраженную через радиус волновода, и отношение граничных частот следующих четырех высших типов волн к этой основной частоте.

б) Рассчитать зависимость постоянной затухания в волноводе от частоты для двух низших типов волн и построить график этой частотной зависимости.

8.4. В поперечном сечении волновод представляет собой прямоугольный треугольник со сторонами a, a, $\sqrt{2}a$ (фиг. 8.14). Внутренняя среда имеет характеристики $\mu = \varepsilon = 1$.



Ф и г. 8.14.

а) Предполагая бесконечную проводимость стенок, определить возможные типы распространяющихся волн и их граничные частоты.

б) Для низших волн каждого типа рассчитать постоянную затухания при условии, что стенки имеют большую, но конечную проводимость. Сравнить полученные результаты с соответствующими результатами для квадратного волновода с ребром a, сделанного из того же материала.

8.5. Медный резонатор представляет собой полый прямой круглый цилиндр с внутренним радиусом R и длиной L, с плоскими торцовыми поверхностями.

а) Определить резонансные частоты такого резонатора для всех типов колебаний. Принимая $c/\sqrt{\mu\varepsilon}R$ за единицу частоты, построить кривые зависимости четырех низших резонансных частот каждого типа от R/L для $0 < R/L < 2$. Соответствует ли одному и тому же типу колебаний наинизшая частота при всех R/L?

б) Пусть $R = 2$ *см*, $L = 3$ *см* и резонатор изготовлен из чистой меди. Чему равна численная величина добротности для низшего резонансного типа колебаний?

8.6. Прямой круглый цилиндр радиусом a из непроводящего диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε расположен в свободном пространстве и используется в качестве диэлектрического волновода.

а) Рассмотреть распространение волн вдоль такого волновода, предполагая азимутальную зависимость полей вида $e^{im\varphi}$.

б) Полагая $m = \pm 1$, определить тип волн с низшей граничной частотой и рассмотреть свойства его полей (граничную частоту, пространственное изменение и т. д.) в предположении, что $\varepsilon \gg 1$.