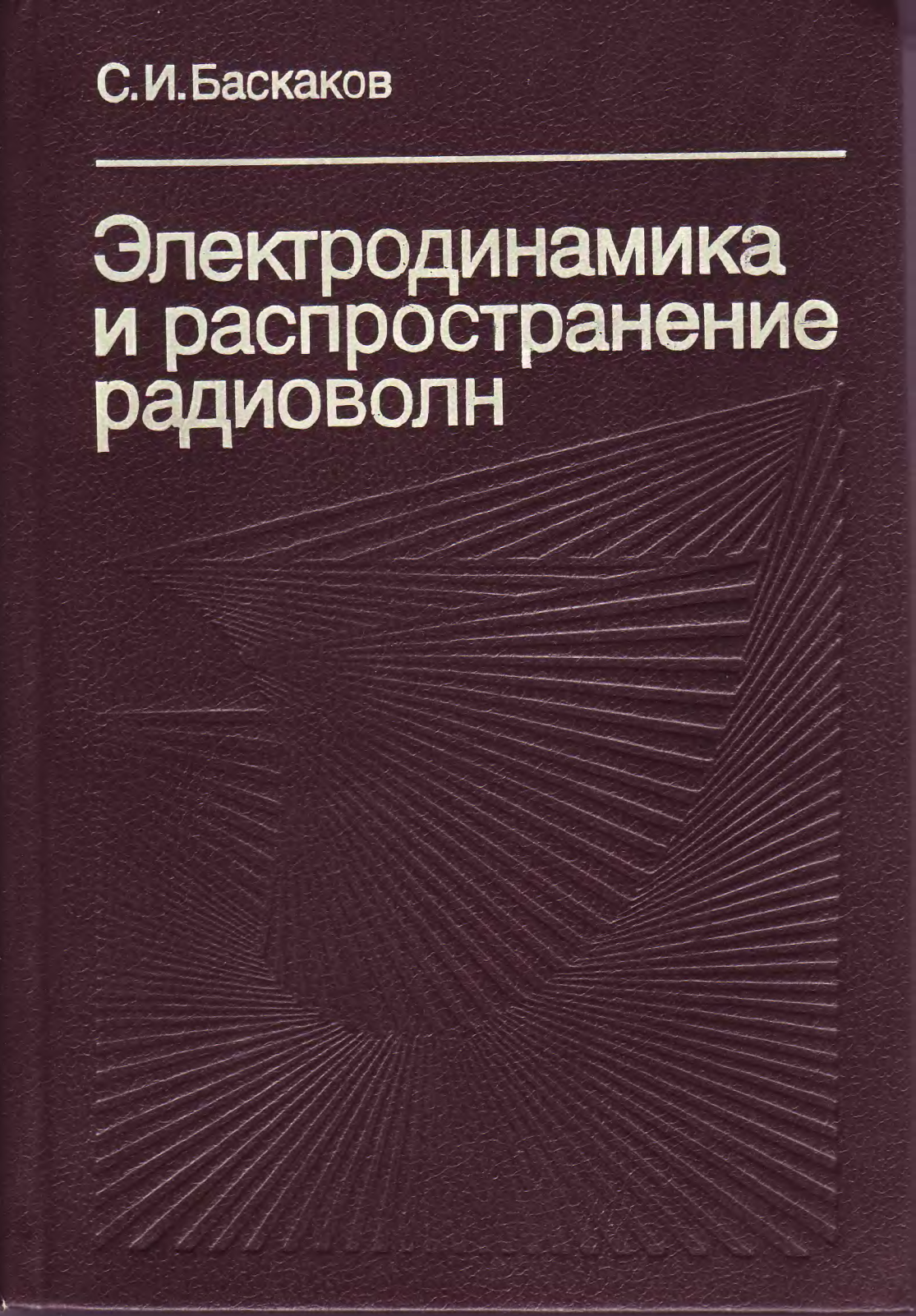
С. И. Баскаков

Электродинамика и распространение радиоволн



С. И. Баскаков

Электродинамика и распространение радиоволн

Допущено Государственным комитетом СССР
по народному образованию в качестве учебного пособия
для студентов радиотехнических специальностей вузов

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1992

ББК 32.842-5
Б273
УДК 621.396

Рецензенты: кафедра теоретических основ радиотехники Ленинградского электротехнического института им. В. И. Ульянова (Ленина) (зав. кафедрой — д-р техн. наук, проф. Ю. В. Егоров); кафедра радиоэлектронных систем и устройств Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана (зав. кафедрой — д-р техн. наук, проф. Б. А. Розанов).

Баскаков С. И.

Б27 Электродинамика и распространение радиоволн: Учеб. пособие для вузов по спец. «Радиотехника». — М.: Высш. шк., 1992. — 416 с.: ил.

ISBN 5-06-002037-1

Излагаются основы макроскопической электродинамики, теория плоских электромагнитных волн в различных средах, методы расчетов волноводных и колебательных систем, а также устройств излучения и приема электромагнитных волн. Рассмотрены вопросы компьютерного анализа электродинамических систем.

Материал книги разбит на два раздела, один из которых содержит основную часть курса, а второй предназначен для факультативной работы читателя. Имеется большое число задач с образцами решений.

Б $\frac{2302020100(4309000000)-054}{001(01)-92}$ 156—91

ББК 32.842-5
6Ф2

ISBN 5-06-002037-1

© С. И. Баскаков, 1992

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. ОСНОВНОЙ КУРС 9

Глава первая. Основные положения теории электромагнетизма 10

1.1. Электромагнитное поле и его математические модели 10
1.2. Плотность тока проводимости. Дифференциальная форма закона Ома 12
1.3. Закон сохранения заряда 15
1.4. Закон Гаусса 16
1.5. Закон неразрывности магнитных силовых линий 17
1.6. Закон полного тока 18
1.7. Ток смещения 20
1.8. Закон электромагнитной индукции 21
1.9. Материальные уравнения электромагнитного поля 23
1.10. Поляризационные и сторонние токи 31
Задачи 32

Глава вторая. Уравнения Максвелла 34

2.1. Сводка уравнений Максвелла 34
2.2. Уравнения Максвелла для гармонических колебаний. Комплексные амплитуды полей 36
2.3. Комплексная диэлектрическая проницаемость. Угол диэлектрических потерь 38
2.4. Энергетические соотношения в электромагнитном поле. Вектор Пойнтинга 39
2.5. Магнитный ток. Принцип перестановочной двойственности 45
2.6. Лемма Лоренца 47
Задачи 48

Глава третья. Плоские электромагнитные волны 49

3.1. Понятие волнового процесса. Продольные и поперечные волны . . . 50
3.2. Плоские волны и их характеристики 51
3.3. Затухание волн в материальных средах. Коэффициент распространения 53
3.4. Волновой характер переменного электромагнитного поля. Уравнение Гельмгольца 55
3.5. Понятие характеристического сопротивления. Плотность потока мощности в плоской электромагнитной волне 58
3.6. Некоторые частные случаи 60
3.7. Плоские электромагнитные волны с эллиптической поляризацией . . 64
3.8. Плоские волны, распространяющиеся в произвольном направлении 67
Задачи 69

Глава четвертая. Граничные условия для векторов электромагнитного поля 70

4.1. Постановка задачи 71
4.2. Граничные условия для нормальных составляющих векторов магнитного поля 72

4.3. Граничные условия для нормальных составляющих векторов электрического поля . . . 73
4.4. Граничные условия для касательных составляющих векторов магнитного поля . . . 74
4.5. Граничные условия для касательных составляющих векторов электрического поля . . . 77
Задачи . . . 79

Глава пятая. Электромагнитные волны в средах с частотной дисперсией 79

5.1. Волны в хорошо проводящей среде . . . 80
5.2. Плазма и ее электродинамические параметры . . . 83
5.3. Распространение электромагнитных волн в бесстолкновительной плазме . . . 85
5.4. Учет влияния столкновений в плазме . . . 89
5.5. Распространение импульсов в средах с частотной дисперсией фазовой скорости. Понятие групповой скорости . . . 92
5.6. Электромагнитные волны в сверхпроводниках . . . 99
Задачи . . . 105

Глава шестая. Падение плоских электромагнитных волн на границу раздела двух сред . . . 106

6.1. Нормальное падение плоской электромагнитной волны на идеально проводящую плоскость . . . 107
6.2. Нормальное падение плоской электромагнитной волны на диэлектрическое полупространство . . . 108
6.3. Нормальное падение плоской электромагнитной волны на диэлектрический слой конечной толщины . . . 111
6.4. К вопросу о создании неотражающих сред . . . 112
6.5. Падение плоской электромагнитной волны на диэлектрическое полупространство под произвольным углом . . . 113
6.6. Угол Брюстера . . . 119
6.7. Полное внутреннее отражение . . . 120
6.8. Неоднородные плоские волны . . . 121
6.9. Приближенные граничные условия Леонтовича . . . 124
Задачи . . . 127

Глава седьмая. Основы теории направляемых электромагнитных волн . . 128

7.1. Падение плоской волны с параллельной поляризацией . . . 128
7.2. Падение плоской волны с перпендикулярной поляризацией . . . 131
7.3. Структура электромагнитного поля E- и H-волн . . . 133
7.4. Некоторые характеристики электромагнитного поля E- и H-волн . . . 141
7.5. Связь между продольными и поперечными составляющими векторов поля направляемых волн . . . 145
Задачи . . . 148

Глава восьмая. Прямоугольный металлический волновод . . . 149

8.1. Постановка задачи . . . 149
8.2. Волны типа E в прямоугольном волноводе . . . 150
8.3. Критическая длина волны. Дисперсионная характеристика волновода 157
8.4. Волны типа H в прямоугольном волноводе . . . 160
8.5. Волна типа H_{10} . . . 163
8.6. Характеристическое сопротивление волновода . . . 170
8.7. Основы применения прямоугольных волноводов . . . 172
Задачи . . . 181

Глава девятая. Круглый металлический волновод . . . 182

9.1. Постановка задачи . . . 182

9.2. Волны типа E в круглом волноводе 185
9.3. Волны типа H в круглом волноводе 194
9.4. Основы применения круглых волноводов 198
Задачи 201

Глава десятая. Волноводы с волнами типа T 201

10.1. Некоторые общие свойства волн типа T 201
10.2. Коаксиальный волновод 206
10.3. Некоторые применения коаксиальных волноводов 211
10.4. Полосковые волноводы 212
10.5. Отрезок волновода с T-волной как четырехполюсник 215
Задачи 218

Глава одиннадцатая. Затухание волн в полых металлических волноводах 219

11.1. Источники потерь в волноводах 219
11.2. Коэффициент затухания волн в волноводе 220
11.3. Общее выражение для коэффициента затухания 221
11.4. Анализ некоторых частных случаев 224
Задачи 230

Глава двенадцатая. Колебательные системы СВЧ. Объемные резонаторы 231

12.1. Эволюция электромагнитных колебательных систем при повышении рабочей частоты 231
12.2. Прямоугольный объемный резонатор 234
12.3. Общая задача о собственных колебаниях в прямоугольном объемном резонаторе. Классификация типов колебаний 237
12.4. Круглый объемный резонатор 243
12.5. Некоторые способы возбуждения и включения объемных резонаторов 246
12.6. Добротность объемных резонаторов 249
12.7. Некоторые другие типы объемных резонаторов 253
Задачи 255

Глава тринадцатая. Неоднородные уравнения Максвелла. Элементарные излучатели 256

13.1. Постановка задачи 256
13.2. Векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля 257
13.3. Калибровка потенциалов. Неоднородное уравнение Гельмгольца . . 259
13.4. Решение неоднородного уравнения Гельмгольца. Функция Грина . . **260**
13.5. Элементарный электрический излучатель 265
13.6. Структура поля элементарного электрического излучателя 267
13.7. Диаграмма направленности элементарного электрического излучателя 270
13.8. Сопротивление излучения. Коэффициент направленного действия элементарного излучателя 271
13.9. Элементарный излучатель в режиме приема 274
13.10. Элементарный щелевой излучатель 276
13.11. Элементарный рамочный излучатель 280
Задачи 282

Глава четырнадцатая. Распространение радиоволн в земных условиях . . 283

14.1. Общие характеристики диапазонов радиоволн 283
14.2. Электродинамические свойства земной поверхности и атмосферы Земли 285
14.3. Влияние тропосферы и ионосферы на распространение радиоволн 290

14.4. Формула идеальной радиосвязи. Множитель ослабления 296
14.5. Особенности распространения радиоволн различных диапазонов . . 298
Задачи 307

ЧАСТЬ ВТОРАЯ. ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС 309

Глава пятнадцатая. Поверхностные электромагнитные волны и замедляющие системы 310
15.1. Замедление электромагнитных волн диэлектрической пластиной. Поверхностные волны 310
15.2. Гребенчатая замедляющая система 320
15.3. Некоторые другие замедляющие системы 324
Задачи 326

Глава шестнадцатая. Распространение электромагнитных волн в анизотропной среде 327
16.1. Физический механизм анизотропии ферритов. Уравнение движения намагниченности 328
16.2. Тензор магнитной проницаемости намагниченного феррита 334
16.3. Уравнения Максвелла в гиротропной среде 337
16.4. Поперечное распространение электромагнитных волн в намагниченном феррите 338
16.5. Продольное распространение электромагнитных волн в намагниченном феррите 341
Задачи 346

Глава семнадцатая. Интерференция и дифракция электромагнитных волн 347
17.1. Условие излучения. Принцип предельного поглощения 348
17.2. Возбуждение пространства нитью электрического тока. Цилиндрические волны 351
17.3. Метод физической оптики. Дифракция плоской волны на щели в идеально проводящем экране 355
17.4. Принцип Гюйгенса. Формула Кирхгофа 359
17.5. Дифракция плоской волны на прямоугольном отверстии в идеально проводящем экране 362
17.6. Дифракция плоской электромагнитной волны на идеально проводящем цилиндре 369
17.7. Уравнения Максвелла в неоднородной среде 373
17.8. Метод геометрической оптики 375
17.9. Теорема эквивалентности 384
Задачи 386

Глава восемнадцатая. Компьютерные методы решения задач электродинамики 387
18.1. Прямоугольный волновод с неоднородным заполнением 388
18.2. Метод сеток 389
18.3. Метод Бубнова — Галеркина 393
18.4. Метод интегральных уравнений 397
Задачи 406
Заключение 407
Приложение А. Выражения основных операций векторного анализа в различных координатных системах 409
Приложение Б. Некоторые полезные векторные тождества 410
Список рекомендуемой литературы 411
Предметный указатель 413

Книга, предлагаемая вниманию читателя, является учебным пособием по курсу «Электродинамика и распространение радиоволн», читаемому на радиотехнических факультетах вузов. Данный курс относится к числу базовых дисциплин, закладывающих основы профессиональной подготовки радиоинженера. На его основе строится ряд последующих инженерных дисциплин. В свою очередь, этот курс опирается на такие общенаучные дисциплины, как высшая математика, физика и теория цепей.

За последние десятилетия в радиотехнике сверхвысоких частот (СВЧ) и в антенной технике — в областях, теснее всего соприкасающихся с данным курсом, — произошли заметные изменения, связанные с освоением новых частотных диапазонов, с совершенствованием элементной базы радиоустройств, с неуклонным внедрением компьютерных методов расчета и проектирования. Однако научный фундамент этой технической области — теория электромагнетизма и физика волновых явлений — остался прежним.

Книга состоит из двух частей. Первая часть «Основной курс» посвящена изложению основ прикладной электродинамики, включая уравнения Максвелла, теорию плоских электромагнитных волн, принципы анализа явлений в направляющих и колебательных системах СВЧ-диапазона. Рассматривается теория элементарных излучателей, изучаются особенности распространения радиоволн в земных условиях.

Вторая часть «Факультативный курс» адресована в основном тем читателям, которые желают углубить свои знания в области физики и техники волновых электромагнитных явлений. Здесь учащийся найдет изложение основ теории поверхностных волн и замедляющих систем, познакомится с методами анализа распространения электромагнитных волн в анизотропных средах, а также получит представление о некоторых наиболее важных, по мнению автора, приемах решения задач дифракции электромагнитных волн. Кратко обсуждаются компьютерные способы решения электродинамических задач.

Главы книги снабжены примерами практических расчетов, доведенными до числовых результатов. Кроме того, в конце каждой главы приведены учебные задачи в количестве, достаточном для проведения упражнений по курсу.

Стиль изложения, а также степень подробности математических выкладок выбраны такими, чтобы студент смог при некоторой настойчивости самостоятельно изучить любой вопрос. В перечень рекомендуемой литературы, отнюдь не претендующий на полноту, включены книги по прикладной электродинамике, распространению радиоволн, математике и смежным вопросам. Эти источники помогут читателю при необходимости навести справки и углубить знания по некоторым частным проблемам.

С момента выхода в свет нашего пособия «Основы электродинамики» (М.: Советское радио, 1973) прошло уже немало лет. Предлагаемая книга развивает избранные нами ранее педагогические принципы, а также в некоторой степени обобщает опыт преподавания дисциплины «Электродинамика и распространение радиоволн» на радиотехническом факультете Московского энергетического института. Хочу поблагодарить своих коллег за ценные обсуждения и неизменную поддержку. Выражаю искреннюю признательность рецензентам рукописи — профессорам Н. А. Бею, Ю. В. Егорову и Б. А. Розанову, доцентам Н. С. Голубевой и В. Н. Митрохину. Их квалифицированная оценка, советы и замечания действенно помогли на заключительном этапе работы над книгой.

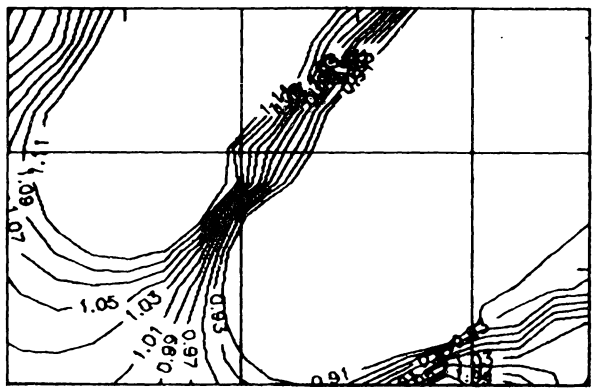
Москва, 1991 г. *С. И. Баскаков*

Часть первая

Основной курс

Нет лучшего метода сообщения уму знаний, чем метод преподнесения их в возможно более разнообразных формах

Максвелл



Глава первая

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

1.1. Электромагнитное поле и его математические модели

В физике принято разграничивать окружающие нас объекты материального мира на два больших самостоятельных класса. Один из них называют *веществом*, а другой — *полем*. В основе принципа, позволяющего проводить такое деление, лежит тот факт, что вещество в отличие от поля обладает инертной массой в обычном механическом смысле. Движение макроскопических объектов, состоящих из вещества, описывается известными законами механики Ньютона.

Разновидность материи, называемая полем, не имеет инертной массы. Говоря о полях, можно назвать прежде всего хорошо известные из повседневного опыта электромагнитное и гравитационное поля.

Электродинамика — наука, занимающаяся изучением электромагнитного поля. Это поле проявляет себя посредством силового взаимодействия с теми частицами вещества, которые имеют *электрический заряд*. Заряд частицы может быть как положительным, так и отрицательным. Экспериментально установлено, что заряд дискретен: величины любых зарядов, встречающихся в природе, с точностью до знака кратны элементарному заряду e, равному приблизительно $1.602 \cdot 10^{-19}$ Кл; заряд электрона равен $-e$.

Так как силы, действующие на заряженные частицы со стороны электромагнитного поля, являются векторными величинами, имеется возможность описать электромагнитное поле с помощью абстрактных математических моделей — векторных полей.

Напомним, что в математике векторное поле $\mathbf{A}$, заданное в трехмерном пространстве с декартовыми координатами x, y, z, описывается тремя проекциями на выбранные оси:

$$\mathbf{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\,\mathbf{i}_x + A_y(x, y, z)\,\mathbf{i}_y + A_z(x, y, z)\,\mathbf{i}_z, \qquad (1.1)$$

где $\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$, $\mathbf{i}_z$ — единичные векторы (орты) вдоль указанных осей. Графически векторные поля удобно изображать с помощью картин *силовых линий* — пространственных кривых, обладающих тем свойством, что в каждой их точке вектор поля направлен вдоль касательной. В тех областях пространства, где длина вектора поля больше, силовые линии проводят гуще, и наоборот (рис. 1.1).

Всю совокупность электромагнитных явлений принято разделять на две группы: *электрические* и *магнитные* явления. В соот-

ветствии с этим выделяют две частные разновидности электромагнитного поля, носящие название *электрического* и *магнитного полей*. Из дальнейшего изложения станет ясно, что представление электромагнитного поля в виде объединения электрического и магнитного полей означает признание их внутреннего единства и взаимообусловленности.

Электрическому полю свойственно силовое взаимодействие как с неподвижными, так и с движущимися зарядами. В результате такого взаимодействия кинетическая энергия движущейся заряженной частицы вещества изменяется. Математической моделью электрического поля в вакууме служит векторное поле $\mathbf{E}$ — *напряженность электрического поля,* определяемая формулой

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}), \qquad (1.2)$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ — вектор силы, действующей на пробный заряд q в некоторой точке пространства с радиусом-вектором $\mathbf{r}$.

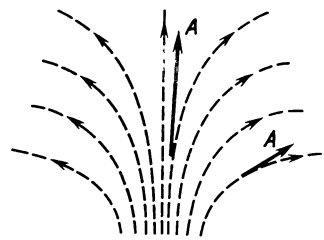


Рис. 1.1. Векторное поле и его силовые линии

Если ограничиться только исследованием электромагнитных процессов в вакууме, то для описания электрического поля в каждой точке пространства достаточно задать единственный вектор $\mathbf{E}$. Однако, как будет показано в дальнейшем, для описания электрического поля в материальной среде, например в диэлектрике, требуется ввести еще одно векторное поле $\mathbf{D}$, называемое полем *электрического смещения* (или электрической индукции). Вектор $\mathbf{D}$ в вакууме связан с вектором $\mathbf{E}$ соотношением

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \qquad (1.3)$$

где ε_0 — фундаментальная физическая константа, называемая *электрической постоянной*. Эта константа имеет размерность емкости, отнесенной к единице длины. Значение электрической постоянной найдено экспериментально; с точностью, вполне достаточной для инженерных расчетов $\varepsilon_0 = 10^{-9}/(36\pi) = 8.842 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

В СИ напряженность электрического поля имеет размерность В/м, а электрическое смещение — размерность Кл/м^2.

Часто на практике приходится рассматривать электромагнитные процессы в атмосферном воздухе, который по своим электродинамическим параметрам весьма незначительно отличается от вакуума. При этом, как уже говорилось, для описания электрического поля достаточно использовать лишь вектор $\mathbf{E}$, который для краткости можно назвать *электрическим вектором.*

Магнитное поле в отличие от электрического взаимодействует лишь с движущимися заряженными частицами. В вакууме его мож-

но описать с помощью единственного векторного поля *магнитной индукции* **B**. Принцип его определения основан на том, что точечный заряд q, движущийся в электромагнитном поле со скоростью **v**, испытывает действие так называемой *силы Лоренца*

$$\mathbf{F}_л = q\mathbf{E} + q[\mathbf{vB}]. \tag{1.4}$$

Первое слагаемое в правой части равенства (1.4) является уже известной силой, которая обусловлена электрическим полем. Второе слагаемое описывает силу, вызванную магнитным полем. Заметим, что магнитная часть силы Лоренца, пропорциональная векторному произведению **B** и **v**, всегда перпендикулярна траектории движения. Поэтому магнитное поле не влияет на кинетическую энергию частицы, а лишь изменяет ее траекторию. Это свойство магнитного поля широко используется в электронике для фокусировки пучков заряженных частиц.

Известен обширный класс веществ, внутри которых происходит существенное изменение приложенного магнитного поля. Такие вещества принято называть *магнетиками*. К ним относятся железо, никель, кобальт, сплавы этих металлов, некоторые редкоземельные элементы и др. Для описания явлений в магнетиках кроме векторного поля **B** дополнительно вводят векторное поле **H**, называемое напряженностью магнитного поля. В вакууме векторы **B** и **H** оказываются пропорциональными:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \tag{1.5}$$

Здесь $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1.257 \cdot 10^{-6}$ Гн/м — размерная константа, называемая *магнитной постоянной*. В СИ величину **B** выражают в теслах (Тл); величина **H** имеет размерность А/м.

По традиции в прикладной электродинамике для описания магнитного поля в вакууме чаще используют не поле **B**, а поле **H**. В дальнейшем вектор **H** для краткости часто будем называть просто *магнитным вектором*.

1.2. Плотность тока проводимости. Дифференциальная форма закона Ома

Током проводимости называют коллективное (упорядоченное или хаотическое) движение заряженных частиц в материальных средах или в вакууме.

Предположим, что к границе раздела между вакуумом и проводящим веществом подведены два электрода, соединенные с источником ЭДС (рис. 1.2). Линии тока внутри вещества распределяются таким образом, что наибольшая их часть проходит по области, представляющей для тока малое сопротивление; лишь незначительная часть тока ответвляется в глубь проводящей среды. Очевидно,

что для подробного описания данной системы недостаточно измерить только значение тока во внешней цепи. Здесь необходимо располагать сведениями об интенсивности и направлении движения носителей заряда в каждой точке проводящего тела. С этой целью вводят понятие векторного поля плотности тока проводимости $\mathbf{J}_{пр}$, определяя его следующим образом:

$$\mathbf{J}_{пр} = Nq\mathbf{v}, \tag{1.6}$$

где N — концентрация носителей заряда, т. е. число носителей в единице объема вещества; q — заряд одного носителя; $\mathbf{v}$ — скорость носителей в рассматриваемой точке пространства.

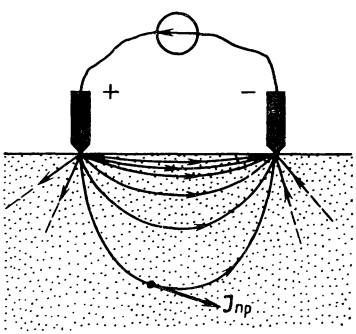


Рис. 1.2. К определению понятия плотности тока проводимости

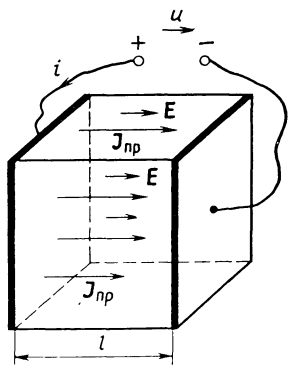


Рис. 1.3. К формулировке закона Ома

Легко проверить, что в соответствии с формулой (1.6) величина $\mathbf{J}_{пр}$ имеет размерность А/м^2 и действительно характеризует силу тока через единичную площадку, перпендикулярную вектору скорости заряженных частиц.

Найдем связь между векторами плотности тока проводимости и напряженности электрического поля, существующими в некоторой точке пространства. С точки зрения классической физики носители заряда, перемещаясь внутри кристаллической решетки вещества, испытывают силы, подобные силам трения. Скорость носителей, а следовательно, и плотность тока проводимости в установившемся режиме должна быть пропорциональна действующей силе, т. е. напряженности электрического поля. Таким образом,

$$\mathbf{J}_{пр} = \sigma\mathbf{E}, \tag{1.7}$$

где σ — размерная постоянная, называемая удельной проводимостью данного вещества.

Докажем, что равенство (1.7) является одной из форм закона Ома для участка резистивной цепи. Для этого рассмотрим куб с ребром длиной l, выполненный из исследуемого вещества (рис. 1.3). Предположим, что две противоположные грани куба покрыты слоем идеального проводника и к ним приложено напряжение u. Под действием этого напряжения во внешней цепи протекает некоторый ток i. Очевидно, что $i=|\mathbf{J}_{\text{пр}}|l^2$; $|\mathbf{E}|=u/l$, откуда, используя (1.7), получим $i=\sigma l u$. Последнюю формулу можно рассматривать как запись закона Ома, если положить, что $\sigma l=1/R$, где R — сопротивление, измеренное между противоположными гранями куба.

Таблица 1.1. **Удельные проводимости металлов**

Металл	σ, См/м
Серебро	$6.1\cdot10^7$
Медь	$5.7\cdot10^7$
Цинк	$1.7\cdot10^7$
Латунь	$1.4\cdot10^7$

Равенство (1.7) иногда называют дифференциальной формой закона Ома, поскольку оно устанавливает прямую пропорциональность между плотностью тока проводимости и напряженностью электрического поля в пределах малой окрестности точки наблюдения. Легко убедиться, что в СИ удельная проводимость σ имеет размерность См/м.

Металлы являются хорошими проводниками электрического тока, и для них характерны высокие значения удельной проводимости. Приведем для справок небольшую таблицу значений σ, измеренных на постоянном токе.

Прямым расчетом легко убедиться, что для возникновения тока в доли ампера достаточно создать в металле электрическое поле весьма малой напряженности.

Пример 1.1. По круглому медному проводнику диаметром $d=0.6$ мм протекает постоянный ток $i=1.5$ А. Найти напряженность электрического поля внутри проводника.

Сечение проводника $s=\pi d^2/4=2.83\cdot10^{-7}$ м^2; плотность тока $J_{\text{пр}}=i/s=5.3\cdot10^6$ А/м^2. Модуль вектора напряженности электрического поля $E=J_{\text{пр}}/\sigma=0.093$ В/м. Из физических соображений ясно, что вектор $\dot{\mathbf{E}}$ направлен вдоль оси проводника.

Удельная проводимость полупроводников и диэлектриков на несколько порядков ниже, чем металлов. Для описания электропроводящих свойств этих материалов удобно использовать другую числовую характеристику — угол диэлектрических потерь, речь о которой пойдет в дальнейшем.

1.3. Закон сохранения заряда

Одно из фундаментальных положений теории электромагнетизма состоит в том, что ни при каких условиях электрический заряд не может ни зарождаться, ни исчезать. Этот факт, многократно проверенный экспериментально, лежит в основе закона сохранения заряда [1].

Предположим, что внутри произвольного замкнутого объема V, ограниченного поверхностью S, содержится некоторый электрический заряд Q, распределенный в пространстве с объемной плотностью ρ (Кл/м^3). Ясно, что при этом

$$Q=\int_V \rho dV. \tag{1.8}$$

Если с течением времени значение Q изменяется, то на основании закона сохранения заряда это связано с тем, что либо часть заряда покидает границы объема, либо заряд поступает извне. Как следствие, в пространстве возникает ток проводимости с некоторой плотностью $\mathbf{J}_{\text{пр}}$. Интегрируя функцию $\mathbf{J}_{\text{пр}}$ по замкнутой поверхности S, находим результирующий ток проводимости в рассматриваемой системе:

$$i=\oint_S \mathbf{J}_{\text{пр}} d\mathbf{S}. \tag{1.9}$$

По определению понятия тока, в данном случае $i=-dQ/dt$ (ток считаем положительным, если заряд внутри объема уменьшается). Отсюда с учетом равенств (1.8) и (1.9) будем иметь

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV=-\oint_S \mathbf{J}_{\text{пр}} d\mathbf{S}.$$

Преобразовав правую часть последней формулы по теореме Остроградского — Гаусса, получим

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV=-\int_V \operatorname{div} \mathbf{J}_{\text{пр}} dV.$$

Это равенство будет выполняться тождественно при любой форме объема V лишь в том случае, когда подынтегральные выражения левой и правой частей одинаковы. Отсюда приходим к закону сохранения заряда в дифференциальной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div} \mathbf{J}_{\text{пр}}=0. \tag{1.10}$$

---

[1] Из физики элементарных частиц известны явления «рождения» и «гибели» электронно-позитронных пар. Это не противоречит закону сохранения заряда, так как суммарный заряд пары равен нулю.

Это равенство часто называют уравнением непрерывности тока проводимости. По физическому смыслу оно эквивалентно первому закону Кирхгофа, известному из теории электрических цепей.

1.4. Закон Гаусса

Данный закон, найденный экспериментально, устанавливает связь между векторным полем **E** и величиной заряда Q, порождающего это электрическое поле.

Рассмотрим некоторый объем V, ограниченный замкнутой поверхностью S (рис. 1.4). Пусть внутри объема произвольным образом размещен электрический заряд Q. По закону Гаусса, поток векторного поля **E**, порожденного зарядом, через замкнутую поверхность S численно равен величине заряда, деленной на электрическую постоянную:

$$\oint_S \mathbf{E}\,d\mathbf{S} = Q/\varepsilon_0. \qquad (1.11)$$

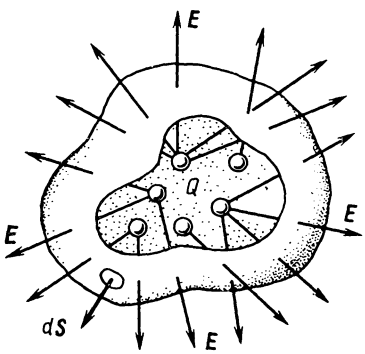


Рис. 1.4. Закон Гаусса

Если рассматривают точечные заряды, то значение Q находят алгебраическим суммированием. Если же заряд распределен по объему непрерывно, то Q определяют интегрируя плотность заряда ρ по объему V.

Говорят, что формула (1.11) выражает закон Гаусса в интегральной форме. Этот закон в ряде случаев позволяет с успехом находить напряженность электрического поля при достаточно простой конфигурации заряженной области.

Пример 1.2. Внутри сферической области радиусом a равномерно распределен заряд с объемной плотностью ρ. Средой является вакуум. Определить напряженность электрического поля во внутренней ($r<a$) и внешней ($r\geqslant a$) областях.

Рассмотрим воображаемую сферическую поверхность радиусом r, концентричную с заряженной областью. Заряд, заключенный внутри этой поверхности, вычисляется по-разному в зависимости от соотношения между r и a:

$$Q = \int_V \rho\,dV = \begin{cases} 4/3\pi\rho r^3 & \text{при } r<a, \\ 4/3\pi\rho a^3 & \text{при } r\geqslant a. \end{cases}$$

Ввиду симметрии сферической области вектор **E** имеет единственную составляющую $E_r\mathbf{i}_r$, направленную вдоль радиуса. Поэтому

$$\oint_S \mathbf{E}d\mathbf{S}=4\pi r^2 E_r,$$

откуда на основании закона Гаусса

$$E_r=\begin{cases}\rho r/(3\varepsilon_0) & \text{при } r<a,\\ \rho a^3/(3\varepsilon_0 r^2) & \text{при } r\geqslant a.\end{cases}$$

Пользуясь приемами векторного анализа, можно из интегральной формы закона Гаусса получить дифференциальную форму. Для этого заметим, что, по теореме Остроградского — Гаусса,

$$\oint_S \mathbf{E}d\mathbf{S}=\int_V \operatorname{div}\mathbf{E}dV;$$

следовательно,

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{E}dV=\int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}dV. \qquad (1.12)$$

Поскольку объем V совершенно произволен, это равенство возможно лишь в том случае, если подынтегральные выражения тождественно совпадают. Таким образом,

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_0. \qquad (1.13)$$

Равенство (1.13) называют законом Гаусса в дифференциальной форме. В соответствии с определением понятия дивергенции это соотношение означает, что силовые линии векторного поля **E** имеют источники и стоки в тех точках пространства, где расположены электрические заряды.

1.5. Закон неразрывности магнитных силовых линий

Экспериментально было обнаружено, что силовые линии векторного поля магнитной индукции **B** всегда замкнуты в пространстве (рис. 1.5) независимо от того, создается ли поле постоянными магнитами или катушками с током.

Для математического описания этого факта удобно, как это делается в векторном анализе, представить себе силовые линии магнитного поля как воображаемые линии скоростей движения частиц несжимаемой жидкости. Расположим внутри области существования магнитного поля произвольный объем V, ограниченный поверхностью S. Если силовые линии замкнуты, то поток втекающей

жидкости в точности равен потоку, вытекающему из объема. Таким образом,

$$\oint_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = 0. \tag{1.14}$$

Проводя выкладки, аналогичные изложенным в предыдущем параграфе, получим соотношение, относящееся к бесконечно малой окрестности выбранной точки пространства:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \tag{1.15}$$

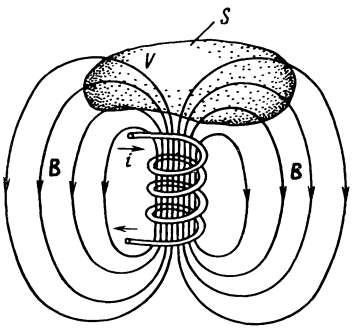


Рис. 1.5. Силовые линии магнитного поля в катушке с током

Формулы (1.14) и (1.15) математически выражают закон неразрывности магнитных силовых линий в интегральной и дифференциальной форме соответственно.

Эквивалентной формулировкой рассмотренного закона служит утверждение о том, что векторное поле **B** нигде не имеет источников. Другими словами, никаких магнитных зарядов в природе не существует. Если, по аналогии с электрическим током, мысленно допустить существование некоторого магнитного тока, то такой гипотетический ток не имеет прямого физического смысла, хотя иногда может оказаться весьма полезным при проведении расчетов (см. § 2.5).

Векторные поля без источников, т. е. с нулевой дивергенцией, в физике и математике называют *соленоидальными полями.*

1.6. Закон полного тока

В начале XIX в. датский физик Эрстед экспериментально открыл принципиально важный факт: протекание электрического тока по проводнику сопровождается возникновением в окружающем пространстве магнитного поля. Опыты Эрстеда позволили французскому ученому Амперу сформулировать теоретическое положение, которое называют *законом полного тока* или *законом Ампера.*

Пусть имеется воображаемый замкнутый контур L, на который опирается кусок гладкой поверхности S. Зададим на этом контуре направление обхода таким образом, чтобы с конца вектора элементарной площадки $d\mathbf{S}$ движение вдоль контура наблюдалось в направлении против стрелки часов (рис. 1.6).

Предположим далее, что поверхность S пронизывается некоторой системой токов. Эти токи могут быть дискретными (совокуп-

ность отдельных проводников) или распределенными непрерывно (подобно электронному потоку). Не указывая заранее физической природы этих токов, будем для определенности полагать, что они распределены в пространстве непрерывно с некоторой плотностью **J**. Тогда полный ток, пронизывающий контур,

$$I = \int_S \mathbf{J}d\mathbf{S}. \qquad (1.16)$$

Закон полного тока формулируется так: циркуляция вектора напряженности магнитного поля **H** по контуру L равна полному току, т. е.

$$\oint_L \mathbf{H}d\mathbf{l} = I. \qquad (1.17)$$

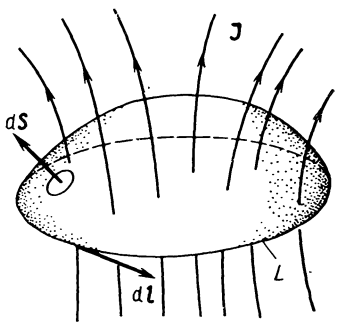


Рис. 1.6. К формулировке закона полного тока

Соотношение (1.17) выражает закон полного тока в интегральной форме. Чтобы получить дифференциальную форму этого закона, т. е. локальным образом связать плотность полного тока с напряженностью магнитного поля, следует воспользоваться известной из векторного анализа теоремой Стокса. Воспользовавшись этой теоремой и преобразовав с ее помощью выражение (1.17), будем иметь

$$\oint_L \mathbf{H}d\mathbf{l} = \int_S \mathrm{rot}\ \mathbf{H}d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J}d\mathbf{S},$$

откуда ввиду произвольности выбранного контура получаем равенство

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{H} = \mathbf{J}, \qquad (1.18)$$

которое представляет закон полного тока в дифференциальной форме.

Используя интегральную формулировку закона полного тока, можно решать некоторые простые задачи, связанные с нахождением магнитного поля заданных токов.

Пример 1.3. По бесконечному цилиндрическому проводнику радиусом a протекает постоянный ток I_0. Определить напряженность магнитного поля внутри и вне проводника.

Конфигурация силовых линий магнитного вектора, известная из курса физики, изображена на рис. 1.7. В цилиндрической систе-

ме координат, ось z которой совпадает с осью проводника, вектор **H** имеет лишь азимутальную проекцию H_φ. В точках воображаемой окружности радиусом r, центр которой лежит на оси проводника, значение H_φ постоянно в силу полной симметрии поля. Поэтому в формуле (1.17) интегрирование можно заменить умножением H_φ на длину окружности.

Если $r \geqslant a$, то весь ток пронизывает поверхность, ограниченную воображаемым контуром, и поэтому

$$H_\varphi(r) = I_0/(2\pi r).$$

Если же $r < a$, то внутри контура течет ток $I = I_0 r^2/a^2$, так что

$$H_\varphi(r) = I_0 r/(2\pi a^2).$$

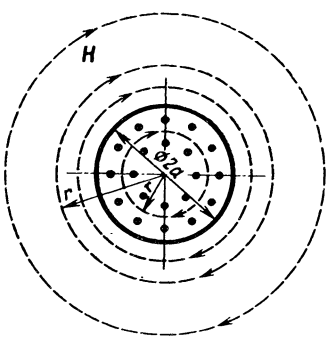


Рис. 1.7. Магнитное поле цилиндрического проводника с током

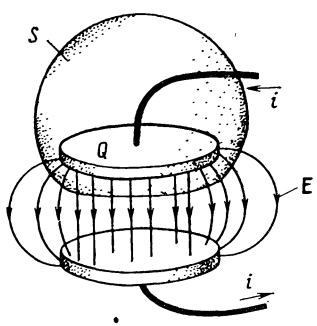


Рис. 1.8. Эскиз силовых линий электрического поля в плоском конденсаторе

1.7. Ток смещения

Из практики известно, что переменный электрический ток способен протекать по замкнутой цепи, содержащей конденсатор, несмотря на то что в пространстве между обкладками отсутствуют какие-либо носители электрического заряда. Можно предположить, что в этой области протекает некий ток, по своей природе принципиально отличный от рассмотренного ранее тока проводимости. Этот ток называют током смещения.

Рассмотрим цепь с конденсатором, изображенную на рис. 1.8. Одна из обкладок конденсатора окружена воображаемой замкнутой поверхностью S. Будем считать, что между обкладками находится вакуум.

По закону Гаусса,

$$\oint_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = Q/\varepsilon_0.$$

Ток в цепи i связан с зарядом Q выделенной обкладки:

$$i = \frac{dQ}{dt} = \varepsilon_0 \oint_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dS.$$

Из последнего выражения видно, что величина $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t$ имеет размерность плотности тока, который и должен быть назван током смещения. Итак, плотность этого тока

$$\mathbf{J}_{см} = \varepsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t. \quad (1.19)$$

Максвелл предложил ввести величину $\mathbf{J}_{см}$ в правую часть формулы закона полного тока (1.18) наряду с плотностью тока проводимости. Эта мысль имела принципиальное значение для электродинамики, поскольку при этом устанавливалась внутренняя взаимосвязь электрического и магнитного полей. Действительно, изменение во времени электрического поля в какой-либо точке пространства приводит к возникновению тока смещения в окрестности этой точки. Ток смещения, в свою очередь, вызывает появление переменного магнитного поля.

1.8. Закон электромагнитной индукции

Картина динамики электромагнитного поля станет более яркой, если допустить, что изменение во времени магнитного поля ведет к возникновению электрического поля. Такое свойство электромагнитного поля действительно имеет место. В 1831 г. Фарадей экспериментально обнаружил, что на зажимах проводящей катушки, помещенной в переменное магнитное поле, возникает разность электрических потенциалов. Основываясь на этом открытии, Максвелл сформулировал один из основных законов теории электромагнетизма, получивший название закона электромагнитной индукции.

Пусть в некоторой области пространства существует переменное магнитное поле. Силовые линии магнитной индукции $\mathbf{B}$ в фиксированный момент времени изображены на рис. 1.9. Рассмотрим воображаемый замкнутый контур L, направление обхода которого выбрано против движения стрелки часов, если смотреть с конца вектора $\mathbf{B}$.

Пусть $\mathbf{E}$ — вектор напряженности возникающего электрического поля. Закон электромагнитной индукции в интегральной форме математически выражается так:

$$\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{B}d\mathbf{S}. \qquad (1.20)$$

Циркуляцию векторного поля **E** по контуру L, стоящую в левой части формулы (1.20), называют электродвижущей силой (ЭДС) электромагнитной индукции в данном контуре.

Итак, закон электромагнитной индукции не только констатирует факт возникновения электрического поля под действием переменного магнитного поля, но и устанавливает количественную меру данного явления.

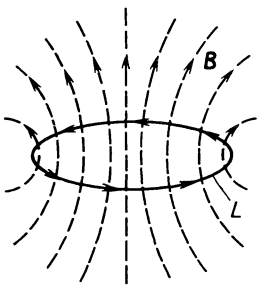


Рис. 1.9. К закону электрической индукции

Если на месте воображаемого контура разместить реальный контур, выполненный из проводника, то наличие ЭДС приведет к протеканию в нем электрического тока в направлении вектора **E**.

Скалярную величину

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}d\mathbf{S}$$

принято называть магнитным потоком, пронизывающим контур L. Поскольку поле **B** не имеет источников, значение магнитного потока не зависит от выбора поверхности S, опирающейся на контур.

Воспользовавшись теоремой Стокса и внеся операцию дифференцирования по времени под знак поверхностного интеграла, что всегда допустимо, получим

$$\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{l} = \int_S \mathrm{rot}\mathbf{E}d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,d\mathbf{S}.$$

Отсюда непосредственно следует дифференциальная форма записи закона электромагнитной индукции

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t. \qquad (1.21)$$

Отметим в заключение, что электрическое поле, возникающее под действием переменного во времени магнитного поля, имеет в каждой точке пространства отличный от нуля ротор (вихрь). Подобные векторные поля в математике и физике называют *вихревыми полями*. Если a и b — две произвольные точки в пространстве, а **E** — вихревое векторное поле, то криволинейный интеграл

$$A = \int_a^b \mathbf{E}d\mathbf{l}$$

зависит не только от положения концевых точек, но и от выбора пути интегрирования. Действительно, перемещаясь от a к b вдоль кривой L_1 и возвращаясь от b к a вдоль кривой L_2, имеем

$$\int_a^b \mathbf{E}d\mathbf{l} + \int_b^a \mathbf{E}d\mathbf{l} \neq 0.$$

Это означает, что работа сил поля **E**, индуцированного в пространстве переменным магнитным потоком, при обходе замкнутого контура не равна нулю. По терминологии, принятой в физике, такое поле **E** не является потенциальным и в этом отношении качественно отличается от электрического поля в системе неподвижных и постоянных во времени зарядов.

Однако во многих практически важных случаях магнитное поле меняется достаточно медленно, так что правую часть формулы (1.21) можно *приближенно* считать равной нулю. При этом электрическое поле близко по своим свойствам к безвихревому и работа сил поля не зависит от пути интегрирования. Именно в этих условиях становится возможным приближенный анализ электродинамических систем методами теории цепей, в частности с использованием второго закона Кирхгофа, физическая сущность которого как раз связана с независимостью работы сил поля от геометрической конфигурации контура.

1.9. Материальные уравнения электромагнитного поля

Для описания электромагнитных явлений в материальных средах необходимо располагать соотношениями, которые связывали бы попарно векторные поля **E** и **D**, **B** и **H**. Уравнения подобных связей принято называть материальными уравнениями. Их вывод должен опираться на микроскопическую (атомно-молекулярную) картину процессов, которые происходят в веществе под действием сил электромагнитного поля.

Свойства диэлектриков. Имеются многочисленные диэлектрики — вещества, которые не проводят электрический ток. Диэлектрики способны специфическим образом изменять свое состояние, будучи помещенными в электрическое поле. Рассмотрим вкратце сущность этого явления.

Как известно из физики, молекулы и атомы вещества представляют собой объединение электрически заряженных частиц. В неионизированном состоянии суммарный заряд молекулы (атома) равен нулю. Для диэлектриков характерны прочные связи электронов с атомами, т. е. высокие значения энергии связи. Поэтому при помещении образца диэлектрика в электрическое поле сквозного

дрейфового движения носителей заряда в толще материала не наблюдается, по крайней мере в не слишком сильных полях.

Однако при этом молекула диэлектрика деформируется таким образом, что ее можно представить совокупностью двух разноименных зарядов $+q$ и $-q$, смещенных в пространстве на некоторое расстояние l. Такую систему из двух зарядов называют электрическим диполем. Очевидно, что величина l тем больше, чем выше напряженность приложенного электрического поля.

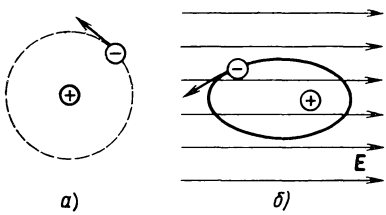


Рис. 1.10. Процесс поляризации атома водорода:
а — орбита электрона в отсутствие внешнего поля; *б* — то же после приложения постоянного электрического поля

Сказанное иллюстрируется упрощенной картиной, изображенной на рис. 1.10. Здесь показана модель атома водорода, состоящего из протона и электрона. С точки зрения классических, т. е. неквантовых, представлений электрон в отсутствие внешнего электрического поля вращается по круговой орбите. Если наблюдать за атомом в течение отрезка времени, значительно превышающего период обращения, то в среднем центр «эффективного» отрицательного заряда совпадает с центром ядра. Атом не проявляет дипольных свойств.

После приложения электрического поля орбита электрона вытягивается. Центры положительного и отрицательного зарядов перестают совпадать в пространстве, и атом водорода начинает вести себя подобно электрическому диполю. Описанное явление называют электронной поляризацией вещества.

Электронная поляризация свойственна диэлектрикам, молекулы (атомы) которых в отсутствие внешнего поля не обладают собственными дипольными свойствами. Такие вещества относят к классу неполярных диэлектриков. Примерами служат большинство газов и многие твердые диэлектрики, как естественные, так и искусственные (кварц, оксид алюминия, полиэтилен и т. д.).

Однако известно много веществ, молекулы которых проявляют дипольные свойства и без внешнего электрического поля. Такие вещества называют полярными диэлектриками. К ним относятся многие непроводящие жидкости (химически чистая вода, спирты), а также некоторые твердые диэлектрики, например полихлорвинил. Процесс поляризации веществ данного класса изображен на рис. 1.11. В отсутствие внешнего поля $\mathbf{E}$ молекулярные диполи ориентированы в пространстве хаотично. Под действием приложенного поля происходит ориентация молекулярных диполей. Очевидно, что степень выраженности этой ориентации тем меньше, чем выше тем-

пература, поскольку хаотическое тепловое движение нарушает порядок расположения молекул в пространстве.

Для количественного описания степени поляризованности отдельной молекулы вводят в рассмотрение ее дипольный момент

$$\mathbf{p}=ql\mathbf{i}_l, \tag{1.22}$$

который представляет собой вектор, коллинеарный единичному вектору $\mathbf{i}_l$, направленному вдоль оси диполя от отрицательного заряда к положительному.

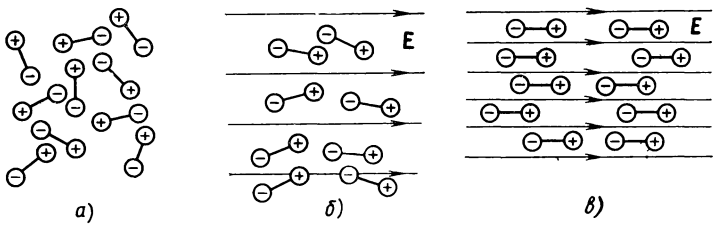


Рис. 1.11. Явления в полярном диэлектрике:
а — в отсутствие внешнего поля; *б* — после приложения постоянного электрического поля; *в* — то же в случае более интенсивного электрического поля

Пусть в единице объема вещества находится N молекулярных диполей. Как меру поляризации диэлектрика в каждой точке пространства принято вводить *вектор поляризованности*

$$\mathbf{P}=N\mathbf{p}. \tag{1.23}$$

Конфигурация силовых линий векторного поля поляризованности зависит как от концентрации молекулярных диполей, так и от направлений векторов электрического поля внутри вещества.

Поляризационные заряды. Образец диэлектрика, бывший первоначально электрически нейтральным, остается таковым и в процессе поляризации. Однако если векторное поле $\mathbf{P}$ пространственно неоднородно, то внутри диэлектрика возникает некоторая отличная от нуля объемная плотность электрического заряда, обусловленная перемещением носителей в пространстве.

Рассмотрим бесконечно протяженную плоскую область толщиной Δx внутри диэлектрика, поляризованного вдоль оси x (рис. 1.12). При этом будем считать, что по тем или иным причинам поляризованность диэлектрика неоднородна вдоль выделенной оси, так что

$$\mathbf{P}=P_x(x)\mathbf{i}_x. \tag{1.24}$$

В отсутствие внешнего поля **E** внутри рассматриваемой области положительные и отрицательные заряды, входящие в молекулы, компенсируют друг друга, поэтому плотность электрического заряда $\rho=0$. При поляризации диэлектрика внутрь указанной области через единицу поверхности левой границы входит положительный заряд

$$Q^+(x_0)=N(x_0)\,ql(x_0)=P_x(x_0). \tag{1.25}$$

Отрицательный заряд, поступающий через правую границу,

$$Q^-(x_0+\Delta x)=-N(x_0+\Delta x)\,ql(x_0+\Delta x)=-P_x(x_0+\Delta x). \tag{1.26}$$

В общем случае величины $P_x(x_0)$ и $P_x(x_0+\Delta x)$ не равны. Поэтому в пространстве между воображаемыми плоскостями будет обнаружен так называемый поляризационный электрический заряд с объемной плотностью

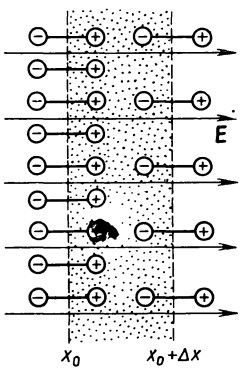


Рис. 1.12. Возникновение плотности поляризационных зарядов

$$\rho_{\text{п}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P_x(x_0)-P_x(x_0+\Delta x)}{\Delta x}=-\frac{\partial P_x}{\partial x}. \tag{1.27}$$

Можно рассмотреть данную задачу и в более общей постановке, предполагая, что поляризованность неоднородна по всем трем пространственным координатам, т. е. $\mathbf{P}=\mathbf{P}(x, y, z)$. Пусть $d\mathbf{S}$ — элементарная площадка. Величина положительного заряда, пересекающего эту площадку в процессе поляризации, равна произведению модулей векторов **P** и $d\mathbf{S}$, умноженному на косинус угла между ними, т. е. скалярному произведению $\mathbf{P}d\mathbf{S}$. Тогда положительный заряд, вышедший за пределы ограниченного объема V с поверхностью S,

$$Q^+=\oint_S \mathbf{P}d\mathbf{S}.$$

Внутри объема V обнаруживается равный по величине заряд противоположного знака

$$Q^-=-\oint_S \mathbf{P}d\mathbf{S}.$$

Воспользовавшись теоремой Остроградского — Гаусса, будем иметь

$$Q^-=-\int_V \operatorname{div}\mathbf{P}dV, \tag{1.28}$$

откуда, переходя к дифференциальной форме записи, получим

$$\rho_{\text{п}} = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \tag{1.29}$$

Материальное уравнение электрического поля в диэлектрике. Поляризационные заряды являются «истинными» и наряду со свободными зарядами, имеющими объемную плотность $\rho_{\text{св}}$, должны учитываться при записи закона Гаусса:

$$\oint_S \mathbf{E}\,d\mathbf{S} = \int_V \frac{\rho_{\text{св}} + \rho_{\text{п}}}{\varepsilon_0}\, dV.$$

Подставив сюда величину $\rho_{\text{п}}$ из (1.29), будем иметь

$$\oint_S (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})\, d\mathbf{S} = \int_V \rho_{\text{св}} dV. \tag{1.30}$$

При описании электродинамических явлений в диэлектриках принято вводить векторное поле

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \tag{1.31}$$

о котором уже говорилось в § 1.1 и которое называют полем электрического смещения. Легко проверить, что закон Гаусса относительно поля D принимает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{св}}. \tag{1.32}$$

Следует заметить, что в эту формулу входит лишь объемная плотность свободных зарядов $\rho_{\text{св}}$, в то время как поляризационные заряды учитываются как бы автоматически.

Во многих диэлектриках при не слишком сильных внешних полях наблюдается прямая пропорциональность между векторами **E** и **P** в каждой точке пространства:

$$\mathbf{P} = k_{\text{э}} \mathbf{E}. \tag{1.33}$$

Это равенство справедливо при условии, что вектор **E** меняется во времени достаточно медленно и поэтому вектор **P** успевает «следить» за вектором **E**. Коэффициент $k_{\text{э}}$ называют *диэлектрической восприимчивостью* вещества. У разных диэлектриков значения $k_{\text{э}}$ могут сильно отличаться. Физический смысл формулы (1.33) состоит в том, что она устанавливает некоторую аналогию между поляризуемой молекулой и упругой пружиной, удлинение которой пропорционально приложенной силе.

Подставив (1.33) в (1.31), получаем универсальную характеристику поляризуемого вещества — *абсолютную диэлектрическую проницаемость*

$$\varepsilon_{\text{а}} = \varepsilon_0 + k_{\text{э}}, \tag{1.34}$$

такую, что

$$\mathbf{D}=\varepsilon_a\mathbf{E}. \tag{1.35}$$

Последняя формула представляет собой искомое материальное уравнение для электрического поля в диэлектрике.

В инженерных расчетах часто используют безразмерную характеристику материала — *относительную диэлектрическую проницаемость*

$$\varepsilon=\varepsilon_a/\varepsilon_0. \tag{1.36}$$

Приведем для справок небольшую таблицу, содержащую сведения о диэлектриках, часто используемых в радиоэлектронных устройствах.

Таблица 1.2. **Относительные диэлектрические проницаемости некоторых диэлектриков**

Материал	ε
Фторопласт-4	2.08
Полиэтилен	2.25
Полистирол	2.56
Плавленый кварц	3.80
Поликор (Al_2O_3)	9.60

Свойства магнетиков. Рассмотрим кратко в рамках классической физики явления в магнетиках, наблюдаемые под действием внешнего магнитного поля.

Еще в прошлом веке, до возникновения атомно-молекулярной теории в ее современном обличии, Ампер высказал гипотезу о том, что молекулы магнетиков несут в себе замкнутые токи и в этом смысле подобны микроскопически малым магнитам. Согласно этой гипотезе, магнитные свойства отдельной молекулы описываются следующим образом. Пусть $i_м$ — круговой молекулярный ток, ΔS — площадь круга, обтекаемого этим током. Обозначим символом $\Delta\mathbf{S}$ вектор элементарной площадки (рис. 1.13), ориентированный таким образом, что с его конца ток представляется направленным против движения стрелки часов. Тогда магнитный момент отдельного молекулярного тока есть вектор

$$\mathbf{m}=i_м\Delta\mathbf{S}. \tag{1.37}$$

Будучи помещенными во внешнее магнитное поле $\mathbf{H}$, молекулы магнетиков частично ориентируются (рис. 1.14). Возможны два случая:

● Направления молекулярных токов таковы, что магнитные моменты молекул ориентированы против внешнего поля. Присутствие

молекулярных токов уменьшает результирующее поле в среде. Подобные вещества называют *диамагнетиками*. К ним относится большинство веществ, однако эффект диамагнетизма выражен крайне слабо.

● Магнитные моменты отдельных молекул ориентированы по направлению внешнего поля. Действие молекулярных токов ведет к росту магнитного поля внутри вещества. Такие среды называют

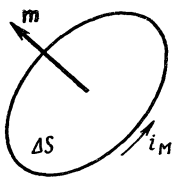


Рис. 1.13. Вектор магнитного момента молекулярного тока

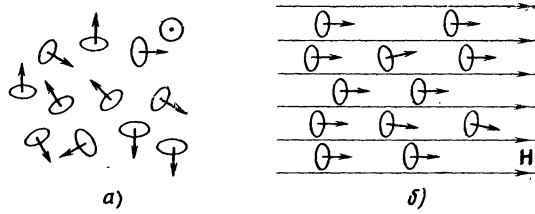


Рис. 1.14. Ориентация молекулярных токов в веществе:

а — при отсутствии внешнего магнитного поля; *б* — после приложения постоянного магнитного поля

парамагнетиками. С точки зрения квантовой механики молекулы или атомы парамагнитных веществ обязательно должны иметь отличную от нуля сумму орбитальных и спиновых магнитных моментов электронов. Парамагнитные свойства проявляют ионы некоторых металлов, а также молекулы многих газов — кислорода, азота и др.

Пусть задана величина N — концентрация молекулярных токов в веществе. Тогда в каждой точке среды можно ввести векторное поле *намагниченности*

$$\mathbf{M}=N\mathbf{m}, \tag{1.38}$$

а магнитную индукцию определить по формуле

$$\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M}). \tag{1.39}$$

Таким образом, по крайней мере качественно можно усмотреть аналогию между поведением поляризуемых диэлектриков в электрическом поле и магнетиков, помещенных во внешнее магнитное поле.

Экспериментально установлено, что в не слишком сильных и не слишком быстро меняющихся внешних полях связь между векторами **M** и **H** линейная:

$$\mathbf{M}=k_м\mathbf{H}, \tag{1.40}$$

где $k_м$ — так называемая *магнитная восприимчивость* вещества.

На основании формул (1.39) и (1.40) получаем материальное уравнение для магнитного поля:

$$\mathbf{B}=\mu_0(1+k_м)\mathbf{H}=\mu_a\mathbf{H}. \qquad (1.41)$$

Величину μ_a называют *абсолютной магнитной проницаемостью* вещества. По аналогии с (1.36) можно ввести также *относительную магнитную проницаемость*, определив ее формулой

$$\mu=\mu_a/\mu_0. \qquad (1.42)$$

Относительная магнитная проницаемость всех диамагнитных и большинства парамагнитных веществ весьма мало отличается от единицы. Поэтому в практических расчетах эффектами диа- и парамагнетизма обычно пренебрегают, считая, что $\mu_a=\mu_0$.

Особый класс веществ представляют кристаллические среды, парамагнитные свойства которых выражены чрезвычайно сильно, так что $\mu\gg1$. Такие вещества называют *ферромагнетиками*. Ферромагнетизм возможен при температурах не выше так называемой температуры Кюри, которая обычно составляет несколько сотен кельвин. Физические явления в ферромагнетиках очень сложны и могут быть адекватно описаны лишь языком квантовой механики [14, 27].

Нелинейные и анизотропные среды. До сих пор речь шла о средах, для которых материальные уравнения представляли собой соотношения прямой пропорциональности. Такие вещества принято называть линейными средами. Однако существуют и нелинейные среды. Примерами могут служить многие ферромагнетики, например трансформаторная сталь. Из электротехники известно, что при напряженности поля $\mathbf{H}$ выше 100 А/м так называемая кривая намагничивания стали, т. е. кривая зависимости $\mathbf{B}(\mathbf{H})$, становится весьма нелинейной.

В диэлектриках нелинейная зависимость $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ наблюдается всякий раз, когда напряженность электрического поля становится очень высокой и в веществе возникает электрический пробой. В обычных условиях нелинейные свойства по отношению к электрическому полю проявляют сегнетодиэлектрики — вещества с исключительно высокой диэлектрической проницаемостью (параметр ε достигает десятков тысяч и более).

Весьма интересны в теоретическом плане и важны в прикладном отношении такие материальные среды, в которых векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ отказываются неколлинеарными. Если ограничиться линейным случаем, то материальное уравнение (1.35) для такой среды приобретает вид

$$\begin{aligned} D_x&=\varepsilon_{a11}E_x+\varepsilon_{a12}E_y+\varepsilon_{a13}E_z,\\ D_y&=\varepsilon_{a21}E_x+\varepsilon_{a22}E_y+\varepsilon_{a23}E_z,\\ D_z&=\varepsilon_{a31}E_x+\varepsilon_{a32}E_y+\varepsilon_{a33}E_z, \end{aligned} \qquad (1.43)$$

т. е. каждая проекция вектора **D** записывается в виде линейной комбинации всех трех декартовых проекций вектора **E**.

Квадратная таблица (матрица) из девяти чисел ε_{aij} $(i, j=1, 2, 3)$ представляет так называемый *тензор абсолютной диэлектрической проницаемости* $\overleftrightarrow{\varepsilon}_a$; при этом равенства (1.43) в сокращенном виде записываются так: $\mathbf{D}=\overleftrightarrow{\varepsilon}_a\mathbf{E}$.

Существуют также материальные среды, в которых неколлинеарными оказываются векторы **B** и **H**, так что

$$\begin{aligned} B_x &= \mu_{a11}H_x + \mu_{a12}H_y + \mu_{a13}H_z, \\ B_y &= \mu_{a21}H_x + \mu_{a22}H_y + \mu_{a23}H_z, \\ B_z &= \mu_{a31}H_x + \mu_{a32}H_y + \mu_{a33}H_z. \end{aligned} \tag{1.44}$$

По аналогии с предыдущим девять величин μ_{aij} образуют *тензор абсолютной магнитной проницаемости* $\overleftrightarrow{\mu}_a$.

Вещества с тензорными характеристиками называют *анизотропными средами*. Анизотропия диэлектрических или магнитных свойств веществ всегда связана с тем, что в них существует некоторое преимущественное пространственное направление. Таким направлением может служить какая-либо специфическая ось кристаллической решетки или направление, в котором приложено постоянное внешнее поле.

1.10. Поляризационные и сторонние токи

Эффект поляризации диэлектриков, рассмотренный в § 1.9, связан с перемещением в пространстве заряженных частиц. Это равносильно тому, что в области, занятой диэлектриком, протекают некоторые токи, называемые поляризационными. Следует подчеркнуть, что между токами проводимости и поляризационными токами нет принципиальной разницы с точки зрения их способности создавать магнитное поле.

Запишем уравнение непрерывности относительно плотностей поляризационного заряда $\rho_п$ и поляризационного тока $\mathbf{J}_п$:

$$\frac{\partial \rho_п}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J}_п. \tag{1.45}$$

Одновременно с этим, дифференцируя по времени обе части формулы (1.29), будем иметь

$$\frac{\partial \rho_п}{\partial t} = -\operatorname{div}\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \tag{1.46}$$

Сравнивая выражения (1.45) и (1.46), приходим к выводу, что в каждой точке пространства плотность поляризационного тока есть производная по времени от вектора поляризованности:

$$\mathbf{J}_{\text{п}}=\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \tag{1.47}$$

Теперь можно, наконец, расшифровать физический смысл тех составляющих, из которых складывается вектор плотности суммарного тока $\mathbf{J}$, входящий в формулу (1.18). Два первых слагаемых уже известны — это плотность тока смещения $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t$ и плотность тока проводимости $\sigma \mathbf{E}$. Процесс поляризации диэлектрической среды добавляет плотность поляризационного тока $\partial \mathbf{P}/\partial t$.

Общность всех трех перечисленных здесь токов состоит в том, что их плотности зависят от состояния самого исследуемого электромагнитного поля в выбранной точке пространства. В этом смысле упомянутые токи можно назвать «внутренними» или «собственными».

Обширный ряд инженерных задач связан с нахождением электромагнитных полей, создаваемых внешними источниками. Сюда относятся, например, проблемы расчета и проектирования антенн, которые возбуждают в пространстве электромагнитные волны. При этом, как правило, полагают, что токи в антенне вызываются внешними источниками (генераторами) и никак не зависят от возбуждаемого ими электромагнитного поля. Подобные токи принято называть *сторонними*. Векторное поле плотности сторонних токов $\mathbf{J}_{\text{ст}}$ наряду с уже упоминавшимися плотностями должно фигурировать как заранее заданная функция в правой части закона полного тока (1.18).

Итак, дифференциальная форма закона полного тока принимает развернутый вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}=\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}+\sigma \mathbf{E}+\mathbf{J}_{\text{ст}}. \tag{1.48}$$

Поскольку $\mathbf{D}=\varepsilon_0 \mathbf{E}+\mathbf{P}$, первый и второй члены в правой части (1.48) можно объединить и получить эквивалентную форму

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}=\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}+\sigma \mathbf{E}+\mathbf{J}_{\text{ст}}, \tag{1.49}$$

которая обычно встречается в литературе.

ЗАДАЧИ

1.1. Изобразите графически картины силовых линий следующих векторных полей: а) $\mathbf{A}=(y+10)\,\mathbf{i}_x$, б) $\mathbf{B}=3z^2\mathbf{i}_y$.

1.2. Найдите ротор и дивергенцию следующих векторных полей, заданных в декартовой системе координат:

а) $\mathbf{A}=2\cos ax\mathbf{i}_x+3\sin^2 bz\mathbf{i}_y$,

б) $\mathbf{B}=6z^2\mathbf{i}_x+5z\mathbf{i}_y+10y^2\mathbf{i}_z$.

1.3. Вычислите напряженность электрического поля в латунной ленте толщиной 0.12 мм и шириной 10 мм, по которой протекает постоянный ток 150 мА.

1.4. Бесконечно длинный цилиндр радиусом 50 мм равномерно заряжен с поверхностной плотностью 10^{-5} Кл/м^2. Цилиндр находится в воздухе. Определите напряженность электрического поля, создаваемого цилиндром, на расстоянии 10 м от оси.

1.5. Постоянный ток 2.5 А протекает по проводнику, сечение которого представляет квадрат со стороной 8 мм. Найдите приближенное значение напряженности магнитного поля на поверхности проводника.

1.6. Покажите, что в системе из двух коаксиальных проводников диаметрами a и b $(a<b)$, по которым протекают равные, но противоположно направленные токи, магнитное поле будет отсутствовать на любых расстояниях от оси, превышающих радиус внешнего цилиндра.

1.7. В вакууме создано электромагнитное поле, гармонически изменяющееся во времени; в некоторой точке пространства вектор $\mathbf{E}=130\cos(2\pi\cdot 10^{10}t)\,\mathbf{i}_x$ В/м. Найдите вектор электрического смещения $\mathbf{D}$ в данной точке.

1.8. В вакууме создано однородное магнитное поле $\mathbf{H}=H_z(t)\,\mathbf{i}_z$. Проекция $H_z(t)$ меняется во времени по гармоническому закону с частотой 600 Гц и амплитудой 25 А/м. Найдите амплитуду ЭДС, наводимой данным полем в проводящей рамке площадью 0.3 м^2. Плоскость рамки совпадает с плоскостью XOY декартовой системы координат.

1.9. В диэлектрике с относительной проницаемостью $\varepsilon=3.5$ создано однородное электрическое поле, напряженность которого равна 800 В/м. Найдите модуль вектора электрической поляризованности.

1.10. Некоторый анизотропный диэлектрик имеет тензор относительной диэлектрической проницаемости, который в декартовой системе координат имеет следующий вид:

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}=\begin{pmatrix}6.5 & 0 & 0\\ 0 & 6.5 & 0\\ 0 & 0 & 6.65\end{pmatrix}.$$

В диэлектрике создано однородное электрическое поле $\mathbf{E}=2.5\mathbf{i}_x+1.7\,\mathbf{i}_y+9.2\,\mathbf{i}_z$ В/м. Определите вектор электрического смещения $\mathbf{D}$.

1.11. Применительно к условиям задачи 1.10 вычислите компоненты тензора $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ рассматриваемого анизотропного материала в новой декартовой системе координат, полученной из исходной систе-

мы путем вращения вокруг оси x на угол 60° в направлении по часовой стрелке. Указание: примените известные из линейной алгебры формулы, связывающие проекции вектора в повернутых системах координат.

Глава вторая

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

В 1873 г. вышла в свет выдающаяся работа Дж. Кларка Максвелла (1831—1879) «Трактат об электричестве и магнетизме». В этой книге были окончательно сформулированы уравнения, которые обобщили все открытые к тому времени свойства электрических зарядов, токов и электромагнитных полей. Несмотря на то что за истекшее столетие физика продвинулась далеко вперед в понимании природы электромагнетизма, уравнения Максвелла по-прежнему служат прочным фундаментом тех областей науки, которые связаны с практическим использованием электромагнитных явлений.

В оригинальной работе Максвелла применялась сложная форма записи основных уравнений, что затрудняло их понимание. Уравнения Максвелла приобрели современный вид в трудах Г. Герца (1857—1894), Г. Лоренца (1853—1928) и О. Хевисайда (1850—1925).

2.1. Сводка уравнений Максвелла

Ниже со справочными целями приведена система уравнений Максвелла, каждое из которых по отдельности обсуждалось в гл. 1.

Уравнения Максвелла в интегральной форме

$$1.\ \oint_L \mathbf{H}d\mathbf{l} = \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{ст}}\right) d\mathbf{S}.$$

$$2.\ \oint_L \mathbf{E}d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{B}d\mathbf{S}.$$

$$3.\ \oint_S \mathbf{D}d\mathbf{S} = \int_V \rho dV. \qquad (2.1)$$

$$4.\ \oint_S \mathbf{B}d\mathbf{S} = 0.$$

$$5.\ \mathbf{D} = \varepsilon_a\mathbf{E}.$$

$$6.\ \mathbf{B} = \mu_a\mathbf{H}.$$

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

$$1.\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}+\sigma\mathbf{E}+\mathbf{J}_{\text{ст}}.$$

$$2.\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

$$3.\quad \operatorname{div}\mathbf{D}=\rho. \qquad (2.2)$$

$$4.\quad \operatorname{div}\mathbf{B}=0.$$

$$5.\quad \mathbf{D}=\varepsilon_a\mathbf{E}.$$

$$6.\quad \mathbf{B}=\mu_a\mathbf{H}.$$

В этих системах основными являются уравнения 1 и 2, первое из которых отображает закон полного тока, а второе — закон электромагнитной индукции. Часто говорят, что соотношения 1 и 2 образуют первую группу уравнений Максвелла.

Во вторую группу входят уравнение 3, являющееся записью закона Гаусса, и уравнение 4, которое отображает закон неразрывности силовых линий магнитного поля.

Наконец, третью группу образуют материальные уравнения 5 и 6, которые характеризуют электродинамические свойства материальной среды.

Чаще всего при решении задач электродинамики используют уравнения Максвелла в дифференциальной форме. Входящие в них операции rot и div представляют собой некоторые комбинации частных производных первого порядка от проекций векторных полей; конкретные формы записи зависят от выбранной координатной системы (см. Приложение А).

Отметим, что достаточно найти один электрический вектор, например **E**, и один магнитный вектор, например **H**. Оставшиеся два вектора можно получить, воспользовавшись материальными уравнениями.

Таким образом, уравнения Максвелла представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно шести неизвестных функций (например, E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z), которые зависят в общем случае от трех пространственных координат x, y, z и от времени t.

В большинстве практически интересных случаев можно обоснованно считать, что рассматриваемые материальные среды являются линейными (см. § 1.9). В подобных средах имеет место фундаментальный *принцип суперпозиции* электромагнитных полей: если ($\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$) и ($\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$) — частные решения уравнений Максвелла, то решением будет и сумма вида ($a_1\mathbf{E}_1+a_2\mathbf{E}_2$, $a_1\mathbf{H}_1+a_2\mathbf{H}_2$) с произвольными постоянными коэффициентами a_1 и a_2. Принцип супер-

позиции непосредственно следует из того, что операция дифференцирования по времени $\partial/\partial t$ и векторные дифференциальные операции rot и div являются линейными.

Отмеченное здесь свойство линейности существенно облегчает анализ многих электродинамических задач. Тем не менее решить систему шести уравнений Максвелла в ситуациях, достаточно приближенных к реальным, зачастую весьма сложно. Прикладная электродинамика вынуждена прибегать к всевозможным приближенным методам, а также использовать приемы численного анализа, реализуемые с помощью компьютеров.

2.2. Уравнения Максвелла для гармонических колебаний. Комплексные амплитуды полей

В систему уравнений Максвелла входят частные производные по четырем аргументам: x, y, z и t. Процедура решения несомненно упростится, если из уравнений удастся исключить временну́ю переменную t. Этого легко добиться, если рассматриваемый электромагнитный процесс протекает во времени по гармоническому закону с некоторой постоянной частотой ω. Такие процессы часто встречаются на практике. К тому же, зная поведение поля на всех частотах, можно воссоздать поле с любым законом изменения во времени, воспользовавшись методом преобразования Фурье [2].

В наиболее общем случае вектор какого-либо поля, например $\mathbf{E}$, изменяющегося во времени по гармоническому закону, в некоторой заданной точке пространства записывается так:

$$\mathbf{E}(t)=E_{mx}\cos(\omega t+\varphi_x)\,\mathbf{i}_x+E_{my}\cos(\omega t+\varphi_y)\,\mathbf{i}_y+E_{mz}\cos(\omega t+\varphi_z)\,\mathbf{i}_z. \tag{2.3}$$

Здесь E_{mx}, E_{my}, E_{mz} — амплитуды отдельных составляющих поля; φ_x, φ_y, φ_z — соответствующие начальные фазы. Все шесть перечисленных величин являются действительными числами.

Эквивалентная запись формулы (2.3) такова:

$$\mathbf{E}(t)=\mathrm{Re}\left[\left(E_{mx}e^{j\varphi_x}\mathbf{i}_x+E_{my}e^{j\varphi_y}\mathbf{i}_y+E_{mz}e^{j\varphi_z}\mathbf{i}_z\right)e^{j\omega t}\right]. \tag{2.4}$$

Вектор

$$\dot{\mathbf{E}}=E_{mx}e^{j\varphi_x}\mathbf{i}_x+E_{my}e^{j\varphi_y}\mathbf{i}_y+E_{mz}e^{j\varphi_z}\mathbf{i}_z, \tag{2.5}$$

принимающий в общем случае комплексные значения, принято называть *комплексной амплитудой поля* $\mathbf{E}$ в заданной точке пространства. При этом считается, что частота ω изменения поля во времени известна. В дальнейшем все комплексные амплитуды будут помечаться точками сверху.

Метод комплексных амплитуд широко применяют в теории электрических цепей. Однако следует указать на весьма существенное обстоятельство: в электродинамических задачах комплексные амплитуды выступают как пространственные, в общем случае трехмерные, векторы. Поэтому изобразить их в виде некоторых вспомогательных векторов, вращающихся на комплексной плоскости, принципиально невозможно. Экспоненциальные множители с мнимыми показателями, входящие в комплексные амплитуды отдельных проекций поля, характеризуют исключительно фазовые соотношения между проекциями. Например, если комплексные амплитуды двух гармонически изменяющихся во времени векторов имеют вид $\dot{\mathbf{E}}_1 = E_0 \mathbf{i}_x$ и $\dot{\mathbf{E}}_2 = jE_0 \mathbf{i}_x$, то это отнюдь не означает, что эти два вектора образуют в пространстве угол 90° (в действительности оба вектора параллельны орту $\mathbf{i}_x$), а лишь говорит о том, что при изменении во времени вектор $\mathbf{E}_2$ опережает вектор $\mathbf{E}_1$ на четверть периода.

Мгновенное значение вектора, гармонически изменяющегося во времени, выражается через комплексную амплитуду следующим образом:

$$\mathbf{E}(t) = \mathrm{Re}(\dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}). \qquad (2.6)$$

Пример 2.1. Вектор поля $\mathbf{H}$ изменяется по грамоническому закону с частотой $f = 2$ ГГц $= 2 \cdot 10^9$ Гц, имея в некоторой фиксированной точке пространства комплексную амплитуду $\dot{\mathbf{H}} = 120\, e^{j30^\circ} \mathbf{i}_x + 50\, e^{j45^\circ} \mathbf{i}_y + 75\, e^{-j60^\circ} \mathbf{i}_z$. Найти мгновенное значение данного вектора как функцию времени.

Применив формулу (2.6), получаем

$$\mathbf{H}(t) = 120 \cos(4\pi \cdot 10^9 t + 30^\circ)\, \mathbf{i}_x + 50 \cos(4\pi \cdot 10^9 t + 45^\circ)\, \mathbf{i}_y + 75 \cos(4\pi \cdot 10^9 t - 60^\circ)\, \mathbf{i}_z.$$

Комплексные амплитуды легко ввести в уравнения Максвелла, полагая, что величины $\dot{\mathbf{E}}(x, y, z)$, $\dot{\mathbf{H}}(x, y, z)$ и т. д. зависят от пространственных координат. Возьмем, например, первое уравнение Максвелла из системы (2.2) и подставим в него соответствующие векторные поля, выраженные через комплексные амплитуды:

$$\mathrm{rot}\, \mathrm{Re}(\dot{\mathbf{H}} e^{j\omega t}) = \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{Re}\,(\dot{\mathbf{D}} e^{j\omega t}) + \sigma \mathrm{Re}(\dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}) + \mathrm{Re}(\dot{\mathbf{J}}_{\mathrm{ст}} e^{j\omega t}). \qquad (2.7)$$

Изменяя порядок следования дифференциальных операций и операции взятия действительной части, что всегда допустимо, а затем

сокращая на общий экспоненциальный множитель, получаем

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega\dot{\mathbf{D}} + \sigma\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{J}}_{\text{ст}}. \tag{2.8}$$

Таким образом, переход к комплексным амплитудам полей совершается по тем же правилам, что и в теории цепей, — оператор дифференцирования по времени, действующий на мгновенное значение поля, заменяется множителем $j\omega$ при соответствующей комплексной амплитуде.

Аналогично преобразуются остальные уравнения Максвелла. Приведем их окончательную сводку:

$$\begin{aligned}
&1.\quad \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega\dot{\mathbf{D}} + \sigma\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{J}}_{\text{ст}}.\\
&2.\quad \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\dot{\mathbf{B}}.\\
&3.\quad \operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} = \dot{\rho}.\\
&4.\quad \operatorname{div} \dot{\mathbf{B}} = 0.\\
&5.\quad \dot{\mathbf{D}} = \varepsilon_a\dot{\mathbf{E}}.\\
&6.\quad \dot{\mathbf{B}} = \mu_a\dot{\mathbf{H}}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Именно такая форма записи уравнений Максвелла обычно встречается в прикладных исследованиях и расчетах.

2.3. Комплексная диэлектрическая проницаемость. Угол диэлектрических потерь

Рассмотрим электромагнитный процесс в материальной среде с конечным значением удельной проводимости σ. Объединив уравнения 1 и 5 из системы (2.9), получим

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{J}}_{\text{ст}}, \tag{2.10}$$

где величина

$$\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - j\sigma/\omega \tag{2.11}$$

представляет собой *комплексную диэлектрическую проницаемость* данного вещества.

Введя этот параметр, можно одновременно учесть как поляризационные, так и проводящие свойства вещества. Значение действительной части комплексной диэлектрической проницаемости описывает интенсивность процесса поляризации, в то время как мнимая часть учитывает плотность токов проводимости.

Пример 2.2. Морская вода характеризуется параметрами $\varepsilon=75$, $\sigma=4$ См/м. Частота поля $f=100$ кГц. Сравнить степень выраженности процессов поляризации и электропроводности в этой среде на указанной частоте.

По формуле (2.11) находим комплексную диэлектрическую проницаемость:

$$\tilde{\varepsilon}_a = 75\,(10^{-9}/(36\pi)) - j4/(2\pi\cdot 10^5) = 6.63\cdot 10^{-10} - j6.36\cdot 10^{-6}\ \Phi/\text{м}.$$

Отсюда следует, что при заданной частоте плотность тока проводимости в морской воде на четыре порядка превосходит суммарную плотность токов смещения и поляризации.

Изображая число $\tilde{\varepsilon}_a$ в виде вектора на комплексной плоскости (рис. 2.1), можно описывать соотношение между действительной и мнимой частями комплексной проницаемости при помощи угла δ, который называют *углом диэлектрических потерь*. Чем больше этот угол, тем значительнее доля электромагнитной энергии, рассеиваемой в виде теплоты при протекании токов проводимости. В справочных таблицах обычно приводят значения тангенса этого угла:

$$\operatorname{tg}\delta = \sigma/(\omega\varepsilon_a). \qquad (2.12)$$

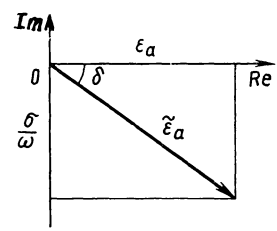


Рис. 2.1. Угол диэлектрических потерь

Тангенс угла потерь хороших диэлектриков на частотах СВЧ-диапазона лежит в пределах от 10^{-5} до 10^{-4}; если $\operatorname{tg}\delta > 10^{-3}$, то такой диэлектрик принято считать плохим.

2.4. Энергетические соотношения в электромагнитном поле. Вектор Пойнтинга

Электромагнитное поле способно накапливать и переносить энергию. Законы движения энергии в электромагнитном поле вытекают из уравнений Максвелла.

Предположим, что внутри замкнутого объема V, ограниченного поверхностью S (рис. 2.2), существует электромагнитное поле с некоторым запасом энергии W. Будем считать, что внутри этого объема часть энергии поля необратимо превращается в теплоту, и пусть $P_{\text{пот}}$ — мгновенное значение мощности тепловых потерь. Энергия электромагнитного поля может также изменяться во времени

за счет действия сторонних токов, сосредоточенных внутри объема. Обозначим символом $P_{ст}$ мгновенную мощность этих источников; величину $P_{ст}$ будем считать отрицательной, если сторонние источники (генераторы) увеличивают энергию поля, и положительной, если сторонние источники отбирают энергию из электромагнитного поля, действуя подобно внешним нагрузкам.

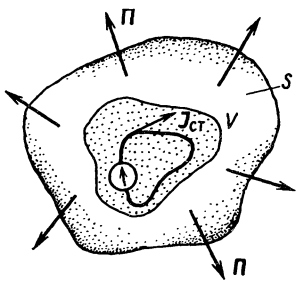


Рис. 2.2. К доказательству теоремы Пойнтинга

Наконец, предположим, что в каждой точке поверхности задан некоторый вектор **П**, своим модулем и направлением характеризующий плотность потока мощности. Вектор **П** имеет размерность Вт/м^2; если этот вектор ориентирован по направлению от поверхности, это означает, что в точке задания данного вектора энергия покидает объем V.

На основании закона сохранения энергии естественно полагать, что перечисленные выше физические величины связаны между собой соотношением

$$\oint_S \mathbf{П}\,d\mathbf{S} = -\frac{dW}{dt} - P_{пот} - P_{ст}. \qquad (2.13)$$

В 1884 г. английский ученый Дж. Пойнтинг, развивая идеи Максвелла, показал, что вектор плотности потока мощности электромагнитного поля

$$\mathbf{П} = [\mathbf{EH}]. \qquad (2.14)$$

Данный вектор называют *вектором Пойнтинга.*

Для вывода формулы (2.14) возьмем два первых уравнения Максвелла

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}_{ст},$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

умножим скалярно первое уравнение на вектор **E**, второе на вектор **H**, а затем почленно вычтем первое равенство из второго. В результате получим

$$\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E}\,\mathrm{rot}\mathbf{H} = -\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \sigma\mathbf{E}^2 - \mathbf{J}_{ст}\mathbf{E}. \qquad (2.15)$$

Левую часть этого уравнения можно преобразовать на основании известного тождества векторного анализа:

$$\mathbf{H}\ \mathrm{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E}\ \mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathrm{div}\ [\mathbf{EH}].$$

Далее, так как $\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}$, $\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}$, то

$$\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{BH}),$$

$$\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{D}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{DE}).$$

Воспользовавшись этим, представим равенство (2.15) в виде

$$\mathrm{div}\ [\mathbf{EH}] = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{BH} + \mathbf{DE}}{2}\right) - \sigma \mathbf{E}^2 - \mathbf{J}_{\text{ст}}\mathbf{E},$$

откуда, по теореме Остроградского — Гаусса,

$$\int_V \mathrm{div}\,[\mathbf{EH}]\,dV = \oint_S [\mathbf{EH}]\ d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{\mathbf{BH} + \mathbf{DE}}{2}\,dV -$$

$$-\int_V \sigma \mathbf{E}^2 dV - \int_V \mathbf{J}_{\text{ст}}\mathbf{E}\,dV. \qquad (2.16)$$

Сравнивая формулы (2.13) и (2.16), следует отождествить величину $[\mathbf{EH}]$ с плотностью потока мощности $\mathbf{\Pi}$, что и подтверждает формулу (2.14).

Наряду с этим интеграл

$$W = \int_V \frac{\mathbf{BH} + \mathbf{DE}}{2}\,dV \qquad (2.17)$$

представляет собой полный запас энергии электромагнитного поля внутри объема V в фиксированный момент времени. Энергия поля распределена в пространстве непрерывно с объемной плотностью (Дж/м^3)

$$w = \frac{1}{2}(\mathbf{BH} + \mathbf{DE}) = \frac{\mu_a \mathbf{H}^2}{2} + \frac{\varepsilon_a \mathbf{E}^2}{2}. \qquad (2.18)$$

Мощность тепловых потерь в объеме всегда положительна:

$$P_{\text{пот}} = \int_V \sigma \mathbf{E}^2 dV. \qquad (2.19)$$

Объемная плотность мощности тепловых потерь пропорциональна квадрату модуля вектора напряженности электрического поля:

$$p_{\text{пот}} = \sigma \mathbf{E}^2. \qquad (2.20)$$

Наконец, мощность сторонних источников

$$P_{ст}=\int_V \mathbf{J}_{ст}\mathbf{E}dV \tag{2.21}$$

распределена в пространстве с объемной плотностью

$$p_{ст}=\mathbf{J}_{ст}\mathbf{E}, \tag{2.22}$$

которая может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от взаимной ориентации векторов, фигурирующих в правой части последней формулы.

Пример 2.3. Пусть в некоторой точке пространства заданы неизменные во времени векторы

$\mathbf{J}_{ст}=30\mathbf{i}_x-80\mathbf{i}_y+45\mathbf{i}_z$ А/м^2,

$\mathbf{E}=-25\mathbf{i}_x+40\mathbf{i}_y+16\mathbf{i}_z$ В/м.

На основании формулы (2.22) плотность мощности сторонних источников в данной точке $p_{ст}=-30\cdot25-80\cdot40+45\cdot16=-3230$ Вт/м^3. Отрицательный знак данной величины свидетельствует о том, что сторонние токи, существующие в малой окрестности рассматриваемой точки, совершают работу против сил поля и увеличивают его энергию.

Если электромагнитное поле изменяется во времени гармонически, то вектор Пойнтинга можно выразить через комплексные амплитуды $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ соответствующих полей, поскольку действительная часть любого комплексного числа есть полусумма комплексно-сопряженных чисел, так что

$$\mathbf{E}=\mathrm{Re}(\dot{\mathbf{E}}e^{j\omega t})=1/2\,(\dot{\mathbf{E}}e^{j\omega t}+\overset{*}{\dot{\mathbf{E}}}e^{-j\omega t}), \tag{2.23}$$

$$\mathbf{H}=\mathrm{Re}(\dot{\mathbf{H}}e^{j\omega t})=1/2(\dot{\mathbf{H}}e^{j\omega t}+\overset{*}{\dot{\mathbf{H}}}e^{-j\omega t}). \tag{2.24}$$

Подставляя данные выражения в формулу (2.14), находим

$$\mathbf{\Pi}=\frac{1}{4}\{[\dot{\mathbf{E}}\overset{*}{\dot{\mathbf{H}}}]+[\overset{*}{\dot{\mathbf{E}}}\dot{\mathbf{H}}]+[\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}]e^{j2\omega t}+[\overset{*}{\dot{\mathbf{E}}}\overset{*}{\dot{\mathbf{H}}}]e^{-j2\omega t}\}=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\dot{\mathbf{E}}\overset{*}{\dot{\mathbf{H}}}]+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{[\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}]e^{j2\omega t}\}. \tag{2.25}$$

Здесь первое слагаемое в правой части неизменно во времени, а второе изменяется с удвоенной частотой. Таким образом, процесс

переноса энергии в гармоническом электромагнитном поле характеризуется, с одной стороны, действительным вектором

$$\Pi_{ср}=\frac{1}{T}\int_0^T \Pi dt=\frac{1}{2}\operatorname{Re}[\dot{E}\dot{H}^*], \tag{2.26}$$

равным плотности потока мощности, *усредненной за период,* и, с другой стороны, действительным вектором

$$\Pi_{кол}=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\{[\dot{E}\dot{H}]e^{j2\omega t}\}, \tag{2.27}$$

который представляет собой *колеблющуюся* составляющую вектора Пойнтинга. Следует иметь в виду, что среднее за период значение вектора $\Pi_{кол}$ равно нулю.

При анализе гармонических электромагнитных полей часто вводят *комплексный вектор Пойнтинга*

$$\dot{\Pi}=\frac{1}{2}[\dot{E}\dot{H}^*], \tag{2.28}$$

обладающий тем свойством, что

$$\Pi_{ср}=\operatorname{Re}\dot{\Pi}. \tag{2.29}$$

Легко видеть, что имеется полная аналогия между комплексным вектором Пойнтинга и известной из теории цепей комплексной мощностью гармонического колебания. Если комплексный вектор Пойнтинга оказывается мнимым, то это значит, что рассматриваемый электромагнитный процесс в среднем за период не переносит мощности. Принято говорить, что чисто мнимому значению комплексного вектора Пойнтинга отвечает перенос электромагнитным полем *реактивной мощности.*

Пример 2.4. В некоторой точке пространства заданы комплексные амплитуды полей

$$\dot{E}=5i_x-j8i_y+12e^{j30°}i_z \text{ В/м},$$

$$\dot{H}=0.4e^{j45°}i_x+1.6e^{-j45°}i_y-0.75e^{-j60°}i_z \text{ А/м}.$$

Найти комплексный вектор Пойнтинга $\dot{\Pi}$ и его действительную часть $\Pi_{ср}$ в данной точке.

Сопряженная комплексная амплитуда магнитного вектора

$$\dot{H}^*=0.4e^{-j45°}i_x+1.6e^{j45°}i_y-0.75e^{j60°}i_z.$$

Раскрывая векторное произведение в декартовой системе координат, получим

$$\dot{\Pi} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ 5 & -j8 & 12e^{j30^\circ} \\ 0.4e^{-j45^\circ} & 1.6e^{j45^\circ} & -0.75e^{j60^\circ} \end{vmatrix} =$$

$$= (3e^{j150^\circ} - 9.6e^{j75^\circ})\,\mathbf{i}_x + (1.875e^{j60^\circ} + 2.4e^{-j15^\circ})\,\mathbf{i}_y + 5.6e^{j45^\circ}\mathbf{i}_z$$

Преобразуя экспоненты с мнимыми показателями по формуле Эйлера, находим, что

$$\dot{\Pi} = (-5.083 - j7.773)\,\mathbf{i}_x + (3.306 + j1.003)\,\mathbf{i}_y +$$

$$+ (3.960 + j3.960)\,\mathbf{i}_z \text{ Вт/м}^2,$$

$$\Pi_{ср} = -5.083\mathbf{i}_x + 3.306\mathbf{i}_y + 3.960\mathbf{i}_z \text{ Вт/м}^2.$$

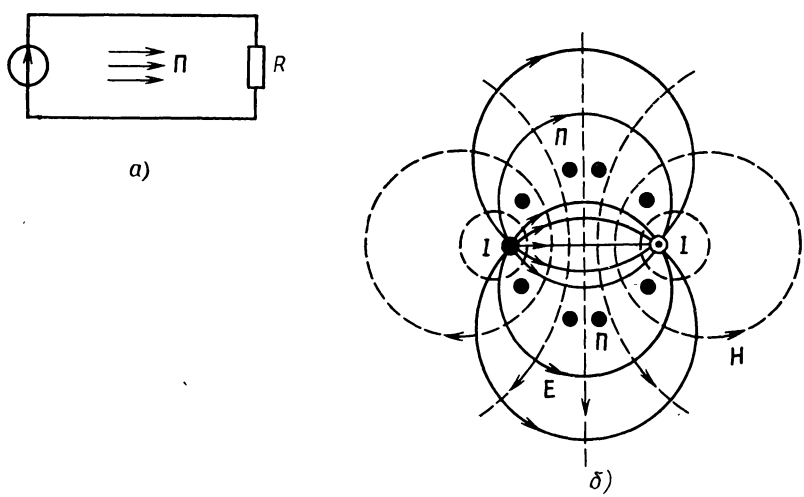


Рис. 2.3. Передача энергии электромагнитного поля от источника к нагрузке:

а — принципиальная схема цепи; *б* — конфигурация силовых линий поля в поперечном сечении

Концепция вектора Пойнтинга позволяет правильно описывать любые процессы передачи энергии электромагнитным полем. В качестве примера на рис. 2.3 представлен эскиз двухпроводной линии передачи, вдоль которой энергия от источника постоянной ЭДС передается резистивной нагрузке. Здесь же изображена примерная картина силовых линий полей **E** и **H**. В каждой точке пространст-

ва существует отличный от нуля вектор Пойнтинга, ориентированный вдоль линии от генератора к нагрузке. Переносимая мощность равна интегралу от вектора Пойнтинга по поперечной плоскости, взятому в бесконечных пределах. Анализируя данную систему, приходим к несколько неожиданному выводу — энергия переносится не токами в проводниках, а электромагнитным полем в окружающем пространстве. Наличие проводников и токов в них служит лишь условием существования полей требуемой конфигурации.

Другой интересный пример — система из постоянного магнита и заряженного конденсатора, которые ориентированы так, как показано на рис. 2.4. Здесь поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ не параллельны, и поэтому в каждой точке пространства существует отличный от нуля вектор Пойнтинга $\mathbf{\Pi}=[\mathbf{EH}]$. Однако никакого переноса энергии в данной системе нет. Дело в том, что рассматриваемые поля статические, токи проводимости отсутствуют и в соответствии с уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=0;\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=0,$$

откуда $\operatorname{div}\mathbf{\Pi}=0$, а это означает, что в этой физической системе векторное поле $\mathbf{\Pi}$ не имеет источников. Поток такого поля через замкнутую поверхность равен нулю, и поэтому энергия электромагнитного поля внутри любого ограниченного объема постоянна.

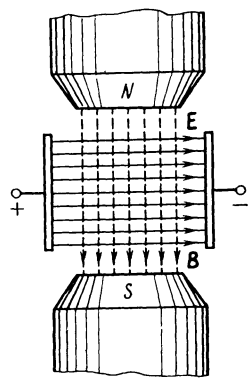


Рис. 2.4. Система из заряженного конденсатора и постоянного магнита

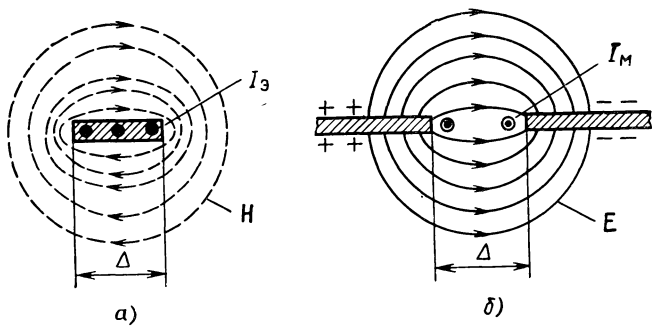
2.5. Магнитный ток. Принцип перестановочной двойственности

Рассмотрим картину магнитных силовых линий, возникающую вблизи тонкой проводящей полоски шириной Δ, по которой протекает электрический ток $I_э$ (рис. 2.5, *а*). В непосредственной близости от проводника магнитные силовые линии в значительной мере повторяют его контур. На самой поверхности проводника магнитный вектор касателен к плоскости полоски, отмеченной сплошной линией. С удалением от полоски силовые линии, постепенно деформируясь, превращаются в окружности.

На рис. 2.5, *б* изображена картина силовых линий электрического вектора в системе из двух заряженных металлических полуплоскостей, которые разделены зазором шириной Δ. С точностью до направления стрелок в верхнем и нижнем полупространствах эта картина тождественна той, которая рассматривалась ранее.

Сходство картин данных полей позволяет чисто формально предположить, что в щели параллельно кромкам протекает некоторый гипотетический ток $I_м$, называемый *магнитным током*.

Подчеркнем, что в силу соленоидального характера магнитного поля (см. гл. 1) физических носителей магнитного тока не существует. Понятие магнитного тока играет вспомогательную роль, позволяя в ряде случаев значительно упростить расчеты.



а) *б)*

Рис. 2.5. Картина силовых линий поля:
а — магнитное поле вблизи проводящей полоски;
б — электрическое поле вблизи зазора между двумя заряженными плоскостями

Геометрическое сходство полей на рис. 2.5, *а, б* есть следствие симметрии двух основных уравнений Максвелла

$$\text{rot}\,\dot{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon_a\dot{\mathbf{E}};\quad \text{rot}\,\dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu_a\dot{\mathbf{H}}, \tag{2.30}$$

которые переходят одно в другое при следующих перестановках:

$$\dot{\mathbf{E}} \longleftrightarrow \dot{\mathbf{H}};\qquad \varepsilon_a \longleftrightarrow -\mu_a. \tag{2.31}$$

Если в правой части первого уравнения Максвелла фигурирует плотность стороннего электрического тока $\mathbf{J}_{ст.э}$, то для сохранения симметрии уравнений в правую часть второго уравнения следует ввести гипотетическую плотность стороннего магнитного тока $\mathbf{J}_{ст.м}$, такую, что

$$\dot{\mathbf{J}}_{ст.э} \longleftrightarrow -\dot{\mathbf{J}}_{ст.м}. \tag{2.32}$$

В этом случае система уравнений Максвелла принимает вид

$$\begin{aligned}\text{rot}\,\dot{\mathbf{H}} &= j\omega\mu_a\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{J}}_{ст.м},\\ \text{rot}\,\dot{\mathbf{E}} &= -j\omega\mu_a\dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{J}}_{ст.м}.\end{aligned} \tag{2.33}$$

Соотношения (2.31) и (2.32) отображают принцип перестановочной двойственности для электромагнитного поля. В соответст-

вии с этим принципом, если известно решение какой-либо электродинамической задачи, простая перестановка позволяет сразу получить решение двойственной (дуальной) задачи, в которой конфигурация силовых линий магнитного поля повторяет конфигурацию силовых линий электрического поля в исходном процессе. При этом, поскольку уравнения Максвелла не меняют своего вида, дуальный электромагнитный процесс заведомо существует.

2.6. Лемма Лоренца

В теоретических вопросах важную роль играет соотношение, называемое леммой Лоренца, которое устанавливает связь между полями, возбуждаемыми в пространстве двумя независимыми системами сторонних токов.

Пусть некоторая совокупность гармонических сторонних токов $(\dot{\mathbf{j}}^{(1)}_{\text{ст.э}},\ \dot{\mathbf{j}}^{(1)}_{\text{ст.м}})$ создает электромагнитное поле с комплексными амплитудами $(\dot{\mathbf{E}}_1,\ \dot{\mathbf{H}}_1)$, которое удовлетворяет системе уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_1 = j\omega\varepsilon_a\dot{\mathbf{E}}_1 + \dot{\mathbf{j}}^{(1)}_{\text{ст.э}},$$

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_1 = -j\omega\mu_a\dot{\mathbf{H}}_1 - \dot{\mathbf{j}}^{(1)}_{\text{ст.м}}. \tag{2.34}$$

Наряду с этим рассмотрим другую систему сторонних токов $(\dot{\mathbf{j}}^{(2)}_{\text{ст.э}},\ \dot{\mathbf{j}}^{(2)}_{\text{ст.м}})$, имеющих ту же самую частоту. Эти токи возбуждают поле с комплексными амплитудами $(\dot{\mathbf{E}}_2,\ \dot{\mathbf{H}}_2)$, удовлетворяющими уравнениям

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_2 = j\omega\varepsilon_a\dot{\mathbf{E}}_2 + \dot{\mathbf{j}}^{(2)}_{\text{ст.э}},$$

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_2 = -j\omega\mu_a\dot{\mathbf{H}}_2 - \dot{\mathbf{j}}^{(2)}_{\text{ст.м}}. \tag{2.35}$$

Этапы вывода леммы Лоренца схожи с теми, которые использовались при выводе формулы для вектора Пойнтинга. Умножим скалярно первое уравнение из (2.34) на вектор $\dot{\mathbf{E}}_2$, затем второе уравнение из (2.35) на вектор $\dot{\mathbf{H}}_1$ и вычтем второе равенство из первого. В результате получим

$$-\operatorname{div}[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{H}}_1] = j\omega\varepsilon_a\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{E}}_2 + j\omega\mu_a\dot{\mathbf{H}}_1\dot{\mathbf{H}}_2 + \dot{\mathbf{J}}^{(1)}_{\text{ст.э}}\dot{\mathbf{E}}_2 + \dot{\mathbf{J}}^{(2)}_{\text{ст.м}}\dot{\mathbf{H}}_1. \tag{2.36}$$

Теперь умножим скалярно второе уравнение из системы (2.34) на вектор $\dot{\mathbf{H}}_2$, первое уравнение из системы (2.35) на вектор $\dot{\mathbf{E}}_1$ и вычтем второе уравнение из первого. При этом будем иметь

$$\operatorname{div}[\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2] = -j\omega\varepsilon_a\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{E}}_2 - j\omega\mu_a\dot{\mathbf{H}}_1\dot{\mathbf{H}}_2 - \dot{\mathbf{j}}^{(2)}_{\text{ст.э}}\dot{\mathbf{E}}_1 - \dot{\mathbf{j}}^{(1)}_{\text{ст.м}}\dot{\mathbf{H}}_2. \tag{2.37}$$

Складывая почленно равенства (2.36) и (2.37), приходим к соотношению

$$\operatorname{div}[\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2]-\operatorname{div}[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{H}}_1]=\dot{\mathbf{j}}^{(1)}_{\text{ст.э}}\dot{\mathbf{E}}_2+\dot{\mathbf{j}}^{(2)}_{\text{ст.м}}\dot{\mathbf{H}}_1-\dot{\mathbf{j}}^{(2)}_{\text{ст.э}}\dot{\mathbf{E}}_1-\dot{\mathbf{j}}^{(1)}_{\text{ст.м}}\dot{\mathbf{H}}_2, \qquad (2.38)$$

которое выражает лемму Лоренца в дифференциальной форме. Векторные произведения $[\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2]$ и $[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{H}}_1]$ в левой части можно трактовать как взаимные векторы Пойнтинга двух независимых электромагнитных процессов.

Возможна также интегральная формулировка рассматриваемой леммы. Чтобы получить ее, допустим, что имеется конечный объем V, ограниченный поверхностью S. Применив теорему Остроградского — Гаусса к формуле (2.38), находим

$$\int_S\{[\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2]-[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{H}}_1]\}d\mathbf{S}=\int_V(\dot{\mathbf{j}}^{(1)}_{\text{ст.э}}\dot{\mathbf{E}}_2+\dot{\mathbf{j}}^{(2)}_{\text{ст.м}}\dot{\mathbf{H}}_1-\dot{\mathbf{j}}^{(2)}_{\text{ст.э}}\dot{\mathbf{E}}_1-$$

$$-\dot{\mathbf{j}}^{(1)}_{\text{ст.м}}\dot{\mathbf{H}}_2)\,dV. \qquad (2.39)$$

Лемма Лоренца в форме (2.38) или (2.39) является полезным инструментом решения многих задач электродинамики, особенно связанных с расчетом антенн. Этот круг вопросов будет рассмотрен в гл. 17.

ЗАДАЧИ

2.1. Покажите, что векторное поле $\mathbf{H}$, изменяющееся во времени и в пространстве по закону

$$\mathbf{H}=6x\cos\omega t\mathbf{i}_x+2\exp(-2y)\sin\omega t\mathbf{i}_z,$$

не может быть полем магнитного вектора, который удовлетворяет уравнениям Максвелла.

2.2. Покажите, что из четвертого уравнения Максвелла в неоднородной среде, магнитная проницаемость которой есть функция пространственных координат, вытекает следующее уравнение относительно вектора напряженности магнитного поля:

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=-\frac{1}{\mu_a}(\mathbf{H}\operatorname{grad}\mu_a).$$

2.3. Известно, что некоторый электромагнитный процесс характеризуется тем, что все декартовы составляющие полей зависят лишь от координаты z. Используя уравнения Максвелла, покажите, что при этом продольные проекции E_z и H_z векторов электромагнитного поля будут отсутствовать.

2.4. В некоторой точке материальной среды с параметрами $\varepsilon=3.5$ и $\sigma=6.2\cdot10^{-1}$ См/м создано электрическое поле с частотой 600 МГц и амплитудой напряженности 15 В/м. Определите ампли-

тудное значение и фазовый угол вектора плотности полного тока в данной точке пространства.

2.5. Грозовая туча площадью 5 км^2 располагается на высоте 2 км над поверхностью земли. Между тучей и землей образуется постоянное электрическое поле с напряженностью $2 \cdot 10^5$ В/м, одинаковое во всех точках. Оцените энергию этого поля.

2.6. Сердечник трансформатора массой 2 кг выполнен из стали плотностью 7.7 г/см^3. Амплитуда вектора магнитной индукции в сердечнике 2.1 Тл. Найдите максимальное значение энергии, запасаемой в сердечнике, если относительная магнитная проницаемость стали равна 200.

2.7. Комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля

$$\dot{\mathbf{E}} = 28e^{j0.16}\mathbf{i}_x - 105e^{-j1.2}\mathbf{i}_y + 36e^{j2.3}\mathbf{i}_z$$

(углы даны в радианах). Частота колебаний 2 МГц. Найдите мгновенное значение вектора $\mathbf{E}$ в момент времени 0.1 мкс.

2.8. При описании частотных свойств полярных диэлектриков используют математическую модель, которая уподобляет молекулярные диполи воображаемым твердым частицам, испытывающим при движении вязкое сопротивление окружающей жидкости. При этом связь между вектором поляризованности $\mathbf{P}$ и вектором напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ устанавливается дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} + \frac{1}{T}\mathbf{P} = a\mathbf{E},$$

где a — некоторая постоянная, T — так называемое время релаксации процесса поляризации. Получите формулу, описывающую частотную зависимость комплексной диэлектрической проницаемости подобной среды.

2.9. В некоторой точке пространства заданы вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E} = 20\mathbf{i}_y$ В/м и вектор Пойнтинга $\mathbf{\Pi} = 10\mathbf{i}_x + 30\mathbf{i}_z$ Вт/м^2. Определите вектор напряженности магнитного поля в данной точке, если известно, что $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$.

Глава третья

ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Основополагающие исследования Максвелла показали, что переменное во времени электромагнитное поле имеет волновой характер. В дальнейшем Герц подтвердил теоретическое предсказание Максвелла прямым экспериментом.

В данной главе будет изучен простейший, но очень важный вид волнового движения электромагнитного поля, называемый однородными плоскими волнами.

3.1. Понятие волнового процесса. Продольные и поперечные волны

Волнами в физике называют колебательные движения непрерывных сред. Существует принципиальная разница между волновыми процессами в сплошных средах и колебаниями токов и напряжений в электрических цепях. Если в теории цепей состояние системы полностью определяется конечным числом токов и напряжений в отдельных ветвях, то для задания волнового процесса требуется знать его состояние в бесконечном множестве точек пространства. Поэтому говорят, что среда, в которой распространяются волны, является *распределенной* физической системой.

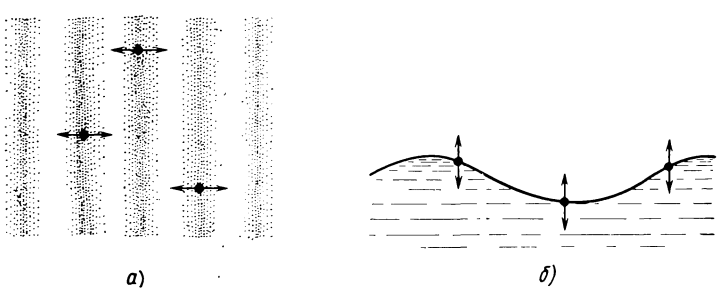


Рис. 3.1. Некоторые примеры волновых процессов:
а — звуковые волны в воздухе; *б* — волны на поверхности воды

Природа волновых явлений может быть самой разнообразной. Так, известны электромагнитные волны, механические волны в твердых, жидких и газообразных средах, волны на поверхности моря и т. д.

Сравним два хорошо известных и легко представимых волновых процесса — звуковые волны в воздухе и волны на поверхности воды (рис. 3.1, *а, б*). Пусть эти волны распространяются в направлении слева направо или справа налево. Звуковые волны связаны с перемещением в пространстве областей сжатия и разрежения газа. Каждая отдельная частица газа колеблется вдоль направления распространения волны. Такие волны принято называть *продольными*. В литературе можно встретить также термины *акустические* или *скалярные волны*.

Совсем иной характер волн на поверхности воды. Здесь колеблющиеся частицы перемещаются перпендикулярно направлению распространения волны (строго говоря, предмет, плавающий на поверхности, описывает некоторую замкнутую кривую, однако продольные перемещения значительно меньше поперечных). Для волн такого вида следует указывать ту плоскость, в которой происходят колебания частиц. Эту плоскость называют *плоскостью поляризации,* а сами волны — *поперечными, поляризованными* или *векторными.* Нетрудно понять, что математическая теория поперечных волн сложнее теории продольных волн. Поэтому следует ожидать, что в поперечных волнах наблюдается большее число различных физических эффектов.

3.2. Плоские волны и их характеристики

Предположим, что в каждой точке пространства с декартовой системой координат (x, y, z) определена некоторая величина v (физическая природа ее на данном этапе безразлична), описываемая формулой

$$v(z, t) = V_m \cos(\omega t - \beta z), \tag{3.1}$$

где V_m, ω, β — действительные числа. Говорят, что данная зависимость является математической моделью *однородной плоской волны.*

Рассматривая характер изменения величины $v(z, t)$ в пространстве и во времени, заметим прежде всего, что значения v постоянны в любой плоскости, перпендикулярной оси z. Иными словами, мгновенные значения однородной плоской волны не зависят от поперечных координат x и y.

Далее обратим внимание на то, что как временна́я, так и пространственная зависимости величины $v(z, t)$ описываются гармоническими функциями. Действительно, зафиксировав точку $z=0$, получим $v(0, t) = V_m \cos \omega t$. Колебания в точке с координатой $z > 0$ имеют вид $v(z, t) = V_m \cos(\omega t - \beta z)$, т. е. характеризуются теми же амплитудой V_m и частотой ω, однако запаздывают по фазе на βz радиан. Сказанное поясняется кривыми на рис. 3.2, *а*.

Рассмотрим теперь «мгновенную фотографию» процесса $v(z, t)$ в начальный момент времени $t=0$ (рис. 3.2, *б*). Данная зависимость описывается гармонической функцией $v(z, 0) = V_m \cos \beta z$. Параметр β играет роль «пространственной частоты» процесса и называется *коэффициентом фазы* плоской волны. Величина β имеет размерность рад/м или, короче, $м^{-1}$.

Функция $v(z, 0)$ периодична; ее период λ называют *длиной волны.* Между величинами β и λ существует очевидная связь

$$\beta = 2\pi/\lambda. \tag{3.2}$$

Чтобы изобразить график функции $v(z, t)$ при $t>0$, формулу (3.1) удобно записать в виде $v(z, t)=V_m\cos(\beta z-\omega t)$. При этом видно, что с ростом t фазовый сдвиг ωt увеличивается, так что исходная кривая $v(z, 0)$ сдвигается вдоль оси *вправо*, т. е. в сторону увеличения координаты z (рис. 3.2, *б*).

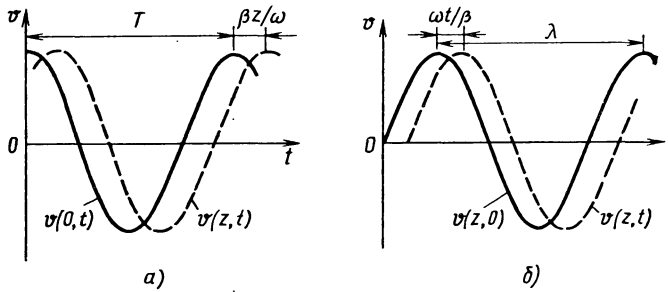


Рис. 3.2. Однородная плоская волна:
а — изменение поля во времени; *б* — изменение поля в пространстве

Назовем *плоскостью равных фаз* или *волновым фронтом* воображаемую бесконечно протяженную плоскость, перпендикулярную оси z; координата z этой плоскости при любых t удовлетворяет соотношению

$$\omega t-\beta z=\text{const}. \tag{3.3}$$

Волновой фронт данной плоской волны перемещается вдоль оси z с так называемой *фазовой скоростью*

$$v_\Phi=\frac{dz}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega t-\text{const}}{\beta}\right)=\frac{\omega}{\beta}. \tag{3.4}$$

Формулу (3.4) можно представить и по-иному:

$$v_\Phi=\lambda f, \tag{3.5}$$

где $f=\omega/(2\pi)$ — частота процесса, выраженная в герцах.

Итак, из трех параметров v_Φ, ω, β лишь два можно выбирать произвольно; третий параметр подчиняется соотношению (3.4).

Пример 3.1. Электромагнитная волна распространяется в вакууме с фазовой скоростью $v_\Phi=c=3\cdot10^8$ м/с. Частота поля $f=400$ МГц. Определить длину волны λ и коэффициент фазы β.

В данном случае $\lambda=c/f=0.75$ м; $\beta=2\pi/\lambda=6.28/0.75=8.378$ м$^{-1}$.

Рассмотрим теперь однородную плоскую волну с математической моделью вида

$$v(z, t) = V_m \cos(\omega t + \beta z). \tag{3.6}$$

Все сказанное ранее применимо и к этому случаю, за исключением того, что из уравнения волнового фронта $\omega t + \beta z = \text{const}$ вытекает следующая формула для нахождения фазовой скорости:

$$v_\phi = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\text{const} - \omega t}{\beta}\right) = -\frac{\omega}{\beta}. \tag{3.7}$$

Сравнивая выражения (3.4) и (3.7), убеждаемся, что плоская волна, описываемая формулой (3.6), распространяется *влево*, т. е. в сторону уменьшения координаты z.

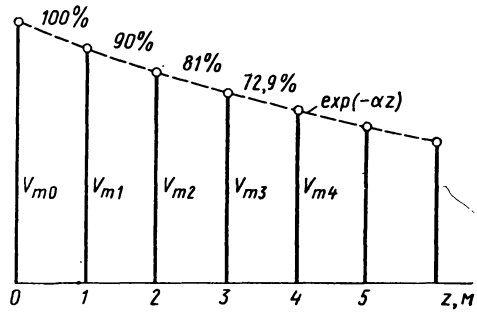


Рис. 3.3. Уменьшение амплитуды плоской волны при распространении в среде с потерями

3.3. Затухание волн в материальных средах. Коэффициент распространения

В любой реальной среде амплитуда волнового процесса неизбежно уменьшается по мере распространения, например за счет тепловых потерь. Закон ослабления амплитуды легко найти из следующих соображений. Предположим, что в начальной плоскости $z=0$ амплитуда имеет исходное значение V_{m0}, принимаемое за 100% (рис. 3.3). Положим для конкретности, что при прохождении одного метра пути амплитуда волны уменьшается на 10%, т. е. $V_{m1} = 0.9V_{m0} = 90\%$. Легко видеть, что $V_{m2} = 0.9V_{m1} = 81\%$, $V_{m3} = 0.9V_{m2} = 72.9\%$ и т. д. Общая закономерность такова:

$$\frac{V_{m0}}{V_{m1}} = \frac{V_{m1}}{V_{m2}} = \ldots = \frac{V_{mN-1}}{V_{mN}} = \ldots.$$

Из элементарной алгебры известно, что именно таким свойством обладает показательная функция. Поэтому закон изменения амплитуды вдоль оси распространения в общем виде можно записать так:

$$V_m(z) = V_{m0} e^{-\alpha z}, \tag{3.8}$$

где α — *коэффициент ослабления* плоской волны в среде. Эта действительная величина имеет, подобно коэффициенту фазы, размерность $м^{-1}$.

В технических расчетах часто используют особую логарифмическую единицу — *погонное затухание* $\Delta_{\text{пог}}$, которое измеряют в децибелах на метр (дБ/м) и определяют по формуле

$$\Delta_{\text{пог}} = 20 \lg (V_{m0}/V_{m1}) = 20 \lg (e^{\alpha}) = 8.686\alpha. \qquad (3.9)$$

Чтобы оценить удобство пользования логарифмическими единицами затухания, рассмотрим следующий пример.

Пример 3.2. В начальной плоскости $z=0$ амплитуда вектора напряженности электрического поля плоской электромагнитной волны $E_m(0) = 700$ В/м. Погонное затухание $\Delta_{\text{пог}} = 0.2$ дБ/м. Вычислить амплитуду $E_m(400)$ в плоскости с координатой $z = 400$ м.

Очевидно, что полное затухание волны вдоль пути распространения составит $0.2 \cdot 400 = 80$ дБ, откуда $\lg[E_m(0)/E_m(400)] = 80/20 = 4$. Вычисляя антилогарифм, получаем $E_m(400) = E_m(0)/10^4 = 0.07$ В/м. Следует обратить внимание на существенное (в 10 000 раз) уменьшение амплитуды поля.

Объединив формулы (3.1) и (3.8), можно записать общее выражение для пространственно-временно́го распределения мгновенных значений поля однородной плоской волны в среде с затуханием:

$$v(z, t) = V_{m0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z). \qquad (3.10)$$

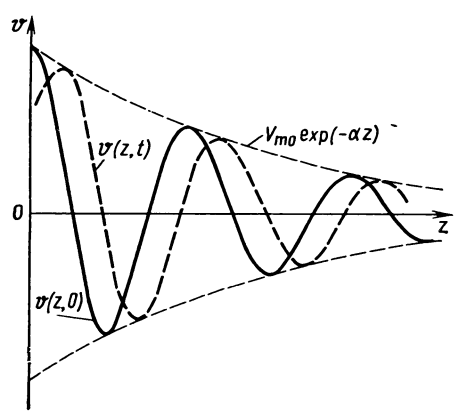


Рис. 3.4. Распределение мгновенных значений волнового процесса в среде с потерями

Соответствующие кривые для значений $t=0$ и $t>0$ изображены на рис. 3.4. График функции $V_{m0}\exp(-\alpha z)$, выполняющей роль огибающей кривых, показан штриховой линией.

Так как зависимость вида (3.10) является гармонической относительно аргумента t, можно воспользоваться методом комплексных амплитуд. Очевидно, что комплексная амплитуда данного поля

$$\dot{V}(z) = V_{m0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} = V_{m0} e^{-(\alpha + j\beta)z}, \qquad (3.11)$$

поскольку

$$v(z, t) = \operatorname{Re}[\dot{V}(z)\, e^{j\omega t}].$$

Коэффициент фазы β и коэффициент ослабления α объединяют в единую комплексную величину — так называемый *коэффициент распространения*

$$\gamma=\alpha+j\beta, \tag{3.12}$$

такой, что комплексная амплитуда поля плоской волны, распространяющейся в сторону возрастания координаты z, имеет вид

$$\dot{V}_{(+)}(z)=V_{m0}e^{-\gamma z}. \tag{3.13}$$

Соответственно комплексная амплитуда волны, распространяющейся или, как часто говорят, бегущей в сторону уменьшения координаты z, такова:

$$V_{(-)}(z)=V_{m0}e^{\gamma z}. \tag{3.14}$$

В частном случае, когда потери отсутствуют и амплитуда поля постоянна вдоль z, коэффициент распространения $\gamma=j\beta$ оказывается чисто мнимым. Возможен и другой частный случай, когда коэффициент распространения чисто действительный: $\gamma=\alpha$. При этом волновой процесс, по сути, не существует; колебания $v(z, t)$ во всех точках пространства происходят с одной и той же фазой, отличаясь лишь амплитудами.

3.4. Волновой характер переменного электромагнитного поля. Уравнение Гельмгольца

Проведенное выше исследование свойств волновых процессов носило несколько абстрактный характер и не было связано с конкретными физическими явлениями. Обращаясь к интересующим нас электромагнитным полям, докажем, что одним из частных решений уравнений Максвелла в неограниченном пространстве служат однородные плоские волны.

Рассмотрим бесконечное трехмерное пространство с заданными электродинамическими параметрами $\tilde{\varepsilon}_a$, μ_a, одинаковыми во всех точках. Предположим, что свободные электрические заряды отсутствуют, так что их объемная плотность $\rho=0$. Электромагнитный процесс, гармонически изменяющийся во времени с частотой ω, характеризуется комплексными амплитудами полей $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$, которые удовлетворяют системе уравнений Максвелла

$$\begin{array}{llll} 1. & \operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}=j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}}. & 2. & \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}=-j\omega\mu_a\dot{\mathbf{H}}. \\ 3. & \operatorname{div}\dot{\mathbf{E}}=0. & 4. & \operatorname{div}\dot{\mathbf{H}}=0. \end{array} \tag{3.15}$$

Преобразуем систему (3.15) таким образом, чтобы свести ее к эквивалентному уравнению относительно комплексной амплитуды $\dot{\mathbf{E}}$ вектора напряженности электрического поля. Для этого применим дифференциальную операцию rot к обеим частям уравнения 2, а затем воспользуемся выражением rot $\dot{\mathbf{H}}$ из левой части уравнения 1:

$$\text{rot rot } \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu_a \text{ rot } \dot{\mathbf{H}} = \omega^2 \tilde{\varepsilon}_a \mu_a \dot{\mathbf{E}}. \tag{3.16}$$

Примем во внимание (см. Приложение Б), что

$$\text{rot rot } \dot{\mathbf{E}} = \text{grad div } \dot{\mathbf{E}} - \nabla^2 \dot{\mathbf{E}},$$

или в силу уравнения 3

$$\text{rot rot } \dot{\mathbf{E}} = -\nabla^2 \dot{\mathbf{E}}.$$

Тогда уравнение (3.16) преобразуется к виду

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \omega^2 \tilde{\varepsilon}_a \mu_a \dot{\mathbf{E}} = 0. \tag{3.17}$$

В теории волновых процессов равенство (3.17) получило название *уравнения Гельмгольца* в честь немецкого ученого Германа Гельмгольца (1821—1894).

Введем параметр γ, в общем случае комплексный, удовлетворяющий соотношению

$$\gamma^2 = -\omega^2 \tilde{\varepsilon}_a \mu_a. \tag{3.18}$$

Будет показано, что γ представляет собой коэффициент распространения плоской волны, изучавшийся в § 3.3. Уравнение Гельмгольца приобретает при этом вид

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} - \gamma^2 \dot{\mathbf{E}} = 0. \tag{3.19}$$

Очевидно, что таким же окажется уравнение относительно комплексной амплитуды вектора напряженности магнитного поля

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} - \gamma^2 \dot{\mathbf{H}} = 0. \tag{3.20}$$

Уравнения (3.19) и (3.20) являются однородными (с нулевой правой частью) векторными дифференциальными уравнениями второго порядка. Каждое из них эквивалентно трем дифференциальным уравнениям в частных производных относительно декартовых проекций комплексных амплитуд векторов поля. Например, представив (3.19) в развернутой форме, получаем систему уравнений

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} - \gamma^2 \dot{E}_x = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial z^2}-\gamma^2 \dot{E}_y=0, \qquad (3.21)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2}-\gamma^2 \dot{E}_z=0.$$

Решение данной системы относительно трех неизвестных функций $\dot{E}_x$, $\dot{E}_y$, $\dot{E}_z$, каждая из которых в свою очередь зависит от трех пространственных координат x, y, z, описывает в общем случае поле с весьма сложной пространственной конфигурацией. Предельно упрощая задачу, будем считать, что:

1) проекция $\dot{E}_x \neq 0$, в то время как $\dot{E}_y = \dot{E}_z = 0$;

2) отличная от нуля проекция $\dot{E}_x$ зависит лишь от координаты z (для конкретности), так что $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$.

В данном частном случае система (3.21) сводится к одному дифференциальному уравнению второго порядка уже не в частных, а в обыкновенных производных, поскольку на основании предположения 2 производную $\partial^2/\partial z^2$ следует заменить на $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}z^2$:

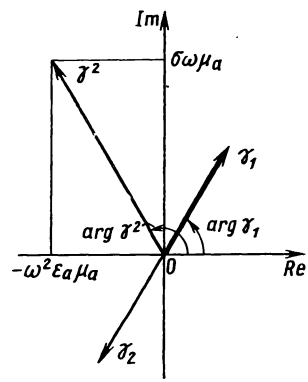


Рис 3 5 Нахождение коэффициентов распространения плоской волны

$$\frac{\mathrm{d}^2 \dot{E}_x}{\mathrm{d}z^2}-\gamma^2 \dot{E}_x=0. \qquad (3.22)$$

Общее решение этого линейного уравнения с постоянными коэффициентами представляет собой сумму двух экспоненциальных слагаемых:

$$\dot{E}_x(z)=\dot{E}_1 e^{\gamma_1 z}+\dot{E}_2 e^{\gamma_2 z}, \qquad (3.23)$$

где $\gamma_{1,2}$ — корни уравнения (3.18).

Изучим расположение этих корней на комплексной плоскости. Для этого заметим, что величина

$$\gamma^2 = -\omega^2 \tilde{\varepsilon}_a \mu_a = -\omega^2 \varepsilon_a \mu_a + j\sigma\omega\mu_a$$

имеет отрицательную действительную и положительную мнимую части, т. е. отображается вектором во II квадранте (рис. 3.5). Квадратный корень из этого комплексного числа имеет два значения. Одно из них, главное, обозначается здесь как γ_1, имеет аргумент $\arg\gamma_1 = {}^1/_2 \arg\gamma^2$ и лежит в I квадранте. Второе значение

квадратного корня $\gamma_2=-\gamma_1$. Это число отображается вектором в III квадранте.

В дальнейшем будем считать, что число

$$\gamma=\sqrt{-\omega^2\tilde{\varepsilon}_a\mu_a}=j\omega\sqrt{\tilde{\varepsilon}_a\mu_a}=\alpha+j\beta \tag{3.24}$$

представляет собой главное значение квадратного корня из γ^2, т. е. $\gamma=\gamma_1$. Тогда формулу (3.23) можно переписать так:

$$\dot{E}_x(z)=\dot{E}_1e^{\gamma z}+\dot{E}_2e^{-\gamma z}=\dot{E}_1e^{(\alpha+j\beta)z}+\dot{E}_2e^{-(\alpha+j\beta)z}. \tag{3.25}$$

Сравнивая эту формулу с выражениями (3.13) и (3.14), приходим к выводу о том, что полученное здесь частное решение уравнения Гельмгольца описывает однородные плоские волны. Первому слагаемому правой части отвечает плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в сторону уменьшения z. Второе слагаемое описывает такую же волну, бегущую в сторону возрастания координаты z. Эти волны никак не связаны между собой, так как им соответствуют два линейно независимых решения дифференциального уравнения (3.22).

3.5. Понятие характеристического сопротивления. Плотность потока мощности в плоской электромагнитной волне

Найдя комплексную амплитуду вектора напряженности электрического поля в виде (3.25), можно определить комплексную амплитуду вектора напряженности магнитного поля, воспользовавшись уравнением 2 из системы (3.15):

$$\dot{\mathbf{H}}=\frac{j}{\omega\mu_a}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}. \tag{3.26}$$

Рассмотрим электромагнитную волну, которая распространяется в сторону $z>0$ и характеризуется комплексной амплитудой $\dot{\mathbf{E}}=\dot{E}_x\exp(-\gamma z)\mathbf{i}_x$. Представив дифференциальную векторную операцию rot в развернутой форме, имеем

$$\dot{\mathbf{H}}=\frac{j}{\omega\mu_a}\begin{vmatrix}\mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dot{E}_xe^{-\gamma z} & 0 & 0\end{vmatrix}. \tag{3.27}$$

Раскрывая символический определитель по элементам первой строки, убеждаемся, что

$$\dot{\mathbf{H}}=\frac{-j\gamma}{\omega\mu_a}\dot{E}_xe^{-\gamma z}\mathbf{i}_y,$$

или, подставив величину γ из выражения (3.24),

$$\dot{\mathbf{H}}=\sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}_a}{\mu_a}}\,\dot{E}_x e^{-\gamma z}\mathbf{i}_y. \qquad (3.28)$$

Отсюда можно сделать ряд существенных выводов:

- Если вектор **E** ориентирован вдоль оси x, то вектор **H** направлен вдоль оси y, т. е. в однородной плоской волне векторы **E** и **H** перпендикулярны.
- Оба вектора, **E** и **H**, перпендикулярны оси распространения, поэтому однородная плоская электромагнитная волна является поперечной волной.
- Значения комплексных амплитуд векторов **E** и **H** в любой точке пространства связаны некоторым коэффициентом пропорциональности.

На основании последнего из перечисленных свойств в электродинамике вводят понятие *характеристического (волнового) сопротивления* той физической среды, в которой распространяются однородные плоские волны. По определению, характеристическое сопротивление Z_c равно отношению комплексных амплитуд соответствующих проекций векторов напряженности электрического и магнитного поля. В данном случае

$$Z_c=\dot{E}_x/\dot{H}_y. \qquad (3.29)$$

Так как вектор **E** имеет размерность В/м, а вектор **H** — размерность А/м, то характеристическое сопротивление выражается в омах. На основании равенства (3.28) получаем формулу, выражающую характеристическое сопротивление через параметры среды:

$$Z_c=\sqrt{\mu_a/\tilde{\varepsilon}_a}\,. \qquad (3.30)$$

Пользуясь понятием характеристического сопротивления, можно существенно упростить практические расчеты. Например, с помощью формулы (3.29) по известным величинам $\dot{E}_x$ и Z_c удается сразу вычислить комплексную амплитуду $\dot{H}_y$, не решая заново уравнений Максвелла.

Подчеркнем, что сопротивление Z_c есть коэффициент пропорциональности, не связанный в общем случае с тепловыми потерями энергии в среде.

Плотность потока мощности плоской электромагнитной волны равна среднему за период значению вектора Пойнтинга

$$_{\text{ср}}\boldsymbol{\Pi}=\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\,[\dot{\mathbf{E}}\overset{*}{\dot{\mathbf{H}}}]=\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\,(\dot{E}_x\overset{*}{\dot{H}}_y)\,[\mathbf{i}_x\mathbf{i}_y]=\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\,(\dot{E}_x\overset{*}{\dot{H}}_y)\,\mathbf{i}_z. \qquad (3.31)$$

Этот вектор, как видно из последней формулы, ориентирован вдоль оси распространения волны.

Плотность потока мощности в однородной плоской волне можно выразить не через обе полевые величины $\dot{E}_x$ и $\dot{H}_y$, а только через одну из них. Для этого следует воспользоваться соотношением (3.29), что приводит к выражению

$$\Pi_{cpz}=\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\dot{E}_x\dot{E}_x^*/Z_c\right)=\frac{E_{xm}^2}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{Z_c}\right) \tag{3.32}$$

или

$$\Pi_{cpz}=\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left(Z_c\dot{H}_y\dot{H}_y^*\right)=\frac{H_{ym}^2}{2}\mathrm{Re}Z_c. \tag{3.33}$$

В прикладных расчетах эти выражения часто оказываются более удобными, нежели общая формула (3.31).

Изучаемые нами электромагнитные процессы происходят в безграничном изотропном физическом пространстве, свойства которого одинаковы для волн, распространяющихся в любых направлениях. Введя в этом пространстве правовинтовую декартову систему координат (в этой системе кратчайшее вращение вектора $\mathbf{i}_y$ до совпадения с вектором $\mathbf{i}_z$ представляется в направлении против движения стрелки часов, если смотреть с конца вектора $\mathbf{i}_x$), мы наделили пространство определенной геометрической структурой и можем различать волны, движущиеся в противоположных направлениях вдоль оси z. Так, повторяя приведенные ранее выкладки, убеждаемся, что для электромагнитной волны, распространяющейся в сторону $z<0$ и имеющей комплексную амплитуду вектора напряженности электрического поля $\dot{\mathbf{E}}=\dot{E}_x\exp(\gamma z)\mathbf{i}_x$, комплексная амплитуда y-й проекции вектора напряженности магнитного поля

$$\dot{H}_y=-\sqrt{\tilde{\varepsilon}_a/\mu_a}\,\dot{E}_x\exp(\gamma z), \tag{3.34}$$

откуда [ср. с формулой (3.29)]

$$\dot{E}_x/\dot{H}_y=-Z_c. \tag{3.35}$$

Отрицательный знак в этом выражении связан с тем, что данная волна переносит энергию в сторону уменьшения координаты z. Соответственно отрицательными оказываются и правые части формул (3.32) и (3.33).

3.6. Некоторые частные случаи

Далее в качестве примеров будут исследованы характеристики однородных плоских электромагнитных волн, распространяющихся в некоторых важных для практики физических средах.

Вакуум. Данная идеальная среда имеет параметры $\varepsilon_a=\varepsilon_0$, $\mu_a=\mu_0$, $\sigma=0$. Коэффициент распространения плоских волн в вакууме

$$\gamma=j\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \tag{3.36}$$

оказывается мнимым, что свидетельствует об отсутствии затухания волн ($\alpha=0$).

Коэффициент фазы плоской волны в вакууме

$$\beta=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}, \tag{3.37}$$

откуда на основании формулы (3.4) фазовая скорость

$$v_\Phi=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}=3\cdot10^8 \text{ м/с}=c. \tag{3.38}$$

Таким образом подтвержден один из основных результатов теории Максвелла — фазовая скорость однородной плоской волны в вакууме равна скорости света *независимо от частоты.* В физике среды с такими свойствами называют *средами без частотной дисперсии фазовой скорости.*

Характеристическое сопротивление вакуума принято обозначать символом Z_0; при этом

$$Z_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}=120\pi\approx377 \text{ Ом}. \tag{3.39}$$

На основании выражения (3.32) среднее значение z-й проекции вектора Пойнтинга плоской волны в вакууме

$$\Pi_{\text{ср}\,z}=E_{xm}^2/(240\pi). \tag{3.40}$$

Пример 3.3. Среднее значение плотности потока мощности плоской электромагнитной волны в вакууме составляет 5 Вт/м^2. Определить амплитудное значение x-й проекции вектора напряженности электрического поля и y-й проекции вектора напряженности магнитного поля.

По формуле (3.40),

$$E_{xm}=\sqrt{240\pi\Pi_{\text{ср}\,z}}=61.4 \text{ В/м}.$$

Воспользовавшись понятием характеристического сопротивления вакуума, получаем

$$H_{ym}=E_{xm}/Z_0=0.16 \text{ А/м}.$$

Величина Z_0 действительная, а это означает, что гармонические поля **E** и **H** колеблются *в фазе.* Этот факт принято иллю-

стрировать, изображая пространственные распределения векторов электромагнитного поля в фиксированный момент времени (рис. 3.6).

Отметим, что атмосферный воздух при нормальных условиях настолько схож по своим электродинамическим свойствам с вакуумом, что в подавляющем большинстве случаев для расчетов электромагнитных полей в воздухе можно использовать формулы (3.38)—(3.40).

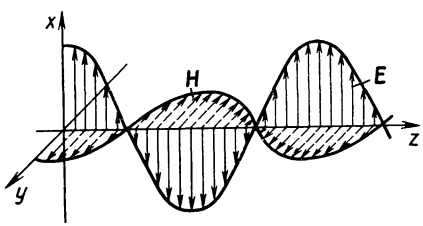


Рис. 3.6. Эскиз векторов плоской электромагнитной волны, распространяющейся в вакууме

Магнитодиэлектрическая среда без потерь. В подобной среде относительная диэлектрическая проницаемость ε, либо относительная магнитная проницаемость μ, либо обе перечисленные величины удовлетворяют неравенствам $\varepsilon>1$, $\mu>1$. Удельная проводимость σ, обусловливающая тепловые потери, равна нулю. Фазовая скорость однородных плоских волн в такой среде

$$v_\Phi=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{3.41}$$

в $\sqrt{\varepsilon\mu}$ раз меньше скорости распространения электромагнитных волн в вакууме.

Пример 3.4. Найти длину волны λ в среде без потерь, имеющей параметры $\varepsilon=5$, $\mu=7$ на частоте $f=200$ МГц.

Фазовая скорость $v_\Phi=3\cdot10^8/\sqrt{5\cdot7}=5.07\cdot10^7$ м/с. Отсюда длина волны $\lambda=v_\Phi/f=0.2535$ м.

Характеристическое сопротивление магнитодиэлектрической среды

$$Z_c=\sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}=120\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{3.42}$$

увеличивается с ростом магнитной и уменьшается с ростом диэлектрической проницаемости.

Диэлектрик с малыми потерями. В радиотехнических устройствах часто используют немагнитные ($\mu=1$) диэлектрики, угол потерь у которых весьма мал ($\operatorname{tg}\delta\approx10^{-3}\div10^{-5}$). Выведем при-

ближенные формулы для расчета основных характеристик плоских электромагнитных волн в таких материалах, основываясь на том, что абсолютная комплексная диэлектрическая проницаемость $\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_a(1 - j\operatorname{tg}\delta)$.

По общей формуле (3.24), коэффициент распространения

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\tilde{\varepsilon}_a\mu_0} = j\omega\sqrt{\varepsilon}\,\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\sqrt{1 - j\operatorname{tg}\delta}. \qquad (3.43)$$

Поскольку $\operatorname{tg}\delta \ll 1$, радикал можно разложить в ряд Тейлора и с точностью до величин порядка $(\operatorname{tg}\delta)^2$ получить

$$\sqrt{1 - j\operatorname{tg}\delta} \approx 1 - j\operatorname{tg}\delta/2 \approx 1 - j\delta/2.$$

Подставив этот результат в формулу (3.43), приходим к следующим приближенным выражениям для коэффициента фазы и коэффициента затухания:

$$\beta \approx \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\sqrt{\varepsilon} = \omega\sqrt{\varepsilon}/c, \qquad (3.44)$$

$$\alpha \approx \omega\sqrt{\varepsilon}\,\delta/(2c) = \beta\delta/2.$$

Пример 3.5. Найти коэффициент фазы β, длину волны λ и погонное затухание $\Delta_{\text{пог}}$ однородной плоской электромагнитной волны с частотой $f = 40$ ГГц, которая распространяется в полистироле. Этот широко применяемый диэлектрик имеет следующие параметры: $\varepsilon = 2.56$, $\operatorname{tg}\delta = 3 \cdot 10^{-4}$.

На основании формулы (3.44) коэффициент фазы

$$\beta = 6.28 \cdot 4 \cdot 10^{10}\sqrt{2.56}/(3 \cdot 10^8) = 1340 \text{ м}^{-1}.$$

Длина волны в полистироле

$$\lambda = 2\pi/\beta = 6.28/1340 = 4.69 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 4.69 \text{ мм}.$$

Коэффициент затухания

$$\alpha = 1340 \cdot 3 \cdot 10^{-4}/2 = 0.201 \text{ м}^{-1},$$

откуда погонное затухание

$$\Delta_{\text{пог}} = 8.686\alpha = 1.75 \text{ дБ/м}.$$

Итак, в диэлектрике с малыми потерями коэффициент фазы оказывается таким же, как и в диэлектрике без потерь. Согласно формулам (3.44), коэффициент затухания прямо пропорционален частоте волны, а также углу диэлектрических потерь.

Нетрудно получить формулу для расчета характеристического сопротивления немагнитного диэлектрика с малыми потерями:

$$Z_c=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0(1-j\operatorname{tg}\delta)}}=\frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}\sqrt{1-j\operatorname{tg}\delta}}\approx\frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}}\left(1+j\frac{\delta}{2}\right). \tag{3.45}$$

При выводе данного соотношения было использовано то, что при любых x, в общем случае комплексных, таких, что $|x|\ll 1$, справедливо приближенное равенство $1/(1-x)\approx 1+x$.

Комплексный характер сопротивления Z_c означает, что в среде с потерями поля **E** и **H** колеблются *не синфазно*. Однако, согласно формуле (3.45), угол сдвига фаз приблизительно равен $\delta/2$ радиан, т. е. настолько мал, что им на практике обычно пренебрегают.

3.7. Плоские электромагнитные волны с эллиптической поляризацией

Все рассмотренные до сих пор электромагнитные волны обладали тем свойством, что в них вектор **E** имел единственную проекцию, например E_x, и совершал колебания в определенной плоскости, которая, как уже говорилось, называется *плоскостью поляризации* электромагнитной волны. Про однородную плоскую волну с фиксированной плоскостью поляризации говорят, что она имеет *линейную поляризацию*.

В общем случае плоскость поляризации может занимать произвольное положение. Чтобы убедиться в этом, допустим, что некоторый волновой процесс является суммой двух гармонических плоских волн одинаковой частоты, причем одна волна поляризована в плоскости XOZ, а другая — в плоскости YOZ. Пусть колебания обеих волн происходят синфазно. При этом результирующая волна в фиксированной точке пространства будет иметь следующие проекции вектора напряженности электрического поля:

$$E_x=E_{m1}\cos\omega t;\qquad E_y=E_{m2}\cos\omega t. \tag{3.46}$$

Легко видеть, что суммарный вектор **E** будет перемещаться вдоль диагонали прямоугольника со сторонами $2E_{m1}$ и $2E_{m2}$ (рис. 3.7). Плоскость поляризации результирующей волны образует с осью x угол φ, такой, что $\operatorname{tg}\varphi=E_{m2}/E_{m1}$.

Совсем иной характер волновой процесс приобретает в том случае, если две составляющие вектора **E**, описываемые формулой вида (3.46), будут не только ортогональны в пространстве, но и сдвинуты по фазе во времени. Конкретно рассмотрим случай, когда

$$E_x = E_{m1}\cos\omega t; \qquad E_y = E_{m2}\sin\omega t. \tag{3.47}$$

Найдем уравнение кривой, которая служит геометрическим местом концов вектора **E** суммарного процесса. Для этого перепишем формулу (3.47) в виде

$$E_x/E_{m1} = \cos\omega t; \qquad E_y/E_{m2} = \sin\omega t,$$

затем возведем оба равенства в квадрат и сложим:

$$(E_x/E_{m1})^2 + (E_y/E_{m2})^2 = 1. \tag{3.48}$$

Получено уравнение эллипса, располагающегося в плоскости XOY и вписанного в прямоугольник со сторонами $2E_{m1}$ и $2E_{m2}$

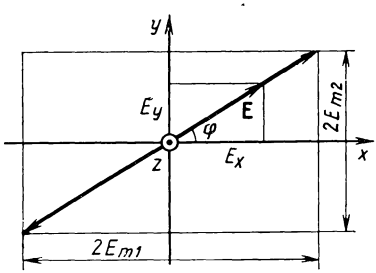


Рис. 3.7. Синфазное сложение двух плоских электромагнитных волн

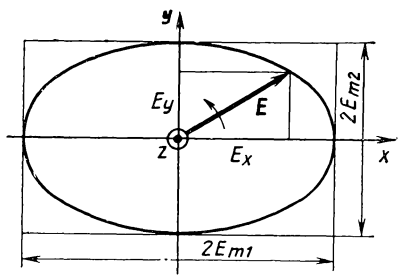


Рис. 3.8. Образование плоской электромагнитной волны с эллиптической поляризацией

(рис. 3.8). Поэтому говорят, что рассмотренная нами электромагнитная волна имеет *эллиптическую поляризацию.* Результирующий вектор **E** будет вращаться с частотой ω, причем, как это легко заметить из формул (3.47), если смотреть с конца единичного вектора продольного направления $\mathbf{i}_z$, то вращение вектора **E** будет представляться в направлении против стрелки часов. По установившейся в физике традиции такую волну называют *левополяризованной.*

Очевидно, что электромагнитный волновой процесс, для которого

$$E_x = E_{m1}\cos\omega t; \qquad E_y = -E_{m2}\sin\omega t, \tag{3.49}$$

является *правополяризованной волной.*

На основании формул (3.47) можно записать выражение комплексной амплитуды вектора напряженности электрического поля эллиптически поляризованной волны с левым направлением вращения, распространяющейся в сторону увеличения координаты z:

$$\dot{\mathbf{E}} = (E_{m1}\mathbf{i}_x - jE_{m2}\mathbf{i}_y)\,e^{-j\beta z}, \tag{3.50}$$

откуда, используя понятие характеристического сопротивления, получаем

$$\dot{\mathbf{H}} = \left(\frac{jE_{m2}}{Z_c}\,\mathbf{i}_x + \frac{E_{m1}}{Z_c}\mathbf{i}_y\right)e^{-j\beta z}. \tag{3.51}$$

На основании двух последних выражений находим

$$\Pi_{ср} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ E_{m1} & -jE_{m2} & 0 \\ \dfrac{-jE_{m2}}{Z_c} & \dfrac{E_{m1}}{Z_c} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{E_{m1}^2}{2Z_c} + \frac{E_{m2}^2}{2Z_c}\right)\mathbf{i}_z, \tag{3.52}$$

т. е. среднее значение вектора Пойнтинга эллиптически поляризованной волны равно сумме средних плотностей мощности двух ортогональных компонентов с линейной поляризацией.

Важный частный случай — волна *с круговой поляризацией*, характерная тем, что в ней $E_{m1}=E_{m2}=E_m$. При этом поляризационный эллипс, описываемый формулой (3.48), превращается в окружность радиусом E_m.

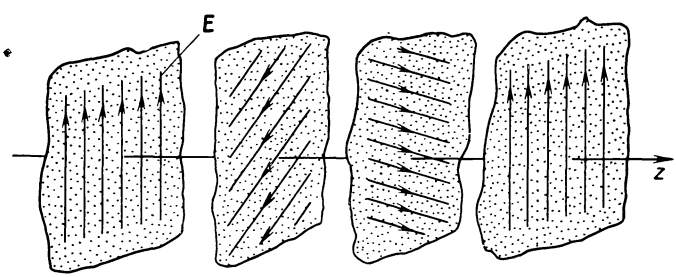


Рис. 3.9. Ориентация электрического вектора в плоской волне с круговой поляризацией

Наглядно представить волны с эллиптической поляризацией довольно трудно. Некоторую пользу здесь может принести чертеж, изображенный на рис. 3.9, на котором волна с круговой поляризацией условно показана в виде последовательности волновых фронтов. По мере распространения волны направление векторов **E**, одинаковое на каждом фронте, изменяется. Векторы совершают полный оборот на участке пути длиной λ.

Волны с эллиптической или круговой поляризацией были получены нами путем сложения линейно поляризованных волн.

В свою очередь, линейно поляризованную волну можно рассматривать как сумму волн с эллиптической поляризацией. В качестве примера на рис. 3.10 изображено сложение двух волн с амплитудами $E_m/2$ каждая, поляризованных по кругу с противоположными направлениями вращения. Из построения видно, что результирующая волна оказывается линейно поляризованной. Плоскость поляризации ориентирована вертикально; амплитуда, равная E_m, в два раза превышает амплитуду слагаемых, поляризованных по кругу.

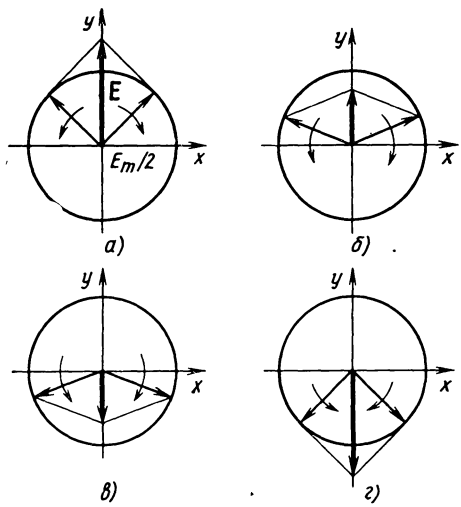


Рис. 3.10. Сложение двух волн с круговой поляризацией:
а — г — отдельные этапы процесса, развивающегося во времени

Поляризационные свойства плоских электромагнитных волн имеют большое значение для практической радиотехники. Так, если в поле волны с линейной поляризацией разместить штыревую антенну, ориентированную перпендикулярно плоскости поляризации, то на заряды в проводниках антенны не действуют никакие силы со стороны электромагнитного поля. Как следствие, сигнал на выходе такой приемной антенны отсутствует. За счет этого появляется возможность создать два независимых радиоканала, совмещенных в пространстве, однако развязанных друг от друга благодаря поляризационным свойствам поля.

С другой стороны, такая же штыревая антенна, размещенная в поле волны с круговой поляризацией перпендикулярно оси распространения, будет создавать выходной сигнал неизменной амплитуды независимо от ориентации в поперечной плоскости. Это обстоятельство делает волны с круговой поляризацией предпочтительными для организации радиосвязи с подвижными объектами, которые могут занимать в пространстве любые, заранее не предсказуемые положения.

3.8. Плоские волны, распространяющиеся в произвольном направлении

В заключение рассмотрим достаточно общий случай, когда плоская электромагнитная волна распространяется вдоль некото-

рой произвольной оси z', не совпадающей с осью z (рис. 3.11). Относительно новой оси распространения можно записать следующее соотношение пропорциональности:

$$\dot{\mathbf{E}} \sim \exp(-j\beta z'). \tag{3.53}$$

Волновые фронты в данном случае имеют вид бесконечных плоскостей, удовлетворяющих уравнению вида $z' = \text{const}$. Требуется выразить величину z' через исходные координаты x, y, z. Для этого заметим, что z' является проекцией на ось распространения любого радиуса-вектора $\mathbf{r}$, который проведен из начала координат, а его конец расположен на волновом фронте. Математически это записывается так:

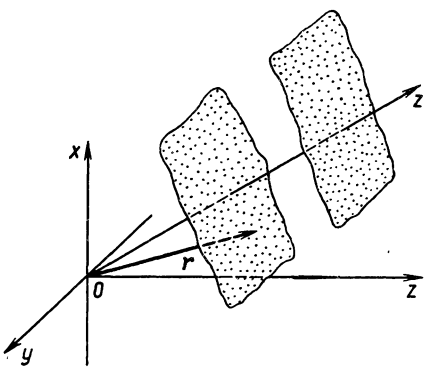


Рис. 3.11. Распространение плоской волны в произвольном направлении

$$z' = \mathbf{r}\mathbf{i}_{z'}. \tag{3.54}$$

Используя координаты x, y, z, имеем

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z,$$

$$\mathbf{i}_{z'} = \xi\mathbf{i}_x + \eta\mathbf{i}_y + \zeta\mathbf{i}_z, \tag{3.55}$$

где $\xi = \cos\widehat{(z', x)}$; $\eta = \cos\widehat{(z', y)}$; $\zeta = \cos\widehat{(z', z)}$ — направляющие косинусы единичного вектора $\mathbf{i}_{z'}$. Отсюда, используя формулу (3.54), представим зависимость (3.53) следующим образом:

$$\dot{\mathbf{E}} \sim \exp[-j\beta(x\xi + y\eta + z\zeta)]. \tag{3.56}$$

Легко проверить, что все использованные ранее выражения комплексных амплитуд векторов поля, соответствующих однородным плоским волнам в материальных средах без потерь, являются частными случаями формулы (3.56).

В теоретических исследованиях часто используют лаконичную векторную запись соотношения вида (3.56). Для этого вводят так называемый *волновой вектор* $\mathbf{k}$, определяя его следующим образом:

$$\mathbf{k} = \beta(\xi\mathbf{i}_x + \eta\mathbf{i}_y + \zeta\mathbf{i}_z). \tag{3.57}$$

Так как, по определению, $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$, то модуль волнового вектора равен коэффициенту фазы плоской волны: $|\mathbf{k}| = \beta = 2\pi/\lambda$. Непосредственно видно, что вектор $\mathbf{k}$ ориентирован вдоль оси

распространения z'. Формула (3.56) приобретает, таким образом, следующий вид:

$$\dot{E} \sim \exp(-j\mathbf{kr}). \qquad (3.58)$$

В физике модуль волнового вектора однородной плоской волны называют также *волновым числом.*

ЗАДАЧИ

3.1. Докажите принципиальную невозможность существования чисто продольных электромагнитных волн, которые имели бы лишь ненулевые проекции E_z и H_z, не зависящие от поперечных координат x и y. Указание: непосредственно воспользуйтесь двумя первыми уравнениями Максвелла, записанными в декартовой системе координат.

3.2. Плоская гармоническая волна с частотой $f=80$ МГц, распространяясь в некоторой материальной среде без потерь, имеет длину волны $\lambda=0.7$ м. Вычислите фазовую скорость этой волны.

3.3. Плоская волна, распространяющаяся в сторону увеличения координаты z, имеет комплексную амплитуду $V_+(z)=200\exp(-\gamma z)$, где $\gamma=0.3+j0.5$ м$^{-1}$. Частота волнового процесса $\omega=8\cdot10^4$ с$^{-1}$. Вычислите мгновенное значение функции $v(z, t)$ в плоскости $z=5$ м при $t=10^{-4}$ с.

3.4. Погонное затухание однородной плоской волны составляет 0.45 дБ/м. Определите, на каком расстоянии амплитуда волны уменьшится в 10^6 раз по сравнению с исходным уровнем.

3.5. Электрический пробой атмосферного воздуха при нормальных условиях наблюдается в том случае, когда напряженность электрического поля достигает значения $3\cdot10^6$ В/м. Определите предельно допустимое среднее значение модуля вектора Пойнтинга плоской электромагнитной волны, распространяющейся в воздухе.

3.6. Однородная плоская электромагнитная волна, гармонически изменяющаяся во времени, распространяется в среде без потерь с параметрами $\mu=1$, $\varepsilon=4.5$. Амплитуда вектора напряженности электрического поля $E_m=30$ В/м. Вычислите амплитуду вектора напряженности магнитного поля и модуль среднего значения вектора Пойнтинга.

3.7. Плоская гармоническая электромагнитная волна распространяется в вакууме, имея модуль среднего значения вектора Пойнтинга $\Pi_{ср}=0.8$ Вт/м^2. Вычислите амплитудные значения вектора электрического смещения D_m и магнитной индукции B_m данной волны.

3.8. Найдите характеристическое сопротивление Z_c материальной среды с параметрами $\varepsilon=4$, $\mu=7$, $\operatorname{tg}\delta=3\cdot10^{-3}$.

3.9. Плоская волна, распространяющаяся в среде с потерями, имеет коэффициент ослабления $\alpha=0.015$ м$^{-1}$. Волна распространяется в сторону $z>0$. При $z=0$ модуль среднего значения вектора Пойнтинга $\Pi_{ср}(0)=60$ Вт/м^2. Вычислите значение $\Pi_{ср}$ в плоскости с координатой $z=100$ м.

3.10. Найдите коэффициент фазы β и коэффициент ослабления α плоской электромагнитной волны в материальной среде с параметрами $\varepsilon=2$, $\mu=3$, $\sigma=2\cdot10^{-5}$ См/м при частоте $\omega=10^6$ с$^{-1}$.

3.11. Найдите коэффициент ослабления α плоских электромагнитных волн в диэлектрике с параметрами $\varepsilon=2.1$, $\mu=1$, $\operatorname{tg}\delta=4\cdot10^{-4}$ на частоте $f=3$ ГГц.

3.12. Плоская электромагнитная волна с правой эллиптической поляризацией распространяется в вакууме в сторону уменьшения координаты z. Волна имеет комплексную амплитуду вектора напряженности электрического поля (В/м) $\dot{\mathbf{E}}=(130\mathbf{i}_x+j40\mathbf{i}_y)\times\exp(j\beta z)$. Найдите комплексную амплитуду вектора $\mathbf{H}$ данной волны.

3.13. Пусть волновой вектор $\mathbf{k}$ некоторой плоской волны образует одинаковый угол θ с положительными направлениями осей x, y, z декартовой системы координат. Каков этот угол?

3.14. Волновой вектор $\mathbf{k}$ плоской волны в декартовой системе координат образует угол 45° с единичным вектором $\mathbf{i}_z$. Угол φ между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{i}_x$ равен углу между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{i}_y$. Найдите значение угла φ.

3.15. Плоская электромагнитная волна с частотой $f=800$ МГц распространяется в вакууме. Волновой вектор $\mathbf{k}$ образует угол 30° с вектором $\mathbf{i}_x$ и угол 80° с вектором $\mathbf{i}_y$. Вычислите вектор $\mathbf{k}$ данного волнового процесса.

Глава четвертая

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВЕКТОРОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Однородные плоские волны, изучавшиеся в гл. 3, являются весьма идеализированными объектами, поскольку имеют неограниченно протяженные волновые фронты. В любой реальной ситуации электромагнитное поле тем или иным способом ограничено в пространстве. Естественными ограничителями областей существования поля служат границы раздела между материальными средами с различными параметрами. Если характеристики сред на границе раздела изменяются скачкообразно, то в общем

случае составляющие векторов поля в точках границы претерпевают разрывы. В данной главе будет найдена связь между векторами электромагнитного поля на границе раздела, удовлетворяющая уравнениям Максвелла.

4.1. Постановка задачи

Задача о граничных условиях для векторов электромагнитного поля выглядит следующим образом. Пусть имеется некоторая граница раздела S (рис. 4.1) между средой *1* с электродинамическими параметрами ε_{a1}, μ_{a1}, σ_1 и средой *2*, у которой соответствующие параметры равны ε_{a2}, μ_{a2}, σ_2. Выделим на поверхности S

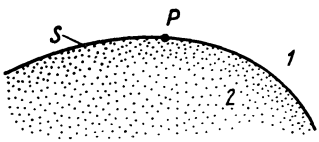


Рис. 4.1. Точка на границе раздела двух материальных сред

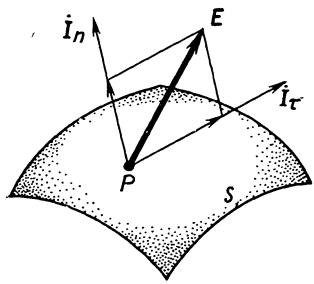


Рис. 4.2. Разложение одного из векторов поля на нормальную и касательную составляющие

произвольную точку P, предполагая, что в некоторой физически малой окрестности этой точки, относящейся к области *1*, электромагнитное поле задано. Требуется отыскать поле в такой же окрестности выделенной точки, которая принадлежит области *2*.

Для решения поставленной задачи векторы электромагнитного поля в окрестности точки P принято разлагать на касательные (тангенциальные) и нормальные составляющие. Например, вектор $\mathbf{E}$ на границе раздела (рис. 4.2) можно представить в виде

$$\mathbf{E}=E_\tau \mathbf{i}_\tau+E_n \mathbf{i}_n. \qquad (4.1)$$

Здесь $\mathbf{i}_\tau$, $\mathbf{i}_n$ — единичные векторы (орты) касательного и нормального направлений. Эти векторы лежат в плоскости, образованной вектором $\mathbf{E}$ и нормалью к границе раздела, проведенной в точке P.

Далее свойства касательных и нормальных составляющих векторов поля на границе раздела будут рассмотрены по отдельности.

4.2. Граничные условия для нормальных составляющих векторов магнитного поля

Обозначим через $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ векторные поля магнитной индукции в средах *1* и *2* соответственно. Выделим в окрестности точки P цилиндрический объем (рис. 4.3) с основаниями площадью ΔS и с высотой образующей Δh. Пусть этот объем настолько мал, что поля $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ можно считать неизменными в пределах оснований цилиндра.

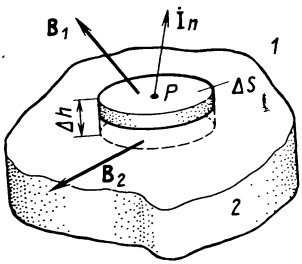


Рис. 4.3. К выводу граничных условий для нормальных составляющих векторов электромагнитного поля

Обратим внимание на то, что единичный вектор нормали к границе раздела параллелен вектору элементарной площадки на верхнем основании цилиндра и антипараллелен такому же вектору на нижнем основании. Тогда поток вектора магнитной индукции через полную поверхность цилиндра запишется следующим образом:

$$\oint_{S_\Sigma} \mathbf{B}\,d\mathbf{S} \approx \mathbf{B}_1\mathbf{i}_n\Delta S - \mathbf{B}_2\mathbf{i}_n\Delta S + \qquad (4.2)$$

$+$ *поток через боковую поверхность.*

Это приближенное равенство в пределе становится точным, если ΔS стремится к нулю. Если же одновременно устремить к нулю высоту воображаемого цилиндра Δh, то поток вектора магнитной индукции через боковую поверхность окажется бесконечно малым. Следовательно,

$$\lim_{\Delta h \to 0} \oint_{S_\Sigma} \mathbf{B}\,d\mathbf{S} = \mathbf{B}_1\mathbf{i}_n\Delta S - \mathbf{B}_2\mathbf{i}_n\Delta S\,. \qquad (4.3)$$

Так как имеет место закон неразрывности магнитных силовых линий, то левая часть равенства (4.3) всегда обращается в нуль. Отсюда следует, что

$$\mathbf{B}_1\mathbf{i}_n - \mathbf{B}_2\mathbf{i}_n = 0, \qquad (4.4)$$

или, что то же самое,

$$B_{1n} = B_{2n}. \qquad (4.5)$$

Полученный результат формулируется следующим образом: нормальные составляющие вектора магнитной индукции на границе раздела двух сред *непрерывны*. Используя материальное уравнение $\mathbf{B} = \mu_a\mathbf{H}$, соотношение (4.5) можно записать относи-

тельно нормальных составляющих векторов напряженности магнитного поля:

$$\mu_{a1}H_{1n}=\mu_{a2}H_{2n}. \tag{4.6}$$

Итак, если магнитные проницаемости граничащих сред не одинаковы, то нормальные составляющие векторов **H** на границе раздела претерпевают некоторый скачок.

4.3. Граничные условия для нормальных составляющих векторов электрического поля

Методика вывода данных граничных условий и соответствующий рисунок полностью аналогичны тем, которые использовались в § 4.2. Однако если для магнитного поля всегда выполнялось равенство $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$, то в случае электрического поля справедливо уравнение $\operatorname{div}\mathbf{D}=\rho$. Поэтому возможны два случая.

1) Поверхностный электрический заряд на границе раздела отсутствует.

Суммарный заряд внутри малой цилиндрической области (рис. 4.3) при этом равен нулю. В соответствии с теоремой Гаусса

$$\oint_{S_\Sigma}\mathbf{D}d\mathbf{S}=0, \tag{4.7}$$

откуда следует, что

$$D_{1n}=D_{2n} \tag{4.8}$$

и соответственно

$$\varepsilon_{a1}E_{1n}=\varepsilon_{a2}E_{2n}. \tag{4.9}$$

Таким образом, при отсутствии поверхностных электрических зарядов нормальные составляющие векторов электрического смещения на границе раздела двух сред *непрерывны* вне зависимости от параметров этих сред. В то же время нормальные составляющие векторов напряженности электрического поля на границе раздела *претерпевают скачок,* величина которого зависит от отношения диэлектрических проницаемостей.

2) На границе раздела сред равномерно распределен электрический поверхностный заряд с удельной плотностью $\sigma_{пов}$.

Несомненно, что в этом случае уменьшение высоты воображаемого цилиндра Δh (рис. 4.3) никак не влияет на величину заряда, заключенного внутри этой области. Применив интегральную формулировку закона Гаусса, можно записать формулу, аналогичную соотношению (4.3):

$$\lim_{\Delta h\to 0}\oint_{S_\Sigma}\mathbf{D}\,d\mathbf{S}=\mathbf{D}_1\mathbf{i}_n\Delta S-\mathbf{D}_2\mathbf{i}_n\Delta S=\sigma_{пов}\Delta S, \tag{4.10}$$

откуда

$$D_{1n}-D_{2n}=\sigma_{\text{пов}}. \qquad (4.11)$$

Из выражения (4.11) следует, что при наличии на границе электрических зарядов нормальная составляющая вектора электрического смещения испытывает скачок на величину плотности поверхностного электрического заряда. Физически это обусловлено тем, что заряд, располагающийся на поверхности, создает собственное электрическое поле, ориентированное в пространстве таким образом, что по одну сторону границы это поле складывается с внешним полем, а по другую — вычитается.

4.4. Граничные условия для касательных составляющих векторов магнитного поля

Задача о взаимосвязи касательных составляющих вектора магнитной индукции на границе раздела двух сред решается на основе интегральной формулировки закона полного тока для некоторого малого контура L (рис. 4.4), проведенного в окрестности точки P таким образом, что одна его половина проходит в среде *1*, а другая — в среде *2*.

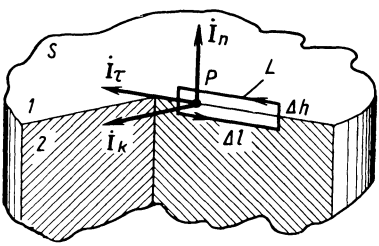


Рис. 4.4. К выводу граничных условий для касательных составляющих векторов электромагнитного поля

Введем в точке P три взаимно ортогональных единичных вектора: $\mathbf{i}_\tau$, $\mathbf{i}_n$, $\mathbf{i}_k$. Два первых по-прежнему являются ортами касательного и нормального направлений. Вектор $\mathbf{i}_k$ направлен по нормали к плоскости, образованной векторами $\mathbf{i}_\tau$ и $\mathbf{i}_n$, будучи параллелен границе раздела.

Выделим в окрестности точки P малый прямоугольный контур L со сторонами Δl и Δh. Будем считать, что на контуре задано такое направление обхода, что с конца единичного вектора $\mathbf{i}_k$ движение наблюдается против хода стрелки часов.

Вообще говоря, в обеих областях пространства, разделяемых границей S, протекают некоторые токи, в частности токи проводимости и токи смещения с объемными плотностями $\mathbf{J}_{\text{пр}}$ и $\mathbf{J}_{\text{см}}$ соответственно. Применим к рассматриваемому контуру закон полного тока, причем, как и в § 4.2, будем считать, что длины сторон контура столь малы, что в его пределах векторы поля $\mathbf{H}$ неизменны. В результате получим

$$\oint_L \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = \mathbf{H}_1\mathbf{i}_\tau \Delta l - \mathbf{H}_2\mathbf{i}_\tau \Delta l +$$

$$+ \textit{интегралы по боковым сторонам} =$$

$$= (\mathbf{J}_{\text{пр}}\mathbf{i}_k + \mathbf{J}_{\text{см}}\mathbf{i}_k)\,\Delta l \Delta h. \qquad (4.12)$$

Здесь следует по отдельности рассмотреть два случая.

1) Числовые значения электродинамических параметров обеих граничащих сред конечны. Из данного условия непосредственно следует вывод о конечности значений векторов плотности токов проводимости и смещения. Выполним предельный переход, устремляя высоту контура Δh к нулю. Очевидно, что при этом линейный интеграл от поля $\mathbf{H}$ по боковым сторонам контура будет стремиться к нулю. Из-за конечности векторов плотности токов проводимости и смещения будем иметь

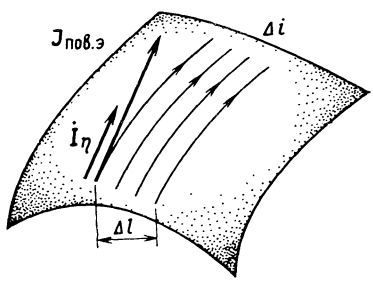


Рис. 4.5. К введению понятия плотности поверхностного электрического тока

$$\lim_{\Delta h \to 0} (\mathbf{J}_{\text{пр}}\mathbf{i}_k + \mathbf{J}_{\text{см}}\mathbf{i}_k)\,\Delta l \Delta h = 0. \qquad (4.13)$$

Обращение в нуль правой части равенства (4.12) означает, что

$$\lim_{\Delta h \to 0} \oint_L \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = \mathbf{H}_1\mathbf{i}_\tau \Delta l - \mathbf{H}_2\mathbf{i}_\tau \Delta l, \qquad (4.14)$$

или

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}. \qquad (4.15)$$

Таким образом, на границе раздела двух сред с конечными значениями электродинамических параметров касательные составляющие векторов напряженности магнитного поля непрерывны. Однако касательные составляющие векторов магнитной индукции на границе раздела в общем случае претерпевают разрыв:

$$B_{1\tau}/\mu_{a1} = B_{2\tau}/\mu_{a2}. \qquad (4.16)$$

2) Проводимость одной из граничащих сред неограниченно велика. Положим для определенности, что $\sigma_2 = \infty$. Это предположение делает формулу (4.13) неприменимой. Дело в том, что при бесконечно большой проводимости среды электромагнитное поле в ней должно отсутствовать; наличие сколь угодно малого поля $\mathbf{E}$ приводило бы к протеканию тока проводимости с бесконечно большой плотностью [см. формулу (1.7)], а это физически невоз-

можно. В данном случае токи проводимости могут протекать лишь по поверхностной «пленке» исчезающе малой толщины, так что предельный переход вида (4.13) все же дает отличный от нуля результат.

Для математического описания явлений на поверхности идеального проводника вводят понятие вектора плотности поверхностного электрического тока. Принцип введения этого векторного поля показан на рис. 4.5. Прежде всего проводят единичный вектор $\mathbf{i}_\eta$, касательный к линиям тока в выбранной точке поверхности. Затем находят ток Δi, протекающий поперек отрезка Δl, перпендикулярного вектору $\mathbf{i}_\eta$. Тогда вектор плотности поверхностного электрического тока можно определить посредством равенства

$$\mathbf{J}_{\text{пов.э}} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta i}{\Delta l} \mathbf{i}_\eta. \tag{4.17}$$

Теперь формулу (4.12) можно записать в виде

$$\lim_{\Delta h \to 0} \oint_L \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \mathbf{J}_{\text{пов.э}} \mathbf{i}_k \Delta l. \tag{4.18}$$

Далее следует учесть, что в силу уравнений Максвелла внутри идеального проводника обращается в нуль не только электрическое, но и магнитное поле. Иными словами, $\mathbf{H}_2 = 0$ и из формулы (4.18) следует, что

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{i}_\tau = \mathbf{J}_{\text{пов.э}} \mathbf{i}_k. \tag{4.19}$$

Равенство (4.19) позволяет решить важную для практики задачу — определить плотность поверхностного тока $\mathbf{J}_{\text{пов.э}}$ по заданной напряженности магнитного поля $\mathbf{H}_1$ на границе раздела между обычной средой, например воздухом, и идеальным проводником. Для удобства несколько преобразуем формулу (4.19), учтя, что тройка единичных векторов $\mathbf{i}_\tau$, $\mathbf{i}_n$, $\mathbf{i}_k$ связана очевидным соотношением

$$\mathbf{i}_\tau = -[\mathbf{i}_n \mathbf{i}_k]. \tag{4.20}$$

Подставив это равенство в (4.19), получим

$$\mathbf{J}_{\text{пов.э}} = [\mathbf{i}_n \mathbf{H}_1]. \tag{4.21}$$

Таким образом, поверхностный электрический ток на границе идеального проводника протекает в направлении, перпендикулярном вектору $\mathbf{H}_1$, который существует в обычной среде. Плотность поверхностного электрического тока численно равна касательной проекции вектора напряженности магнитного поля.

4.5. Граничные условия для касательных составляющих векторов электрического поля

Методика решения данной задачи полностью совпадает с той, которая применялась в § 4.4. Отличие состоит лишь в том, что здесь вместо закона полного тока следует воспользоваться законом электромагнитной индукции. Соответственно для контура L, изображенного на рис. 4.4, будем иметь

$$\oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = \mathbf{E}_1\mathbf{i}_\tau\Delta l - \mathbf{E}_2\mathbf{i}_\tau\Delta l + $$

$$+ \textit{интегралы по боковым сторонам} =$$

$$= -(\partial\mathbf{B}/\partial t)\,\mathbf{i}_k\Delta l\Delta h. \qquad (4.22)$$

Функция $\partial\mathbf{B}/\partial t$ в правой части последней формулы при любых электродинамических параметрах граничащих сред принимает конечные значения. Поэтому предельный переход при $\Delta h \to 0$ дает

$$\lim_{\Delta h\to 0} \oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = \mathbf{E}_1\mathbf{i}_\tau\Delta l - \mathbf{E}_2\mathbf{i}_\tau\Delta l = 0, \qquad (4.23)$$

откуда

$$E_{1\tau} = E_{2\tau},$$

$$D_{1\tau}/\varepsilon_{a1} = D_{2\tau}/\varepsilon_{a2}. \qquad (4.24)$$

Таким образом, касательные составляющие векторов напряженности электрического поля на границе раздела двух сред непрерывны. В то же самое время касательные составляющие векторов электрического смещения в общем случае претерпевают скачок.

Пример 4.1. Имеется плоская граница раздела двух сред с относительными диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 (рис. 4.6). В первой среде силовые линии вектора $\mathbf{E}$ образуют угол θ_1 с направлением нормали. Найти ориентацию силовых линий поля $\mathbf{E}$ во второй среде.

Воспользуемся граничными условиями

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \qquad D_{1n} = D_{2n},$$

или

$$E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2,$$

$$\varepsilon_1 E_1 \cos\theta_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\theta_2.$$

Разделив одно уравнение на другое, получим

$(1/\varepsilon_1)\operatorname{tg}\theta_1=(1/\varepsilon_2)\operatorname{tg}\theta_2$,

откуда

$\theta_2=\operatorname{arc}\operatorname{tg}[(\varepsilon_2/\varepsilon_1)\operatorname{tg}\theta_1]$.

Отметим, что если $\varepsilon_2\to\infty$, то $\theta_2\to\pi/2$ независимо от ориентации электрического поля в первой среде.

Рассмотрим отдельно частный случай, когда средой *2* (см. рис. 4.4) является идеальный проводник. Здесь, как уже указывалось, всегда $\mathbf{E}_2=0$. Поэтому на основании равенства (4.24) граничное условие для касательной составляющей вектора напряженности электрического поля на поверхности идеального проводника принимает вид

$$E_\tau=0. \qquad (4.25)$$

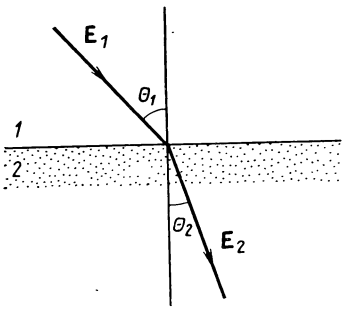


Рис. 4.6. Явление «преломления» силовых линий электрического вектора на границе раздела двух сред

В соответствии с этим условием силовые линии электрического вектора должны подходить к поверхности идеального проводника *по направлению нормали*.

Понятие «идеальный проводник» есть результат абстракции. На поверхности реального проводника (например, металла) некоторая касательная составляющая электрического вектора, безусловно, имеется. Однако она весьма мала по сравнению с нормальной составляющей и, как будет показано в дальнейшем, в ряде практически значимых случаев эту составляющую можно с полным основанием не учитывать.

В заключение отметим, что принцип перестановочной двойственности электромагнитных полей, описанный в § 2.4, позволяет обобщить формулу (4.21) на тот случай, когда вдоль границы раздела протекает воображаемый поверхностный магнитный ток с плотностью $\mathbf{J}_{\text{пов.м}}$ (В/м). Легко видеть, что при этом

$$\mathbf{J}_{\text{пов.м}}=-[\mathbf{i}_n\mathbf{E}_1]=[\mathbf{E}_1\mathbf{i}_n]. \qquad (4.26)$$

Данным соотношением часто пользуются в теории антенн, мысленно заменяя распределение напряженности поля $\mathbf{E}$ вдоль излучающей поверхности эквивалентным распределением поверхностного магнитного тока. Подробнее этот вопрос будет рассмотрен в гл. 17.

ЗАДАЧИ

4.1. В каждой точке плоскости XOY декартовой системы координат задан вектор $\mathbf{E}=7\mathbf{i}_x+4\mathbf{i}_y+3\mathbf{i}_z$. Найдите нормальную E_n и касательную E_τ составляющие этого вектора.

4.2. Применительно к условиям предыдущей задачи получите формулу разложения единичного вектора касательного направления $\mathbf{i}_\tau$ по ортам системы координат x, y, z.

4.3. В пространстве с декартовой системой координат полупространство $z>0$ заполнено воздухом, а полупространство $z<0$ — проводящим веществом с параметром $\sigma=2\cdot10^7$ См/м. В воздушной среде создано постоянное и однородное электрическое поле, вектор напряженности которого $\mathbf{E}_1=10^{-4}\mathbf{i}_x$ В/м. Определите: а) модуль вектора плотности тока проводимости $\mathbf{J}_{\text{пр}2}$ в веществе; б) удельную плотность мощности тепловых потерь.

4.4. Полупространство $z>0$ (среда *1*) заполнено воздухом ($\varepsilon=1$), а полупространство $z<0$ (среда *2*) — диэлектриком с относительной проницаемостью $\varepsilon=5$. Вектор напряженности электрического поля в первой среде $\mathbf{E}_1=20\mathbf{i}_z$ В/м, во второй среде $\mathbf{E}_2=-4\mathbf{i}_z$ В/м. Найдите плотность поверхностного электрического заряда $\sigma_{\text{пов}}$ в плоскости $z=0$.

4.5. Вдоль идеально проводящего цилиндра радиусом 12 мм протекает переменный ток, имеющий амплитуду 2 А. Найдите амплитудное значение вектора плотности поверхностного тока.

4.6. В плоскости раздела $z=0$ между воздухом (среда *1*) и идеальным проводником (среда *2*) существует постоянное магнитное поле с вектором напряженности $\mathbf{H}_1=0.75\mathbf{i}_x-3.25\mathbf{i}_y$ А/м. Найдите вектор плотности поверхностного тока $\mathbf{J}_{\text{пов.э}}$.

4.7. Покажите, что формулу (4.21), определяющую вектор плотности поверхностного электрического тока, можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\mathbf{J}_{\text{пов. э}}=(\mathbf{H}_1\mathbf{i}_\tau)\mathbf{i}_k-(\mathbf{H}_1\mathbf{i}_k)\mathbf{i}_\tau.$$

Указание: примите во внимание, что $\mathbf{i}_n=[\mathbf{i}_\tau\mathbf{i}_k]$, и воспользуйтесь формулой двойного векторного произведения.

Глава пятая

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ С ЧАСТОТНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Как указывалось в гл. 3, частотная дисперсия имеет место в тех случаях, когда фазовая скорость, а вообще говоря, и коэффициент ослабления волны зависят от частоты. В данной главе изу-

чаются некоторые практически важные диспергирующие среды. Показано, что частотная дисперсия фазовой скорости ведет к ряду интересных физических эффектов, наблюдаемых при распространении электромагнитных волн со сложным спектральным составом.

5.1. Волны в хорошо проводящей среде

В соответствии с формулой (3.24) частотная дисперсия при распространении волн наблюдается всякий раз, когда хотя бы один из электродинамических параметров $\tilde{\varepsilon}_a$, μ_a зависит от частоты. Действительно, в этом случае коэффициент распространения γ связан с частотой нелинейным образом и поэтому фазовая скорость $v_\Phi = \omega/\beta$ оказывается частотно-зависимой. По этой причине частотная дисперсия фазовой скорости свойственна любой проводящей среде, у которой даже при постоянстве абсолютной магнитной проницаемости μ_a абсолютная диэлектрическая проницаемость $\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - j\sigma/\omega$ является функцией частоты.

Говорят, что на заданной частоте ω материальная среда является *хорошо проводящей (металлоподобной)*, если выполняется неравенство

$$\sigma/\omega \gg \varepsilon_a. \tag{5.1}$$

Физически это означает, что в такой среде плотность токов проводимости значительно превышает плотность как токов смещения, так и поляризационных токов.

На частотах радиодиапазона условие (5.1) с большим запасом выполняется для любых металлов. Так, известно, что медь имеет параметры $\varepsilon_a = \varepsilon_0 = 10^{-9}/(36\pi) = 8.84 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; $\sigma = 5.7 \cdot 10^7$ См/м. На частоте 30 ГГц ($\lambda = 1$ см) абсолютная диэлектрическая проницаемость меди $\tilde{\varepsilon}_a = 8.84 \cdot 10^{-12} - j3.02 \cdot 10^{-4}$ Ф/м. Видно, что мнимая часть диэлектрической проницаемости меди на восемь десятичных порядков превосходит действительную.

Очевидно, что чем ниже частота, тем ближе проводящая среда по своим электродинамическим свойствам к идеальному проводнику. На достаточно низких частотах многие неидеальные диэлектрики, а также полупроводники становятся металлоподобными. Например, для сухой почвы с параметрами $\varepsilon = 4$, $\sigma = 2 \cdot 10^{-3}$ См/м на частоте 1 МГц имеем $\tilde{\varepsilon}_a = 3.54 \cdot 10^{-11} - j3.18 \times 10^{-10}$ Ф/м. Таким образом, в радиовещательном диапазоне частот сухая почва ведет себя как хорошо проводящая среда. Это свойство позволяет в ряде случаев значительно упростить расчет полей электромагнитных волн, распространяющихся над поверхностью Земли.

Итак, комплексную диэлектрическую проницаемость хорошо проводящей среды можно приближенно считать чисто мнимой:

$$\tilde{\varepsilon}_{\text{ам}} = -j\sigma/\omega. \tag{5.2}$$

Найдем коэффициент распространения однородных плоских электромагнитных волн в такой среде. По общему правилу [см. формулу (3.24)],

$$\gamma_{\text{м}} = \alpha_{\text{м}} + j\beta_{\text{м}} = j\omega \sqrt{\tilde{\varepsilon}_{\text{ам}}\mu_{\text{ам}}} = \sqrt{j\omega\mu_{\text{ам}}\sigma}. \tag{5.3}$$

Так как главное значение квадратного корня из мнимой единицы

$$\sqrt{j} = \exp(j\pi/4) = (1+j)/\sqrt{2},$$

то формула (5.3) приобретает вид

$$\gamma_{\text{м}} = \sqrt{\omega\mu_{\text{ам}}\sigma/2}\ (1+j). \tag{5.4}$$

Таким образом, в металлоподобной среде коэффициенты фазы и ослабления численно равны:

$$\beta_{\text{м}} = \alpha_{\text{м}} = \sqrt{\omega\mu_{\text{ам}}\sigma/2}. \tag{5.5}$$

Зависимость этих величин от частоты говорит о том, что в хорошо проводящей среде имеется ярко выраженная частотная дисперсия.

На основании формулы (5.5) находим фазовую скорость

$$v_{\text{фм}} = \omega/\beta_{\text{м}} = \sqrt{2\omega/(\mu_{\text{ам}}\sigma)} \tag{5.6}$$

и длину волны в металлоподобной среде

$$\lambda_{\text{м}} = 2\pi/\beta_{\text{м}} = 2\pi\sqrt{2/(\omega\mu_{\text{ам}}\sigma)}. \tag{5.7}$$

Пример 5.1. Найти фазовую скорость и длину волны в меди на частоте 100 МГц, полагая, что $\sigma = 5.7 \cdot 10^7$ См/м, $\mu_{\text{ам}} = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

Воспользовавшись формулами (5.6) и (5.7), получаем

$$v_{\text{фм}} = \sqrt{10^8/5.7} = 4188.5 \text{ м/с},$$

$$\lambda_{\text{м}} = 1/\sqrt{5.7 \cdot 10^8} = 4.19 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Следует обратить внимание на то, что на частотах радиодиапазона фазовая скорость плоских волн в металле существенно меньше, чем в вакууме.

С ростом частоты фазовая скорость однородных плоских волн в хорошо проводящей среде увеличивается.

Чтобы найти характеристическое сопротивление металлоподобной среды, следует воспользоваться общей формулой (3.30):

$$Z_{см}=\sqrt{\mu_{ам}/\tilde{\varepsilon}_{ам}}=\sqrt{j\omega\mu_{ам}/\sigma}=\sqrt{\omega\mu_{ам}/\sigma}\exp(j45°). \qquad (5.8)$$

Комплексность характеристического сопротивления указывает на то, что в хорошо проводящей среде вектор напряженности электрического поля сдвинут по фазе относительно вектора напряженности магнитного поля на угол 45°. Видно также, что в данном случае характеристическое сопротивление зависит от частоты.

Конкретный расчет показывает, что модуль сопротивления $Z_{см}$ в практически интересных случаях намного меньше характеристического сопротивления вакуума $Z_0=377$ Ом. Так, для типичного металла с параметрами $\mu_{ам}=\mu_0$, $\sigma=3\cdot10^7$ См/м на частоте 1 МГц величина $Z_{см}=5.13\cdot10^{-4}\exp(j45°)$ Ом.

Как известно, в среде с потерями амплитуда плоских электромагнитных волн изменяется вдоль координаты распространения z по закону $\exp(-\alpha z)$. Расстояние d, на котором амплитуда плоских волн уменьшается в $e=2.718...$ раза по сравнению с начальной, называют *глубиной проникновения* или *толщиной поверхностного слоя.* В рассматриваемом нами случае эта величина удовлетворяет очевидному соотношению $\alpha_м d=1$. Отсюда, воспользовавшись формулой (5.5), получаем $d=1/\alpha_м=\lambda_м/(2\pi)$. Таким образом, приходим к еще одному определению: материальная среда является металлоподобной, если поле однородной плоской волны затухает в ней на расстоянии, *меньшем длины волны.*

Формула для вычисления толщины поверхностного слоя такова:

$$d=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu_{ам}\sigma}}. \qquad (5.9)$$

Глубина проникновения электромагнитных волн в хорошо проводящую среду уменьшается с ростом частоты и удельной проводимости.

Расчет по формуле (5.9) показывает, что для металлов на частотах СВЧ-диапазона величина d весьма мала. Так, для меди ($\sigma=5.7\cdot10^7$ См/м) на частоте 10 ГГц ($\lambda=3$ см) имеем $d=0.6$ мкм. Отсюда следует практически важный вывод о том, что на токоведущие поверхности целесообразно наносить тонкий (толщиной 10—20 мкм) слой хорошо проводящего металла, обычно серебра. Такое покрытие позволяет просто и сравнительно дешево уменьшать тепловые потери в элементах СВЧ-устройств.

5.2. Плазма и ее электродинамические параметры

К числу материальных сред, в которых распространение электромагнитных волн сопровождается частотной дисперсией, относится *плазма*. В узком смысле так называют ионизированный газ, состоящий из положительно и отрицательно заряженных частиц, а также из нейтральных атомов и молекул.

Плазма часто встречается в природе и технике. В частности, Земля окружена плазменной оболочкой — ионосферой, располагающейся на высотах 100—500 км. Ионосфера решающим образом влияет на распространение радиоволн в земных условиях. Плазменные свойства присущи межпланетной и межзвездной среде. В разнообразных приборах и устройствах приходится иметь дело с плазмой газового разряда, а также с плазмой, образуемой носителями заряда в металлах и полупроводниках.

Одно из основных свойств плазмы заключается в ее *квазинейтральности* — если в плазме мысленно выделить некоторую замкнутую область, то электрический заряд внутри нее в среднем всегда равен нулю, несмотря на то что из-за теплового движения заряженных частиц наблюдаются быстрые флуктуации суммарного заряда вокруг среднего значения. Таким образом, локальную плотность плазмы можно описывать одним параметром — электронной концентрацией N_e (м$^{-3}$), которая равна среднему числу электронов в единице объема. Данный параметр существенно варьируется в средах различной физической природы. Например, для земной ионосферы типично значение $N_e \sim 10^{12}$ м$^{-3}$. Концентрация электронов в плазме проводящих твердых тел значительно выше, здесь $N_e \sim 10^{26}$ м$^{-3}$.

Заряженные частицы плазмы движутся под действием сил электромагнитного поля. Это приводит к поляризации среды, так что диэлектрическая проницаемость плазмы отличается от проницаемости вакуума (см. гл. 1). Рассматривая электронно-ионную плазму, следует учитывать, что масса иона на несколько порядков превышает массу электрона. Поэтому ионы практически неподвижны и в первом приближении не влияют на электродинамические свойства такой среды.

Простейший способ анализа свойств плазмы основан на том, что составляют и решают дифференциальное уравнение, описывающее движение в пространстве некоторого отдельно взятого типичного электрона. Это уравнение, записанное на основании второго закона Ньютона, имеет вид

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + m\nu \frac{d\mathbf{r}}{dt} = e\mathbf{E}, \qquad (5.10)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор отклонения электрона от того положения в пространстве, которое он занимал при отсутствии поля; e, m — заряд и масса электрона; ν — так называемая частота соударений электрона с нейтральными частицами, $с^{-1}$.

Первое слагаемое в левой части представляет собой силу инерции. Второе слагаемое в рамках выбранного нами модельного (феноменологического) подхода характеризует силу «внутреннего трения», которая действует на электрон. Действительно, при неупругих соударениях с нейтральными частицами электрон ν раз в секунду теряет порции импульса по $m\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$ каждая. Наконец, правая часть уравнения (5.10) описывает силу, действующую на электрон со стороны внешнего электрического поля.

Скорости, приобретаемые электроном, полагают достаточно малыми, чтобы можно было пренебречь силой, возникающей под действием магнитного поля.

Предположим, что внешнее поле $\mathbf{E}$ изменяется во времени по гармоническому закону с частотой ω. Тогда, подставив в уравнение (5.10) функции $\mathbf{r}$ и $\mathbf{E}$, выраженные через соответствующие комплексные амплитуды, т. е.

$$\mathbf{r}=\mathrm{Re}\,[\dot{\mathbf{r}}\exp(j\omega t)], \qquad \mathbf{E}=\mathrm{Re}\,[\dot{\mathbf{E}}\exp(j\omega t)],$$

получаем

$$m(-\omega^2+j\omega\nu)\,\dot{\mathbf{r}}=e\dot{\mathbf{E}},$$

или

$$\dot{\mathbf{r}}=\frac{e\dot{\mathbf{E}}}{m(-\omega^2+j\omega\nu)}. \tag{5.11}$$

Отсюда находим комплексную амплитуду вектора поляризованности

$$\dot{\mathbf{P}}=N_e e\dot{\mathbf{r}}$$

и вектора электрического смещения

$$\dot{\mathbf{D}}=\varepsilon_0\dot{\mathbf{E}}+\dot{\mathbf{P}},$$

которая описывается выражением

$$\dot{\mathbf{D}}=\varepsilon_0\left[1-\frac{N_e e^2}{m\varepsilon_0(\omega^2-j\omega\nu)}\right]\dot{\mathbf{E}}. \tag{5.12}$$

На основании последней формулы находим относительную диэлектрическую проницаемость плазменной среды:

$$\varepsilon=1-\frac{N_e e^2}{m\varepsilon_0(\omega^2-j\omega\nu)}. \tag{5.13}$$

В соответствии с формулами (5.12) и (5.13) диэлектрическая проницаемость плазмы существенным образом зависит от частоты приложенного электромагнитного поля. Как следствие, процесс распространения электромагнитных волн в плазме сопровождается частотной дисперсией. Физическая причина дисперсии — инерционность процесса перемещения электронов плазмы под действием переменного поля.

5.3. Распространение электромагнитных волн в бесстолкновительной плазме

Расчет частоты соударений в плазменной среде — сложная задача, решаемая методами кинетической теории газов. Анализ показывает, что во многих интересных для радиотехники ситуациях основные параметры, определяющие частоту соударений, такие, как температура электронного газа и средняя длина пробега электрона между двумя последовательными столкновениями, оказываются такими, что на рабочей частоте ω выполняется неравенство

$$\omega \gg \nu. \tag{5.14}$$

Это позволяет приближенно считать, что в формулах (5.12) и (5.13) $\nu=0$. Если такая упрощенная модель справедлива, то говорят о *бесстолкновительной плазме,* относительная диэлектрическая проницаемость которой

$$\varepsilon = 1 - \frac{N_e e^2}{m\varepsilon_0 \omega^2} \tag{5.15}$$

действительна и меньше единицы на любых частотах.

Из равенства (5.15) непосредственно следует, что величина ε обращается в нуль на так называемой *плазменной частоте*

$$\omega_{пл} = \sqrt{\frac{N_e e^2}{m\varepsilon_0}}, \tag{5.16}$$

которую иногда называют также *ленгмюровской частотой* по имени американского физика И. Ленгмюра (1881—1957).

Подставив в (5.16) числовые значения $m=8.1\cdot10^{-31}$ кг, $e=1.6\cdot10^{-19}$ Кл, $\varepsilon_0=8.84\cdot10^{-12}$ Ф/м, получаем формулу для практических расчетов

$$\omega_{пл} = 54.41\sqrt{N_e}\ \text{с}^{-1} \tag{5.17}$$

или

$$f_{пл} = 8.98\sqrt{N_e}\ \text{Гц}. \tag{5.18}$$

Часто на практике концентрация электронов такова, что плазменная частота лежит в радиодиапазоне. Так, для земной ионосферы с типичным значением $N_e \sim 10^{12}$ м$^{-3}$ частота $f_{пл} \sim 9$ МГц.

Изучая распространение плоских электромагнитных волн в бесстолкновительной плазме, следует по отдельности рассмотреть два случая:

● Концентрация электронов N_e сравнительно невелика, так что выполняется неравенство $\omega > \omega_{пл}$. Говорят, что при этом имеет место распространение волн в *докритической плазме.*

Параметр N_e велик настолько, что имеет место обратное неравенство $\omega < \omega_{пл}$. В данном случае принято говорить об электромагнитных процессах в *закритической плазме.*

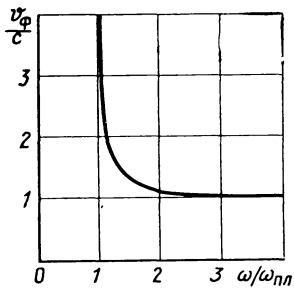


Рис. 5.1. Частотная зависимость фазовой скорости плоской волны в докритической плазме

Докритическая плазма. Представив выражение (5.15) в виде

$$\varepsilon = 1 - \left(\frac{\omega_{пл}}{\omega}\right)^2,$$

на основании формулы (3.24) находим коэффициент распространения плоской электромагнитной волны:

$$\gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) = j\beta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{пл}}{\omega}\right)^2},$$

где $\beta_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ — коэффициент фазы плоской волны в вакууме.

Ясно, что в рассматриваемом случае коэффициент ослабления $\alpha = 0$, в то время как коэффициент фазы

$$\beta(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{пл}}{\omega}\right)^2}. \qquad (5.19)$$

Отсюда непосредственно вытекает формула для расчета фазовой скорости плоской электромагнитной волны в бесстолкновительной плазме

$$v_ф = \frac{\omega}{\beta(\omega)} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_{пл}/\omega)^2}}. \qquad (5.20)$$

Кривая, характеризующая частотную дисперсию фазовой скорости в докритической плазме, изображена на рис. 5.1. Следует отметить, что здесь фазовая скорость плоских электромагнитных волн всегда больше скорости волн в вакууме, причем $v_ф \to \infty$, если $\omega \to \omega_{пл}$.

Характеристическое сопротивление докритической бесстолкновительной плазмы также зависит от частоты. Действительно, здесь

$$Z_c(\omega)=\sqrt{\frac{\mu_0}{\tilde{\varepsilon}_a}}=\frac{Z_0}{\sqrt{1-(\omega_{пл}/\omega)^2}}, \qquad (5.21)$$

где $Z_0=377$ Ом. В плазме рассматриваемого вида характеристическое сопротивление Z_c действительно (векторы **E** и **H** изменяются во времени синфазно) и превышает величину Z_0.

Пример 5.2. Концентрация электронов в бесстолкновительной плазме $N_e=2\cdot10^{11}$ м$^{-3}$. Найти частоту f электромагнитного поля, при которой характеристическое сопротивление данной плазмы составляет 600 Ом.

Уравнение относительно частоты

$$600=377/\sqrt{1-(\omega_{пл}/\omega)^2}$$

имеет положительный корень

$$\omega=\omega_{пл}/\sqrt{1-(377/600)^2}.$$

Отсюда $\omega=3.128\cdot10^7$ с$^{-1}$ или $f=4.978$ МГц.

Вывод о том, что в бесстолкновительной плазме $v_ф>c$, требует некоторого пояснения, поскольку, согласно теории относительности, скорость света в вакууме c является предельно возможной в природе. Однако при этом имеется в виду скорость движения материальных объектов, измеренная в некоторой инерциальной системе координат. Рассматриваемая же нами фазовая скорость представляет собой скорость перемещения в пространстве воображаемых математических объектов — волновых фронтов (см. гл. 3). Естественно, что ограничения, налагаемые принципом относительности, не распространяются на величину фазовой скорости, которая может быть сколь угодно велика.

Закритическая плазма. Если $\omega<\omega_{пл}$, то коэффициент распространения плоской электромагнитной волны в плазме оказывается действительным:

$$\alpha(\omega)=\beta_0\sqrt{(\omega_{пл}/\omega)^2-1}; \qquad \beta(\omega)=0. \qquad (5.22)$$

Амплитуда поля вдоль произвольно выбранной оси z уменьшается по мере распространения в соответствии с законом $\exp(-\alpha z)$. Поскольку коэффициент фазы β в закритической плазме равен нулю, волновой процесс в данной среде фактически от-

сутствует — начальные фазы колебаний при любых z одинаковы в каждый момент времени. Формально это означает, что фазовая скорость плоских электромагнитных волн в закритической плазме неограниченно велика.

Ослабление амплитуды поля в плазме рассматриваемого вида обусловлено не переходом части энергии в теплоту, а чисто фазовым эффектом: колеблющиеся электроны плазмы возбуждают вторичные волны, которые, интерферируя с полем падающей волны, стремятся его компенсировать.

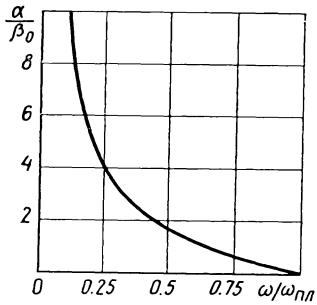


Рис. 5.2. Частотная зависимость нормированного коэффициента ослабления плоской волны в бесстолкновительной плазме

График частотной зависимости нормированного коэффициента ослабления, рассчитанный по формуле (5.22), изображен на рис. 5.2. Обращает на себя внимание резкое увеличение коэффициента ослабления при уменьшении рабочей частоты.

Ослабление амплитуды электромагнитных волн в закритической плазме во многих случаях оказывает существенное влияние на работу земных и космических радиолиний.

Пример 5.3. Вычислить ослабление электромагнитных волн в плазменной оболочке толщиной $d=0.03$ м при концентрации электронов $N_e=10^{18}$ м$^{-3}$ на частоте $f=15$ МГц.

Здесь плазменная частота $f_{\text{пл}}=8.98\sqrt{N_e}=8.98$ ГГц. Отношение $f_{\text{пл}}/f=600$, т. е. закритический режим распространения выражен достаточно резко. Коэффициент фазы плоской волны с указанной частотой в вакууме $\beta_0=0.314$ м$^{-1}$. Коэффициент ослабления волны в плазме

$$\alpha=\beta_0\sqrt{(f_{\text{пл}}/f)^2-1}=188.5 \text{ м}^{-1}.$$

В логарифмических единицах погонное ослабление

$$\Delta_{\text{пог}}=8.686\alpha=1637 \text{ дБ/м}.$$

Отсюда ослабление волн в плазменном слое

$$\Delta_{\text{сл}}=-\Delta_{\text{пог}}d=-49.2 \text{ дБ}.$$

Таким образом, если $E_{m\,\text{вх}}$ и $E_{m\,\text{вых}}$ — амплитуды напряженности электрического поля на входе и выходе слоя, то

$$E_{m\,\text{вх}}/E_{m\,\text{вых}}=10^{49.2/20}=288.$$

Проведенный ориентировочный расчет свидетельствует о возможности существенного ослабления амплитуды волн в слое закритической плазмы.

Поскольку диэлектрическая проницаемость закритической плазмы отрицательна, характеристическое сопротивление подобной среды оказывается чисто мнимым:

$$Z_c(\omega)=\sqrt{\frac{\mu_0}{\tilde{\varepsilon}_a}}=\frac{-jZ_0}{\sqrt{(\omega_{пл}/\omega)^2-1}}. \qquad (5.23)$$

Знак правой части последнего равенства указывает на то, что характеристическое сопротивление закритической плазменной среды является емкостным.

Подводя итог, можно констатировать, что слой бесстолкновительной плазмы ведет себя подобно *фильтру верхних частот*, пропуская на выход колебания с частотами $\omega>\omega_{пл}$ и эффективно ослабляя спектральные составляющие с частотами $\omega<\omega_{пл}$.

5.4. Учет влияния столкновений в плазме

Изученная выше модель бесстолкновительной плазмы является, по сути дела, результатом абстракции. Более точное представление об электромагнитных явлениях в реальной плазме можно получить, учтя влияние столкновений электронов с нейтральными молекулами газа. Для оценки частоты соударений ν можно воспользоваться приближенной формулой [18]

$$\nu=5\cdot10^7P/\sqrt{T}, \qquad (5.24)$$

где P — давление газа, Па; T — температура, К.

В том случае, когда частота ω гармонического электромагнитного поля становится сравнимой с параметром ν, электродинамические свойства плазменной среды описываются комплексной диэлектрической проницаемостью [см. формулу (3.13)]

$$\tilde{\varepsilon}_a=\varepsilon_0-\frac{N_e e^2}{m(\omega^2-j\omega\nu)}=\varepsilon_0-\frac{N_e e^2(\omega^2+j\omega\nu)}{m(\omega^4+\omega^2\nu^2)}.$$

Последнюю формулу следует преобразовать так, чтобы она приобрела вид, характерный для диэлектрической проницаемости среды с потерями:

$$\tilde{\varepsilon}_a=\varepsilon_a-j\sigma/\omega.$$

Нетрудно заметить, что действительная часть комплексной диэлектрической проницаемости ε_a и удельная проводимость плазмы σ

зависят от параметров $\omega_{пл}$ и ν, а также существенным образом связаны с частотой поля ω:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_{пл}^2}{\omega^2 + \nu^2}\right), \tag{5.25}$$

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 \omega_{пл}^2 \nu}{\omega^2 + \nu^2}. \tag{5.26}$$

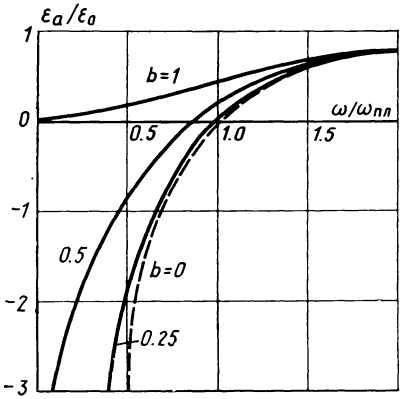


Рис. 5.3. Дисперсионные зависимости вещественной части комплексной диэлектрической проницаемости плазмы при различных значениях частоты соударений

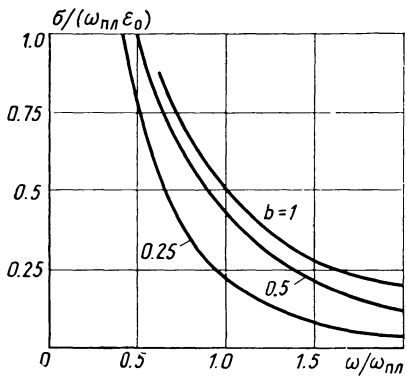


Рис. 5.4. Дисперсионные зависимости нормированной удельной проводимости плазмы при различных значениях частоты соударений

Для анализа зависимостей $\varepsilon_a(\omega)$ и $\sigma(\omega)$ удобно ввести нормированную частоту $\omega/\omega_{пл}$, а также безразмерный параметр $b = \nu/\omega_{пл}$, характеризующий темп соударений электронов с нейтральными молекулами. На рис. 5.3 и 5.4 представлены серии дисперсионных кривых, рассчитанных по формулам

$$\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{1}{(\omega/\omega_{пл})^2 + b^2}, \tag{5.27}$$

$$\frac{\sigma}{\omega_{пл}\varepsilon_0} = \frac{b}{(\omega/\omega_{пл})^2 + b^2}, \tag{5.28}$$

непосредственно вытекающим из выражений (5.25) и (5.26).

Анализируя графики, полезно обратить внимание на то, что при $b \ll 1$ действительная часть комплексной диэлектрической проницаемости плазмы меняет знак вблизи плазменной частоты.

Комплексный коэффициент распространения плоских электромагнитных волн в плазме с учетом соударений определяют по формуле (3.24):

$$\gamma=\alpha+j\beta=j\omega\sqrt{(\varepsilon_a-j\sigma/\omega)\mu_0}. \tag{5.29}$$

Следует иметь в виду, что волна, распространяющаяся в сторону увеличения координаты вдоль произвольно выбранной оси, должна иметь параметр γ, лежащий в I квадранте комплексной плоскости ($\alpha>0$, $\beta>0$). Этим следует руководствоваться, находя явные выражения для величин α и β в соответствии с формулой (5.29).

Прежде всего заметим, что комплексное число $\tilde{\varepsilon}_a=\varepsilon_a-j\sigma/\omega$ при любой частоте ω имеет отрицательную мнимую часть; действительная часть может быть как положительной, так и отрицательной. Таким образом, число $\tilde{\varepsilon}_a$ располагается либо в IV, либо в III квадрантах комплексной плоскости. Аргумент этого числа

$$\arg\tilde{\varepsilon}_a=\frac{3\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{\omega\varepsilon_a}{\sigma}. \tag{5.30}$$

Отсюда видно, что квадратный корень в формуле (5.29) имеет два возможных значения с аргументами

$$\left(\arg\sqrt{\tilde{\varepsilon}_a\mu_0}\right)_1=\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega\varepsilon_a}{\sigma},$$

$$\left(\arg\sqrt{\tilde{\varepsilon}_a\mu_0}\right)_2=\frac{7\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\omega\varepsilon_a}{\sigma}. \tag{5.31}$$

В самом деле, удваивая эти аргументы, мы получаем значение, определяемое формулой (5.30), с точностью до периода 2π.

Заметим далее, что первое из двух возможных значение квадратного корня $\sqrt{\varepsilon_a\mu_0}$ располагается во II квадранте, а второе значение — в IV квадранте. Благодаря наличию в формуле (5.29) множителя $j\omega$, увеличивающего аргумент комплексного числа на $\pi/2$ радиан, подходящим окажется лишь второе значение квадратного корня, при котором

$$\arg\gamma=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega\varepsilon_a}{\sigma} \tag{5.32}$$

отвечает комплексному числу γ, лежащему в I квадранте.

Итак, коэффициент распространения однородной плоской волны в плазме с учетом столкновений определяется по формуле

$$\gamma=\omega\sqrt[4]{(\varepsilon_a\mu_0)^2+(\sigma\mu_0/\omega)^2}\exp\left[j\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega\varepsilon_a}{\sigma}\right)\right]. \tag{5.33}$$

Введя параметры $\beta_0=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ и $\varepsilon=\varepsilon_a/\varepsilon_0$, отсюда находим

$$\alpha(\omega)=\beta_0\sqrt[4]{\varepsilon^2+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right)^2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\varepsilon}{\sigma/(\omega\varepsilon_0)}\right); \tag{5.34}$$

$$\beta(\omega)=\beta_0\sqrt[4]{\varepsilon^2+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right)^2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\sigma/(\omega\varepsilon_0)}\right). \qquad (5.35)$$

Пример 5.4. Давление газа 10^3 Па, температура $2\cdot10^3$ К. Под действием некоторых внешних факторов, например фотохимических реакций, происходит ионизация части молекул; концентрация свободных электронов равна $3\cdot10^{16}$ м$^{-3}$. Найти коэффициент ослабления α и коэффициент фазы β плоской электромагнитной волны с частотой $\omega=10^9$ с$^{-1}$.

По формуле (5.24) вычисляем частоту соударений электронов с нейтральными молекулами:

$$\nu=5\cdot10^7\cdot10^3/\sqrt{2\cdot10^3}=1.1\cdot10^9\ \text{с}^{-1}.$$

Определяем плазменную частоту:

$$\omega_{пл}=54.41\sqrt{3\cdot10^{16}}=9.42\cdot10^8\ \text{с}^{-1}.$$

Применив формулы (5.25) и (5.26), находим безразмерные параметры:

$$\varepsilon=1-\frac{\omega_{пл}^2}{\omega^2+\nu^2}=0.598,$$

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}=\frac{\omega_{пл}^2\nu}{\omega(\omega^2+\nu^2)}=0.442.$$

Коэффициент фазы плоской волны в вакууме

$$\beta_0=\omega/c=3.33\ \text{м}^{-1}.$$

В соответствии с формулами (5.34) и (5.35) получаем $\alpha=0.899$ м$^{-1}$, $\beta=2.726$ м$^{-1}$. Ослабление электромагнитных волн в такой плазме оказывается весьма существенным. Действительно, здесь погонное затухание $\Delta_{пог}=8.686\alpha=7.81$ дБ/м. Пройдя путь длиной 10 м, плоская волна уменьшает амплитуду в $10^{78.1/20}\approx$ ≈8000 раз.

5.5. Распространение импульсов в средах с частотной дисперсией фазовой скорости. Понятие групповой скорости

Зависимость фазовой скорости плоских электромагнитных волн от частоты служит причиной ряда явлений, наблюдаемых при распространении колебаний в диспергирующих средах.

Для того чтобы упростить анализ и сделать его результаты более наглядными, будем рассматривать материальные среды без затухания, подобные бесстолкновительной плазме на частотах выше плазменной. Предположим, что в плоскости $z=0$, которая рассматривается как «вход» волновой системы, некоторые внешние источники возбуждают однородную плоскую электромагнитную волну. Данная волна распространяется в материальной среде с известным законом дисперсии $\beta(\omega)$ в сторону увеличения координаты z. Будем считать, что электрический вектор данной волны имеет единственную отличную от нуля проекцию E_x.

Ранее изучались волны с гармоническим (синусоидальным или косинусоидальным) законом изменения мгновенных значений поля во времени. Теперь обратимся к более общему случаю, когда сигнал $E_x(0, t)$ на входе волновой системы представляет собой импульсное колебание, существующее лишь на конечном отрезке времени, называемом длительностью импульса $\tau_и$.

Разложим сигнал $E_x(0, t)$ на элементарные гармонические колебания, представив его интегралом Фурье [2]

$$E_x(0, t))=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega, \tag{5.36}$$

в который входит спектральная плотность

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} E_x(0, t)\,e^{-j\omega t}\,dt. \tag{5.37}$$

Среда, в которой распространяются волны, считается линейной. Поэтому на основании принципа суперпозиции частные решения уравнений Максвелла могут любым образом складываться, вновь образуя в совокупности некоторое решение уравнений электромагнитного поля. В рассматриваемом нами случае такими частными решениями служат гармонические волны со всевозможными частотами ω и исчезающе малыми амплитудами; уровни этих амплитуд пропорциональны функции $|S(\omega)|$. Спектральная плотность, вообще говоря, принимает комплексные значения; ее аргумент описывает частотную зависимость начального фазового сдвига отдельных элементарных волн.

Каждая элементарная волна, распространяясь в среде без затухания и с частотной дисперсией, характеризуется тем, что мгновенные значения гармонических колебаний в плоскости с координатой z запаздывают на $\beta(\omega)z$ радиан по отношению к колебаниям на входе, т. е. при $z=0$. Другими словами, функция

$$K(j\omega)=\exp[-j\beta(\omega)z] \tag{5.38}$$

должна рассматриваться как частотный коэффициент передачи некоторого воображаемого линейного четырехполюсника, который преобразует входной сигнал $E_x(0, t)$ в выходной сигнал $E_x(z, t)$.

Итак, мгновенное значение выбранной проекции электрического вектора в плоскости с фиксированной координатой z дается выражением

$$E_x(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j[\omega t - \beta(\omega) z]} d\omega. \qquad (5.39)$$

В равной мере аналогичные выражения можно записать и для других проекций векторов поля, например для $H_y(z, t)$.

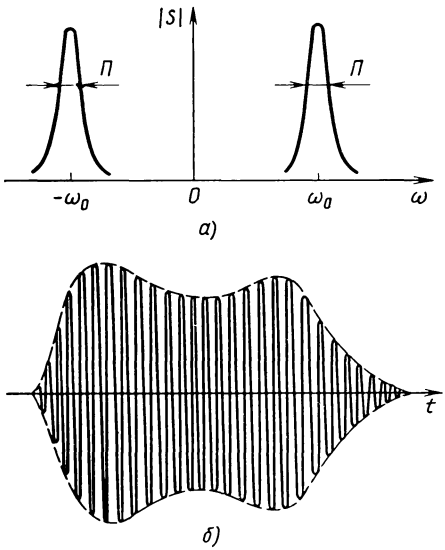


Рис. 5.5. Узкополосный сигнал:
а — частотная зависимость модуля спектральной плотности; *б* — временная диаграмма сигнала

Распространение узкополосных сигналов. Формула (5.39) служит полным и однозначным решением, однако конкретное вычисление интеграла может оказаться весьма трудным из-за того, что переменная интегрирования входит в аргумент экспоненциальной функции нелинейным образом. Задача существенно упрощается в том случае, когда колебание $E_x(0, t)$ на входе среды оказывается узкополосным сигналом. Как известно, спектральная плотность такого сигнала концентрируется в окрестности некоторой центральной частоты ω_0, так что если П — ширина спектра сигнала, измеренная на каком-либо произвольном уровне, то отношение $\Pi/\omega_0 \ll 1$ (рис. 5.5, *а*). Временна́я диаграмма типичного узкополосного сигнала (рис. 5.5, *б*) имеет вид квазигармонической кривой, у которой текущая амплитуда и начальная фаза изменяются гораздо медленнее, чем высокочастотное заполнение вида $\cos \omega_0 t$.

Простейшим сигналом рассматриваемого класса, на примере которого удается тем не менее изучить ряд важных явлений, является *узкополосная группа*

$$E_x(0, t) = E_m \cos \omega_1 t + E_m \cos \omega_2 t, \qquad (5.40)$$

т. е. сумма двух гармонических колебаний с одинаковыми амплитудами; частоты этих колебаний

$$\omega_1=\omega_0-\Delta\omega; \qquad \omega_2=\omega_0+\Delta\omega \tag{5.41}$$

расположены симметрично относительно центральной частоты ω_0. Безусловно, считается, что $\Delta\omega/\omega_0\ll 1$.

По аналогии с формулой (5.39) запишем математическую модель сигнала в плоскости $z>0$, возникающего при подаче на вход волновой системы узкополосной группы:

$$E_x(z,\ t)=E_m\cos[\omega_1 t-\beta(\omega_1)z]+E_m\cos[\omega_2 t-\beta(\omega_2)z]. \tag{5.42}$$

В дальнейшем будем предполагать, что имеет место случай так называемой *слабой дисперсии*, когда в пределах малой (в относительном смысле) окрестности частоты ω_0 дисперсионная характеристика среды $\beta(\omega)$ достаточно точно описывается двумя первыми членами разложения в ряд Тейлора:

$$\beta(\omega)=\beta(\omega_0)+\frac{d\beta}{d\omega}(\omega-\omega_0). \tag{5.43}$$

Производную $d\beta/d\omega$ следует вычислять при $\omega=\omega_0$; обозначим эту производную для краткости как β_0'.

Используя представление (5.43), перепишем формулу (5.42) в следующем виде:

$$E_x(z,\ t)=E_m\cos[(\omega_0-\Delta\omega)t-\beta(\omega_0)z+\beta_0'\Delta\omega z]+$$

$$+E_m\cos[(\omega_0+\Delta\omega)t-\beta(\omega_0)z-\beta_0'\Delta\omega z]. \tag{5.44}$$

Воспользовавшись известным тождеством

$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2},$$

отсюда находим

$$E_x(z,\ t)=2E_m\cos[\Delta\omega(t-\beta_0'z)]\cos[\omega_0 t-\beta(\omega_0)z]. \tag{5.45}$$

Понятие групповой скорости. Займемся анализом полученной формулы. При фиксированном z мгновенные значения поля изменяются во времени как квазигармонический сигнал вида $2E_m\cos(\Delta\omega t+\varphi)\cos(\omega_0 t+\psi)$. Здесь φ и ψ — некоторые постоянные числа. Сомножитель $\cos(\Delta\omega t+\varphi)$ определяет закон изменения медленной огибающей процесса; сомножитель $\cos(\omega_0 t+\psi)$ описывает быстрое высокочастотное заполнение. Подобные процессы в физике принято называть *биениями*.

Из формулы (5.45) можно сделать вывод о том, что как медленная огибающая узкополосной группы, так и быстрое заполне-

ние распространяются в пространстве волнообразно (рис. 5.6). При этом скорость распространения высокочастотного заполнения равна фазовой скорости гармонической плоской волны с центральной частотой ω_0:

$$v_ф = \omega_0/\beta(\omega_0). \qquad (5.46)$$

Однако скорость перемещения в пространстве медленной огибающей, получившая название *групповой скорости*

$$v_{гр} = 1/\beta_0' = d\omega/d\beta, \qquad (5.47)$$

в диспергирующей среде, как правило, не равна фазовой скорости.

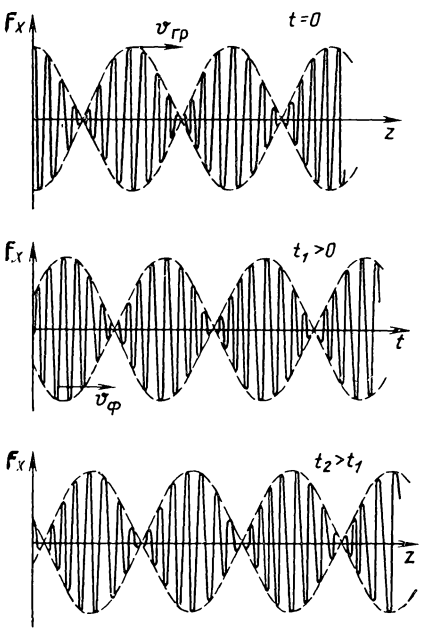


Рис. 5.6. Пространственное распределение поля узкополосной группы в три последовательных момента времени

Если обратиться конкретно к случаю бесстолкновительной плазмы, для которой закон частотной дисперсии задан формулой (5.19), то, вычислив производную $d\beta/d\omega$, на основании выражения (5.47) получаем простую формулу для групповой скорости

$$v_{гр} = c\sqrt{1-(\omega_{пл}/\omega)^2}. \qquad (5.48)$$

Прибегая к понятию групповой скорости, удается приемлемо точно рассчитать скорость волнообразного распространения в диспергирующей среде любого достаточно узкополосного импульсного колебания. Более определенно, групповая скорость служит хорошей приближенной оценкой скорости распространения радиоимпульса, спектр которого отличен от нуля лишь в пределах частотного интервала, где производная $d\beta/d\omega$ может считаться постоянной.

Пример 5.5. В бесстолкновительной плазме (ионосфере) с электронной концентрацией $N_e = 2\cdot10^{12}$ м$^{-3}$ одну и ту же трассу длиной $L = 150$ км проходят два прямоугольных радиоимпульса одинаковой длительности $\tau_и = 100$ мкс. Несущие частоты импульсов $f_{01} = 15$ МГц и $f_{02} = 28$ МГц соответственно. Определить величину Δt — разность времен прохождения этой трассы данными импульсами.

Спектральная плотность первого радиоимпульса концентрируется в окрестности частоты 15 МГц. Ширина спектра этого импульса, оцениваемая как частотный интервал между первыми нулями спектральной диаграммы, $\Delta f \approx 2/\tau_и = 20$ кГц [2]. Второй импульс имеет спектр такой же ширины, сосредоточенный в окрестности частоты 28 МГц. Достаточная малость относительной ширины спектра ($\Delta f/f_{01,2} \sim 10^{-3}$) позволяет считать, что скорости распространения импульсов равны соответствующим групповым скоростям. Вычислив предварительно ленгмюровскую частоту $f_{пл} = 12.7$ МГц, на основании (5.48) получаем

$$v_{гр1} = c\sqrt{1-(f_{пл}/f_{01})^2} = 1.596 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

$$v_{гр2} = c\sqrt{1-(f_{пл}/f_{02})^2} = 2.674 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

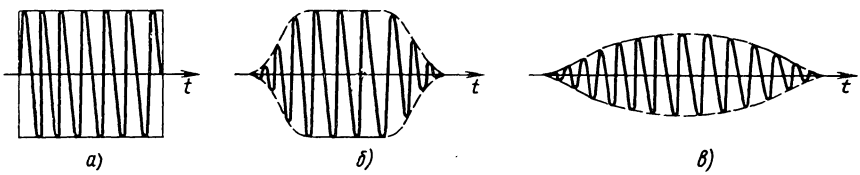


Рис. 5.7. Процесс «расплывания» импульсного сигнала в диспергирующей среде:
а — колебание на входе; *б* — колебание на выходе при слабых искажениях; *в* — то же при сильных искажениях

Отсюда

$\Delta t = L(v_{гр1}^{-1} - v_{гр2}^{-1}) = 378$ мкс, что почти в четыре раза превышает длительность импульсов.

Искажения импульсных сигналов при распространении в диспергирующей среде. Используя понятие групповой скорости, можно в ряде случаев ответить на вопрос о том, сколь ощутимы искажения импульсного сигнала из-за частотной зависимости скоростей распространения отдельных спектральных составляющих.

Реальный импульсный сигнал не является простой узкополосной группой, а состоит из целого набора таких групп, каждая из которых распространяется в пространстве со своей групповой скоростью. Пока длина трассы распространения L достаточно мала, разность времен прихода этих групп в точку приема существенно меньше длительности импульса $\tau_и$, так что искажения принятого сигнала невелики (рис. 5.7). С ростом длины L эта разность возрастает, что ведет к заметному «расплыванию» импульса на выходе.

Пусть $f_в$ и $f_н$ — соответственно верхняя и нижняя частота в пределах спектральной полосы передаваемого радиоимпульса. Данным частотам отвечают скорости высокочастотной и низкочастотной групп $v_{гр.в}$ и $v_{гр.н}$. Эффект «расплывания» импульса проявляется ярко в том случае, когда одна из упомянутых групп запаздывает относительно другой на время порядка $\tau_и$.

Пример 5.6. В бесстолкновительной плазме с параметром $f_{пл}=6.5$ МГц распространяется радиоимпульс, имеющий несущую частоту $f_0=32$ МГц и эффективную ширину спектра $\Delta f=1.6$ МГц. Качественно сравнить дисперсионные искажения данного колебания, наблюдаемые при длинах трассы $L=1$ км и $L=100$ км.

Как и ранее, будем приближенно полагать, что энергия радиоимпульса сосредоточена в пределах главного лепестка спектральной диаграммы. Поэтому в данном случае $f_в=f_0+\Delta f/2=32.8$ МГц, $f_н=f_0-\Delta f/2=31.2$ МГц.

По формуле (5.48) находим

$$v_{гр.в}=c\sqrt{1-(6.5/32.8)^2}=0.980\ c,$$

$$v_{гр.н}=c\sqrt{1-(6.5/31.2)^2}=0.978\ c.$$

Длительность импульса, оцениваемая по ширине спектра,

$$\tau_и=1/\Delta f=0.625 \text{ мкс}.$$

Разность времен распространения двух крайних групп

$$\Delta t=L\left(v_{гр.н}^{-1}-v_{гр.в}^{-1}\right)$$

составляет 7.3 нс, если $L=1$ км, и 0.73 мкс, если $L=100$ км. Так как в первом случае $\Delta t\ll\tau_и$, то дисперсионными искажениями при короткой трассе можно обоснованно пренебречь. При длинной трассе $\Delta t\approx\tau_и$, так что эффект «расплывания» импульса будет вполне заметным.

Отметим в заключение, что дисперсия фазовой скорости волн наблюдается не только в плазменной среде, но и в разнообразных искусственных электродинамических системах, таких, как волноводы. Некоторые задачи, возникающие при изучении распространения импульсных колебаний по волноводам, будут рассмотрены в гл. 8.

Более строгий подход к введению и физическому истолкованию понятия групповой скорости читатель найдет в книге [3].

5.6. Электромагнитные волны в сверхпроводниках

Явление сверхпроводимости открыл в 1911 г. голландский физик Х. Камерлинг-Оннес, изучая свойства жидкого гелия. Оказалось, что при температурах ниже 4.15 К электрическое сопротивление образца ртути исчезающе мало. Постоянный ток, возбужденный в сверхпроводящем кольце, циркулирует по нему без каких-либо сторонних источников ЭДС в течение многих месяцев. Измерить сопротивление сверхпроводника традиционными методами крайне трудно. Полагают, что оно по крайней мере в 10^{18} раз меньше сопротивления меди, серебра и других обычных металлов.

Если температура сверхпроводника становится выше так называемой *критической температуры* T_c, то явление сверхпроводимости скачкообразно исчезает и вещество из сверхпроводящего переходит в нормальное состояние.

Сверхпроводящие свойства присущи многим неферромагнитным металлам, у которых значения T_c различны. Так, для алюминия критическая температура равна 1.2 К, для свинца 7.2 К и для ниобия 9.2 К. Интерметаллическое соединение Nb_3Ge имеет значение $T_c = 23$ К. В 1986 г. был открыт целый класс редкоземельных керамических материалов с добавкой ионов меди, у которых критические температуры весьма высоки. Например, для керамики $YBa_2Cu_3O_7$ значение $T_c = 92$ К, что выше температуры кипения жидкого азота (77 К). Это обстоятельство, коренным образом упрощающее техническое использование явления сверхпроводимости, послужило отправной точкой живого интереса к этой области физики, резко усилившегося в последние годы.

Уравнение Лондонов. Первую успешную попытку создания теории сверхпроводимости предприняли в 1935 г. немецкие физики Ф. и Г. Лондоны. Согласно их модельным представлениям, вещество в сверхпроводящем состоянии содержит носители заряда двух типов: нормальные носители, которые подчиняются обычным законам классической электродинамики, и сверхпроводящие носители, способные перемещаться в кристаллической решетке вещества без какого-либо сопротивления. Соответственно вектор плотности полного тока $\mathbf{J}$ в каждой точке сверхпроводника представляется суммой двух составляющих:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_n + \mathbf{J}_s, \tag{5.49}$$

где индексы n и s относятся к нормальной и сверхпроводящей компонентам соответственно.

Ясно, что

$$\mathbf{J}_n = \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma_n \mathbf{E},$$

где σ_n — нормальная удельная проводимость вещества. Тогда система двух первых уравнений Максвелла для сверхпроводящей среды запишется в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma_n \mathbf{E} + \mathbf{J}_s, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{5.50}$$

Пусть N_s — концентрация, q_s — заряд, $\mathbf{v}_s$ — вектор скорости сверхпроводящих носителей. Тогда, по общему правилу,

$$\mathbf{J}_s = N_s q_s \mathbf{v}_s, \tag{5.51}$$

причем входящая сюда скорость подчиняется закону Ньютона

$$m_s \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = q_s \mathbf{E}. \tag{5.52}$$

Объединив равенства (5.51) и (5.52), находим, что

$$\frac{d\mathbf{J}_s}{dt} = \frac{N_s q_s^2}{m_s} \mathbf{E}. \tag{5.53}$$

Затем, применив операцию rot к обеим частям равенства (5.53) и воспользовавшись вторым уравнением из системы (5.50), получаем

$$\operatorname{rot}\left(\frac{d\mathbf{J}_s}{dt}\right) = \frac{N_s q_s^2}{m_s} \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{N_s q_s^2}{m_s} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{5.54}$$

Ф. и Г. Лондоны предположили, что последнее уравнение можно проинтегрировать по t, положив возникающую при этом произвольную постоянную равной нулю. Выполнив это действие, из (5.54) находим

$$\operatorname{rot}\mathbf{J}_s = -\frac{N_s q_s^2}{m_s} \mathbf{B}. \tag{5.55}$$

Удобно ввести параметр с размерностью длины

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m_s}{\mu_0 N_s q_s^2}}, \tag{5.56}$$

получившей название *лондоновской длины*, и переписать равенство (5.55) следующим образом:

$$\operatorname{rot}\mathbf{J}_s = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \mathbf{B}. \tag{5.57}$$

В физике эту формулу называют *уравнением Лондонов*. Интересно отметить, что, согласно этому уравнению, плотность сверхпро-

водящего тока связана не с электрическим, а с магнитным полем.

Чтобы получить представление о характерных особенностях распределения электромагнитного поля в толще сверхпроводника, воспользуемся системой уравнений Максвелла (5.50), дополнив ее уравнением Лондонов (5.57), которое играет роль материального уравнения. Вычисляя ротор от обеих частей первого уравнения из (5.50), имеем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}\right)=\varepsilon_a\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{E}+\sigma_n\operatorname{rot}\mathbf{E}-\frac{1}{\mu_0\lambda_L^2}\mathbf{B},$$

или

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}\right)=-\varepsilon_a\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}-\sigma_n\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\frac{1}{\mu_0\lambda_L^2}\mathbf{B}. \tag{5.58}$$

Так как

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}\right)=\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}\right)-\nabla^2\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}\right),$$

причем $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$, то уравнение (5.58) упрощается:

$$\nabla^2\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}\right)=\varepsilon_a\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}+\sigma_n\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+\frac{1}{\mu_0\lambda_L^2}\mathbf{B}. \tag{5.59}$$

На нулевой частоте, когда $\partial/\partial t=0$, отсюда имеем

$$\nabla^2\mathbf{B}=(1/\lambda_L^2)\,\mathbf{B}. \tag{5.60}$$

Отметим существенное обстоятельство — в уравнение (5.60) не входит удельная проводимость σ_n, обусловленная нормальными носителями. Поэтому постоянный ток создается лишь за счет движения сверхпроводящих носителей; этот ток течет в сверхпроводнике, не испытывая никакого сопротивления. Естественно, что электрическое поле в материале при этом равно нулю. Магнитное же поле вытесняется из толщи сверхпроводника на его поверхность и существует в слое толщиной порядка лондоновской длины. Чтобы доказать это, запишем уравнение (5.60) для одномерного случая:

$$\frac{d^2\mathbf{B}}{dx^2}=\frac{1}{\lambda_L^2}\mathbf{B}, \tag{5.61}$$

где x — координата, отсчитываемая по нормали в глубь сверхпроводника.

Легко проверить, что решением уравнения (5.61) служит функция

$$\mathbf{B}(x)=\mathbf{B}(0)\exp(-x/\lambda_L), \tag{5.62}$$

где $\mathbf{B}(0)$ — магнитная индукция на границе раздела воздух — сверхпроводник. Второе из возможных решений, пропорциональное $\exp(x/\lambda_L)$, должно быть отброшено как не имеющее физического смысла из-за экспоненциального роста поля при $x \to \infty$.

Итак, лондоновская длина есть оценка глубины проникновения постоянного магнитного поля, а значит, и постоянного тока в сверхпроводник. «Поверхностный эффект» в сверхпроводниках и явление вытеснения высокочастотного поля на поверхность хорошо проводящего обычного металла с физической точки зрения — проявление одного и того же фундаментального принципа — закона Фарадея — Ленца, согласно которому за счет электромагнитной индукции в проводящей системе возникают наведенные токи, препятствующие изменению первоначального магнитного потока. Разница лишь в том, что из-за бесконечно высокой подвижности сверхпроводящих носителей этот эффект в сверхпроводниках наблюдается на нулевой частоте.

В теории Лондонов считается, что носителями, ответственными за явление сверхпроводимости, служат электроны. При этом полностью игнорируется вопрос о том, *почему* один электрон оказывается нормальным, а другой — сверхпроводящим. Так или иначе, если для оценки положить, что $q_s = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $m_s = 9.1 \cdot 10^{-31}$ кг (масса электрона) и $N_s = 10^{29}$ м$^{-3}$ (типичная концентрация свободных электронов в металле), то на основании формулы (5.56) имеем $\lambda_L = 16$ нм. Именно на такой глубине магнитная индукция уменьшается в e раз по сравнению с начальным значением. Поэтому есть все основания считать, что внутри сверхпроводника магнитное поле отсутствует. Явление «выталкивания» магнитного поля из толщи сверхпроводника было экспериментально открыто в 1933 г. В. Мейсснером и Р. Ошенфельдом (эффект Мейсснера).

Высокочастотные свойства сверхпроводников. Если частота электромагнитного поля не равна нулю, то уже нет оснований пренебрегать вторым слагаемым в правой части уравнения (5.59). Поэтому начинает существенно сказываться проводимость, обусловленная нормальными электронами, и в сверхпроводнике возникают некоторые тепловые потери.

Будем рассматривать электромагнитный процесс, изменяющийся во времени по гармоническому закону с частотой ω. В соответствии с равенством (5.53) комплексные амплитуды сверхпроводящей компоненты тока и напряженности электрического поля связаны соотношением

$$\dot{\mathbf{J}}_s = \frac{-j}{\omega\mu_0\lambda_L^2}\dot{\mathbf{E}}.$$

Поскольку для нормальной компоненты тока аналогичная связь имеет вид

$$\dot{\mathbf{J}}_{\text{п}} = \sigma_{\text{п}} \dot{\mathbf{E}},$$

а током смещения в хорошо проводящей среде можно с полным основанием пренебречь, приходим к следующей формулировке закона Ома для сверхпроводника в переменном электромагнитном поле:

$$\dot{\mathbf{J}} = (\sigma_{\text{п}} - j\sigma_s)\,\dot{\mathbf{E}}, \tag{5.63}$$

где $\sigma_s = 1/(\omega\mu_0\lambda_L^2)$.

Таким образом, сверхпроводящая среда характеризуется комплексной удельной проводимостью

$$\tilde{\sigma} = \sigma_{\text{п}} - j\sigma_s, \tag{5.64}$$

действительная часть которой обусловлена нормальными, а мнимая — сверхпроводящими носителями.

Прямым расчетом легко убедиться, что практически всегда $\sigma_s \gg \sigma_{\text{п}}$. Так, положив $f = 10$ ГГц, $\lambda_L = 50$ нм (типичное значение для большинства сверхпроводников), находим, что $\sigma_s = 5 \cdot 10^9$ См/м. В то же время $\sigma_{\text{п}} \approx 10^7$ См/м, как и для большинства металлов.

Можно усмотреть принципиальную разницу между сверхпроводником и гипотетическим идеальным проводником: удельная проводимость сверхпроводника, стремясь по модулю к бесконечности, является практически мнимой величиной, в то время как у идеального проводника она описывается бесконечно большим действительным числом. Мнимый характер проводимости связан с тем, что в соответствии с (5.53) между током и вызывающим его электрическим полем имеется фазовый сдвиг на 90°.

В качестве величины, характеризующей плотность потока мощности тепловых потерь, удобно воспользоваться действительной частью характеристического сопротивления сверхпроводящей среды

$$\operatorname{Re} Z_c = \operatorname{Re} \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\sigma_{\text{п}} - j\sigma_s}} = \operatorname{Re}\left[j \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{\sigma_s + j\sigma_{\text{п}}}} \right].$$

Если учесть, что нормальная часть удельной проводимости намного меньше сверхпроводящей, то отсюда получаем

$$\operatorname{Re} Z_c \approx \operatorname{Re}\left[j \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{\sigma_s}} \left(1 - j\,\frac{\sigma_{\text{п}}}{2\sigma_s}\right) \right] = \frac{\sigma_{\text{п}} \sqrt{\omega\mu_0}}{2\sigma_s^{3/2}}. \tag{5.65}$$

Воспользовавшись приведенными выше числовыми оценками, находим, что у типичного сверхпроводника на частоте 10 ГГц зна-

чение $\mathrm{Re}Z_c = 4 \cdot 10^{-6}$ Ом. Для сравнения заметим, что нормальный металл, у которого $\sigma = 10^7$ См/м, при тех же условиях имеет $\mathrm{Re}Z_c = \sqrt{\omega\mu_0/(2\sigma)} = 6 \cdot 10^{-2}$ Ом. Несомненно, что на частотах СВЧ-диапазона сверхпроводники существенно лучше нормальных металлов с точки зрения малости тепловых потерь.

Как видно из равенства (5.65), величина $\mathrm{Re}Z_c$ снижается по мере уменьшения параметра σ_n, который, в свою очередь, монотонно зависит от температуры по закону $\sigma_n \sim (T/T_c)^4$. Поэтому в тех случаях, когда требуются исключительно малые тепловые потери, желательно предельно уменьшать абсолютную температуру устройства, помещая его в криостат с жидким гелием. К тому же при низких температурах уменьшаются собственные тепловые шумы, что важно при создании высокочувствительных приемников. Тем не менее новейшие высокотемпературные сверхпроводники, несколько уступая «классическим» материалам, таким, как Nb или Pb, способны обеспечить отличные характеристики приборов.

Механизм сверхпроводимости. Как указывалось, теория Лондонов является чисто феноменологическим построением, пригодным для количественного описания наблюдаемых фактов, но не способным ответить на вопрос о внутренней причине сверхпроводимости. Строгую квантово-механическую теорию сверхпроводимости создали в 1957 г. американские ученые Д. Бардин, Л. Купер и Д. Шриффер (теория БКШ). Независимо от них акад. Н. Н. Боголюбов в 1958 г. предложил более обоснованный вариант такой теории.

Оказалось, что электроны в металле помимо сил кулоновского отталкивания испытывают особые силы притяжения. Если температура вещества становится меньше критической, то силы притяжения начинают доминировать и часть электронов попарно объединяется. В результате возникают так называемые *куперовские пары* электронов, способные двигаться между узлами кристаллической решетки вещества подобно сверхтекучей жидкости. Значит, истинными носителями сверхпрводящего тока служат не электроны, а куперовские пары, что (это замечательно!) отнюдь не дискредитирует теорию Лондонов, так как параметр λ_L в соответствии с (5.56) остается неизменным.

Физические явления в сверхпроводниках весьма многообразны. С точки зрения технических приложений большой интерес представляет *эффект Джозефсона* — протекание туннельного тока через очень тонкий (около 1 нм) слой диэлектрика, разделяющий две сверхпроводящие области. Эффект Джозефсона позволяет строить высокоточные измерительные приборы, создавать элементы логических устройств для суперкомпьютеров и др. В последние годы возникла новая научно-техническая область, получившая название сверхпроводниковой электроники [25].

ЗАДАЧИ

5.1. Как указывалось, для уменьшения омических потерь токоведущие поверхности СВЧ-устройств покрывают тонким слоем серебра. Определите толщину серебряного слоя, при которой напряженность электрического поля на его внутренней поверхности сокращается в 200 раз по сравнению с напряженностью поля на границе раздела металл — воздух. Частота колебаний 30 ГГц.

5.2. Морская вода имеет относительную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon=75$, относительную магнитную проницаемость $\mu=1$ и удельную проводимость $\sigma=2$ См/м (данные получены путем усреднения по многим точкам Мирового океана). Покажите, что на частотах меньше 300 МГц в такой среде можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости. Вычислите глубину проникновения электромагнитных волн в морскую воду на частотах 100 кГц и 30 МГц.

5.3. Ленгмюровская частота бесстолкновительной плазмы $\omega_{пл}=8\cdot10^7$ с$^{-1}$. Плоская линейно поляризованная электромагнитная волна с частотой $\omega=3\cdot10^7$ с$^{-1}$ в некоторой точке пространства имеет комплексную амплитуду x-й проекции электрического вектора $\dot{E}_x=180\exp(j\,60°)$ В/м. Найдите комплексную амплитуду y-й проекции магнитного вектора поля в данной точке.

5.4. Определите частоту ω, при которой действительная часть абсолютной диэлектрической проницаемости электронной плазмы с параметрами $N_e=3\cdot10^{17}$ м$^{-3}$, $\nu=5\cdot10^9$ с$^{-1}$ обращается в нуль.

5.5. Плоская электромагнитная волна распространяется в плазме с ленгмюровской частотой $\omega_{пл}=7\cdot10^8$ с$^{-1}$ и частотой соударений $\nu=3.5\cdot10^8$ с$^{-1}$. Вычислите значение частоты поля ω, при которой угол диэлектрических потерь δ плазменной среды равен 45°.

5.6. Найдите фазовую скорость плоской электромагнитной волны, которая распространяется в однородной ионизированной среде с параметрами $N_e=5\cdot10^{18}$ м$^{-3}$, $\nu=3\cdot10^{10}$ с$^{-1}$. Частота колебаний поля $f=22$ ГГц.

5.7. Электронная концентрация бесстолкновительной плазмы $N_e=2\cdot10^{16}$ м$^{-3}$. Определите частоту f электромагнитного поля, при которой фазовая скорость плоской волны в 10 раз превышает групповую скорость.

5.8. Узкополосный импульсный радиосигнал, имеющий несущую частоту 20 МГц, распространяется в бесстолкновительной плазме с концентрацией свободных электронов $N_e=3.5\cdot10^{12}$ м$^{-3}$. Найдите время прохождения данным сигналом трассы длиной 120 км.

5.9. Покажите, что на частотах, значительно превышающих плазменную, групповую скорость электромагнитных волн в плазме можно приближенно вычислить по формуле $v_{гр}=c(1-1480N_e/\omega^2)$.

5.10. В 60-х годах были открыты удаленные космические источники радиоизлучения, так называемые пульсары. Сигналы пульсаров представляют собой широкополосные радиоимпульсы длительностью порядка долей секунды. Определить расстояние до пульсаров стало возможным потому, что межзвездная плазма является дисперсионной средой.

На рис. 5.8 изображены осциллограммы сигналов u_1 и u_2, которые представляют собой огибающие радиоимпульсов от одного и того же пульсара при различных частотах настройки приемника радиотелескопа: $f_1=400$ МГц для сигнала u_1 и $f_2=1000$ МГц для сигнала u_2. Как видно из рисунка, сдвиг во времени данных сигналов $\Delta t=0.62$ с.

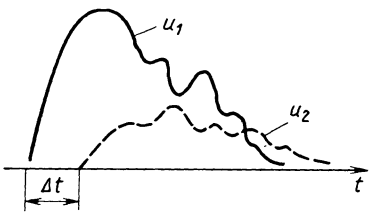


Рис. 5.8. Примерные формы огибающих при двух значениях частоты настройки приемника

Оцените расстояние от Земли до пульсара, предположив, что межзвездное пространство заполнено атомами водорода с концентрацией 1 атом/см^3, причем ионизирован в среднем один атом из десяти. Указание: воспользуйтесь результатом из задачи 5.9.

5.11. Определите глубину проникновения постоянного магнитного поля в толщу сверхпроводника, взяв в качестве критерия десятикратное сокращение магнитной индукции на внутренней стороне слоя по сравнению с индукцией на внешней стороне. Считайте, что сверхпроводящими носителями заряда являются куперовские пары электронов, для которых $q_s=3.2\cdot10^{-19}$ Кл, $m_s=1.82\cdot10^{-30}$ кг. Положите, что концентрация куперовских пар $N_s=10^{27}$ м$^{-3}$.

5.12. Измерения показали, что сверхпроводник имеет значение лондоновской длины $\lambda_L=300$ нм, в то время как нормальная часть удельной проводимости $\sigma_n=3\cdot10^7$ См/м. Определите характеристическое сопротивление сверхпроводника на частоте 45 ГГц.

Глава шестая

ПАДЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

В данной главе рассматриваются явления, наблюдаемые при падении однородных плоских электромагнитных волн на бесконечно протяженную границу раздела двух сред с различающимися электродинамическими параметрами. Существенным образом используются граничные условия, изученные в гл. 4.

6.1. Нормальное падение плоской электромагнитной волны на идеально проводящую плоскость

Рассмотрим следующую простейшую ситуацию. Пусть на бесконечную идеально проводящую плоскость по направлению нормали падает плоская электромагнитная волна, распространяющаяся вдоль оси z декартовой системы координат (рис. 6.1). Из рисунка видно, что присутствие на поверхности идеального проводника лишь поля падающей волны с вектором напряженности электрического поля $\mathbf{E}_{пад}$ не может обеспечить выполнения граничного условия $E_\tau=0$. Для выполнения этого условия необходимо, чтобы в полупространстве $z<0$ существовала отраженная волна с амплитудой, в точности равной амплитуде падающей волны. При $z=0$ должно иметь место равенство

$$\mathbf{E}_{пад}+\mathbf{E}_{отр}=0. \qquad (6.1)$$

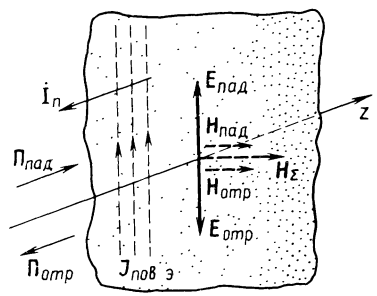


Рис. 6.1. Векторы поля при нормальном падении плоской волны на идеально проводящую плоскость

Чтобы определить суммарное магнитное поле на поверхности идеального проводника, следует учесть, что вектор Пойнтинга отраженной волны $\mathbf{П}_{отр}$ ориентирован вдоль отрицательного направления оси z. Поскольку модули векторов $\mathbf{H}_{пад}$ и $\mathbf{H}_{отр}$ равны, в плоскости $z=0$ модуль суммарного вектора напряженности магнитного поля

$$\mathbf{H}_\Sigma=\mathbf{H}_{пад}+\mathbf{H}_{отр}$$

в два раза больше модуля каждого слагаемого. Таким образом, получен существенный результат — на поверхности идеального проводника напряженность суммарного магнитного поля в два раза превышает напряженность магнитного поля падающей электромагнитной волны:

$$\mathbf{H}_\Sigma=2\mathbf{H}_{пад}. \qquad (6.2)$$

Зная модуль и ориентацию вектора суммарной напряженности магнитного поля, можно определить вектор плотности поверхностного электрического тока по формуле

$$\mathbf{J}_{пов.э}=[\mathbf{i}_n\mathbf{H}_\Sigma]. \qquad (6.3)$$

Из рис. 6.1 видно, что поверхностный электрический ток протекает в направлении вектора $\mathbf{E}$ падающей волны, а его амплитуда равна удвоенной амплитуде вектора напряженности магнитного поля этой волны.

Понятно, что идеально проводящая плоскость полностью экранирует одно полупространство от другого. Поэтому при $z>0$ все составляющие векторов электромагнитного поля обращаются в нуль.

6.2. Нормальное падение плоской электромагнитной волны на диэлектрическое полупространство

Предположим, что полупространство $z<0$ прямоугольной декартовой системы координат (область *1*) представляет собой вакуум ($\varepsilon_a=\varepsilon_0$, $\mu_a=\mu_0$, $\sigma=0$), в то время как полупространство $z>0$ — произвольный магнитодиэлектрик с параметрами ε_a, μ_a, σ (область *2* на рис. 6.2).

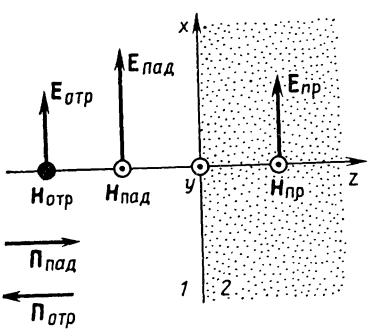


Рис. 6.2. Векторы поля при нормальном падении плоской волны на диэлектрическое полупространство

Пусть в области *1* вдоль положительного направления оси z распространяется плоская гармоническая волна, которая называется *падающей*. Для данной волны считаются известными комплексные амплитуды векторов $\dot{\mathbf{E}}_{\text{пад}}$ и $\dot{\mathbf{H}}_{\text{пад}}$, ориентированные в пространстве так, как это показано на рис. 6.2:

$$\dot{\mathbf{E}}_{\text{пад}}=\dot{E}_{x\,\text{пад}}e^{-j\beta_1 z}\mathbf{i}_x,$$

$$\dot{\mathbf{H}}_{\text{пад}}=\frac{\dot{E}_{x\,\text{пад}}}{Z_0}e^{-j\beta_1 z}\mathbf{i}_y. \qquad (6.4)$$

Здесь $\beta_1=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ — коэффициент фазы плоской волны с заданной частотой в вакууме, $Z_0=377$ Ом — характеристическое сопротивление вакуума.

Естественно предположить, что в рассматриваемой электродинамической системе помимо падающей существуют еще две волны:

отраженная волна, комплексные амплитуды векторов поля которой имеют вид

$$\dot{\mathbf{E}}_{\text{отр}}=\dot{E}_{x\,\text{отр}}e^{j\beta_1 z}\mathbf{i}_x,$$

$$\dot{\mathbf{H}}_{\text{отр}}=-\frac{\dot{E}_{x\,\text{отр}}}{Z_0}e^{j\beta_1 z}\mathbf{i}_y. \qquad (6.5)$$

Знак вектора $\dot{\mathbf{H}}_{\text{отр}}$ обусловлен тем, что вектор Пойнтинга отраженной волны $\mathbf{\Pi}_{\text{отр}}$ направлен в сторону уменьшения координаты z;

прошедшая (преломленная) волна, характеризуемая комплексными амплитудами векторов

$$\dot{\mathbf{E}}_{\text{пр}}=\dot{E}_{x\,\text{пр}}e^{-j\beta_2 z}\mathbf{i}_x,$$

$$\dot{\mathbf{H}}_{\text{пр}}=\frac{\dot{E}_{x\text{пр}}}{Z_{c2}}e^{-j\beta_2 z}\mathbf{i}_y. \tag{6.6}$$

Здесь $\beta_2=\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}$ и $Z_{c2}=\sqrt{\mu_a/\varepsilon_a}$ — соответственно коэффициент фазы и характеристическое сопротивление плоской электромагнитной волны в среде *2*.

При записи формулы (6.6) предполагается, что область *2* простирается неограниченно вдоль полуоси $z>0$. Кроме того, считается, что электромагнитные волны, распространяясь в области *2*, испытывают некоторое затухание. В соответствии с этими предположениями в области *2* отсутствует отраженная волна, распространяющаяся в отрицательном направлении оси z.

Поставим задачу найти соотношения между комплексными амплитудами векторов электромагнитного поля падающей, отраженной и прошедшей волн. Для этого воспользуемся тем, что на границе раздела, т. е. в плоскости $z=0$, обязаны выполняться граничные условия: касательные составляющие суммарных векторов напряженности электрического и магнитного полей должны быть непрерывны:

$$\dot{E}_{1\tau}=\dot{E}_{2\tau};\qquad \dot{H}_{1\tau}=\dot{H}_{2\tau}. \tag{6.7}$$

На основании формул (6.4) — (6.6) последние соотношения записываются следующим образом:

$$\dot{E}_{x\,\text{пад}}+\dot{E}_{x\,\text{отр}}=\dot{E}_{x\,\text{пр}},$$

$$\frac{\dot{E}_{x\,\text{пад}}}{Z_0}-\frac{\dot{E}_{x\,\text{отр}}}{Z_0}=\frac{\dot{E}_{x\,\text{пр}}}{Z_{c2}}. \tag{6.8}$$

Введем *коэффициент отражения* по электрическому полю R и *коэффициент прохождения* по электрическому полю T, определив данные величины как отношения комплексных амплитуд соответствующих электрических полей к комплексной амплитуде вектора напряженности электрического поля падающей волны на границе раздела:

$$R=\frac{\dot{E}_{x\,\text{отр}}}{\dot{E}_{x\,\text{пад}}};\qquad T=\frac{\dot{E}_{x\,\text{пр}}}{\dot{E}_{x\,\text{пад}}}. \tag{6.9}$$

Разделив левые и правые части равенств (6.8) на величину $\dot{E}_{x\,\text{пад}}$, приходим к системе двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных R и T:

$$1+R=T,$$
$$\frac{1}{Z_0}-\frac{R}{Z_0}=\frac{T}{Z_{c2}}, \tag{6.10}$$

откуда

$$R=\frac{Z_{c2}-Z_0}{Z_{c2}+Z_0},$$
$$T=\frac{2Z_{c2}}{Z_{c2}+Z_0}. \tag{6.11}$$

Таким образом, коэффициенты отражения и прохождения электромагнитной волны при нормальном падении на диэлектрическое полупространство полностью определяются характеристическими сопротивлениями граничащих сред.

Важный частный случай — нормальное падение плоской волны на немагнитный диэлектрик без потерь ($\mu=1$, $\sigma=0$). Из формулы (6.11) следует, что в этом случае коэффициенты R и T действительны:

$$R=(1-\sqrt{\varepsilon})/(1+\sqrt{\varepsilon}),$$
$$T=2/(1+\sqrt{\varepsilon}). \tag{6.12}$$

Следует обратить внимание на то, что если $\varepsilon>1$, то $R<0$. Это означает, что на границе раздела комплексная амплитуда электрического вектора отраженной волны сдвинута по фазе на 180° относительно комплексной амплитуды электрического вектора падающей волны.

Пример 6.1. Амплитудное значение напряженности электрического поля падающей волны $E_{x\,\text{пад}}=250$ В/м. Относительная диэлектрическая проницаемость материала $\varepsilon=3.2$. Найти модули усредненных значений векторов Пойнтинга падающей, отраженной и прошедшей волн.

Применив формулу (6.12), имеем $R=-0.283$, $T=0.717$. Характеристическое сопротивление диэлектрика $Z_{c2}=Z_0/\sqrt{\varepsilon}=211$ Ом. Модули усредненных векторов Пойнтинга (Вт/м^2)

$$\Pi_{\text{пад}}=E^2_{x\,\text{пад}}/(2Z_0)=82.9;\ \Pi_{\text{отр}}=(RE_{x\,\text{пад}})^2/$$
$$/(2Z_0)=6.6;\ \Pi_{\text{пр}}=(TE_{x\,\text{пад}})^2/(2Z_{c2})=76.2.$$

Легко заметить, что в рассматриваемом случае почти вся мощность электромагнитной волны поступает из вакуума в диэлектрик.

6.3. Нормальное падение плоской электромагнитной волны на диэлектрический слой конечной толщины

Интересно отметить, что формулы вида (6.11) встречаются в теории распределенных радиотехнических цепей [3] при решении задачи об отражении волн от стыка двух линий передачи с волновыми сопротивлениями Z_0 и Z_{c2} в условиях, когда вторая линия нагружена на свое волновое сопротивление и поэтому находится в согласованном режиме.

Отсюда, как следствие, вытекает возможность рассчитать коэффициент отражения плоской электромагнитной волны от диэлектрического слоя толщиной l при нормальном падении (рис. 6.3, *а*).

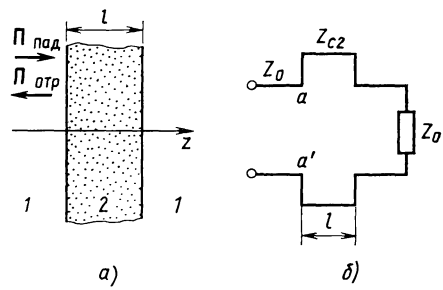


Рис. 6.3. Нормальное падение плоской волны на диэлектрический слой:
а — геометрия задачи; *б* — эквивалентная схема из отрезков линий передачи

Моделью такой электродинамической системы служит сочленение полубесконечной линии передачи, имеющей волновое сопротивление Z_0, с отрезком линии длиной l, имеющим волновое сопротивление Z_{c2} (рис. 6.3, *б*). Справа данный отрезок нагружен на сопротивление Z_0, которое учитывает влияние полубесконечного пространства правее диэлектрического слоя.

Будем полагать, что слой выполнен из диэлектрика без потерь с заданным параметром ε. Воспользуемся тем [3], что входное сопротивление в сечении $a - a'$ для волны, распространяющейся слева направо,

$$Z_{вх} = \frac{Z_0 + jZ_{c2}\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{1 + j\dfrac{Z_0}{Z_{c2}}\,\mathrm{tg}\,\vartheta} = Z_0\,\frac{1 + j\dfrac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\sqrt{\varepsilon}}}{1 + j\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{tg}\,\vartheta}, \qquad (6.13)$$

где $\vartheta=\beta_2 l=2\pi l/\lambda_2$ — электрическая толщина слоя на рабочей частоте, измеряемая в радианах. Тогда, используя формулу

$$R=\frac{Z_{вх}-Z_0}{Z_{вх}+Z_0},$$

после несложных преобразований находим выражение для коэффициента отражения от пластины

$$R=\frac{j(1-\varepsilon)\operatorname{tg}\vartheta}{2\sqrt{\varepsilon}+j(1+\varepsilon)\operatorname{tg}\vartheta}. \qquad (6.14)$$

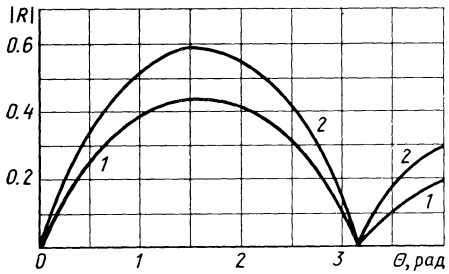


Рис. 6.4. Зависимость модуля коэффициента отражения от электрической толщины слоя:
1 — при $\varepsilon=2.56$; *2* — при $\varepsilon=3.8$

На рис. 6.4 изображены графики зависимости модуля коэффициента отражения

$$|R|=\frac{(\varepsilon-1)\,|\operatorname{tg}\vartheta|}{\sqrt{4\varepsilon+(1+\varepsilon)^2\operatorname{tg}^2\vartheta}} \qquad (6.15)$$

от параметра ϑ при двух различных значениях диэлектрической проницаемости слоя. Следует обратить внимание на то, что коэффициент отражения плоских волн от диэлектрического слоя является частотно-зависимым. С этим обстоятельством приходится считаться, например, при создании радиопрозрачных диэлектрических укрытий для антенных систем.

6.4. К вопросу о создании неотражающих сред

Практическая радиотехника настойчиво выдвигает проблему разработки таких искусственных материальных сред, которые не отражали бы электромагнитных волн. Такими материалами, например, покрывают стены безэховых камер — замкнутых помещений, в которых испытывают антенны СВЧ-диапазона.

Формула (6.11) устанавливает, что коэффициент отражения от границы раздела равен нулю только в том случае, когда $Z_{c2}=Z_0$. Данное равенство эквивалентно условию

$$\mu_a/\varepsilon_a=\mu_0/\varepsilon_0. \qquad (6.16)$$

До сих пор нет эффективного метода синтеза таких сред, для которых соотношение (6.16) выполнялось бы в достаточно широком диапазоне частот.

Говоря о создании неотражающих покрытий, следует иметь в виду, что увеличение меры затухания волн в среде, т. е. рост угла потерь δ, ведет не к уменьшению, а к возрастанию модуля коэффициента отражения. Действительно, чем больше значение угла $\delta = \operatorname{arc\,tg}[\sigma/(\omega\varepsilon_a)]$, тем значительнее модуль комплексной диэлектрической проницаемости среды. Поэтому при $\delta \to 90°$ имеем $\lim Z_{c2} = 0$. Следовательно, $\lim R = -1$, т. е. среда с бесконечно высоким затуханием ведет себя как идеальный отражатель.

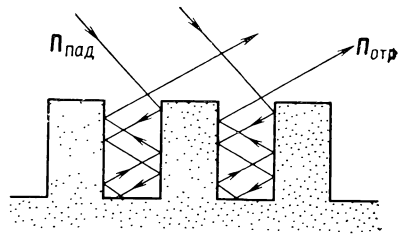


Рис. 6.5. Неотражающее покрытие с ребристой поверхностью

Практический способ создания неотражающих покрытий заключается в использовании эффекта многократных отражений. Рассмотрим, например, среду со значительными потерями, поверхность которой выполнена ребристой (рис. 6.5). При наклонном падении плоской электромагнитной волны внутри пазов структуры происходят многократные отражения, каждое из которых сопровождается рассеянием части энергии волны. В результате амплитуда отраженной волны оказывается значительно меньше амплитуды падающего поля.

Безусловно, такому способу компенсации отражений присущ ряд недостатков. Так, коэффициент отражения в той или иной степени зависит от угла падения и от рабочей частоты.

6.5. Падение плоской электромагнитной волны на диэлектрическое полупространство под произвольным углом

Рассмотрим общий случай, когда плоская электромагнитная волна, распространяясь в среде *1*, падает на границу раздела со средой *2* под некоторым *углом падения* φ, который лежит в пределах $0 \leqslant \varphi \leqslant 90°$. Геометрия данной задачи и ориентация координатных осей показаны на рис. 6.6.

Анализируя электромагнитные поля в данной системе, естественно ввести три волны — падающую, отраженную и преломленную. Векторы Пойнтинга всех перечисленных волн лежат в одной плоскости, называемой *плоскостью падения*.

Чтобы записать выражения комплексных амплитуд векторов соответствующих электромагнитных полей, следует воспользоваться результатами § 3.8. Из рис. 6.6 следует, что вектор $\mathbf{\Pi}_{пад}$ образует с положительными направлениями осей y и z углы $90° - \varphi$ и φ соответственно. Поскольку $\cos(90° - \varphi) = \sin\varphi$, комплексная ампли-

туда вектора напряженности электрического поля падающей волны может быть представлена следующим образом:

$$\dot{E}_{\text{пад}}(y, z)=\dot{E}_{m\,\text{пад}}e^{-j\beta_1(y\sin\varphi+z\cos\varphi)}, \tag{6.17}$$

где $\dot{E}_{m\,\text{пад}}$ — произвольный амплитудный множитель.

Если через φ' и ψ обозначить углы, показанные на рис. 6.6 и называемые соответственно *углами отражения* и *преломления*, то комплексные амплитуды любых составляющих векторов **E** отраженной и преломленной волн можно записать так:

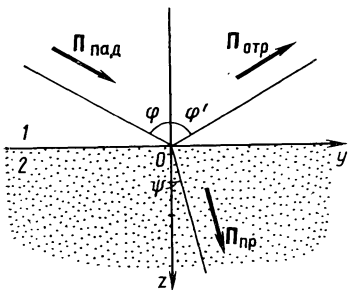


Рис. 6.6. Падение плоской электромагнитной волны под произвольным углом

$$\dot{E}_{\text{отр}}(y, z)=\dot{E}_{m\,\text{отр}}e^{-j\beta_1(y\sin\varphi'-z\cos\varphi')}, \tag{6.18}$$

$$\dot{E}_{\text{пр}}(y, z)=\dot{E}_{m\,\text{пр}}e^{-j\beta_2(y\sin\psi+z\cos\psi)}. \tag{6.19}$$

На границе раздела, т. е. в плоскости $z=0$, должны выполняться условия непрерывности касательных составляющих векторов **E** и **H**:

$$\dot{E}_{1\tau}=\dot{E}_{2\tau};\qquad \dot{H}_{1\tau}=\dot{H}_{2\tau}. \tag{6.20}$$

Из формул (6.17)—(6.19) получаем, например,

$$\dot{E}_{\tau\text{пад}}e^{-j\beta_1 y\sin\varphi}+\dot{E}_{\tau\text{отр}}e^{-j\beta_1 y\sin\varphi'}=\dot{E}_{\tau\text{пр}}e^{-j\beta_2 y\sin\psi}. \tag{6.21}$$

Поскольку все точки на границе раздела равноправны, соотношение (6.21) должно выполняться тождественно относительно переменной y. Для этого необходимо, чтобы показатели всех экспоненциальных функций, входящих в формулу (6.21), были одинаковыми при всех значениях y. Отсюда вытекают два тождества:

$$\varphi=\varphi', \tag{6.22}$$

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}=\frac{\beta_2}{\beta_1}. \tag{6.23}$$

Равенство (6.22) — это известный из элементарной физики закон, согласно которому *угол падения волны равен углу отражения*. Соотношение (6.23), также доказываемое в элементарной теории волновых процессов, называют *законом Снелля*.

Естественно, что при стремлении угла падения φ к нулю угол преломления ψ стремится к такому же пределу. Поэтому, если падение волны близко к нормальному, закон Снелля следует понимать в предельном смысле.

Поскольку коэффициенты фазы плоских волн в обеих средах вычисляются по одной и той же формуле вида $\beta=\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}$, соотношение (6.23) можно записать так, что в него войдут лишь электродинамические параметры граничащих сред, а рабочая частота ω будет исключена. Для этого введем безразмерную величину $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$, называемую *показателем преломления* физической среды. Если, например, $n_2>n_1$, то говорят, что оптическая плотность второй среды больше, чем первой. Введя показатели преломления граничащих сред в формулу закона Снелля, получим

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}=\frac{n_2}{n_1}. \qquad (6.24)$$

Рассмотренные выше закономерности справедливы безотносительно к ориентации векторов поля по отношению к плоскости падения. Более тщательный анализ показывает, что из-за векторного характера электромагнитного поля ряд явлений, возникающих при падении плоской электромагнитной волны на границу раздела, существенно связан с взаимной ориентацией плоскости поляризации и плоскости падения. Поэтому рассмотрим два основных случая.

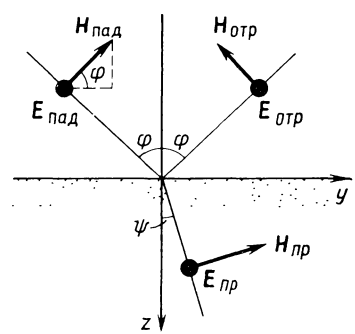


Рис. 6.7. Случай перпендикулярной поляризации

Перпендикулярная поляризация характерна тем, что плоскость поляризации, содержащая направление вектора **E**, перпендикулярна плоскости падения (рис. 6.7).

Пусть $\dot{E}_{\text{пад}}$, $\dot{E}_{\text{отр}}$ и $\dot{E}_{\text{пр}}$ — комплексные амплитуды векторов напряженности электрического поля падающей, отраженной и преломленной волн, существующие в плоскости $z=0$ при произвольном фиксированном значении координаты y. Граничные условия относительно электрических векторов запишутся весьма просто:

$$\dot{E}_{\text{пад}}+\dot{E}_{\text{отр}}=\dot{E}_{\text{пр}}. \qquad (6.25)$$

При записи граничных условий относительно векторов напряженности магнитного поля следует учесть прежде всего, что их касательные составляющие получаются путем умножения модулей векторов **H** на косинусы соответствующих углов (рис. 6.7). Далее, удобно выразить векторы **H** через векторы **E**, используя понятие характеристического сопротивления среды. Таким образом, условие непрерывности касательных составляющих векторов напряженности магнитного поля в плоскости $z=0$ принимает вид

$$\frac{\cos\varphi}{Z_{c1}}(\dot{E}_{\text{пад}}-\dot{E}_{\text{отр}})=\frac{\dot{E}_{\text{пр}}}{Z_{c2}}\cos\psi. \tag{6.26}$$

Введем в рассмотрение коэффициент отражения $R_\perp$ и коэффициент преломления $T_\perp$ по электрическому полю (нижний значок указывает, что эти величины относятся к случаю перпендикулярной поляризации):

$$R_\perp=\frac{\dot{E}_{\text{отр}}}{\dot{E}_{\text{пад}}};\quad T_\perp=\frac{\dot{E}_{\text{пр}}}{\dot{E}_{\text{пад}}}. \tag{6.27}$$

Теперь формулы (6.25) и (6.26) можно объединить, получив в результате систему двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $R_\perp$ и $T_\perp$:

$$\begin{cases} 1+R_\perp=T_\perp, \\ \dfrac{\cos\varphi}{Z_{c1}}(1-R_\perp)=\dfrac{T_\perp}{Z_{c2}}\cos\psi. \end{cases} \tag{6.28}$$

Решение системы (6.28) имеет следующий вид:

$$R_\perp=\frac{Z_{c2}\cos\varphi-Z_{c1}\cos\psi}{Z_{c2}\cos\varphi+Z_{c1}\cos\psi}, \tag{6.29}$$

$$T_\perp=\frac{2Z_{c2}\cos\varphi}{Z_{c2}\cos\varphi+Z_{c1}\cos\psi}. \tag{6.30}$$

Чтобы пользоваться формулами (6.29) и (6.30), необходимо, задавшись некоторым значением угла падения φ, предварительно вычислить угол преломления ψ на основании закона Снелля.

На практике часто приходится вычислять коэффициенты отражения и преломления плоских волн для частного случая, когда средой *1* служит вакуум или воздух ($\varepsilon=1$, $\mu=1$), а средой *2* — немагнитный ($\mu=1$) диэлектрик без потерь с относительной диэлектрической проницаемостью ε. При этом формулы (6.29) и (6.30) удается объединить с законом Снелля, записав их в виде

$$R_\perp=\frac{\cos\varphi-\sqrt{\varepsilon-\sin^2\varphi}}{\cos\varphi+\sqrt{\varepsilon-\sin^2\varphi}}, \tag{6.31}$$

$$T_\perp=\frac{2\cos\varphi}{\cos\varphi+\sqrt{\varepsilon-\sin^2\varphi}}. \tag{6.32}$$

Пример 6.2. Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией падает из воздуха под углом $\varphi=60°$ на границу раздела с диэлектриком, имеющим параметры $\varepsilon=3.8$, $\mu=1$. Амплитуда вектора напряженности электрического поля падающей волны $E_{m\,\text{пад}}=0.4$ В/м. Найти амплитуды векторов напряженности магнитного поля отраженной и преломленной волн.

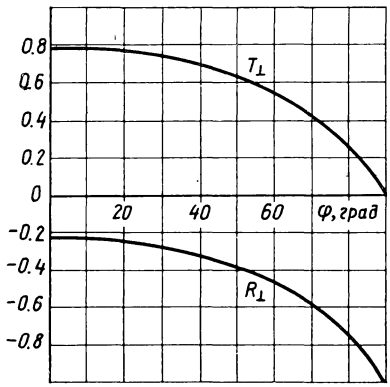


Рис. 6.8. Зависимости коэффициентов отражения и преломления от угла падения для случая перпендикулярной поляризации при значении $\varepsilon=2.56$

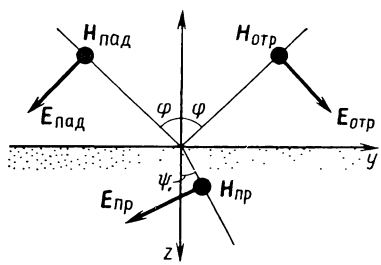


Рис. 6.9. Случай параллельной поляризации

По формулам (6.31)—(6.32) находим, что

$R_\perp=-0.555, \qquad T_\perp=0.455.$

Характеристическое сопротивление диэлектрика

$Z_{c2}=377/\sqrt{\varepsilon}=193$ Ом.

Тогда

$H_{m\,\text{отр}}=|R_\perp|E_{m\,\text{пад}}/Z_0=5.9\cdot10^{-4}$ А/м,

$H_{m\,\text{пр}}=T_\perp E_{m\,\text{пад}}/Z_{c2}=9.2\cdot10^{-4}$ А/м.

Графики зависимостей $R_\perp(\varphi)$ и $T_\perp(\varphi)$, рассчитанные для некоторого конкретного значения ε, изображены на рис. 6.8. Следует обратить внимание на то, что при $\varphi\to90°$ величина $T_\perp$ монотонно стремится к нулю, в то время как коэффициент отражения $R_\perp$, отрицательный при любом угле падения, стремится к значению —1.

Параллельная поляризация характеризуется тем, что векторы **E** всех трех волн — падающей, отраженной и преломленной — параллельны плоскости падения (рис. 6.9).

По аналогии со случаем перпендикулярной поляризации можно записать граничные условия непрерывности касательных составляющих векторов электромагнитного поля. Данные условия принимают вид

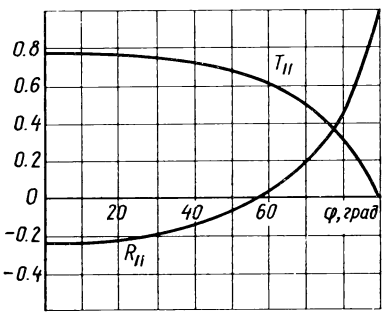


Рис. 6.10. Зависимости коэффициентов отражения и преломления от угла падения для случая параллельной поляризации при значении $\varepsilon=2.56$

$$(\dot{E}_{\text{пад}}+\dot{E}_{\text{отр}})\cos\varphi=\dot{E}_{\text{пр}}\cos\psi, \tag{6.33}$$

$$(\dot{E}_{\text{пад}}-\dot{E}_{\text{отр}})/Z_{c1}=\dot{E}_{\text{пр}}/Z_{c2}. \tag{6.34}$$

Введем коэффициенг отражения $R_{\parallel}$ и коэффициент преломления $T_{\parallel}$ по электрическому полю (нижний значок указывает на то, что данные величины относятся к случаю параллельной поляризации). Разделив обе части равенств (6.33) и (6.34) на комплексную амплитуду $\dot{E}_{\text{пад}}$, получаем следующую систему уравнений относительно неизвестных $R_{\parallel}$ и $T_{\parallel}$:

$$\begin{aligned}(1+R_{\parallel})\cos\varphi&=T_{\parallel}\cos\psi,\\(1-R_{\parallel})/Z_{c1}&=T_{\parallel}/Z_{c2},\end{aligned} \tag{6.35}$$

откуда

$$R_{\parallel}=\frac{Z_{c2}\cos\psi-Z_{c1}\cos\varphi}{Z_{c2}\cos\psi+Z_{c1}\cos\varphi}, \tag{6.36}$$

$$T_{\parallel}=\frac{2Z_{c2}\cos\varphi}{Z_{c2}\cos\psi+Z_{c1}\cos\varphi}. \tag{6.37}$$

Если средой *2* служит немагнитный диэлектрик с относительной проницаемостью ε, формулы (6.36) и (6.37) приводятся к виду, более удобному для инженерных расчетов:

$$R_{\parallel}=\frac{\sqrt{\varepsilon-\sin^2\varphi}-\varepsilon\cos\varphi}{\sqrt{\varepsilon-\sin^2\varphi}+\varepsilon\cos\varphi}, \tag{6.38}$$

$$T_{\parallel}=\frac{2\sqrt{\varepsilon}\cos\varphi}{\sqrt{\varepsilon-\sin^2\varphi}+\varepsilon\cos\varphi}. \tag{6.39}$$

Конкретные графики зависимостей $R_{\parallel}(\varphi)$ и $T_{\parallel}(\varphi)$, полученные в соответствии с данными формулами, изображены на рис. 6.10. Сравнивая их с аналогичными зависимостями, изображенными на рис. 6.8, можно отметить, что характер кривых $T_{\parallel}(\varphi)$ и $T_{\perp}(\varphi)$ практически один и тот же. Однако кривые $R_{\parallel}(\varphi)$ и $R_{\perp}(\varphi)$ принципиально различны — монотонно возрастающая функция $R_{\parallel}(\varphi)$ при некотором значении угла падения изменяет знак, проходя через нуль.

6.6. Угол Брюстера

Так принято называть угол падения, при котором падающая волна полностью, без отражения, переходит через границу раздела двух материальных сред.

Из выражений (6.29) и (6.36) следует, что угол Брюстера $\varphi_{\text{Б}}$ удовлетворяет одному из двух уравнений:

$$Z_{c2}\cos\varphi_{\text{Б}} - Z_{c1}\cos\psi_{\text{Б}} = 0 \tag{6.40}$$

при перпендикулярной поляризации, либо

$$Z_{c2}\cos\psi_{\text{Б}} - Z_{c1}\cos\varphi_{\text{Б}} = 0 \tag{6.41}$$

при параллельной поляризации. Здесь под $\psi_{\text{Б}}$ подразумевается угол преломления, соответствующий углу падения $\varphi_{\text{Б}}$.

Рассмотрим типичный случай, когда обе граничащие среды являются немагнитными диэлектриками ($\mu_1 = \mu_2 = 1$), причем оптическая плотность второй среды больше, чем первой ($\varepsilon_2 > \varepsilon_1$). Из этих предположений следует, что $Z_{c1} > Z_{c2}$. Кроме того, в силу закона Снелля имеет место неравенство $\varphi > \psi$, т. е. $\cos\varphi < \cos\psi$.

Обращаясь к уравнениям (6.40) и (6.41), видим, что первое из этих уравнений в рамках сделанных предположений не имеет решений. Таким образом, явление Брюстера при падении плоской электромагнитной волны на немагнитный диэлектрик может наблюдаться лишь при параллельной поляризации падающей волны.

Удобную формулу для вычисления угла Брюстера можно получить из соотношения (6.38). Действительно, угол $\varphi_{\text{Б}}$ служит корнем уравнения

$$\varepsilon\cos\varphi_{\text{Б}} = \sqrt{\varepsilon - \sin^2\varphi_{\text{Б}}},$$

откуда легко находим

$$\varphi_{\text{Б}} = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\varepsilon}. \tag{6.42}$$

Явление Брюстера используется в технике. Так, пластина из диэлектрика, установленная под углом Брюстера по отношению к направлению распространения падающей волны, при правильном

выборе поляризации не создает отражений. В то же время эта пластина может играть роль конструктивного элемента какого-либо прибора, обеспечивая, например, его вакуумное уплотнение.

Важно отметить, что при падении плоских волн из вакуума на диэлектрическое полупространство ($\varepsilon>1$) знаки действительных коэффициентов отражения $R_\perp$ и $R_\parallel$ совпадают при $\varphi<\varphi_Б$ и оказываются противоположными, если $\varphi>\varphi_Б$ (см. рис. 6.8 и 6.10). Эта дает возможность преобразовывать направление вращения векторов в волнах с круговой или эллиптической поляризацией. Чтобы убедиться в этом, введем единичные векторы перпендикулярного $\mathbf{i}_\perp$ и параллельного $\mathbf{i}_\parallel$ направлений (рис. 6.11) и представим электрический вектор падающей волны, поляризованной по кругу с левым направлением вращения, в форме

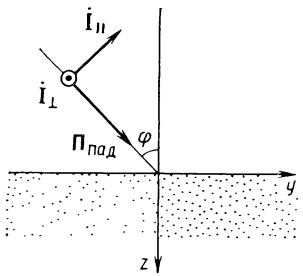


Рис. 6.11. Единичные векторы перпендикулярного и параллельного направлений

$$\dot{\mathbf{E}}_{пад}=E_m(\mathbf{i}_\parallel - j\mathbf{i}_\perp)\,e^{-j\beta_1(y\sin\varphi+z\cos\varphi)} \tag{6.43}$$

[ср. с формулой (3.50), приняв во внимание, что векторы $\mathbf{i}_\parallel$ и $\mathbf{i}_\perp$ ориентированы по отношению к вектору $\mathbf{\Pi}_{пад}$ так же, как и векторы $\mathbf{i}_x$ и $\mathbf{i}_y$ по отношению к $\mathbf{i}_z$]. Тогда комплексная амплитуда электрического вектора отраженной волны

$$\dot{\mathbf{E}}_{отр}=E_m(R_\parallel\mathbf{i}_\parallel - jR_\perp\mathbf{i}_\perp)\,e^{-j\beta_1(y\sin\varphi-z\cos\varphi)} \tag{6.44}$$

при $\varphi>\varphi_Б$ будет, очевидно, соответствовать эллиптически поляризованной волне с правым направлением вращения. Действительно, здесь два взаимно перпендикулярных компонента, поляризованных линейно, имеют разность фаз, отличающуюся на 180° от той, которая наблюдается в падающей волне.

6.7. Полное внутреннее отражение

Обратившись вновь к формулировке закона Снелля

$$\sin\varphi/\sin\psi=n_2/n_1,$$

заметим, что могут представиться два случая:

1. Оптическая плотность среды *2* превосходит оптическую плотность среды *1*, т. е. $n_2>n_1$. При этом всегда $\psi<\varphi$, а поскольку угол падения φ лежит в интервале $0\leqslant\varphi\leqslant90°$, преломленная волна существует при любом угле падения.

2. Среда *2* оптически менее плотна по сравнению со средой *1*, т. е. $n_2 < n_1$. В этом случае всегда $\psi > \varphi$ и поэтому найдется такое значение угла падения, при котором преломленная волна будет распространяться параллельно границе раздела под углом $\psi = 90°$. Данное критическое значение угла падения называют *углом полного внутреннего отражения:*

$$\varphi_{\text{пво}} = \arcsin(n_2/n_1). \tag{6.45}$$

При углах падения $\varphi > \varphi_{\text{пво}}$ преломленной волны в обычном смысле не существует; энергия падающей волны полностью отражается внутрь среды с большей оптической плотностью,

Явление полного внутреннего отражения широко используется в оптике, например для изменения направления пучка лучей при помощи призмы (рис. 6.12). Подобные же устройства находят применение в коротковолновой части СВЧ-диапазона (на частотах выше 50 ГГц).

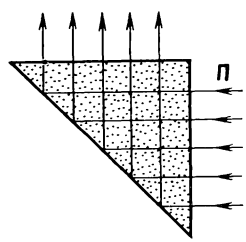


Рис. 6.12. Диэлектрическая призма с полным внутренним отражением

6.8. Неоднородные плоские волны

Приведенный анализ явления полного внутреннего отражения является неполным, поскольку не позволяет ответить на вопрос о том, что́ происходит при углах падения φ, превышающих угол $\varphi_{\text{пво}}$.

Обратимся к формуле (6.24), предполагая, что $n_2 < n_1$. Можно заметить, что в этом случае при $\varphi > \varphi_{\text{пво}}$ величина $\sin\psi$ должна быть больше единицы. Если угол преломления является действительным, такая ситуация невозможна. Однако известно, что синус, рассматриваемый как функция комплексного аргумента, может принимать любые, в том числе сколь угодно большие, действительные значения. В соответствии с этим *формально* будем считать, что при $\varphi > \varphi_{\text{пво}}$ угол преломления ψ, достигший значения 90° при $\varphi = \varphi_{\text{пво}}$, получает мнимые приращения, так что $\psi = 90° + j\alpha$. Легко проверить, что при этом

$$\sin\psi = \operatorname{ch}\alpha; \qquad \cos\psi = -j\operatorname{sh}\alpha. \tag{6.46}$$

Итак, концепция комплексного угла преломления позволяет удовлетворить закону Снелля в области углов падения, превышающих угол полного внутреннего отражения. Подставив выражения (6.46) в формулу (6.19), находим зависимость комплексной амплитуды электрического вектора преломленной волны от пространственных координат:

$$\dot{E}_{\text{пр}}(y, z) = \dot{E}_{m\,\text{пр}} e^{-j\beta_1 y \operatorname{ch}\alpha} e^{-\beta_1 z \operatorname{sh}\alpha}. \tag{6.47}$$

По математической форме данное соотношение весьма напоминает выражение для комплексной амплитуды плоской волны, распространяющейся в среде с потерями (см. гл. 5). Однако имеется и принципиальная разница, так как в соответствии с выражением (6.47) волна распространяется вдоль координаты y, в то время как экспоненциальное уменьшение амплитуды волны происходит вдоль координаты z. Подобные процессы называют *неоднородными плоскими волнами.*

С физической точки зрения рассматриваемая неоднородная плоская волна распространяется вдоль границы раздела, как бы «прилипая» к ней, т. е. с резким уменьшением амплитуды при удалении точки наблюдения от границы раздела по направлению нормали. Указанная особенность дает основание называть такие волновые процессы *поверхностными волнами.*

На первый взгляд может показаться, что понятие плоской волны, распространяющейся под комплексным углом по отношению к некоторой выбранной оси, довольно искусственно. Однако, по существу, такая расширенная трактовка математической модели волнового процесса совершенно правомерна. Дело в том, что функция вида (6.47) является одним из частных решений уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{\text{пр}}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \dot{E}_{\text{пр}}}{\partial z^2}+\beta_2^2 \dot{E}_{\text{пр}}=0.$$

В этом можно убедиться прямой подстановкой, приняв во внимание, что $\operatorname{sh}^2\alpha=\operatorname{ch}^2\alpha-1$.

Поскольку $\operatorname{ch}\alpha>1$, коэффициент фазы поверхностной волны $\beta_{\text{пов}}=\beta_2\operatorname{ch}\alpha$ всегда больше коэффициента фазы однородной плоской волны с той же частотой. Так как коэффициент фазы непосредственно связан с фазовой скоростью соотношением $v_\phi=\omega/\beta$, приходим к выводу о том, что неоднородные поверхностные волны имеют меньшую скорость по сравнению с однородными плоскими волнами. По этой причине поверхностные волны называют также *замедленными волнами.* Наибольшее замедление фазовой скорости наблюдается в том случае, когда волна в среде *1* распространяется параллельно границе раздела, т. е. когда $\varphi=90°$. При этом

$$\operatorname{ch}\alpha=n_1/n_2; \qquad \beta_{\text{пов}}=\beta_2 n_1/n_2=\beta_1.$$

Таким образом, фазовая скорость волн в оптически менее плотной среде стремится к величине, свойственной более плотной среде.

Остановимся, наконец, на вопросе о глубине проникновения волн в среду *2* при полном внутреннем отражении. Из формулы (6.47) следует, что расстояние вдоль координаты z, на котором амплитуда поля уменьшается в $e=2.718...$ раза, есть

$$d=1/(\beta_2\operatorname{ch}\alpha).$$

Таким образом, электромагнитное поле в менее плотной среде *2* практически существует лишь в поверхностном слое, толщина которого порядка одной длины волны. Существенно, что с ростом угла падения φ замедление становится более интенсивным, а глубина проникновения поля в менее плотную среду сокращается.

Пример 6.3. Найти фазовую скорость и глубину проникновения неоднородной плоской волны, возникающей при падении плоской электромагнитной волны из среды *1* с параметрами $\varepsilon_1=3.4$, $\mu_1=1$ на границу раздела со средой *2*, имеющей параметры $\varepsilon_2=1$, $\mu_2=1$. Угол падения $\varphi=45°$, частота поля $f=35$ ГГц.

В данном случае угол полного внутреннего отражения

$$\varphi_{\text{ПВО}}=\arcsin\left(1/\sqrt{3.4}\right)=32.8°.$$

Поскольку $\varphi>\varphi_{\text{ПВО}}$, неоднородные плоские волны в среде *2* действительно возникают.

Для определения комплексного угла преломления воспользуемся законом Снелла

$$\sin\psi=\sqrt{3.4}\,\sin\varphi=1.3,$$

откуда получаем уравнение относительно параметра α:

$$\operatorname{ch}\alpha=1/2\,(e^{\alpha}+e^{-\alpha})=1.3.$$

Чтобы численно решить это трансцендентное уравнение, преобразуем его следующим образом:

$$\alpha=\ln(2.6-e^{-\alpha}).$$

Взяв в качестве нулевого приближения к корню значение $\alpha=0$ и проведя на микрокалькуляторе ряд последовательных итераций, получаем приближенное значение корня $\alpha=0.756$ (все знаки верные).

Таким образом, угол преломления

$$\psi=\pi/2+j0.756.$$

Коэффициент фазы однородной плоской волны в среде *2*

$$\beta_2=\omega/c=733\ \text{м}^{-1}.$$

Коэффициент фазы поверхностной волны

$$\beta_{\text{пов}}=\beta_2\operatorname{ch}\alpha=952.9\ \text{м}^{-1},$$

откуда фазовая скорость

$$v_{\text{ф пов}}=\omega/\beta_{\text{пов}}=2.308\cdot10^8\ \text{м/с}.$$

Глубина проникновения поля в менее плотную среду
$d = 1/(\beta_2 \operatorname{sh} \alpha) = 1.64 \cdot 10^{-3}$ м $= 1.64$ мм.

В дальнейшем свойства поверхностных электромагнитных волн будут изучены более подробно (см. гл. 15).

6.9. Приближенные граничные условия Леонтовича

В данном параграфе будут рассмотрены приближенные граничные условия для векторов электромагнитного поля, имеющие место в том случае, когда среда *2* является хорошим проводником. Впервые этот вопрос был исследован известным советским физиком М. А. Леонтовичем в связи с его работами 40-х годов по теории распространения радиоволн вокруг Земли.

Пусть плоская электромагнитная волна падает из воздуха (среда *1*) под углом φ на границу раздела с немагнитной ($\mu = 1$) хорошо проводящей средой *2*, характеризуемой удельной проводимостью σ. Такая материальная среда имеет комплексный показатель преломления

$$n_2 = \sqrt{\frac{-j\sigma}{\omega\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}}\,(1-j).$$

Здесь использовано то, что

$$\sqrt{-j} = e^{-j\pi/4} = (1-j)/\sqrt{2}.$$

По закону Снелля,

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}}\,(1-j), \tag{6.48}$$

откуда видно, что в хорошо проводящей среде преломленная волна распространяется под комплексным углом и поэтому является неоднородной плоской волной.

Перепишем формулу (6.48) в виде

$$\sin\psi = \sqrt{\frac{\omega\varepsilon_0}{2\sigma}}\,(\sin\varphi)\,(1+j) \tag{6.49}$$

и примем во внимание, что $\omega\varepsilon_0/\sigma \ll 1$. Тогда синус в левой части равенства (6.49) можно приближенно заменить аргументом и считать, что

$$\psi \approx \sqrt{\frac{\omega\varepsilon_0}{2\sigma}}\,(\sin\varphi)\,(1+j).$$

В пределе при $\sigma\to\infty$ имеем $\psi\to 0$, откуда

$$\sin\psi\to 0; \qquad \cos\psi\to 1 \tag{6.50}$$

независимо от значения угла падения φ.

Комплексную амплитуду вектора напряженности электрического поля в среде *2*, задаваемую равенством (6.19), следует представить в виде

$$\dot{E}_{\text{пр}}(y,\ z)=\dot{E}_{m\ \text{пр}}e^{-\gamma_2(y\sin\psi+z\cos\psi)}, \tag{6.51}$$

где γ_2 — комплексный коэффициент распространения однородной плоской волны в среде с потерями. Объединив выражения (6.50) и (6.51), приходим к выводу о том, что в предельном случае хорошо проводящей среды

$$\dot{E}_{\text{пр}}(z)=\dot{E}_{m\ \text{пр}}e^{-\gamma_2 z}. \tag{6.52}$$

В соответствии с этой формулой преломленная волна проникает внутрь среды *2 практически по направлению нормали к границе раздела* при любом угле падения. В этом состоит наглядный смысл приближенных граничных условий Леонтовича.

Согласно сказанному, эквивалентная схема металлоподобной среды имеет вид полубесконечного отрезка однородной линии передачи с характеристическим сопротивлением, вычисляемым по общей формуле

$$Z_{\text{см}}=\sqrt{\frac{\mu_{\text{ам}}}{\tilde{\varepsilon}_{\text{ам}}}}=\sqrt{\frac{\omega\mu_{\text{ам}}}{2\sigma}}(1+j). \tag{6.53}$$

В начале линии, т. е. на границе раздела, касательные составляющие электрического и магнитного векторов должны удовлетворять очевидному соотношению, которое вытекает из понятия характеристического сопротивления:

$$Z_{\text{см}}=\dot{E}_{\tau\text{м}}/\dot{H}_{\tau\text{м}}. \tag{6.54}$$

Как известно, на поверхности идеального проводника $\dot{E}_\tau=0$. В случае большой, но конечной проводимости на границе раздела возникает отличная от нуля касательная проекция $\dot{E}_{\tau\text{м}}$. Хотя эта величина мала (поскольку $Z_{\text{см}}\to 0$ при $\sigma\to\infty$), она обусловливает поток мощности электромагнитного поля внутрь проводящей среды, идущей на ее нагрев.

Если граница раздела совпадает с плоскостью XOY, а ось z направлена внутрь среды *2*, то на границе должны выполняться следующие условия:

$$\frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y}=Z_{\text{см}}; \qquad \frac{\dot{E}_y}{\dot{H}_x}=-Z_{\text{см}}. \tag{6.55}$$

Читатель легко проверит, что при таком выборе знаков средний поток вектора Пойнтинга всегда будет направлен вдоль положительного направления оси z.

Чтобы использовать граничные условия Леонтовича в форме (6.54) или (6.55), нужно знать касательную проекцию $\dot{H}_{\tau м}$. Приближенно полагают, что эта величина равна аналогичной проекции, которая существует *на поверхности идеального проводника.* Ошибка от такого допущения будет весьма мала, поскольку в случае реального металла модуль коэффициента отражения близок к единице.

Пример 6.4. Плоская волна с частотой $f=2$ ГГц имеет амплитуду электрического вектора $E_{m\,пад}=350$ В/м и падает из воздуха по направлению нормали на границу раздела с металлом, имеющим параметры $\mu=1$, $\sigma=2\cdot10^7$ См/м. Найти амплитуду касательной проекции электрического вектора на границе раздела, а также среднее значение вектора Пойнтинга прошедшей волны.

Амплитуда магнитного вектора падающей волны

$$H_{m\,пад}=E_{m\,пад}/Z_0=0.93 \text{ А/м}.$$

По формуле (6.53) находим характеристическое сопротивление металла на заданной частоте:

$$Z_{см}=0.02\,(1+j) \text{ Ом}.$$

В соответствии с формулой (6.2) амплитуда касательной проекции магнитного вектора на поверхности металла

$$\dot{H}_{\tau м}=2H_{m\,пад}=1.86 \text{ А/м},$$

откуда

$$\dot{E}_{\tau м}=Z_{см}\dot{H}_{\tau м}=0.0372\,(1+j) \text{ В/м}.$$

Среднее значение вектора Пойнтинга прошедшей волны

$$\Pi_{ср.пр}=\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\dot{E}_{\tau м}\overset{*}{H}_{\tau м})=3.4\cdot10^{-2} \text{ Вт/м}^2.$$

Следует заметить, что мощность, идущая на нагрев металла, относительно невелика, поскольку плотность потока мощности падающей волны

$$\Pi_{ср.пад}=E^2_{m\,пад}/(2Z_0)=162 \text{ Вт/м}^2.$$

Условия Леонтовича будут использованы в гл. 11 для решения практически важных задач о потерях в СВЧ-устройствах, вызванных конечной проводимостью металлических стенок.

ЗАДАЧИ

6.1. На идеально проводящую плоскость из воздуха по направлению нормали падает плоская электромагнитная волна со средним значением плотности потока мощности 230 Вт/м^2. Вычислите амплитуду вектора плотности поверхностного электрического тока на границе раздела.

6.2. Плоская электромагнитная волна падает по нормали из воздуха на диэлектрическое полупространство с параметрами $\varepsilon = 9.5$, $\mu = 1$. Плотность потока мощности падающей волны составляет 30 Вт/м^2. Найдите плотность потока мощности плоской волны, прошедшей внутрь диэлектрика.

6.3. Плоская электромагнитная волна, существующая в среде без потерь с параметрами $\varepsilon = 3.8$, $\mu = 1$, падает под некоторым углом на границу раздела с вакуумом. Определите углы падения, при которых: а) мощность падающей волны целиком переходит из диэлектрика в вакуум; б) вся мощность отражается назад в диэлектрик. Обратите внимание на характер поляризации падающей волны.

6.4. На границу раздела между диэлектриком без потерь с параметрами $\mu = 1.1$, $\varepsilon = 4.6$ и вакуумом падает плоская электромагнитная волна, имеющая круговую поляризацию. Определите значение угла падения, при котором поляризация отраженной волны будет линейной.

6.5. Пластина толщиной $d = 1.4$ см выполнена из диэлектрика без потерь с параметрами $\varepsilon = 2.1$, $\mu = 1$. Найдите коэффициент отражения плоской электромагнитной волны от этой пластины при нормальном падении, если частота поля $f = 12$ ГГц.

6.6. Из теории линий передачи с распределенными параметрами известно [3], что для обеспечения согласованного режима в системе из двух состыкованных линий с различными волновыми сопротивлениями можно применить четвертьволновый трансформатор. Основываясь на аналогии, вычислите толщину и относительную диэлектрическую проницаемость слоя диэлектрика, который позволяет компенсировать отражение от границы раздела воздуха со средой, у которой $\varepsilon = 3.8$, $\mu = 2.2$. Частота поля $f = 3$ ГГц.

6.7. Амплитуда магнитного вектора плоской электромагнитной волны составляет 60 А/м. Волна падает по нормали из воздуха на границу раздела с металлом, у которого $\mu = 1$, $\sigma = 3 \cdot 10^7$ См/м. Найдите амплитуду электрического вектора на границе раздела, если частота поля 5 ГГц.

6.8. Применительно к условию предыдущей задачи найдите числовое значение коэффициента отражения мощности, а также модуль вектора Пойнтинга в точках, непосредственно прилегающих к границе раздела.

Глава седьмая

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРАВЛЯЕМЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Важными компонентами радиотехнических систем сверхвысоких частот являются *волноводы* — устройства для передачи энергии электромагнитных колебаний от генератора к нагрузке. Любой волновод независимо от особенностей конструкции должен обеспечить локализацию области, в которой распространяются электромагнитные волны. Простейшей идеализированной структурой, которая дает возможность ограничить пространственную область существования поля, является бесконечная металлическая плоскость. С ее помощью можно отделить (экранировать) одно полупространство от другого.

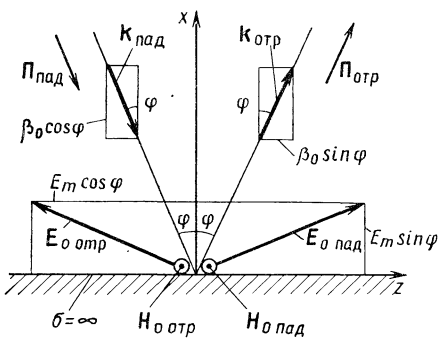


Рис. 7.1. Падение плоской волны с параллельной поляризацией на идеально проводящую плоскость

В данной главе рассмотрены явления при наклонном падении однородной плоской электромагнитной волны на идеально проводящую плоскость. Анализируется интерференция падающей и отраженной волн с учетом векторного характера электромагнитного поля. Показано, что суммарное электромагнитное поле представляет собой неоднородную плоскую волну, которая распространяется вдоль направляющей плоскости.

7.1. Падение плоской волны с параллельной поляризацией

Пусть на идеально проводящую плоскость под некоторым углом φ падает однородная плоская электромагнитная волна (рис. 7.1), электрический вектор которой лежит в плоскости XOZ. По терминологии, принятой в гл. 6, при этом наблюдается параллельная поляризация падающей волны. Считается, что полупространство $x>0$ имеет электродинамические параметры ε_0, μ_0 (вакуум). Предполагается также, что падающая волна гармонически изменяется с частотой ω; коэффициент фазы этой волны $\beta_0=\omega/c$.

Введем волновой вектор падающей волны $\mathbf{k}_{пад}$, который имеет модуль β_0 и совпадает по направлению с вектором Пойнтинга па-

дающей волны $\Pi_{пад}$ (см. гл. 3). Из рис. 7.1 видно, что данный волновой вектор образует угол 180°—φ с осью x, 90°—φ с осью z и 90° с осью y (имеются в виду положительные направления осей). Так как $\cos(180°-\varphi)=-\cos\varphi$, $\cos(90°-\varphi)=\sin\varphi$, то волновой вектор падающей волны имеет следующее координатное представление:

$$\mathbf{k}_{пад}=\beta_0(-\cos\varphi\mathbf{i}_x+\sin\varphi\mathbf{i}_z). \tag{7.1}$$

Тогда комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля падающей волны

$$\dot{\mathbf{E}}_{пад}=\mathbf{E}_{0пад}e^{-j\mathbf{k}_{пад}\mathbf{r}}=\mathbf{E}_{0пад}e^{-j\beta_0(-x\cos\varphi+z\sin\varphi)}, \tag{7.2}$$

где векторный амплитудный коэффициент $\mathbf{E}_{0\,пад}$ связан с физической амплитудой электрического вектора E_m следующим образом:

$$\mathbf{E}_{0пад}=E_m\sin\varphi\mathbf{i}_x+E_m\cos\varphi\,\mathbf{i}_z. \tag{7.3}$$

Заметим, что начальная фаза в выражении (7.2) может выбираться произвольно и поэтому допустимо считать, что вектор $\mathbf{E}_{0\,пад}$ имеет чисто действительные проекции, что удобно для последующего анализа.

При падении плоской электромагнитной волны на идеально проводящую плоскость возникает однородная плоская отраженная волна с волновым вектором

$$\mathbf{k}_{отр}=\beta_0(\cos\varphi\mathbf{i}_x+\sin\varphi\mathbf{i}_z), \tag{7.4}$$

который в соответствии с законами отражения (см. гл. 6) направлен под углом φ к положительному направлению оси x. Комплексная амплитуда электрического вектора отраженной волны

$$\dot{\mathbf{E}}_{отр}=\mathbf{E}_{0отр}e^{-j\mathbf{k}_{отр}\mathbf{r}}=\mathbf{E}_{0отр}e^{-j\beta_0(x\cos\varphi+z\sin\varphi)} \tag{7.5}$$

должна иметь такой векторный амплитудный коэффициент $\mathbf{E}_{0отр}$, чтобы суммарное электромагнитное поле на границе раздела при $x=0$ удовлетворяло граничному условию: z-я проекция вектора напряженности электрического поля должна быть равна нулю. Иными словами, отраженная волна должна скомпенсировать касательную составляющую электрического вектора поля падающей волны на границе раздела. Как следует из рис. 7.1, для этого требуется, чтобы

$$\mathbf{E}_{0отр}=E_m\sin\varphi\mathbf{i}_x-E_m\cos\varphi\mathbf{i}_z. \tag{7.6}$$

Структура электрического поля над плоскостью. Не составит труда записать общее выражение для комплексной амплитуды электрического вектора суммарного электромагнитного поля в полупространстве $x>0$:

$$\dot{\mathbf{E}}_{\Sigma}=\dot{\mathbf{E}}_{\text{пад}}+\dot{\mathbf{E}}_{\text{отр}}=E_m \sin\varphi\left[e^{-j\beta_0(-x\cos\varphi+z\sin\varphi)}+\right.$$
$$\left.+e^{-j\beta_0(x\cos\varphi+z\sin\varphi)}\right]\mathbf{i}_x+E_m\cos\varphi\left[e^{-j\beta_0(-x\cos\varphi+z\sin\varphi)}-\right.$$
$$\left.-e^{-j\beta_0(x\cos\varphi+z\sin\varphi)}\right]\mathbf{i}_z. \qquad (7.7)$$

Полученное равенство целесообразно преобразовать, вынеся за скобки общие множители в обоих слагаемых правой части, а затем воспользовавшись формулами Эйлера:

$$\dot{\mathbf{E}}_{\Sigma}=E_m \sin\varphi\, e^{-j\beta_0 z\sin\varphi}\left(e^{j\beta_0 x\cos\varphi}+e^{-j\beta_0 x\cos\varphi}\right)\mathbf{i}_x+$$
$$+E_m\cos\varphi e^{-j\beta_0 z\sin\varphi}\left(e^{j\beta_0 x\cos\varphi}-e^{-j\beta_0 x\cos\varphi}\right)\mathbf{i}_z=$$
$$=2E_m\sin\varphi\cos(\beta_0 x\cos\varphi)e^{-j\beta_0 z\sin\varphi}\mathbf{i}_x+$$
$$+j2E_m\cos\varphi\sin(\beta_0 x\cos\varphi)e^{-j\beta_0 z\sin\varphi}\mathbf{i}_z. \qquad (7.8)$$

Структура магнитного поля над плоскостью. Поскольку электрический вектор падающей волны лежит в плоскости XOZ, перпендикулярный ему вектор напряженности магнитного поля имеет единственную составляющую, ориентированную вдоль оси y. Комплексная амплитуда y-й проекции магнитного вектора падающей волны должна зависеть от пространственных координат x и z таким же образом, как и комплексная амплитуда электрического вектора [см. формулу (7.2)]:

$$\dot{\mathbf{H}}_{\text{пад}}=\frac{E_m}{Z_0}e^{-j\beta_0(-x\cos\varphi+z\sin\varphi)}\mathbf{i}_y, \qquad (7.9)$$

где $Z_0=377$ Ом — характеристическое сопротивление вакуума.

Так как вектор Пойнтинга отраженной волны направлен вдоль волнового вектора $\mathbf{k}_{\text{отр}}$, необходимо (рис. 7.1), чтобы магнитный вектор отраженной волны $\mathbf{H}_{\text{отр}}$ на границе раздела был направлен *в ту же сторону*, что и вектор $\mathbf{H}_{\text{пад}}$. Тогда соответствующая комплексная амплитуда

$$\dot{\mathbf{H}}_{\text{отр}}=\frac{E_m}{Z_0}e^{-j\beta_0(x\cos\varphi+z\sin\varphi)}\mathbf{i}_y. \qquad (7.10)$$

Складывая выражения (7.9) и (7.10), получаем формулу, которая описывает пространственную зависимость комплексной амплитуды магнитного вектора суммарного поля:

$$\dot{\mathbf{H}}_{\Sigma}=\dot{\mathbf{H}}_{\text{пад}}+\dot{\mathbf{H}}_{\text{отр}}=\frac{2E_m}{Z_0}\cos(\beta_0 x\cos\varphi)e^{-j\beta_0 z\sin\varphi}\mathbf{i}_y. \qquad (7.11)$$

Сводка результатов. Итак, задача о поле над идеально проводящей плоскостью при наклонном падении плоской электромагнит-

ной волны с параллельной поляризацией решена полностью. Окончательные формулы (7.8) и (7.11) дают возможность сделать ряд принципиальных выводов:

● При любых значениях угла падения φ из интервала $0<\varphi<90°$ результирующее поле представляет собой волну, которая распространяется в положительном направлении оси z. Об этом свидетельствует характерный фазовый множитель вида $\exp(-j\beta_0 z\sin\varphi)$. Так как фаза поля неизменна в любой плоскости $z=\text{const}$, данный электромагнитный процесс является плоской волной.

● В отличие от изучавшихся ранее однородных плоских волн здесь амплитуды составляющих векторов электромагнитного поля в пределах плоского волнового фронта не постоянны, а зависят от поперечной координаты x по закону $\cos(\beta_0 x\cos\varphi)$ или $\sin(\beta_0 x\cos\varphi)$. Такие процессы являются *неоднородными плоскими волнами.* С физической точки зрения в поперечной плоскости за счет интерференции падающей и отраженной волн возникает стоячая электромагнитная волна.

● Структуры полей электрического и магнитного векторов принципиально различны. Магнитный вектор с единственной проекцией H_y чисто поперечен, в то время как электрический вектор имеет и поперечную проекцию E_x, и продольную проекцию E_z. Неоднородные плоские волны такой структуры принято называть E-*волнами.* В литературе встречается также термин TM-*волны* (от англ. Transverse Magnetic Waves — поперечные магнитные волны).

● Возможен частный случай $\varphi=90°$, когда падающая волна распространяется параллельно границе раздела, так что отраженная волна фактически отсутствует. Поле в полупространстве $x>0$ является при этом однородной плоской волной; векторы электромагнитного поля не имеют составляющих вдоль оси распространения. Такие электромагнитные волны принято называть T-*волнами* (от англ. Transverse Waves — поперечные волны).

7.2. Падение плоской волны с перпендикулярной поляризацией

Метод анализа электромагнитного поля над идеально проводящей плоскостью, развитый в предыдущем параграфе, можно без труда распространить на случай, когда падающая плоская волна имеет перпендикулярную поляризацию, т. е. электрический вектор поля в каждой точке полупространства $x>0$ перпендикулярен плоскости падения.

Соответствующий чертеж, поясняющий ориентацию векторов поля, приведен на рис. 7.2. Не повторяя в деталях ход выкладок, запишем комплексную амплитуду вектора напряженности электрического поля падающей волны в виде

$$\dot{\mathbf{E}}_{\text{пад}} = E_m e^{-j\beta_0(-x\cos\varphi + z\sin\varphi)}\mathbf{i}_y, \tag{7.12}$$

где E_m — произвольный действительный коэффициент.

Для того чтобы выполнялось граничное условие $E_\tau = 0$ при $x = 0$, необходимо, чтобы в полупространстве $x > 0$ существовала плоская отраженная волна с комплексной амплитудой электрического вектора

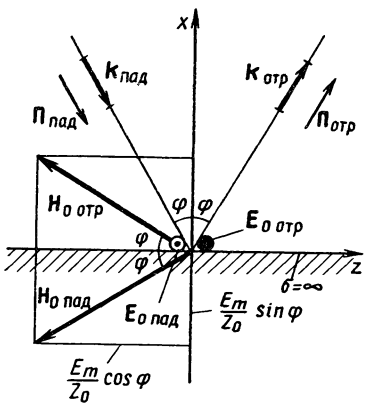


Рис. 7.2. Падение плоской волны с перпендикулярной поляризацией на идеально проводящую плоскость

$$\dot{\mathbf{E}}_{\text{отр}} = -E_m e^{-j\beta_0(x\cos\varphi + z\sin\varphi)}\mathbf{i}_y. \tag{7.13}$$

Тогда результирующее электромагнитное поле в верхней полуплоскости имеет комплексную амплитуду вектора напряженности электрического поля

$$\dot{\mathbf{E}}_\Sigma = \dot{\mathbf{E}}_{\text{пад}} + \dot{\mathbf{E}}_{\text{отр}} = E_m\left(e^{j\beta_0 x\cos\varphi} - e^{-j\beta_0 x\cos\varphi}\right)e^{-j\beta_0 z\sin\varphi}\mathbf{i}_y =$$

$$= j2E_m \sin(\beta_0 x\cos\varphi)\, e^{-j\beta_0 z\sin\varphi}\mathbf{i}_y. \tag{7.14}$$

Чтобы выяснить пространственную зависимость магнитного вектора, следует обратиться к рис. 7.2, заметив, что векторы Пойнтинга $\mathbf{П}_{\text{пад}}$ и $\mathbf{П}_{\text{отр}}$ будут действительно направлены вдоль волновых векторов $\mathbf{k}_{\text{пад}}$ и $\mathbf{k}_{\text{отр}}$ соответственно, если амплитудные коэффициенты векторов напряженности магнитного поля таковы:

$$\mathbf{H}_{0\text{пад}} = -\frac{E_m}{Z_0}\sin\varphi\,\mathbf{i}_x - \frac{E_m}{Z_0}\cos\varphi\mathbf{i}_z, \tag{7.15}$$

$$\mathbf{H}_{0\text{отр}} = \frac{E_m}{Z_0}\sin\varphi\mathbf{i}_x - \frac{E_m}{Z_0}\cos\varphi\mathbf{i}_z. \tag{7.16}$$

Тогда комплексная амплитуда суммарного магнитного вектора

$$\dot{\mathbf{H}}_\Sigma = \dot{\mathbf{H}}_{\text{пад}} + \dot{\mathbf{H}}_{\text{отр}} = -\frac{j2E_m}{Z_0}\sin\varphi\cdot\sin(\beta_0 x\cos\varphi)\, e^{-j\beta_0 z\sin\varphi}\mathbf{i}_x -$$

$$-\frac{2E_m}{Z_0}\cos\varphi\cdot\cos(\beta_0 x\cos\varphi)e^{-j\beta_0 z\sin\varphi}\mathbf{i}_z. \tag{7.17}$$

Анализируя формулы (7.14) и (7.17), приходим к следующему выводу: рассматриваемый электромагнитный процесс представляет собой неоднородную плоскую волну, распространяющуюся в сто-

рону увеличения координаты z, т. е. вдоль границы раздела. В поперечном направлении поле имеет характер стоячей волны.

Принципиальное отличие от случая, изучавшегося ранее в § 7.1, состоит в том, что здесь электрическое поле имеет единственную отличную от нуля проекцию E_y и является чисто поперечным. Вектор напряженности магнитного поля, напротив, кроме поперечной проекции H_x имеет также продольную проекцию H_z. По этой причине такие направляемые волны принято называть H-*волнами* или TE-*волнами* (от англ. Transverse Electric Waves — поперечно-электрические волны).

В заключение отметим, что при падении плоской волны с перпендикулярной поляризацией на границу раздела с идеальным проводником чисто поперечных T-волн возникнуть не может. Действительно, проекция H_z тождественно равна нулю лишь при $\varphi=90°$, когда $\cos\varphi=0$. Однако на основании формулы (7.14) при этом одновременно $E_y=0$, т. е. такая электромагнитная волна не существует.

7.3. Структура электромагнитного поля E- и H-волн

В предыдущих пунктах были получены формулы (7.8), (7.11), (7.14) и (7.17), которые определяют законы изменения в пространстве комплексных амплитуд электрического и магнитного векторов для волн E- и H-типов. Займемся теперь анализом этих выражений, с тем чтобы найти такие важные характеристики направляемых волн, как фазовая скорость, среднее значение потока мощности и т. д. Поскольку аналитическая форма представления векторов поля через пространственные зависимости соответствующих проекций зачастую лишена наглядности, полезно также построить картины распределения в пространстве силовых линий электрического и магнитного полей.

Продольное и поперечное волновые числа. Как уже упоминалось, характер зависимостей проекций векторов электромагнитного поля волн E- и H-типов вдоль продольной координаты z и поперечной координаты x совершенно различен: по оси z устанавливается бегущая, а по оси x — стоячая волна. Чтобы учесть эту особенность рассматриваемого волнового процесса, вводят два параметра: *продольное волновое число*

$$h=\beta_0\sin\varphi \tag{7.18}$$

и *поперечное волновое число*

$$g=\beta_0\cos\varphi, \tag{7.19}$$

такие, что

$$h^2+g^2=\beta_0^2 \tag{7.20}$$

при любом угле падения φ.

Формулы (7.18) и (7.19) дают возможность существенно упростить выражения для проекций векторов поля (нижний индекс Σ опущен, так как здесь и в дальнейшем речь идет только о суммарном поле):

Е-волны

$$\dot{\mathbf{E}}=2E_m \sin\varphi\cdot\cos gx\cdot e^{-jhz}\mathbf{i}_x+j2E_m\cos\varphi\cdot\sin gx\cdot e^{-jhz}\mathbf{i}_z, \tag{7.21}$$

$$\dot{\mathbf{H}}=\frac{2E_m}{Z_0}\cos gx\cdot e^{-jhz}\mathbf{i}_y. \tag{7.22}$$

Н-волны

$$\dot{\mathbf{E}}=j2E_m\sin gx\cdot e^{-jhz}\mathbf{i}_y, \tag{7.23}$$

$$\dot{\mathbf{H}}=-j\frac{2E_m}{Z_0}\sin\varphi\cdot\sin gx\cdot e^{-jhz}\mathbf{i}_x-\frac{2E_m}{Z_0}\cos\varphi\cdot\cos gx\cdot e^{-jhz}\mathbf{i}_z. \tag{7.24}$$

Фазовая скорость Е- и Н-волн. Характерный вид зависимости функций, представляемых формулами (7.21)—(7.24), от координаты z указывает на то, что продольное волновое число h играет роль коэффициента фазы направляемых волн над проводящей плоскостью. Тогда, по определению, фазовая скорость волнового процесса

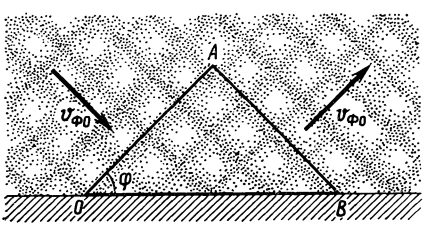


Рис. 7.3. Структура волновых фронтов падающей и отраженной волн

$$v_\Phi=\frac{\omega}{h}=\frac{\omega}{\beta_0\sin\varphi}=\frac{c}{\sin\varphi}. \tag{7.25}$$

Видно, что при любом угле падения φ, отличном от 90°, имеет место неравенство

$$v_\Phi>c. \tag{7.26}$$

Поэтому Е- и Н-волны часто называют *быстрыми волнами.*

Физический смысл неравенства (7.26) легко понять, обратившись к рис. 7.3, где изображена хорошо известная из повседневного опыта структура волновых фронтов падающей и отраженной волн, наблюдаемая на поверхности воды вблизи непроницаемой стенки (берега). Пусть $v_{\Phi 0}$ — фазовая скорость падающей волны, φ — угол падения. Если в треугольнике OAB мысленно зафиксировать точку B, а точке A дать возможность перемещаться вместе с волновым фронтом, то, очевидно,

$$\frac{d}{dt}(AB)=v_{\Phi 0}.$$

Однако точка O, в которой пересекаются стенка и волновой фронт, будет двигаться быстрее:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(OB) = v_{\phi 0}/\sin\varphi,$$

что полностью соответствует формуле (7.25). Читатель, безусловно, не раз обращал на это внимание, наблюдая за тем, как волны набегают на берег водоема.

Заметим, что если $\varphi = 0$, то колебания во всех точках линии, параллельной стенке, происходят с одинаковой фазой. Поэтому формально можно говорить о том, что фазовая скорость волнового процесса вдоль оси z обращается в бесконечность.

Продольная и поперечная длины волн. Несмотря на существенные различия, структуры полей электромагнитных волн E- и H-типов имеют общую черту: проекции векторов поля описываются периодическими функциями как продольной координаты z, так и поперечной координаты x.

Пространственный период поля $\Lambda_{\text{прод}}$ вдоль оси распространения z будем называть *продольной длиной волны*. Очевидно, что

$$\Lambda_{\text{прод}} = \frac{2\pi}{h} = \frac{2\pi}{\beta_0 \sin\varphi} = \frac{\lambda_0}{\sin\varphi}, \tag{7.27}$$

где λ_0 — длина однородной плоской волны в свободном пространстве. Отметим, что всегда $\Lambda_{\text{прод}} \geqslant \lambda_0$, так как $v_\phi \geqslant c$.

Аналогично, пространственный период стоячей волны вдоль поперечной оси x будем называть *поперечной длиной волны*:

$$\Lambda_{\text{попер}} = \frac{2\pi}{g} = \frac{\lambda_0}{\cos\varphi}. \tag{7.28}$$

Параметры λ_0, $\Lambda_{\text{прод}}$ и $\Lambda_{\text{попер}}$ связаны очевидным соотношением

$$\Lambda^2_{\text{прод}} \sin^2\varphi + \Lambda^2_{\text{попер}} \cos^2\varphi = 2\lambda_0^2. \tag{7.29}$$

Пример 7.1. Плоская электромагнитная волна с параллельной поляризацией, имеющая частоту $f = 5$ ГГц, падает из вакуума под углом $\varphi = 40°$ на границу раздела с идеальным проводником, образуя в верхнем полупространстве волну E-типа. Найти продольное волновое число h, поперечное волновое число g, фазовую скорость E-волны v_ϕ, а также длины волн $\Lambda_{\text{прод}}$ и $\Lambda_{\text{попер}}$.

Прежде всего определяем коэффициент фазы в свободном пространстве:

$$\beta_0 = \omega/c = 6.283 \cdot 5 \cdot 10^9/(3 \cdot 10^8) = 104.72 \text{ м}^{-1}.$$

Затем по формулам (7.18) и (7.19) находим

$h=\beta_0 \sin 40^\circ=67.31$ м$^{-1}$; $g=\beta_0 \cos 40^\circ=80.22$ м$^{-1}$.

На основании соотношения (7.25) фазовая скорость E-волны

$v_ф=c/\sin 40^\circ=4.667\cdot 10^8$ м/с.

Наконец, в соответствии с выражениями (7.27) и (7.28) имеем

$\Lambda_{прод}=2\pi/h=0.093$ м $=9.3$ см,

$\Lambda_{попер}=2\pi/g=0.078$ м $=7.8$ см.

Структура силовых линий электрического и магнитного полей. Чтобы наглядно представить электромагнитный процесс, который возникает при падении плоской волны на идеально проводящую плоскость, целесообразно построить силовые линии электрического и магнитного полей. Такое построение можно выполнить на основании формул (7.21) — (7.22) и (7.23) — (7.24).

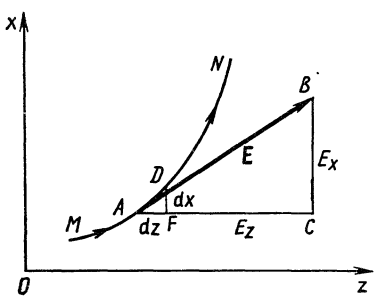


Рис. 7.4. К выводу дифференциальных уравнений силовых линий электромагнитного поля

Рассмотрим вначале данную задачу в общем виде. Пусть кривая MN на рис. 7.4 является некоторой силовой линией поля **E**, наблюдаемой в фиксированный момент времени t_0. Вектор **E**, определенный в точке A и имеющий проекции E_x и E_z, изображен отрезком AB. Согласно определению, этот отрезок направлен по касательной к силовой линии.

Если координата z в точке A получает приращение dz, то, перемещаясь вдоль силовой линии, мы из точки A переходим в точку D, при этом координата x получает приращение на величину dx. Пренебрегая бесконечно малыми величинами порядка $(dx)^2$ и $(dz)^2$, можно заменить дифференциал дуги отрезком касательной и считать, что «треугольник» ADF подобен прямоугольному треугольнику ABC. Отсюда следует, что

$$\frac{dx}{E_x(x, z, t_0)}=\frac{dz}{E_z(x, z, t_0)},$$

или

$$\frac{dx}{dz}=\frac{E_x(x, z, t_0)}{E_z(x, z, t_0)}. \qquad (7.30)$$

Равенство (7.30) представляет собой дифференциальное уравнение силовой линии рассматриваемого поля. Помимо уравнения необходимо задать также начальное условие, указав некоторую точку пространства с координатами (x_0, z_0), через которую должна проходить эта силовая линия. Из теории дифференциальных уравнений известно, что если в окрестности выбранной точки правая часть уравнения вида (7.30) имеет непрерывную частную производную по аргументу x, то такая точка является неособенной и через нее проходит единственная силовая линия (интегральная кривая).

Продемонстрируем описанную методику на примере построения силовых линий поля электрического вектора для E-волны [формула (7.21)]. Прежде всего, переходя от комплексных амплитуд к мгновенным значениям поля, запишем

$$\mathbf{E}(x, z, t) = 2E_m \sin\varphi \cdot \cos gx \cdot \cos(\omega t - hz)\,\mathbf{i}_x - $$

$$- 2E_m \cos\varphi \cdot \sin gx \cdot \sin(\omega t - hz)\,\mathbf{i}_z. \qquad (7.31)$$

Здесь принято во внимание, что z-я проекция опережает по фазе x-ю проекцию на $\pi/2$ радиан и поэтому

$$\cos(\omega t - hz + \pi/2) = -\sin(\omega t - hz).$$

Условимся строить силовые линии поля в момент времени $t=0$. Тогда на основании выражений (7.30) и (7.31) имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\sin\varphi \cdot \cos gx \cdot \cos hz}{\cos\varphi \cdot \sin gx \cdot \sin hz} = \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{ctg} gx \cdot \operatorname{ctg} hz. \qquad (7.32)$$

Анализируя данное уравнение, приходим к следующим выводам:

1) На границе раздела при $x=0$ производная dx/dz неограниченно велика. Значит, силовые линии поля $\mathbf{E}$ в полном соответствии с граничными условиями подходят к поверхности идеального проводника по нормали.

2) Картина силовых линий поля является периодической с периодами $\Lambda_{\text{прод}}$ и $\Lambda_{\text{попер}}$ по осям z и x соответственно [см. формулы (7.27) и (7.28)]. Поэтому силовые линии электрического вектора волны типа E представляют собой замкнутые кривые, лежащие в плоскости XOZ. Исключение составляют лишь те линии, которые «входят» в идеальный проводник или «выходят» из него.

На рис. 7.5 изображена группа кривых, построенных путем численного интегрирования на компьютере уравнения (7.32) для частного случая $\varphi = 45°$, когда волновые числа h и g совпадают. В целях удобства построения по координатным осям отложены безразмерные аргументы hz и gx. Кривые построены в пределах квад-

рата, внутренние точки которого удовлетворяют неравенствам $\pi/2<hz<\pi$; $0<gx<\pi/2$.

Требования к точности графического построения картины поля не слишком высоки. Поэтому использовался простейший численный способ решения дифференциального уравнения — метод Эйлера первого порядка, согласно которому уравнение (7.32) приближенно заменяют уравнением в конечных разностях

$$\Delta x = \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{ctg} gx \cdot \operatorname{ctg} hz \cdot \Delta z.$$

Вычисления начинают с некоторой начальной точки (x_0, z_0). Далее определяют координаты очередной точки $x_1 = x_0 + \Delta x$, $z_1 = z_0 + \Delta z$, где Δz — фиксированный шаг. Эту операцию циклически повторяют до тех пор, пока текущая точка на кривой не достигнет границы области.

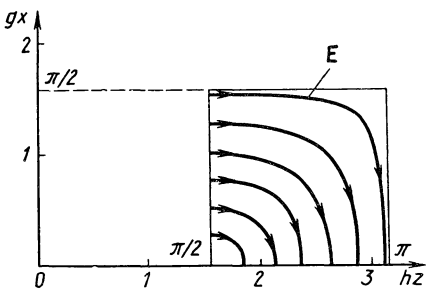


Рис. 7.5. Результат численного интегрирования дифференциального уравнения силовых линий электрического вектора

Кривые на рис. 7.5 построены для шести начальных точек, у которых координата $hz_0 = \pi/2$ одна и та же, а координаты gx_0 принимают значения 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 1.25 и 1.5.

Теперь не представляет труда изобразить полную картину силовых линий электрического вектора (рис. 7.6). Для этого достаточно «повторить» картину, приведенную на рис. 7.5, должное число раз. Необходимо лишь следить за тем, чтобы направления стрелок на силовых линиях чередовались в силу пространственной периодичности поля.

На этом же рисунке построены силовые линии магнитного вектора Е-волны. Из формулы (7.22) вытекает зависимость напряженности магнитного поля от пространственных координат при $t=0$:

$$\mathbf{H}(x, z, 0) = \frac{2E_m}{Z_0} \cos gx \cdot \cos hz\, \mathbf{i}_y. \qquad (7.33)$$

Силовые линии такого поля представляют собой «нити», параллельные оси y. Направление вектора $\mathbf{H}$ периодически изменяется в пространстве. Вектор, ориентированный от наблюдателя к плоскости чертежа, обозначен сплошным кружком; вектор противоположного направления обозначен кружком с точкой.

Как принято в электродинамике, силовые линии проведены чаще там, где напряженность поля больше. Полезно заметить, что магнитное поле Е-волны, будучи поперечным, концентрируется

именно в тех областях пространства, где велика поперечная проекция E_x напряженности электрического поля. Наоборот, там, где продольная проекция E_z достигает максимума, проекция H_y обращается в нуль.

Структура поля волны типа Т. Поперечные электромагнитные волны (Т-волны) существуют в полупространстве над идеально проводящей плоскостью в частном случае, когда угол падения плоской волны с параллельной поляризацией равен 90° . При этом поперечное волновое число $g=0$, а продольное волновое число $h=\beta_0$.

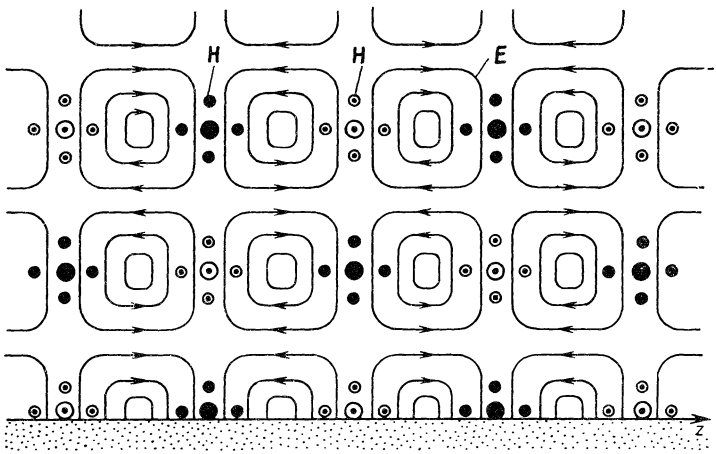


Рис. 7.6. Структура силовых линий волны типа Е над идеально проводящей плоскостью

Соответствующие проекции комплексных амплитуд векторов электромагнитного поля прямо вытекают из формул (7.21) и (7.22), в которых следует опустить коэффициент 2, так как отраженная волна отсутствует:

$$\dot{\mathbf{E}}=E_m e^{-j\beta_0 z}\mathbf{i}_x, \tag{7.34}$$

$$\dot{\mathbf{H}}=\frac{E_m}{Z_0}e^{-j\beta_0 z}\mathbf{i}_y. \tag{7.35}$$

Отсюда мгновенные значения векторов

$$\mathbf{E}(z,\ t)=E_m\cos(\omega t-\beta_0 z)\,\mathbf{i}_x, \tag{7.36}$$

$$\mathbf{H}(z,\ t)=\frac{E_m}{Z_0}\cos(\omega t-\beta_0 z)\,\mathbf{i}_y. \tag{7.37}$$

В момент времени $t=0$ имеем

$$\mathbf{E}(z, 0)=E_m \cos \beta_0 z \mathbf{i}_x, \tag{7.38}$$

$$\mathbf{H}(z, 0)=\frac{E_m}{Z_0} \cos \beta_0 z \mathbf{i}_y. \tag{7.39}$$

Картина распределения векторов поля в плоскости XOZ, построенная на основании формул (7.38) и (7.39), приведена на рис. 7.7. Заметим, что она ничем не отличается от картины поля однородной плоской волны.

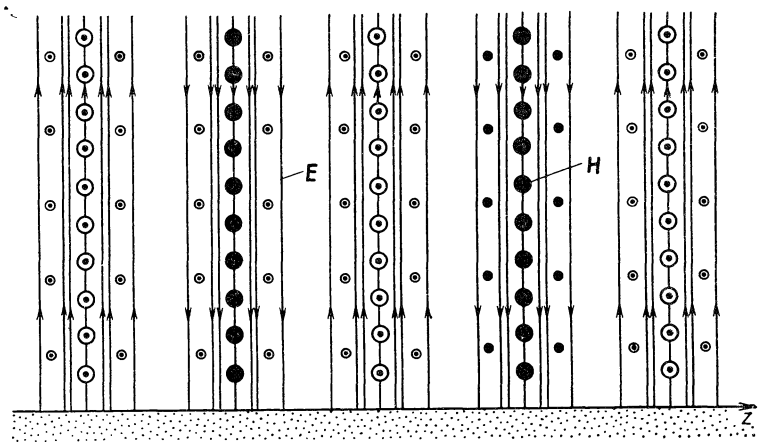


Рис. 7.7. Структура силовых линий направляемой Т-волны

Структура поля волны типа Н. Исследование пространственной структуры силовых линий электромагнитного поля воды типа Н, возникающей над идеально проводящей плоскостью, можно провести аналогичным образом. Не останавливаясь на подробностях, запишем с помощью формул (7.23) и (7.24) выражения мгновенных значений векторов поля волны типа Н в момент времени $t=0$:

$$\mathbf{E}(x, z, 0)=2E_m \sin gx \cdot \sin hz \cdot \mathbf{i}_y, \tag{7.40}$$

$$\mathbf{H}(x, z, 0)=-\frac{2E_m}{Z_0} \sin \varphi \cdot \sin gx \cdot \sin hz \cdot \mathbf{i}_x - \\ -\frac{2E_m}{Z_0} \cos \varphi \cdot \cos gx \cdot \cos hz \cdot \mathbf{i}_z. \tag{7.41}$$

Дифференциальное уравнение силовых линий магнитного вектора в соответствии с выражением (7.41) имеет вид

$$\frac{dx}{dz}=\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} gx \cdot \operatorname{tg} hz. \tag{7.42}$$

Картина силовых линий вектора **H**, построенная путем численного интегрирования этого уравнения для частного случая $\varphi=45°$, приведена на рис. 7.8. Здесь же изображен эскиз пространственного распределения силовых линий вектора **E**, построенный на основании выражения (7.40).

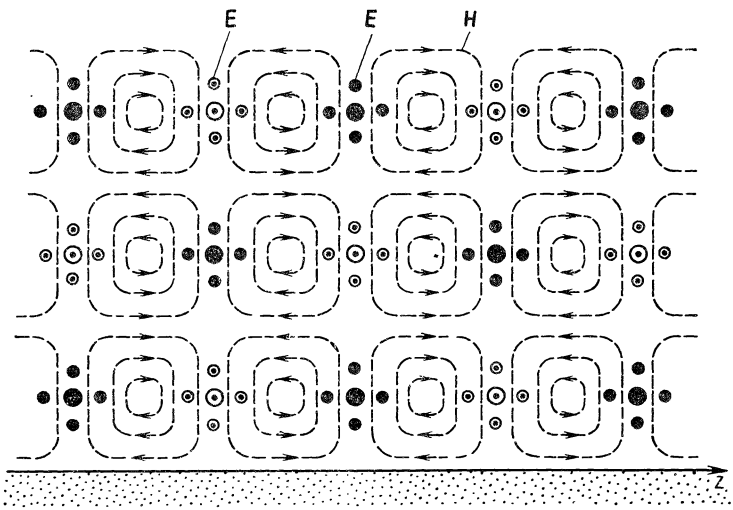


Рис. 7.8. Структура силовых линий волны типа H над идеально проводящей плоскостью

Следует обратить внимание на то, что в силу граничных условий при $x=0$ нормальная составляющая магнитного вектора и касательная составляющая электрического вектора обращаются в нуль. В остальном картины полей волн E- и H-типов идентичны с точностью до перестановки векторов **E** и **H**.

7.4. Некоторые характеристики электромагнитного поля E- и H-волн

Получив аналитические выражения (7.21)—(7.24) и построив картины силовых линий векторных полей **E** и **H**, перейдем к изучению некоторых частных характеристик электромагнитного поля направляемых волн над проводящей плоскостью.

Плотность потока мощности направляемых волн. Обратясь к случаю волн E-типа, запишем выражение комплексного вектора Пойнтинга [см. формулу (2.28)], определенного в каждой точке полупространства $x>0$:

$$\dot{\mathbf{\Pi}} = {}^1/_2[\dot{\mathbf{E}}\overset{*}{\dot{\mathbf{H}}}] = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ \dot{E}_x & 0 & \dot{E}_z \\ 0 & \overset{*}{\dot{H}}_y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= {}^1/_2(\dot{E}_z\overset{*}{\dot{H}}_y)\,\mathbf{i}_x + {}^1/_2(\dot{E}_x\overset{*}{\dot{H}}_y)\,\mathbf{i}_z. \qquad (7.43)$$

Слагаемые в правой части последнего равенства принципиально различны. Действительно, приняв во внимание выражения (7.21) и (7.22), легко заметить, что произведение $\dot{E}_x\overset{*}{\dot{H}}_y$, образованное поперечными проекциями векторов поля, является чисто вещественным числом, в то время как произведение $\dot{E}_z\overset{*}{\dot{H}}_y$ чисто мнимое. Поэтому вектор Пойнтинга, усредненный за период колебания, ориентирован вдоль направления распространения волны:

$$\mathbf{\Pi}_{\text{ср}} = {}^1/_2(\dot{E}_x\overset{*}{\dot{H}}_y)\,\mathbf{i}_z = \frac{2E_m^2}{Z_0}\sin\varphi\cdot\cos^2 gx\,\mathbf{i}_z. \qquad (7.44)$$

Мнимую составляющую комплексного вектора Пойнтинга, ориентированную вдоль поперечной координаты x и физически связанную с возникновением в пространстве стоячей волны, по терминологии из теории цепей уместно назвать *реактивной составляющей*:

$$\mathbf{\Pi}_{\text{р}} = \frac{E_m^2}{Z_0}\cos\varphi\cdot\sin(2gx)\,\mathbf{i}_x. \qquad (7.45)$$

Ясно, что в волне типа Т, для которой $\varphi = 90°$, реактивная составляющая вектора Пойнтинга отсутствует.

Совершенно аналогично из выражений (7.23) и (7.24) выводятся формулы для составляющих вектора Пойнтинга в волне Н-типа:

$$\mathbf{\Pi}_{\text{ср}} = -{}^1/_2(\dot{E}_y\overset{*}{\dot{H}}_x)\,\mathbf{i}_z = \frac{2E_m^2}{Z_0}\sin\varphi\cdot\sin^2 gx\,\mathbf{i}_z, \qquad (7.46)$$

$$\mathbf{\Pi}_{\text{р}} = {}^1/_2\text{Re}\,(\dot{E}_y\overset{*}{\dot{H}}_z)\,\mathbf{i}_x = -\frac{E_m^2}{Z_0}\cos\varphi\cdot\sin(2gx)\,\mathbf{i}_x. \qquad (7.47)$$

Следует обратить внимание на то, что в волнах Е- и Н-типов обе составляющие комплексного вектора Пойнтинга распределены вдоль поперечной координаты x неравномерно.

Распределение тока на идеально проводящей плоскости. Чтобы найти векторное поле плотности поверхностного электрического тока на направляющей идеально проводящей плоскости, следует воспользоваться формулой (4.21), в которой под ортом нормали $\mathbf{i}_n$

следует понимать единичный вектор $\mathbf{i}_x$. При этом убеждаемся, что для волн типа E комплексная амплитуда

$$\mathbf{j}_{\text{пов.э}} = [\mathbf{i}_x \dot{\mathbf{H}}]_{x=0} = \frac{2E_m}{Z_0} e^{-jhz} \mathbf{i}_z \qquad (7.48)$$

описывает бегущую волну, которая распространяется в продольном направлении и имеет единственную z-ю составляющую (рис. 7.9, *а*).

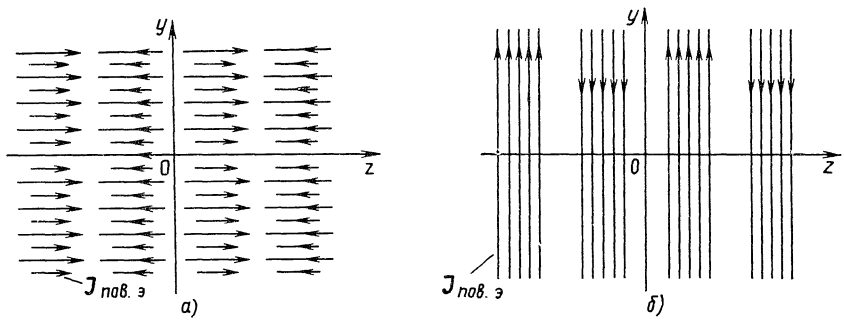


Рис. 7.9. Распределение вектора плотности поверхностного тока на идеально проводящей плоскости:
а — для волн типа E; *б* — для волн типа H

По-иному выглядит структура поверхностного тока H-волны. Здесь, согласно формуле (7.24), на границе раздела вектор **H** имеет единственную составляющую с комплексной амплитудой

$$\dot{H}_z = (-2E_m/Z_0) \cos\varphi \cdot \exp(-jhz).$$

Тогда

$$\mathbf{j}_{\text{пов.э}} = \dot{H}_z [\mathbf{i}_x \mathbf{i}_z] = -\dot{H}_z \mathbf{i}_y = \frac{2E_m}{Z_0} \cos\varphi \cdot e^{-jhz} \mathbf{i}_y. \qquad (7.49)$$

Соответствующий эскиз картины силовых линий тока показан на рис. 7.9, *б*. Здесь поверхностный ток протекает уже не в продольном, а в поперечном направлении.

Из сказанного следует важный для антенной техники вывод о том, что при заранее известной поляризации падающего поля сплошной металлический отражатель можно с успехом заменить системой параллельных проводящих стержней, пластин и т. д. Эти проводники должны размещаться достаточно часто, например с шагом $\lambda/10$ или менее, и быть ориентированными вдоль линий поверхностного тока.

Удельная мощность потерь. Реальная плоскость, на которую падает волна, выполнена из металла, т. е. материала с высокой, но

все же конечной электрической проводимостью. В соответствии с приближенными граничными условиями Леонтовича (6.54) на поверхности металла будет возникать касательная составляющая вектора $\mathbf{E}$, комплексная амплитуда которой

$$\dot{E}_{\tau м} = Z_{см} \dot{H}_{\tau м}.$$

Вектор касательной составляющей $\mathbf{E}_{\tau м}$ должен быть ориентирован так, чтобы совместно с величиной $\mathbf{H}_{\tau м}$ порождать вектор Пойнтинга, направленный в глубь металла; среднее значение этого вектора характеризует удельную (на единицу площади) мощность потерь:

$$\mathbf{П}_{ср.пот} = {}^1/_2 \mathrm{Re}\,[\dot{\mathbf{E}}_{\tau м} \overset{*}{\dot{\mathbf{H}}}_{\tau м}]. \tag{7.50}$$

Для волн типа E

$$\dot{\mathbf{H}}_{\tau м} = \dot{\mathbf{H}}|_{x=0} = \frac{2E_m}{Z_0} e^{-jhz} \mathbf{i}_y$$

и, значит,

$$\dot{\mathbf{E}}_{\tau м} = \frac{2Z_{см}E_m}{Z_0} e^{-jhz} \mathbf{i}_z.$$

Отсюда на основании равенства (7.50)

$$\mathbf{П}_{ср.пот} = \frac{2E_m^2}{Z_0} \mathrm{Re}\, Z_{см} [\mathbf{i}_z \mathbf{i}_y] = -\frac{E_m^2}{Z_0} \sqrt{\frac{2\omega\mu_0}{\sigma}} \mathbf{i}_x. \tag{7.51}$$

Отрицательный знак в этой формуле указывает на то, что поток энергии потерь действительно направлен в глубь проводящей среды.

Для волн H-типа

$$\dot{\mathbf{H}}_{\tau м} = \dot{\mathbf{H}}_{x=0} = -\frac{2E_m}{Z_0} \cos\varphi \cdot e^{-jhz} \mathbf{i}_z,$$

$$\dot{\mathbf{E}}_{\tau м} = \frac{2Z_{см}E_m}{Z_0} \cos\varphi \cdot e^{-jhz} \mathbf{i}_y,$$

откуда

$$\mathbf{П}_{ср.пот} = -\frac{E_m^2}{Z_0} \sqrt{\frac{2\omega\mu_0}{\sigma}} \cos^2\varphi \, \mathbf{i}_x. \tag{7.52}$$

Сравнивая выражения (7.51) и (7.52), интересно отметить, что потери в металле для случая E-волн не зависят от угла падения, в то время как для случая H-волн эти потери стремятся к нулю, если угол падения φ приближается к 90°.

Поляризационные характеристики E- и H-волн. В гл. 3 было показано, что наиболее общим видом однородной плоской электромагнитной волны является волна с эллиптической поляризацией. Рассматриваемые здесь неоднородные E- и H-волны имеют несколько иную, более сложную поляризационную структуру.

Действительно, в волне типа E, согласно формуле (7.22), поле магнитного вектора поляризовано линейно. Поле же электрического вектора в соответствии с формулой (7.21) имеет две взаимно перпендикулярные декартовы составляющие, которые колеблются во времени со сдвигом фаз 90° (об этом свидетельствует коэффициент j в комплексной амплитуде $\dot{E}_z$). Поэтому можно утверждать, что электрический вектор E-волны в общем случае поляризован по эллипсу, причем эксцентриситет поляризационного эллипса в разных точках пространства неодинаков.

Пример 7.2. Волна типа E возникает при падении однородной плоской волны на идеально проводящую плоскость под углом $\varphi = 50°$. Длина падающей волны $\lambda_0 = 0.4$ м. Определить, на каком минимальном расстоянии от границы раздела вектор напряженности электрического поля окажется поляризованным по кругу.

Для возникновения круговой поляризации необходимо, чтобы обе взаимно перпендикулярные составляющие вектора имели одинаковые амплитуды. Поэтому искомая координата x является наименьшим положительным корнем уравнения

$$\sin\varphi \cdot \cos gx = \cos\varphi \cdot \sin gx,$$

откуда

$$x = \varphi/g = \varphi\lambda_0/(2\pi\cos\varphi) = 0.086 \text{ м}.$$

Аналогично выглядит поляризационная структура поля волны H-типа. Однако здесь в соответствии с формулами (7.23) и (7.24) электрический вектор линейно поляризован в поперечной плоскости, в то время как магнитный вектор имеет эллиптическую поляризацию. Соотношением между осями поляризационного эллипса зависит от угла падения плоской волны и непрерывно меняется вдоль поперечной координаты.

7.5. Связь между продольными и поперечными составляющими векторов поля направляемых волн

Рассмотренные в этой главе E- и H-волны, возникающие в полупространстве над идеально проводящей плоскостью, являются предельно идеализированными моделями направляемых электро-

магнитных волн. Теория некоторых практически важных волноводов будет развита в гл. 8, 9 и 10. Однако на основе уравнений Максвелла можно заранее вывести ряд существенных свойств подобных волн, относящихся к любым направляющим системам.

Эта возможность обусловлена тем, что любая направляемая плоская волна, распространяющаяся, скажем, вдоль оси z, представляет собой неоднородную волну особого вида: комплексная амплитуда каждой из шести проекций векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ такой волны зависит от пространственных координат по закону

$$\dot{V}(x, y, z)=V_0(x, y)\,\mathrm{e}^{-jhz}. \tag{7.53}$$

Начальную фазу волны всегда можно подобрать так, чтобы амплитудная функция $V_0(x, y)$ была действительной. Производные по z от проекций векторов поля вычисляются весьма просто:

$$\partial\dot{V}/\partial z=-jh\dot{V} \text{ и т. д.} \tag{7.54}$$

Пусть электромагнитный процесс в некоторой области пространства, свободной от источников, описывается уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}=j\omega\varepsilon_a\dot{\mathbf{E}}; \qquad \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}=-j\omega\mu_a\dot{\mathbf{H}}.$$

В развернутой координатной форме эти уравнения выглядят так:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\dot{H}_z}{\partial y}-\frac{\partial\dot{H}_y}{\partial z}&=j\omega\varepsilon_a\dot{E}_x,\\
\frac{\partial\dot{H}_x}{\partial z}-\frac{\partial\dot{H}_z}{\partial x}&=j\omega\varepsilon_a\dot{E}_y,\\
\frac{\partial\dot{H}_y}{\partial x}-\frac{\partial\dot{H}_x}{\partial y}&=j\omega\varepsilon_a\dot{E}_z,
\end{aligned} \tag{7.55}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\dot{E}_z}{\partial y}-\frac{\partial\dot{E}_y}{\partial z}&=-j\omega\mu_a\dot{H}_x,\\
\frac{\partial\dot{E}_x}{\partial z}-\frac{\partial\dot{E}_z}{\partial x}&=-j\omega\mu_a\dot{H}_y,\\
\frac{\partial\dot{E}_y}{\partial x}-\frac{\partial\dot{E}_x}{\partial y}&=-j\omega\mu_a\dot{H}_z.
\end{aligned} \tag{7.56}$$

Если теперь выразить производные по z в соответствии с равенством (7.54), то системы (7.55) и (7.56) упростятся:

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + jh\dot{H}_y = j\omega\varepsilon_a \dot{E}_x,$$

$$-jh\dot{H}_x - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon_a \dot{E}_y, \qquad (7.57)$$

$$\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon_a \dot{E}_z,$$

$$\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} + jh\dot{E}_y = -j\omega\mu_a \dot{H}_x,$$

$$-jh\dot{E}_x - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -j\omega\mu_a \dot{H}_y, \qquad (7.58)$$

$$\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = -j\omega\mu_a \dot{H}_z.$$

Принципиально важно то, что в уравнениях (7.57) и (7.58) поперечные проекции $\dot{E}_x$, $\dot{E}_y$, $\dot{H}_x$ и $\dot{H}_y$ представляются в виде линейных комбинаций из производных от продольных проекций $\dot{E}_z$ и $\dot{H}_z$ по поперечным координатам x и y. Действительно, рассматривая, например, совместно первое уравнение из системы (7.57) и второе уравнение из системы (7.58), получаем систему двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\dot{E}_x$ и $\dot{H}_y$, причем в правой части этой системы окажутся производные $\partial\dot{E}_z/\partial x$ и $\partial\dot{H}_z/\partial y$. Аналогично составляется вторая система уравнений относительно неизвестных $\dot{E}_y$ и $\dot{H}_x$.

Решая эти две системы уравнений, приходим к следующему результату:

$$\dot{E}_x = \frac{-j}{g^2}\left(h\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + \omega\mu_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}\right),$$

$$\dot{E}_y = \frac{-j}{g^2}\left(h\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \omega\mu_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}\right), \qquad (7.59)$$

$$\dot{H}_x = \frac{j}{g^2}\left(\omega\varepsilon_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - h\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}\right),$$

$$\dot{H}_y = \frac{-j}{g^2}\left(\omega\varepsilon_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + h\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}\right).$$

Здесь g — поперечное волновое число исследуемого процесса, определяемое, как известно, следующим образом:

$$g=\sqrt{\beta^2-h^2}=\sqrt{\omega^2\varepsilon_a\mu_a-h^2}. \qquad (7.60)$$

Равенства (7.59) могут рассматриваться как формулы перехода от продольных к поперечным проекциям векторов направляемого электромагнитного поля. Роль их состоит в том, что достаточно найти лишь две функции $\dot{E}_z(x, y)$ и $\dot{H}_z(x, y)$; остальные проекции определяются через них простым дифференцированием.

ЗАДАЧИ

7.1. Под каким углом должна падать плоская электромагнитная волна на поверхность идеального проводника для того, чтобы фазовая скорость процесса, полученного суперпозицией падающей и отраженной волн, составляла $5c$? Среда распространения — воздух.

7.2. Вычислите продольное и поперечное волновые числа для волны типа E, если известно, что частота поля $f=200$ МГц, а угол падения $\varphi=70°$.

7.3. Найдите частоту f и угол падения φ плоской электромагнитной волны, падающей на идеально проводящую плоскость, если продольная длина волны $\Lambda_{\text{прод}}=85$ мм, а поперечная длина волны $\Lambda_{\text{попер}}=60$ мм. Среда распространения — вакуум.

7.4. Направляемая волна E-типа имеет фазовую скорость $v_\Phi=3c$, амплитудный коэффициент $E_m=250$ В/м и частоту $f=1.5$ ГГц. Вычислите усредненный вектор Пойнтинга $\Pi_{\text{ср}}$, а также реактивную составляющую вектора Пойнтинга $\Pi_{\text{реак}}$ в точках воображаемой плоскости, параллельной границе раздела и отстоящей от нее на расстоянии $x=0.05$ м.

7.5. Волна типа E образуется в вакууме над идеально проводящей плоскостью при падении плоской волны, имеющей среднее значение вектора Пойнтинга $\Pi_{\text{ср.пад}}=800$ Вт/м^2. Вычислите амплитуду продольной составляющей вектора плотности поверхностного тока на границе раздела.

7.6. Решите предыдущую задачу применительно к случаю, когда падающая электромагнитная волна имеет перпендикулярную поляризацию и в полупространстве $x>0$ образуется направляемая волна H-типа. Угол падения плоской волны $\varphi=30°$.

7.7. Направляемая волна E-типа, имеющая амплитудный коэффициент $E_m=500$ В/м, существует над плоской границей раздела с хорошо проводящей немагнитной ($\mu=1$) средой. Удельная проводимость среды $\sigma=5\cdot10^7$ См/м, частота поля $f=1$ ГГц. Определите величину $\Pi_{\text{ср.пот}}$ — модуль составляющей вектора Пойнтинга, которая описывает плотность потока мощности потерь.

Глава восьмая

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ МЕТАЛЛИЧЕСКИЙ ВОЛНОВОД

В данной главе будет рассматриваться полый металлический волновод прямоугольного сечения — линия передачи, находящая в настоящее время, пожалуй, наибольшее применение в технике СВЧ. Задача об электромагнитных волнах в трубе с хорошо проводящими стенками представляет большой самостоятельный интерес и требует математических методов, более общих по сравнению с теми, которые использовались при изучении волн над проводящей плоскостью.

8.1. Постановка задачи

Анализируемая здесь линия передачи представляет собой трубу с поперечным сечением прямоугольной формы (рис. 8.1). Считается, что стенки трубы выполнены из идеального проводника ($\sigma=\infty$). Размер сечения вдоль широкой стенки всегда в дальнейшем будем обозначать через a, размер вдоль узкой стенки — через b. Данный волновод помещен в декартову систему координат x, y, z так, как показано на рисунке. Волновод неограниченно протяжен вдоль оси z, которая принимается за ось распространения электромагнитных волн. Будем считать также, что внутри волновода находится воздух или вакуум, т. е. среда с электродинамическими параметрами $\varepsilon_a=\varepsilon_0$, $\mu_a=\mu_0$. Такая ситуация чаще всего встречается на практике.

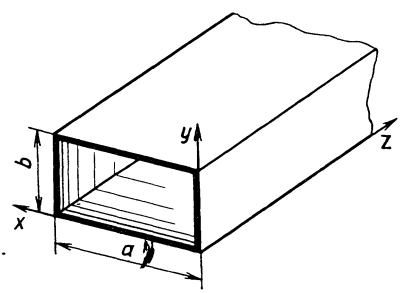


Рис. 8.1. Прямоугольный металлический волновод

Поставим цель найти всю совокупность электромагнитных волн, которые описываются решениями уравнений Максвелла и могут существовать внутри волновода на всем протяжении оси. При этом мы не станем интересоваться тем, каким именно образом те или иные источники (антенны, электронные пучки и т. д.) возбуждают эти колебания в волноводе. Можно сказать, что здесь будут рассматриваться свободные колебания в волноводе (ср. со свободными колебаниями в резонансном LC-контуре).

8.2. Волны типа E в прямоугольном волноводе

Как уже известно, волны типа E отличаются присутствием продольной составляющей вектора напряженности электрического поля, в то время как магнитное поле этих волн чисто поперечно, т. е. $\dot{E}_z \neq 0$, $\dot{H}_z = 0$.

Этот несколько особый характер проекции $\dot{E}_z$ позволяет выразить все поперечные проекции векторов электромагнитного поля любой волны типа E через частные производные от $\dot{E}_z$ по поперечным координатам на основании формул (7.59). Поскольку здесь $\dot{H}_z = 0$, формулы перехода принимают весьма простой вид:

$$\dot{E}_x = \frac{-jh}{g^2}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}, \quad \dot{H}_x = \frac{j\omega\varepsilon_0}{g^2}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y},$$

$$\dot{E}_y = \frac{-jh}{g^2}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}, \quad \dot{H}_y = \frac{-j\omega\varepsilon_0}{g^2}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}. \tag{8.1}$$

Если удастся найти проекцию $\dot{E}_z$ во всех внутренних точках поперечного сечения волновода, задача будет полностью решена.

Чтобы получить функцию $\dot{E}_z(x, y, z)$, следует воспользоваться уравнением Гельмгольца, которому удовлетворяет любая проекция векторов поля, в том числе и $\dot{E}_z$, при некотором фиксированном значении частоты:

$$\nabla^2 \dot{E}_z + \beta^2 \dot{E}_z = 0. \tag{8.2}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде, общем для всех волноводных задач, рассматриваемых в дальнейшем:

$$\dot{E}_z(x, y, z) = E_z(x, y)\, e^{-jhz}. \tag{8.3}$$

Здесь $E_z(x, y)$ — подлежащая определению действительная функция, описывающая распределение продольной составляющей электрического поля в поперечном сечении волновода. Амплитудное значение поля не зависит от координаты z, так как, по исходному предположению, потери в волноводе отсутствуют. Изменение фазы колебаний вдоль оси распространения учитывает экспоненциальный множитель вида $\exp(-jhz)$. Знак показателя экспоненты указывает на то, что решение вида (8.3) соответствует бегущей волне, которая распространяется в положительном направлении оси z. Продольное волновое число h нужно найти исходя из геометрических размеров a и b, а также длины волны возбуждающего генератора λ_0.

Вид решения, принятый выше, дает возможность несколько упростить исходное уравнение (8.2). Действительно, подставив (8.3) в (8.2) и воспользовавшись правилом дифференцирования экспо-

ненты, будем иметь следующее уравнение относительно неизвестной амплитуды $\dot{E}_z(x, y)$:

$$\nabla_\perp^2 E_z + g^2 E_z = 0. \tag{8.4}$$

Здесь $\nabla_\perp^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — так называемый поперечный оператор Лапласа, действующий на неизвестную функцию лишь по координатам x и y; $g = \sqrt{\beta^2 - h^2}$ — поперечное волновое число.

Граничные условия на стенках волновода. Наша конкретная задача — найти такое частное решение уравнения Гельмгольца (8.4), которое обеспечивало бы выполнение граничного условия $E_\tau = 0$ на идеально проводящем контуре сечения волновода.

В общем случае следует предполагать, что вектор напряженности электрического поля имеет все три декартовы составляющие. При этом z-я составляющая $\dot{E}_z \mathbf{i}_z$ является касательной ко всем четырем стенкам волновода. Поэтому на стенках эта составляющая должна обращаться в нуль:

$$x = 0, \quad x = a,$$

$E_z = 0$ при

$$y = 0, \quad y = b. \tag{8.5}$$

Проекция E_x, определяющая x-ю составляющую электрического вектора, должна обратиться в нуль лишь на широких стенках волновода, параллельных оси x:

$$E_x = 0 \text{ при } y = 0, \quad y = b. \tag{8.6}$$

Наконец, на узких стенках волновода следует потребовать обращения в нуль проекции E_y:

$$E_y = 0 \text{ при } x = 0, \quad x = a. \tag{8.7}$$

Однако легко убедиться в том, что граничные условия (8.5) — (8.7) связаны друг с другом. Действительно, согласно формулам перехода (8.1), в случае волн E-типа проекции поперечных составляющих электрического вектора $\dot{E}_x$ и $\dot{E}_y$ пропорциональны частным производным $\partial\dot{E}_z/\partial x$ и $\partial\dot{E}_z/\partial y$ соответственно. Поэтому приведенную систему граничных условий можно записать через $\dot{E}_z$ и ее производные по поперечным координатам:

$$x = 0, \quad x = a,$$

$\dot{E}_z = 0$ при (а)

$$y = 0, \quad y = b,$$

$$\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = 0 \text{ при } y = 0, \quad y = b, \quad \text{(б)} \tag{8.8}$$

$$\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} = 0 \text{ при } x = 0, \quad x = a. \quad \text{(в)}$$

Очевидно, что условие (а) обеспечивает постоянство $\dot{E}_z$ на контуре сечения волновода и автоматическое выполнение граничных условий (б) и (в).

Краевая задача и ее решение. Мы убедились, что для исследования волн типа E в прямоугольном волноводе необходимо решить уравнение Гельмгольца относительно амплитуды проекции $\dot{E}_z$ вместе с соответствующим граничным условием на контуре поперечного сечения:

$$\nabla_\perp^2 E_z + g^2 E_z = 0, \tag{8.9}$$

$$E_z = 0 \text{ при } \begin{matrix} x=0,\ x=a, \\ y=0,\ y=b. \end{matrix}$$

В математике подобную совокупность уравнения в частных производных и некоторых граничных условий называют *краевой задачей*. Конкретно краевая задача (8.9), согласно которой искомая функция должна обратиться в нуль на границе области, носит название однородной краевой задачи Дирихле.

Интересно отметить, что рассматриваемая электродинамическая задача допускает наглядную механическую аналогию. Оказывается, краевая задача вида (8.9) возникает при изучении колебаний однородной жесткой мембраны прямоугольной формы с размерами сторон a и b. Искомая функция описывает смещение точек мембраны относительно положения равновесия в направлении, перпендикулярном ее плоскости. Нулевые граничные условия указывают на то, что края мембраны жестко закреплены.

Среди известных в математике способов решения дифференциальных уравнений в частных производных одно из центральных мест занимает *метод разделения переменных*, иногда называемый также *методом Фурье* (что никак не связано с рядами или интегралами Фурье). Сущность метода разделения переменных состоит в том, что решение уравнения в частных производных отыскивается в виде произведения функций, каждая из которых зависит лишь от одной координаты. Применительно к краевой задаче (8.9) имеем

$$E_z(x, y) = X(x)Y(y). \tag{8.10}$$

Подставив искомую функцию вида (8.10) в уравнение Гельмгольца из задачи (8.9), получаем уравнение

$$X''Y + XY'' + g^2 XY = 0, \tag{8.11}$$

в котором двойным штрихом обозначена обыкновенная (не частная) производная по соответствующей координате.

Далее, разделив почленно обе части уравнения (8.11) на неизвестное решение в форме (8.10), будем иметь

$$X''/X+Y''/Y=-g^2. \tag{8.12}$$

Заметим, что левая часть уравнения (8.12) есть сумма двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной, x или y. В правой же части располагается число $-g^2$, не зависящее ни от x, ни от y. Поэтому для того, чтобы (8.12) выполнялось тождественно при всех x и y, необходимо потребовать, чтобы

$$X''/X=-g_x^2, \tag{8.13}$$

$$Y''/Y=-g_y^2, \tag{8.14}$$

где g_x, g_y — некоторые числа, удовлетворяющие в силу (8.12) очевидному соотношению

$$g_x^2+g_y^2=g^2. \tag{8.15}$$

Теперь смысл метода разделения переменных становится ясным: сложную задачу — поиск решения дифференциального уравнения в частных производных удается свести к более простой — интегрированию уравнений вида (8.13) и (8.14) в обыкновенных производных. Эти два уравнения с постоянными коэффициентами можно записать в привычном виде:

$$X''+g_x^2X=0, \tag{8.16}$$

$$Y''+g_y^2Y=0. \tag{8.17}$$

Общие решения уравнений (8.16) и (8.17) выражаются через гармонические функции пространственных координат и содержат четыре произвольных амплитудных коэффициента A, B, C и D:

$$X(x)=A\sin g_xx+B\cos g_xx, \tag{8.18}$$

$$Y(y)=C\sin g_yy+D\cos g_yy, \tag{8.19}$$

отсюда

$$E_z(x, y)=(A\sin g_xx+B\cos g_xx)(C\sin g_yy+D\cos g_yy). \tag{8.20}$$

Итак, общее решение уравнения Гельмгольца, входящего в рассматриваемую краевую задачу, получено. Остается выбрать шесть величин — A, B, C, D, g_x, g_y — таким образом, чтобы выполнялись граничные условия на стенках волновода.

Прежде всего заметим, что из условия $E_z=0$ при $x=0$ и $y=0$ следует обращение в нуль коэффициентов при косинусоидальных слагаемых, т. е. $B=D=0$. Тогда произведение двух оставшихся

амплитудных коэффициентов можно обозначить через E_0 и записать

$$E_z(x, y)=E_0 \sin g_x x \sin g_y y. \tag{8.21}$$

Теперь остается подобрать должным образом величины g_x и g_y. Из граничного условия $E_z=0$ при $x=a$ следует, что

$$\sin g_x a=0. \tag{8.22}$$

Аналогичным образом граничное условие $E_z=0$ при $y=b$ приводит к равенству

$$\sin g_y b=0. \tag{8.23}$$

Легко видеть, что равенства (8.22) и (8.23) будут тождественно выполняться лишь в том случае, если

$$g_x=\frac{m\pi}{a}, \qquad g_y=\frac{n\pi}{b}, \tag{8.24}$$

где m, n — любые целые положительные числа. Отметим, что для рассматриваемых здесь волн E-типа ни одно из этих чисел не может быть нулевым. В противном случае проекция $\dot{E}_z$, а следовательно, и все другие проекции векторов электромагнитного поля тождественно обратились бы в нуль в каждой точке поперечного сечения волновода.

Итак, выражение

$$E_z(x, y)=E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right), \tag{8.25}$$

в которое входят два целочисленных параметра m и n, является решением краевой задачи (8.9).

Собственные значения и собственные функции. Проведенный анализ позволяет сделать вывод: краевая задача вида (8.9) имеет отличные от нуля решения не при любых значениях параметра g, а лишь при таких, которые связаны с геометрическими размерами стенок волновода соотношением

$$g=\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \tag{8.26}$$

которое непосредственно вытекает из формул (8.15) и (8.24). Данная величина g, отвечающая паре чисел m и n, носит название *собственного значения* рассматриваемой краевой задачи для уравнения Гельмгольца .

Каждому собственному значению отвечает функция вида (8.25), называемая *собственной функцией* краевой задачи. Такая собственная функция описывает одно из бесконечного множества ре-

шений уравнений Максвелла, которое в данном случае называют *волной типа* E_{mn}. Числа m и n называют *индексами* волны данного типа. Физически они означают количества стоячих полуволн, возникающих внутри волновода вдоль координатных осей x и y соответственно. Поскольку индексы могут быть любыми, в прямоугольном металлическом волноводе возможно раздельное существование сколь угодно большого числа волн типа E_{mn}. Однако из сказанного ранее следует, что волн типа E_{0n} и E_{m0} не существует.

Структура электромагнитного поля волны типа E_{mn}. Решение краевой задачи, даваемое формулой (8.25), позволяет непосредственно написать выражение проекции $\dot{E}_z$ комплексной амплитуды вектора напряженности электрического поля. Все остальные проекции векторов электромагнитного поля волны типа E_{mn} в прямоугольном волноводе получаются дифференцированием на основании формул перехода (8.1):

$$\begin{aligned}
\dot{E}_x &= -j\frac{h m\pi}{g^2 a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jhz},\\
\dot{E}_y &= -j\frac{h n\pi}{g^2 b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jhz},\\
\dot{E}_z &= E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jhz},\\
\dot{H}_x &= j\omega\varepsilon_0 \frac{n\pi}{g^2 b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jhz},\\
\dot{H}_y &= -j\omega\varepsilon_0 \frac{m\pi}{g^2 a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jhz},\\
\dot{H}_z &= 0.
\end{aligned} \qquad (8.27)$$

Пример 8.1. В заполненном воздухом прямоугольном волноводе с размерами стенок $a=50$ мм, $b=25$ мм возбуждена волна типа E_{11}. Вектор напряженности электрического поля в центре волновода при $x=a/2$, $y=b/2$ имеет амплитуду $E_0=200$ В/м. Определить комплексную амплитуду вектора **H** вдоль прямой линии, параллельной оси z и пересекающей поперечное сечение в точке с координатами $x=15$ мм, $y=10$ мм. Длина волны возбуждающего генератора $\lambda_0=35$ мм.

Коэффициент фазы в свободном пространстве

$$\beta=2\pi/\lambda_0=6.2832/0.035=179.5\ \text{м}^{-1}.$$

Поперечное волновое число, соответствующее волне типа E_{11}, находим по формуле (8.26):

$$g=\sqrt{(\pi/a)^2+(\pi/b)^2}=140.5\ \text{м}^{-1}.$$

Продольное волновое число

$h=\sqrt{\beta^2-g^2}=111.7$ м$^{-1}$.

Подставляя эти числа вместе с исходными данными в формулы (8.27), получаем зависимость комплексной амплитуды $\dot{\mathbf{H}}$ (А/м) от продольной координаты z вдоль выбранной линии:

$$\dot{\mathbf{H}}(z)=j0.151\exp(-j111.7z)\,\mathbf{i}_x-j0.199\exp(-j111.7z)\,\mathbf{i}_y.$$

Система формул (8.27), содержащая исчерпывающую информацию об электромагнитном поле волн типа E_{mn}, не позволяет, однако, наглядно представить себе пространственную структуру

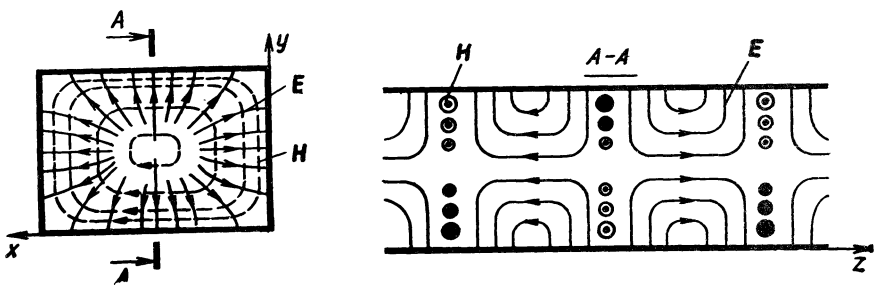


Рис. 8.2. Структура силовых линий векторов электромагнитного поля для волны типа E_{11} в прямоугольном металлическом волноводе

такого поля. Для этой цели в прикладной электродинамике принято строить картины силовых линий электрического и магнитного полей. Не останавливаясь на деталях построения, описанных в гл. 7, приведем картину мгновенного распределения силовых линий векторов **E** и **H** в простейшей волне типа E_{11} (рис. 8.2). Видно, что линии поля **E** представляют собой «скобки», которые подходят к поверхности металла под прямым углом. Линии поля **H** являются замкнутыми кривыми и лежат в поперечной плоскости. Картина поля периодична вдоль оси z; пространственным периодом служит *длина волны в волноводе* $\lambda_в=2\pi/h$.

С течением времени данная картина поля как единое целое перемещается вдоль оси z с некоторой фазовой скоростью $v_ф$. Направления векторов **E** и **H**, обозначенные стрелками на силовых линиях, таковы, что усредненный вектор Пойнтинга $\mathbf{П}_{ср}$ ориентирован вдоль положительного направления оси z.

Для любой более сложной волны типа E картину, изображенную на рис. 8.2, следует «повторить» столько раз, каково значение индекса волны по той или иной координатной оси. В качестве

примера на рис. 8.3 приведена картина распределения силовых линий полей для волны типа E_{22}.

По причинам, которые станут ясными при дальнейшем изложении, волны типа E в прямоугольном металлическом волноводе на практике используются довольно редко.

8.3. Критическая длина волны. Дисперсионная характеристика волновода

Найдем связь между продольным волновым числом h, двумя геометрическими параметрами волновода — размерами сечения a и b, а также длиной волны возбуждающего генератора λ_0.

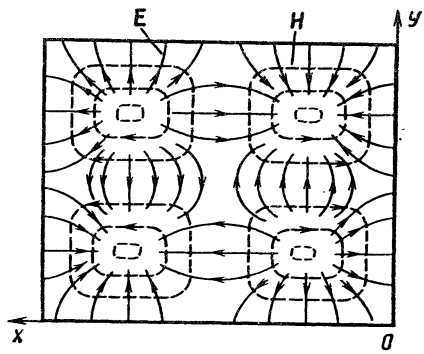


Рис. 8.3. Распределение силовых линий электромагнитного поля в поперечном сечении для волны типа E_{22}

Как указывалось в § 8.2, продольное волновое число связано с коэффициентом фазы β плоской волны в свободном пространстве и с поперечным волновым числом g:

$$h=\sqrt{\beta^2-g^2}. \qquad (8.28)$$

В свою очередь, поперечное волновое число, определяемое формулой (8.26), зависит от размеров поперечного сечения и от индексов выбранного типа волны, но никак не связано с частотой.

Формула (8.28) вскрывает важнейшую особенность работы волновода как линии передачи электромагнитных колебаний. Если рабочая длина волны λ_0 мала настолько, что $\beta>g$, то продольное волновое число h оказывается действительным, а это, как известно, означает распространение колебаний в виде бегущих волн постоянной амплитуды.

Если же длина волны генератора λ_0 увеличена настолько, что $\beta<g$, то вместо бегущих волн в волноводе могут существовать лишь нераспространяющиеся колебания. Амплитуда этих колебаний экспоненциально уменьшается вдоль координаты z, а фаза во всех поперечных сечениях постоянна. Об этом свидетельствует мнимый характер продольного волнового числа. Говорят, что при этом волновод с рассматриваемым типом волны работает *в режиме отсечки.*

Пограничный случай возникает на такой рабочей частоте, когда $\beta=g$. При этом $h=0$ и, как следствие, длина волны в волноводе $\lambda_в=\infty$. Принято говорить, что волновод с выбранным типом

волны оказывается в критическом режиме. Длину волны генератора, соответствующую случаю $\beta = g$, называют *критической длиной волны* данного типа и обозначают $\lambda_{кр}$.

Из приведенных рассуждений следует, что в критическом режиме коэффициент фазы

$$\beta_{кр} = 2\pi/\lambda_{кр} = g.$$

Отсюда получается формула для вычисления критической длины волны

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{g} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}. \tag{8.29}$$

Анализ этого выражения показывает, что при не слишком больших значениях индексов m и n критическая длина волны по порядку величин совпадает с характерным размером поперечного сечения прямоугольного волновода. Так, для волны типа E_{12} при $a = 40$ мм и $b = 15$ мм имеем $\lambda_{кр} = 14.74$ мм.

Наряду с критической длиной волны можно говорить также о критической частоте

$$f_{кр} = \frac{c}{\lambda_{кр}} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \tag{8.30}$$

Связь между параметрами h, β и g на основании формул (8.28) и (8.29) можно выразить через соответствующие длины волн:

$$\frac{1}{\lambda_в} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_{кр}^2}}. \tag{8.31}$$

Это равенство показывает, что при изменении длины волны генератора λ_0 длина волны в волноводе $\lambda_в$ изменяется не пропорционально ей. Закон зависимости длины волны в волноводе от длины волны в свободном пространстве называют *дисперсионной характеристикой* волновода. В явном виде эта характеристика описывается формулой, вытекающей из выражения (8.31):

$$\lambda_в = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_{кр})^2}}. \tag{8.32}$$

Заметим, что вывод формулы (8.32) основан лишь на двух предпосылках — на пропорциональности комплексных амплитуд бегущих волн множителю $\exp(-jhz)$ и на существовании режима отсечки. Поскольку обе предпосылки относятся к волне любого типа в полом металлическом волноводе с произвольной формой

поперечного сечения, полученный здесь результат оказывается универсальным и может быть применим к любому волноводу. Отличия будут состоять лишь в различных способах вычисления критической длины волны.

Дисперсионную характеристику волновода удобно изобразить графически (рис. 8.4). Вся область длин волн, меньших $\lambda_{кр}$, является областью «прозрачности» данного волновода на рассматриваемом типе волны. При этом если $\lambda_0 \ll \lambda_{кр}$, то длина волны в волноводе лишь в малой степени отличается от длины волны в свободном пространстве, всегда превосходя ее. Если параметр λ_0 на графике рис. 8.4 стремится к $\lambda_{кр}$ слева, то длина волны в волноводе стремится к бесконечности. При переходе λ_0 через граничное значение $\lambda_{кр}$ в волноводе существуют уже не бегущие волны, а колебания, экспоненциально затухающие вдоль продольной оси z. Всю область длин волн, которой соответствуют значения $\lambda_0 > \lambda_{кр}$, называют областью «непрозрачности» или областью отсечки.

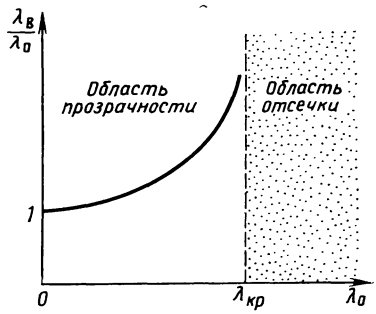


Рис. 8.4. Дисперсионная характеристика волновода

Пример 8.2. Прямоугольный волновод с размерами поперечного сечения $a=60$ мм, $b=35$ мм работает на волне типа E_{11}. Определить коэффициент ослабления α в данном волноводе, если частота $f_0=0.8f_{кр}$.

По формуле (8.30), критическая частота

$$f_{кр}=\frac{3\cdot 10^8}{2}\sqrt{(1/0.06)^2+(1/0.035)^2}=4.96\cdot 10^9 \text{ Гц}.$$

На частоте f_0 коэффициент фазы в свободном пространстве

$$\beta=\omega_0/c=2\pi f_0/c=103.88 \text{ м}^{-1}.$$

Поперечное волновое число

$$g=\sqrt{(3.14/0.06)^2+(3.14/0.035)^2}=103.91 \text{ м}^{-1}.$$

Здесь $\beta<g$, так что продольное волновое число мнимое:

$$h=\pm j\sqrt{g^2-\beta^2}=\pm j2.497 \text{ м}^{-1}.$$

Если в последнем равенстве выбрать отрицательный знак, то зависимость комплексных амплитуд от координаты z вида $\exp(-jhz)$ превращается в $\exp(-\alpha z)$, где вещественный коэффициент ослабления $\alpha = 2.497$ м$^{-1}$.

То, что на частотах $f_0 > f_{кр}$ длина волны в волноводе больше длины волны в свободном пространстве, говорит о том, что волны в волноводах распространяются с фазовыми скоростями, бо́льшими скорости света в вакууме. Поскольку фазовая скорость, длина волны и частота связаны между собой очевидным соотношением, то из формулы (8.32) следует, что фазовая скорость

$$v_ф = \frac{c}{\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_{кр})^2}}. \tag{8.33}$$

Поскольку волновод является системой с дисперсией, групповая скорость $v_{гр}$ в нем не равна фазовой скорости (см. гл. 5). По общему правилу,

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{dh} = \frac{1}{(dh/d\lambda_0)(d\lambda_0/d\omega)}. \tag{8.34}$$

После несложных преобразований отсюда получаем

$$v_{гр} = c\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_{кр})^2}. \tag{8.35}$$

Видно, что групповая скорость всегда меньше фазовой скорости и скорости света. Интересно отметить также, что фазовая и групповая скорости волны одного и того же типа связаны равенством

$$v_ф v_{гр} = c^2 \tag{8.36}$$

на любой рабочей частоте.

8.4. Волны типа Н в прямоугольном волноводе

В данном параграфе будет изучен еще один класс типов волн в прямоугольном металлическом волноводе. Эти волны, называемые волнами типа Н, характеризуются тем, что в них магнитный вектор имеет продольную составляющую с проекцией $\dot{H}_z$, в то время как электрическое поле поперечно, т. е. $\dot{E}_z = 0$.

Будем считать, что геометрические и физические параметры волновода те же, что и при рассмотрении волн типа Е. Комплексные амплитуды всех проекций векторов электромагнитного поля можно выразить через функцию $\dot{H}_z$ по формулам перехода, вытекающим из равенств (7.59):

$$\dot{E}_x=\frac{-j\omega\mu_0}{g^2}\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y},\qquad \dot{H}_x=\frac{-jh}{g^2}\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x},$$
$$\dot{E}_y=\frac{j\omega\mu_0}{g^2}\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x},\qquad \dot{H}_y=\frac{-jh}{g^2}\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}. \tag{8.37}$$

Функция $\dot{H}_z$ является решением уравнения Гельмгольца и должна отыскиваться в виде

$$\dot{H}_z(x, y, z)=H_z(x, y)\,e^{-jhz}. \tag{8.38}$$

При этом амплитудная функция $H_z(x, y)$ удовлетворяет двумерному уравнению Гельмгольца

$$\nabla_\perp^2 H_z+g^2H_z=0, \tag{8.39}$$

в котором, как и ранее, $g=\sqrt{\beta^2-h^2}$ — поперечное волновое число.

Уравнение (8.39) следует дополнить граничными условиями, которые обеспечивают обращение в нуль касательных составляющих электрического вектора на идеально проводящих стенках волновода:

$$\dot{E}_x=0 \text{ при } y=0,\ y=b,$$
$$\dot{E}_y=0 \text{ при } x=0,\ x=a. \tag{8.40}$$

Формулы перехода позволяют записать данные условия через искомую функцию H_z:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}=0 \text{ при } y=0,\ y=b,$$
$$\frac{\partial H_z}{\partial x}=0 \text{ при } x=0,\ x=a. \tag{8.41}$$

Таким образом, исследование распространения волн типа H в прямоугольном металлическом волноводе сводится к решению краевой задачи (8.39)—(8.41) для поперечного уравнения Гельмгольца.

Данная краевая задача отличается от той, которая описывает распространение волн типа E, так как здесь на границе раздела воздух — металл обращается в нуль не сама неизвестная функция, а ее производная по нормали. В математике такие краевые задачи называют однородными краевыми задачами Неймана. Проблема, полностью аналогичная рассматриваемой, возникает в механике при изучении колебаний упругой мембраны прямоугольной формы со свободными краями. Равенство нулю нормальной производной на краях означает отсутствие внутренних напряжений в этих точках мембраны.

Рассматриваемая краевая задача решается методом разделения переменных. Отсылая за подробностями к § 8.2, запишем общее решение поперечного уравнения Гельмгольца в виде

$$H_z=(A\sin g_x x+B\cos g_x x)(C\sin g_y y+D\cos g_y y). \tag{8.42}$$

Граничные условия (8.41) при $x=0$, $y=0$ будут выполняться лишь в том случае, если $A=C=0$. Далее, обозначая BD как H_0, будем иметь

$$H_z(x,\ y)=H_0\cos g_x x\cos g_y y. \tag{8.43}$$

Из граничных условий при $x=a$, $y=b$ следует, что

$$g_x=m\pi/a,\qquad g_y=n\pi/b, \tag{8.44}$$

где m, n — целые положительные числа, не равные нулю одновременно.

Как и ранее, поперечное волновое число g определяется соотношением

$$g=\sqrt{(m\pi/a)^2+(n\pi/b)^2}. \tag{8.45}$$

Каждой паре индексов m, n соответствует волна Н-типа, обозначаемая как H_{mn}. Критическая длина волны находится по формуле, совпадающей с (8.30):

$$\lambda_{кр}=\frac{2}{\sqrt{(m/a)^2+(n/b)^2}}. \tag{8.46}$$

Для волн типа Н справедливы полученные ранее формулы, позволяющие находить длину волны в волноводе

$$\lambda_в=\frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_{кр})^2}} \tag{8.47}$$

и фазовую скорость

$$v_ф=\frac{c}{\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_{кр})^2}}. \tag{8.48}$$

Выясним вопрос о том, какой тип волны в прямоугольном волноводе является низшим, т. е. имеет наибольшую критическую длину волны. В соответствии с формулой (8.46) низшим окажется тот тип волны, которому соответствуют наименьшие индексы. Так как для волн Н-типа

$$H_z=H_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \tag{8.49}$$

то в данном случае один из индексов (но не оба вместе) может быть равен нулю. В то же время известно, что для волн Е-типа ни

один из индексов не может обратиться в нуль. Из сказанного следует, что низший (основной) тип волны в прямоугольном волноводе относится к классу волн Н-типа.

Если условиться считать, что $a>b$, то из двух волн с наименьшими значениями индексов, а именно H_{10} и H_{01}, наибольшую критическую длину волны будет иметь волна типа H_{10}, у которой вдоль широкой стенки укладывается одна стоячая полуволна, а вдоль узкой стенки поле неизменно.

Приведем в заключение сводку формул, определяющих пространственные зависимости комплексных амплитуд проекций векторов электромагнитного поля волны типа H_{mn} с произвольными значениями индексов m и n. Формулы получены подстановкой выражения (8.49) в систему (8.37):

$$\begin{aligned}
\dot{E}_x &= j\omega\mu_0 \frac{n\pi}{g^2 b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jhz},\\
\dot{E}_y &= -j\omega\mu_0 \frac{m\pi}{g^2 a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jhz},\\
\dot{E}_z &= 0,\\
\dot{H}_x &= j\frac{hm\pi}{g^2 a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jhz},\\
\dot{H}_y &= j\frac{hn\pi}{g^2 b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jhz},\\
\dot{H}_z &= H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jhz}.
\end{aligned} \tag{8.50}$$

8.5. Волна типа H_{10}

Рассмотрим этот тип волны в прямоугольном волноводе более подробно как по причине его широкого практического использования, так и из-за наглядности построений и результатов.

Начнем с картины силовых линий электромагнитного поля. В качестве исходной можно взять структуру поля волны типа Н над идеально проводящей плоскостью, которая изучалась в гл. 7. Обращаясь к формуле (7.23), следует заметить, что в плоскости с координатой $x=a$, удовлетворяющей равенству $ga=\pi$, напряженность электрического поля обращается в нуль. Поэтому здесь можно разместить вторую отражающую плоскость и тем самым локализовать электромагнитное поле в пределах бесконечного плоского слоя $0\leqslant x\leqslant a$ (рис. 8.5), размер которого в точности равен половине поперечной длины волны:

$$a=\pi/g=\Lambda_{\text{попер}}/2.$$

Далее, поскольку силовые линии электрического вектора здесь параллельны поперечной оси y, во внутренней области волновода можно установить две идеально проводящие перегородки, параллельные оси x и отстоящие на некотором расстоянии b. В силу перпендикулярности векторов поля **E** к этим перегородкам граничные условия на них будут выполняться автоматически. Таким образом, можно рассматривать лишь поле во внутренней области, ограниченной прямоугольным контуром поперечного сечения (две плоскости и две перегородки). Из приведенного рисунка видно, что количество полуволн вдоль осей x и y как раз таково, чтобы назвать рассматриваемый электромагнитный процесс волной типа H_{10}.

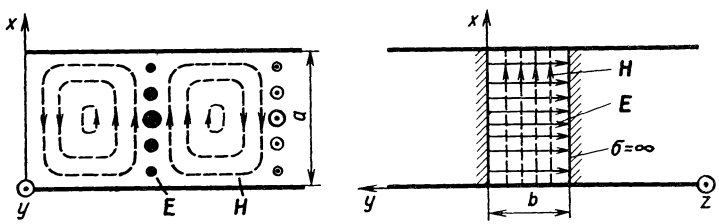


Рис. 8.5. Построение картины силовых линий векторов электромагнитного поля волны типа H_{10}

Важно отметить, что характер картины поля не зависит от выбора расстояния b между перегородками. Отсюда следует, что размер b (длина узкой стенки волновода) не должен входить в выражение, определяющее критическую длину волны. Действительно, из равенства (8.45) при $m=1$, $n=0$ следует, что

$$\lambda_{\text{кр}H_{10}}=2a. \tag{8.51}$$

Так как волна типа H_{10} в прямоугольном металлическом волноводе является основной, то полученный результат формулируется следующим образом: по прямоугольному волноводу можно передавать колебания, у которых длина волны в свободном пространстве *не превышает удвоенного размера широкой стенки волновода*. Более длинноволновые колебания экспоненциально затухают по амплитуде вдоль оси распространения.

Приведем выражения, определяющие пространственную зависимость комплексных амплитуд декартовых проекций векторов электромагнитного поля для волны типа H_{10}:

$$\dot{E}_x=0,$$

$$\dot{E}_y=-j\frac{\omega\mu_0 a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-jhz},$$

$$\dot{E}_z=0,$$

$$\dot{H}_x = j\frac{ha}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz}, \qquad (8.52)$$

$$\dot{H}_y = 0,$$

$$\dot{H}_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz}.$$

Формулы получены из выражений (8.50); учтено, что в данном случае $g = 2\pi/\lambda_{кр} = \pi/a$.

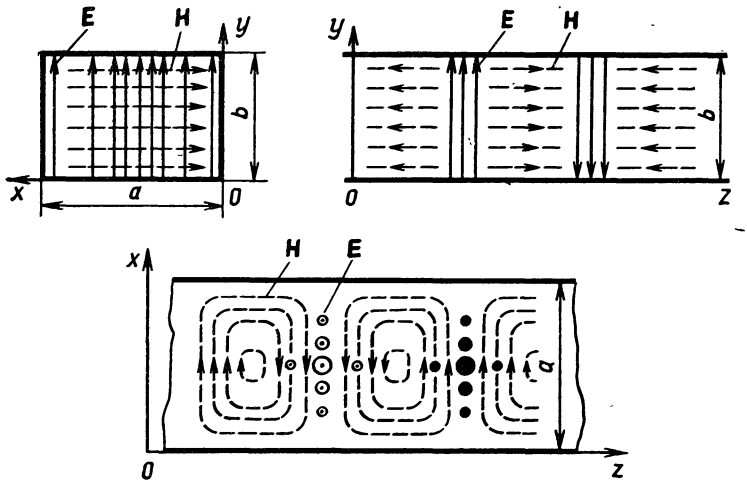


Рис. 8.6. Структура силовых линий векторов электромагнитного поля волны типа H_{10} в прямоугольном волноводе

Иногда бывает удобным несколько преобразовать систему равенств (8.52), выразив все комплексные амплитуды через E_{max} — максимальную амплитуду напряженности электрического поля, наблюдаемую в центре широкой стенки волновода:

$$\dot{E}_x = 0,$$

$$\dot{E}_y = E_{max} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz},$$

$$\dot{E}_z = 0,$$

$$\dot{H}_x = -\frac{h}{\omega\mu_0} E_{max} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz},$$

$$\dot{H}_y = 0, \qquad (8.53)$$

$$\dot{H}_z = j\frac{\pi}{\omega\mu_0 a} E_{max} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz}.$$

Структура силовых линий векторов электромагнитного поля волны типа H_{10} представлена на рис. 8.6.

Пример 8.3. Волна типа H_{10} в волноводе с размерами стенок $a=40$ мм, $b=20$ мм имеет амплитудное значение $E_{max}=3\cdot10^4$ В/м. Длина волны генератора $\lambda_0=55$ мм. Найти длину волны в волноводе $\lambda_в$, а также величину $H_{z\,max}$ — амплитуду напряженности магнитного поля на узких стенках волновода.

Здесь $\lambda_{кр}=2a=80$ мм, откуда

$$\lambda_в=55/\sqrt{1-(55/80)^2}=75.7 \text{ мм}.$$

Частота поля $\omega=2\pi c/\lambda_0=3.427\cdot10^{10}$ с$^{-1}$. Так как на узких стенках волновода $\cos(\pi x/a)=\pm1$, то в соответствии с (8.52) имеем

$$H_{z\,max}=\pi E_{max}/(a\omega\mu_0)=54.71 \text{ А/м}.$$

Плотность потока мощности в волноводе. Как видно из формул (8.52) или (8.53), поперечные проекции E_y и $-H_x$ изменяются во времени синфазно. Если теперь образовать комплексный вектор Пойнтинга $\dot{\mathbf{\Pi}}_1$ из y-й составляющей вектора $\mathbf{E}$ и x-й составляющей вектора $\mathbf{H}$, то этот вектор окажется направленным вдоль оси z и чисто действительным:

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_1=\tfrac{1}{2}[\dot{E}_y\mathbf{i}_y\overset{*}{\dot{H}}_x\mathbf{i}_x]=\frac{\omega\mu_0 ha^2}{2\pi^2}H_0^2\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathbf{i}_z. \qquad (8.54)$$

Плотность потока мощности вдоль оси распространения будет максимальной в центре поперечного сечения волновода.

Если же образовать вектор Пойнтинга $\dot{\mathbf{\Pi}}_2$ из проекций $\dot{E}_y$ и $\dot{H}_z$, то этот вектор окажется направленным вдоль оси x и мнимым:

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_2=\tfrac{1}{2}[\dot{E}_y\mathbf{i}_y\overset{*}{\dot{H}}_z\mathbf{i}_z]=-j\frac{\omega\mu_0 a}{4\pi}H_0^2\sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\mathbf{i}_x. \qquad (8.55)$$

Итак, мощность электромагнитного поля в волноводе с волной типа H_{10} состоит из двух частей: активной мощности, переносимой вдоль оси z, и реактивной (колеблющейся) мощности, которая связана с образованием стоячих волн вдоль поперечной оси x.

Поляризационная структура поля. В гл. 3 мы познакомились с поляризационными характеристиками плоских электромагнитных волн в свободном пространстве. С таких же позиций можно изучать поляризацию векторов поля волны типа H_{10} в прямоугольном металлическом волноводе, хотя ситуация здесь несколько сложнее.

В соответствии с формулами (8.53) электрический вектор $\dot{\mathbf{E}}=\dot{E}_y\mathbf{i}_y$ имеет единственную декартову проекцию и поэтому в любой точке поперечного сечения волновода поляризован линейно. Магнитный вектор с комплексной амплитудой $\dot{\mathbf{H}}=\dot{H}_x\mathbf{i}_x+\dot{H}_z\mathbf{i}_z$ имеет в общем случае эллиптическую поляризацию, поскольку проекции $\dot{H}_x$ и $\dot{H}_z$ в соответствии с формулами (8.52) и (8.53) всегда сдвинуты по фазе на $\pi/2$ радиан; при этом они по-разному зависят как от рабочей частоты ω, так и от координаты x в поперечной плоскости. В результате отношение осей поляризационного эллипса будет различным в разных точках.

Нетрудно заметить, что на отрезке $0\leqslant x\leqslant a$ всегда найдутся две такие точки x_1 и x_2, в которых вектор напряженности магнитного поля будет поляризован по кругу с левым и правым направлением вращения соответственно. Координаты этих точек должны удовлетворять уравнениям

$$|\dot{H}_x(x_{1,2})|=|\dot{H}_z(x_{1,2})| \tag{8.56}$$

или

$$\begin{aligned}\frac{ha}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right)&=\cos\left(\frac{\pi x_1}{a}\right),\\ \frac{ha}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)&=-\cos\left(\frac{\pi x_2}{a}\right).\end{aligned} \tag{8.57}$$

Решения этих уравнений очевидны:

$$\begin{aligned}x_1&=\frac{a}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{ha}\right),\\ x_2&=a-x_1.\end{aligned} \tag{8.58}$$

Таким образом, точки x_1 и x_2 располагаются симметрично относительно центра широкой стенки волновода.

Пример 8.4. Волновод сечением 23×10 мм работает на волне типа H_{10}. Найти координаты точек x_1 и x_2, в которых магнитное поле поляризовано по кругу, если рабочая длина волны $\lambda_0=35$ мм.

Находя последовательно параметры $\lambda_в=53.94$ мм, $h=0.116$ мм$^{-1}$, $ha=2.679$ и используя формулы (8.58), получаем $x_1=6.33$ мм, $x_2=16.67$ мм.

Вращающийся характер поляризации магнитного поля волны типа H_{10} имеет существенное значение для практики, определяя принцип работы некоторых волноводных СВЧ-устройств.

Токи на стенках волновода с волной типа H_{10}. Чтобы найти плотность поверхностного электрического тока на идеально проводящих стенках волновода, следует воспользоваться полученной ранее формулой (4.21). Поскольку картина распределения силовых линий вектора **H** в волне рассматриваемого типа известна, построение линий тока на стенках не представляет затруднений: эти линии образуют семейство кривых, ортогональных семейству силовых линий напряженности магнитного поля (рис. 8.7). Подчеркнем еще раз, что здесь изображена картина мгновенного распределения токов; во времени она перемещается вдоль оси волновода с фазовой скоростью.

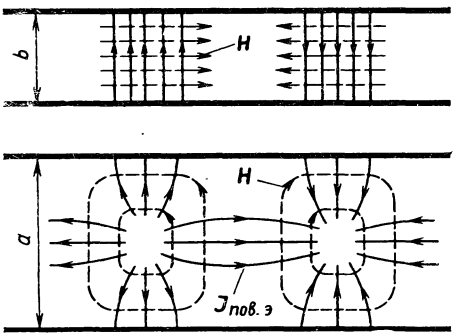


Рис. 8.7. Распределение векторов плотности поверхностного электрического тока на стенках прямоугольного волновода с волной типа H_{10}

Наглядно можно представить себе, что поверхностный ток, растекаясь, например, из центральной области нижней широкой стенки в радиальном направлении, огибает затем два нижних ребра и, пройдя по узким стенкам, вновь собирается в центральную область верхней широкой стенки. Через половину длины волны в волноводе направления линий поверхностного тока меняются на обратные.

Из представленного чертежа видно, что точки схождения и расхождения линий тока расположены как раз там, где напряженность электрического поля равна нулю. Этот факт имеет следующее физическое объяснение. Известно (см. гл. 1), что линии полного тока, рассматриваемого как совокупность токов смещения и проводимости, всегда должны быть замкнутыми. В данном случае токи проводимости на стенках волновода замыкаются токами смещения, которые существуют внутри волновода, будучи ориентированы вдоль оси y. Плотность тока смещения связана с напряженностью электрического поля известным соотношением $\mathbf{J}_{см} = \varepsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t$. Поскольку в бегущей волне вектор напряженности электрического поля

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y)\cos(\omega t - hz),$$

получаем

$$\mathbf{J}_{см}(x, y, z, t) = -\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}(x, y)\sin(\omega t - hz).$$

Таким образом, ток смещения максимален не там, где напряженность электрического поля достигает максимума, а в точках, отстоящих на четверть пространственного периода, т. е. на $\lambda_в/4$.

Излучающие и неизлучающие щели. Зная распределение поверхностных токов на стенках волновода с волной типа H_{10}, можно на качественном уровне решить практически важную задачу о связи волновода с окружающим пространством через щели, прорезанные в его стенках.

В волноводной технике щелью называют прямоугольное отверстие, длина которого значительно превосходит ширину. Предположим, что в узкой стенке волновода прорезаны две щели, одна из которых ориентирована в продольном, а другая — в поперечном направлении (рис. 8.8). Первая щель перерезает линии поверхностного тока под углом 90°. Ток, притекающий к нижней кромке такой щели, вызовет избыток положительных зарядов (имеется в виду техническое направление тока). Очевидно, что на верхней кромке будет наведен равный по абсолютной величине отрицательный заряд. Заряды на кромках щели будут изменяться во времени в такт с колебаниями возбуждающего генератора, и подобная щель будет служить излучателем электромагнитных волн (с количественных позиций этот вопрос подробно рассмотрен в гл. 13).

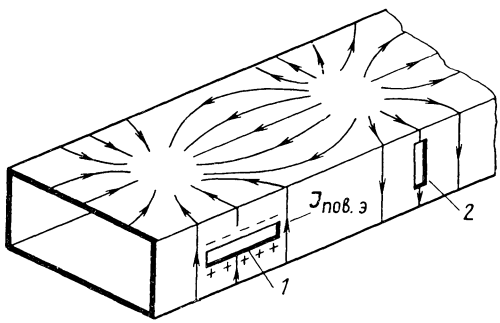


Рис. 8.8. Излучающая (*1*) и неизлучающая (*2*) щели на стенках прямоугольного волновода с волной типа H_{10}

Совсем по-иному ведет себя щель, прорезанная параллельно линиям поверхностного тока. Из-за узости щели наведенный заряд будет сравнительно мал, так что излучение из такой щели оказывается незначительным.

Итак, можно сформулировать принцип: щель в стенке волновода эффективно излучает электромагнитную энергию в том случае, если она перерезает линии поверхностного тока.

Излучающие щели широко применяют при создании так называемых щелевых антенн в диапазоне сантиметровых волн.

В ряде случаев требуются неизлучающие щели, позволяющие вводить внутрь волновода различные устройства, не искажая структуру поля. В качестве примера на рис. 8.9 показана щелевая измерительная линия — один из самых распространенных измерительных приборов в СВЧ-диапазоне. Здесь имеется так называе-

мый зонд, который представляет собой миниатюрную антенну, соединенную с высокочастотным детектором. Зонд перемещается вдоль узкой щели, прорезанной точно посередине широкой стенки прямоугольного волновода с волной типа H_{10}. При таком размещении щели излучение из нее практически отсутствует. Измеряя ток детектора в различных точках оси волновода, можно экспериментально изучать картины стоячих волн и находить входные сопротивления, а также другие параметры нагрузок, подключаемых к волноводу [3].

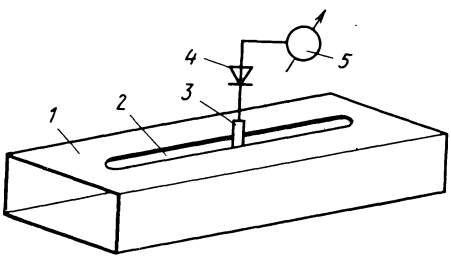


Рис. 8.9. Эскиз конструкции волноводной измерительной линии:
1 — волновод с волной типа H_{10}; *2* — продольная щель; *3* — зонд; *4* — полупроводниковый диод; *5* — измерительный прибор

8.6. Характеристическое сопротивление волновода

По физическому смыслу характеристическое сопротивление линии передачи — это отношение некоторой электрической характеристики волнового процесса к какой-либо магнитной характеристике. Так, в **теории радиотехнических цепей** с распределенными параметрами [3] принято вводить волновое сопротивление линии

$$Z_в = \dot{U}/\dot{I}, \tag{8.59}$$

где $\dot{U}$ и $\dot{I}$ — комплексные амплитуды напряжения и тока в бегущей волне.

Ранее в гл. 3 было введено характеристическое сопротивление среды для однородной плоской электромагнитной волны

$$Z_c = \dot{E}_x/\dot{H}_y = \sqrt{\mu_a/\varepsilon_a}.$$

В теории волноводов также целесообразно воспользоваться понятием характеристического сопротивления, определив его как отношение модулей поперечных составляющих векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$:

$$Z_c = \frac{\sqrt{\dot{E}_x\dot{E}_x^* + \dot{E}_y\dot{E}_y^*}}{\sqrt{\dot{H}_x\dot{H}_x^* + \dot{H}_y\dot{H}_y^*}}. \tag{8.60}$$

В дальнейшем рассмотрим волны E- и H-типов по отдельности.

Волны типа E_{mn}. Здесь на основании формул перехода (8.27) имеют место следующие соотношения пропорциональности:

$$\dot{E}_x = \frac{h}{\omega\varepsilon_0}\dot{H}_y, \qquad \dot{E}_y = -\frac{h}{\omega\varepsilon_0}\dot{H}_x.$$

Подставив эти равенства в выражение (8.60), приходим к простому результату:

$$Z_{cE}=h/(\omega\varepsilon_0). \tag{8.61}$$

Данную формулу полезно несколько преобразовать, воспользовавшись тем, что

$$h=2\pi/\lambda_в=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_{кр})^2}.$$

Учитывая это, получим окончательно

$$Z_{cE}=Z_0\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_{кр})^2}, \tag{8.62}$$

где $Z_0=377$ Ом — характеристическое сопротивление вакуума.

Следует обратить внимание на то, что характеристическое сопротивление прямоугольного волновода, работающего на волнах Е-типа, зависит от рабочей длины волны, обращаясь в нуль при $\lambda_0=\lambda_{кр}$ и стремясь к величине Z_0, когда $\lambda_0\to 0$.

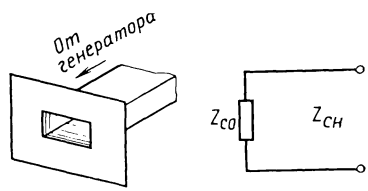


Рис. 8.10. Волноводный излучатель и его эквивалентная схема

Волны типа H_{mn}. Здесь все выкладки полностью аналогичны тем, которые только что проведены для волн типа E_{mn}. Поэтому приведем окончательный результат:

$$Z_{cH}=\frac{Z_0}{\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_{кр})^2}}. \tag{8.63}$$

Понятие характеристического сопротивления оказывается полезным при расчетах СВЧ-устройств. Так, удается с точностью 10—15% оценить коэффициент отражения от открытого конца волновода, излучающего в свободное пространство. Эскиз такого волноводного излучателя приведен на рис. 8.10; здесь же изображена приближенная эквивалентная схема данного устройства, состоящая из полубесконечной линии передачи с волновым сопротивлением Z_{cH} и двухполюсника нагрузки с сопротивлением Z_0. Как известно [3], при этом коэффициент отражения по напряжению

$$\rho=\frac{Z_0-Z_{cH}}{Z_0+Z_{cH}}. \tag{8.64}$$

Подчеркнем, что данный результат является приближенным, при его выводе никак не учитывалось бесконечное множество нераспространяющихся волноводных волн высших типов, возникающих в непосредственной близости от открытого конца волновода.

Пример 8.5. Найти коэффициент отражения ρ от открытого конца и коэффициент стоячей волны (КСВ), имеющие место в волноводе сечением 72×34 мм, который работает на длине волны $\lambda_0=120$ мм ($f_0=2.5$ ГГц). Используется волна типа H_{10}.

На основании формулы (8.63) характеристическое сопротивление волновода

$$Z_{cH}=Z_0/\sqrt{1-(120/144)^2}=1.809Z_0.$$

Тогда коэффициент отражения от открытого конца

$$\rho=(1-1.809)/(1+1.809)=-0.288.$$

Коэффициент стоячей волны

$$\text{КСВ}=(1+|\rho|)/(1-|\rho|)=1.89.$$

Проведенный здесь ориентировочный расчет убеждает в том, что коэффициент отражения от открытого конца волновода сравнительно невелик, поэтому такой элемент может оказаться достаточно эффективной антенной в СВЧ-диапазоне.

8.7. Основы применения прямоугольных волноводов

Полые металлические волноводы используют в диапазоне рабочих длин волн приблизительно от 50 см до 1 мм. Если говорить о радиочастотных линиях передачи — наиболее типичной области применения волноводов, то на волнах дециметрового диапазона волноводы используются лишь в мощных устройствах, а начиная с длины волны приблизительно 6 см — повсеместно. Широкое применение полых металлических волноводов обусловлено рядом их достоинств — высокой технологичностью волноводных конструкций, достаточно малыми потерями, отличной защищенностью от внешних помех, способностью передавать огромные импульсные мощности.

Чаще всего волноводные тракты строят на основе прямоугольных металлических волноводов, по которым распространяются волны низшего типа H_{10}. Причины этого состоят в следующем: 1) поперечные габариты волновода оказываются минимальными; 2) структура поля волны низшего типа устойчива по отношению к введению внутрь волновода каких-либо неоднородностей.

Первая из перечисленных здесь причин не требует пояснений, в то время как на второй следует остановиться особо. Реальный волноводный тракт не может представлять собой регулярный волновод. В практических конструкциях всегда имеются оконечные устройства, изгибы оси, регулировочные элементы и т. д. Жела-

тельно, чтобы все эти неоднородности по возможности меньше сказывались на качестве работы волноводного тракта во всем рабочем диапазоне частот. В качестве примера рассмотрим прямоугольный волновод с волной типа H_{10}, часть сечения которого перекрыта металлической диафрагмой, обеспечивающей согласование линии передачи с оконечной нагрузкой (рис. 8.11). Из рисунка видно, что одни лишь падающие и отраженные волны основного типа не могут удовлетворить граничным условиям на поверхности диафрагмы. Поэтому в волноводе возникает бесконечная в общем случае последовательность E- и H-волн высших типов. Амплитуды и начальные фазы этих волн устанавливаются такими, чтобы выполнялись граничные условия в плоскости диафрагмы.

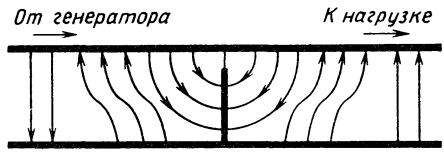


Рис. 8.11. Картина силовых линий электрического поля вблизи диафрагмы, помещенной внутрь волновода

Могут представиться два случая.

1) Поперечное сечение волновода достаточно велико, так что некоторые волны высших типов оказываются распространяющимися. Подобный волновод принято называть *многоволновым*. Электромагнитное поле справа от диафрагмы (рис. 8.11) будет являться суммой волн высших типов и прошедшей части основной волны типа H_{10}. Естественно, что это суммарное поле может весьма существенно отличаться от исходного поля падающей волны.

2) Поперечные размеры волновода выбраны таким образом, что все типы волн, кроме основного, являются нераспространяющимися. Такой волновод называют *одноволновым*. Ясно, что здесь энергия волн высших типов будет сконцентрирована лишь в непосредственной близости от диафрагмы. Уже на расстояниях порядка одной длины волны справа и слева от препятствия структура поля окажется практически такой же, как и в падающей волне.

В подавляющем большинстве случаев на практике используют прямоугольные волноводы, работающие в одноволновом режиме. Одной из причин этого является необходимость обеспечения эффективной работы оконечных устройств, которые служат для связи волновода с внешними цепями. В качестве примера рассмотрим эскиз часто применяемого оконечного устройства — волноводно-коаксиального перехода, который служит для сочленения прямоугольного волновода с коаксиальным кабелем (рис. 8.12). Здесь внутренний проводник коаксиального кабеля вводится внутрь волновода через отверстие в широкой стенке, образуя штыревую антенну. Расстояние между штырем и короткозамыкающей торцевой стенкой выбирают близким к $\lambda_в/4$. Эпюры распределения напря-

женности электрического поля (даны внизу на рис. 8.12) показывают, что штырь оказывается вблизи пучностей стоячих волн по обеим осям. Именно это обеспечивает эффективную связь между кабелем и волноводом.

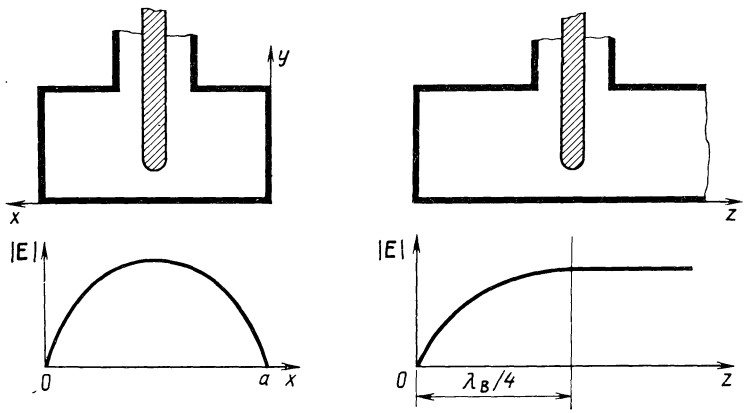


Рис. 8.12. Волноводно-коаксиальный переход

Если допустить, что по волноводу наряду с основной волной распространяется одна из волн высших типов, например H_{20}, то мощность, переносимая волной высшего типа, не будет поступать в коаксиальный кабель, поскольку штырь волноводно-коаксиального перехода окажется в минимуме электрического поля для волны типа H_{20} (рис. 8.13).

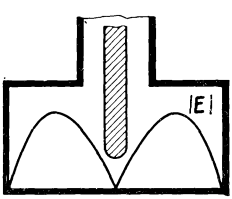


Рис. 8.13. Распределение электрического поля в волноводно - коаксиальном переходе с волной типа H_{20}

Другим явлением, наблюдаемым в многоволновом волноводе, является интерференция волн различных типов, которые распространяются по волноводу с различными фазовыми скоростями. Так, если на входе волновода при $z=0$ две волны различных типов, условно обозначаемые номерами *1* и *2*, синфазны, то при $z>0$ суммарное поле имеет комплексную амплитуду

$$\dot{E}_{\Sigma}(z)=\dot{E}_1 e^{-jh_1 z}+\dot{E}_2 e^{-jh_1 z}. \qquad (8.65)$$

Отсюда следует, что в точке на оси z с координатой

$$\Lambda=\frac{\pi}{|h_1-h_2|} \qquad (8.66)$$

поля рассматриваемых двух волн будут противофазны; как следствие, амплитуда суммарного поля существенно уменьшится. Явле-

ние интерференции усугубляется еще и тем, что фазовые скорости волн различных типов по-разному зависят от частоты. Из-за этого амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) устройства, выполненного на базе многоволнового волновода, может оказаться весьма нерегулярной (рис. 8.14).

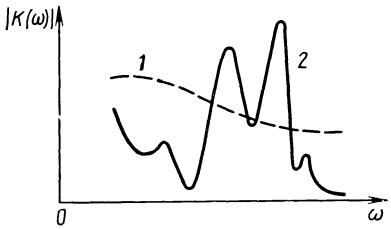


Рис. 8.14. Амплитудно-частотные характеристики четырехполюсника, образованного отрезком волновода:

1 — одноволновый волновод; *2* — многоволновый волновод

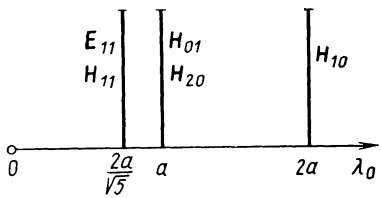


Рис. 8.15. Диаграмма типов волн в прямоугольном металлическом волноводе при $b/a=1/2$

Диаграмма типов волн в прямоугольном волноводе. Выбирая геометрические размеры сечения волновода, исходят из того, что для волн как E-, так и H-типов критическая длина волны определяется одной и той же формулой

$$\lambda_{кр}=2/\sqrt{(m/a)^2+(n/b)^2},$$

причем $\lambda_{кр}$ тем меньше, чем больше индексы волны m и n.

Рассмотрим совокупность типов волн с наибольшими значениями $\lambda_{кр}$. Непосредственные вычисления дают

$$\lambda_{кр H_{10}}=2a,\quad \lambda_{кр H_{01}}=2b,\quad \lambda_{кр H_{20}}=a,$$

$$\lambda_{кр H_{11}}=\lambda_{кр E_{11}}=2/\sqrt{(1/a)^2+(1/b)^2}.$$

Будем полагать, что $b=a/2$; такое соотношение примерно соответствует волноводам, применяемым на практике. Тогда

$$\lambda_{кр H_{10}}=2a,\quad \lambda_{кр H_{01}}=a,$$

$$\lambda_{кр H_{20}}=a,\quad \lambda_{кр H_{11}}=\lambda_{кр E_{11}}=2a/\sqrt{5}.$$

На основе этих вычислений построим так называемую *диаграмму типов волн* прямоугольного волновода, изображенную на рис. 8.15. Принцип построения такой диаграммы весьма прост: на горизонтальной оси, вдоль которой откладывают длины волн генератора, вертикальными штрихами обозначают значения $\lambda_{кр}$ в порядке убывания. Можно выделить три характерные области:

● *Область отсечки* ($\lambda_0 > 2a$), в пределах которой распространяющихся типов волн не существует вообще.

● *Область одноволновости* ($a \leqslant \lambda_0 \leqslant 2a$), в пределах которой может распространяться лишь волна основного типа H_{10}.

● *Область многоволновости* ($\lambda_0 < a$), в которой помимо волны основного типа по волноводу могут распространяться волны высших типов. Например, если рабочая длина волны лежит в интервале от a до $2a/\sqrt{5}$, то в волноводе могут одновременно распространяться волны типа H_{10}, H_{20} и H_{01}. Если длина волны становится меньше, чем $2a/\sqrt{5}$, то к ним добавляются волны типа E_{11}, H_{11} и т. д. Разумеется, в области многоволновости существует бесконечное множество волн высших типов, не обозначенных на рис. 8.15.

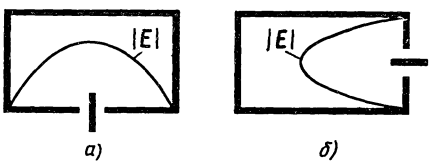


Рис. 8.16. Возможность селективного возбуждения различных типов волн в прямоугольном волноводе:
а — возбуждение волны типа H_{10}; *б* — возбуждение волны типа H_{01}

Подчеркнем важное обстоятельство — сам факт многоволновости какого-либо волновода на выбранной рабочей частоте еще не означает автоматически, что все эти типы волн действительно существуют. Можно так возбудить волновод, что будет существовать только один, причем не обязательно низший, тип волны. Пусть, например, $\lambda_0 < a$, так что по волноводу могут распространяться волны типа H_{10} и H_{01}. На рис. 8.16 показаны два способа возбуждения волновода при помощи штыревой антенны. При первом способе штырь параллелен вектору **E** волны H_{10} и перпендикулярен вектору **E** волны H_{01}. В соответствии с принципом, речь о котором шла ранее, при таком возбудителе в рассматриваемом многоволновом волноводе возникнет лишь волна типа H_{10}, в то время как амплитуда волны типа H_{01} будет равна нулю. При втором способе возбуждения ситуация диаметрально противоположна — возбуждена будет лишь волна типа H_{01}.

Несмотря на принципиальную возможность селективного возбуждения волны низшего типа в многоволновом волноводе, практическое использование таких линий передачи затрудняется из-за неизбежного возникновения волн высших типов в нерегулярных участках волноводного тракта.

Стандартные сечения волноводов. Прямоугольный металлический волновод с отношением сторон 2 : 1 может обеспечить одноволновый режим работы в интервале длин волн от $\lambda_{0\,\min} = a$ до $\lambda_{0\,\max} = 2a$. Однако на практике весь этот интервал никогда не используют по двум причинам. Во-первых, приближать длину волны

генератора к значению $\lambda_0 = a$ нежелательно из-за возможности случайной перестройки генератора в область многоволновости. Во-вторых, как будет показано в гл. 11, в окрестности критической длины для основного типа волны, т. е. при $\lambda_0 \approx 2a$, резко возрастают омические потери в стенках волновода.

На практике рекомендуется следующее использование допустимой полосы длин волн:

$$\lambda_{0\min} = 1.05a; \qquad \lambda_{0\max} = 1.6a. \tag{8.67}$$

Для всех участков СВЧ-диапазона промышленно выпускаются прямоугольные волноводы стандартных сечений. Некоторые часто используемые сечения приведены в нижеследующей таблице.

Таблица 8.1. **Стандартные сечения волноводов**

Диапазон длин волн	Сечение волновода a, мм	b, мм
4 мм	3.6	1.8
8 мм	7.2	3.4
3 см	23	10
10 см	72	34

Мощность, переносимая по прямоугольному волноводу волной типа H_{10}. Усредненная за период колебаний мощность, переносимая вдоль оси z волной любого типа, определяется как интеграл от продольной проекции действительной части комплексного вектора Пойнтинга, вычисленный по поперечному сечению волновода:

$$P_{\text{ср}} = \int_0^a dx \int_0^b \Pi_{\text{ср}\,z}(x, y)\, dy. \tag{8.68}$$

Пространственная зависимость функции $\Pi_{\text{ср}\,z}$ для волны типа H_{10} задается формулой (8.54). Однако здесь удобнее выразить данную величину через максимальное значение напряженности электрического поля в центре волновода и записать

$$\Pi_{\text{ср}\,z} = \frac{E_{\max}^2}{240\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right). \tag{8.69}$$

Интегрируя эту функцию с учетом того, что

$$\int_0^a \sin^2(\pi x/a)\, dx = a/2,$$

получаем

$$P_{\text{ср}} = \frac{E_{\max}^2 ab}{480\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}. \tag{8.70}$$

Пример 8.6. Средняя мощность, переносимая волной типа H_{10} по стандартному прямоугольному волноводу сечением 23×10 мм на рабочей длине волны 3.2 см, равна 40 кВт. Найти величину E_m (5.75) — амплитуду напряженности электрического поля, которое существует в точках поперечного сечения волновода с координатой $x=5.75$ мм, т. е. на расстоянии четверти ширины волновода от узкой стенки.

По формуле (8.70) находим амплитуду электрического вектора в центре волновода:

$$E_{\max}=\left[\frac{480\pi P_{\text{ср}}}{ab\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}}\right]^{1/2}=$$

$$=\left[\frac{480\cdot3.14\cdot4\cdot10^4}{0.023\cdot0.01\sqrt{1-(32/46)^2}}\right]^{1/2}=6.04\cdot10^5\ \text{В/м}.$$

Тогда

$$E_m(5.75)=E_{\max}\sin(\pi x/a)=4.27\cdot10^5\ \text{В/м}.$$

Электрическая прочность волновода. Равенство (8.70) дает возможность ответить на существенный для практики вопрос о предельно допустимой мощности, передаваемой по прямоугольному волноводу. Дело в том, что наибольшая амплитуда $E_{\max}$ не должна превосходить некоторого вполне определенного уровня, выше которого наступает электрический пробой среды, заполняющей волновод. Так, для сухого атмосферного воздуха при нормальном давлении принято считать, что $E_{\max\,\text{прб}}=30$ кВ/см. Следует иметь в виду, что эта цифра характеризует пробивной градиент электрического потенциала применительно к постоянному или достаточно медленно меняющемуся напряжению. Электрический пробой в газе на высоких частотах является весьма сложным физическим процессом, протекание которого существенно зависит от инерционности носителей заряда. Поэтому приводимые здесь результаты могут рассматриваться не более как приближенные оценки.

Выделим в формуле (8.70) сомножитель

$$P_{\text{уд}}=\frac{E_{\max}^2}{480\pi}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2},\qquad(8.71)$$

характеризующий удельную мощность, переносимую через площадку единичной площади. Если положить, что на центральной частоте рабочего диапазона волновода $\lambda_0/(2a)=0.7$, и подставить

в выражение (8.71) предельно допустимую напряженность электрического поля, то для волны типа H_{10} получим

$P_{\text{уд. доп}} = 420$ кВт/см^2.

При проектировании волноводных трактов с высоким уровнем мощности из-за возможности отражений обычно вводят трехкратный запас, снижая указанный уровень до 150 кВт/см^2.

Отметим, что столь высокие значения предельно допустимой плотности потока мощности относятся исключительно к импульсному режиму работы устройств, характерному, например, для радиолокации или систем многоканальной широкополосной связи. В непрерывном режиме лимитирующим фактором выступает тепловой пробой волновода из-за неидеальности контактов в местах сочленения отдельных секций.

Для повышения электрической прочности волноводы герметизируют и заполняют сухим воздухом под давлением 0.3—0.5 МПа.

Передача импульсных колебаний. В современных радиотехнических системах возникает потребность передавать по волноводам весьма короткие радиоимпульсы, длительность которых может составлять единицы и даже доли наносекунды. Требуется теоретически оценить искажения таких импульсов из-за дисперсионных свойств волновода.

В принципе данную задачу можно успешно решить спектральным методом (см. гл. 5), поскольку для отрезка волноводной линии длиной l известен частотный коэффициент передачи

$$K(j\omega) = \exp[-jh(\omega)l], \tag{8.72}$$

позволяющий связать сигналы на входе $s_{\text{вх}}(t)$ и на выходе $s_{\text{вых}}(t)$ при помощи интеграла Фурье

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(\omega)\, e^{-jh(\omega)l}\, e^{j\omega t}\, d\omega.$$

Здесь $S_{\text{вх}}(\omega)$ — спектральная плотность входного сигнала; функциям $s_{\text{вх}}(t)$ и $s_{\text{вых}}(t)$ могут отвечать любые проекции векторов **E** или **H**.

Точный расчет сигнала на выходе волноводной линии передачи, как правило, затруднителен из-за сложности вычисления интеграла. Однако можно получить достаточно простые и надежные оценки степени искажения сигналов, воспользовавшись понятием групповой скорости.

При этом следует иметь в виду, что в соответствии с формулой (8.35) групповая скорость волн в волноводе зависит от частоты. Частотная дисперсия групповой скорости может приводить к тому, что для изучения распространения радиоимпульса с весьма широ-

ким спектром приходится выделять отдельные узкополосные группы, каждая из которых распространяется со своей собственной групповой скоростью. В определенных случаях интерференция таких групп на выходе может существенно искажать импульсные колебания.

Приведем решение конкретной задачи, иллюстрирующее высказанные здесь положения. Пусть линия передачи длиной $l=10$ м представляет собой прямоугольный волновод сечением 23×10 мм с воздушным заполнением. По линии передачи распространяется радиоимпульс с огибающей прямоугольной формы, имеющий следующие параметры: несущая частота $f_0=10$ ГГц ($\lambda_0=3$ см), длительность импульса $\tau_и=1$ нс$=10^{-9}$ с. Требуется на качественном уровне проанализировать, существенны ли искажения импульса на выходе линии, обусловленных частотной дисперсией групповой скорости.

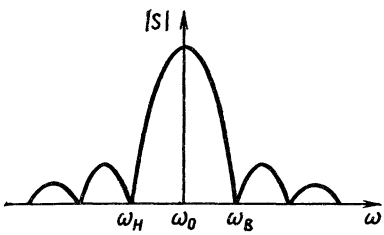


Рис. 8.17. Частотная зависимость модуля спектральной плотности прямоугольного радиоимпульса

Как показано в курсе теоретической радиотехники [2], модуль спектральной плотности входного импульса будет иметь вид, представленный на рис. 8.17. При этом основная доля энергии сигнала заключена в пределах центрального лепестка спектральной диаграммы, т. е. между частотами

$$\omega_в=\omega_0+2\pi/\tau_и=6.91\cdot10^{10}\ \text{с}^{-1},$$

$$\omega_н=\omega_0-2\pi/\tau_и=5.65\cdot10^{10}\ \text{с}^{-1}.$$

Легко проверить, что по данному волноводу в пределах найденного частотного интервала может распространяться лишь волна низшего типа H_{10}, для которой $\lambda_{кр}=46$ мм, $\omega_{кр}=4.1\cdot10^{10}$ с$^{-1}$.

Формулу для расчета групповой скорости можно записать в виде, эквивалентном (8.35):

$$v_{гр}=c\sqrt{1-(\omega_{кр}/\omega)^2}.$$

Таким образом, низкочастотная часть спектра импульса образует группу, распространяющуюся со скоростью

$$v_{гр.н}=c\sqrt{1-(4.1/5.65)^2}=0.688\ c.$$

Аналогичным образом находим групповую скорость для высокочастотной части спектра:

$$v_{гр.в}=c\sqrt{1-(4.1/6.91)^2}=0.805\ c.$$

Можно убедиться, что при заданной длине волноводного тракта низкочастотная группа волн «отстанет» от высокочастотной на отрезок времени длительностью $\Delta t = 7.04 \cdot 10^{-9}$ с. Импульс на выходе, несомненно, будет существенно искажен по сравнению с входным колебанием, поскольку найденная величина запаздывания значительно превышает длительность передаваемого импульса.

При больших длинах волноводного тракта явление «расплывания» радиоимпульса может послужить серьезным препятствием к реализации импульсных систем. Естественный путь, позволяющий избежать этого, заключен в переходе к линиям передачи с Т-волнами, в которых дисперсионные эффекты выражены слабо (см. гл. 10).

ЗАДАЧИ

8.1. Решите задачу о волнах типа Е в прямоугольном металлическом волноводе, заполненном магнитодиэлектриком без потерь и имеющем электродинамические параметры ε_a и μ_a, отличные от аналогичных параметров вакуума. Найдите, во сколько раз сократятся критические длины волн различных типов под влиянием материала заполнения.

8.2. Определите критическую длину волны, критическую частоту и длину волны в прямоугольном волноводе, работающем на волне типа E_{11}. Волновод имеет сечение 4×3 см и заполнен воздухом; частота колебаний 10 ГГц.

8.3. Какую максимальную мощность можно передать по прямоугольному волноводу сечением 23×10 мм, работающему на частоте 11 ГГц? Волновод заполнен сухим воздухом при нормальном атмосферном давлении, предельно допустимое значение напряженности электрического поля составляет 30 кВ/см. Предусмотрите двукратный запас по электрической прочности.

8.4. Определите, какие типы волн могут распространяться в прямоугольном волноводе сечением 10×5 см, если частота колебаний $f = 5$ ГГц. Волновод имеет воздушное заполнение.

8.5. Вычислите размеры поперечного сечения квадратного волновода с воздушным заполнением, если известно, что фазовая скорость волны типа E_{11} равна $6 \cdot 10^8$ м/с. Частота передаваемых колебаний 5 ГГц.

8.6. Вдоль прямоугольного волновода сечением 50×25 мм, работающего на волне типа H_{10}, передается средняя мощность 10 кВт. Частота колебаний 5.5 ГГц. Определите амплитуду вектора напряженности электрического поля на оси волновода, а также максимальное значение поверхностной плотности тока на стенках.

8.7. Амплитуда продольной проекции вектора напряженности электрического поля на оси прямоугольного волновода сечением

50×25 мм составляет 10^5 В/м. Частота поля 7.5 ГГц. Диэлектрик — воздух, тип волны — E_{11}. Вычислите максимальные значения амплитуд плотности поверхностного тока на стенках и плотности тока смещения во внутренней области.

8.8. Размеры стенок прямоугольного металлического волновода удовлетворяют системе неравенств $a \gg \lambda$, $b \gg \lambda$, согласно чему по данному волноводу одновременно могут распространяться волны всевозможных типов. Докажите, что число распространяющихся типов волн можно вычислить по асимптотической формуле $N \cong \cong 2\pi ab/\lambda^2$.

Глава девятая

КРУГЛЫЙ МЕТАЛЛИЧЕСКИЙ ВОЛНОВОД

Данная глава посвящена решению уравнений Максвелла, которые описывают волны электрического и магнитного типов в бесконечно протяженном металлическом волноводе с круговой формулой поперечного сечения. Обсуждаются некоторые технические применения круглых металлических волноводов.

9.1. Постановка задачи

Круглый металлический волновод представляет собой трубу с внутренним радиусом a (рис. 9.1). Исходные предпосылки остаются теми же, что и при исследовании прямоугольного металлического волновода. Так, считается, что проводимость стенок волновода бесконечно велика, волновод неограниченно протяжен и однороден вдоль оси z, а внутренней средой является воздух или вакуум. Требуется проанализировать всю совокупность волн E- и H-типов в подобной системе.

Некоторое качественное представление о структуре электромагнитного поля в круглом волноводе можно получить, воспользовавшись результатами, которые получены в гл. 8 применительно к волноводу с прямоугольной формой сечения. Например, структура поля волны типа H_{10} в прямоугольном волноводе известна (рис. 9.2, *а*). Контур сечения волновода можно преобразовать из прямоугольного в круглый путем последовательных деформаций. На рис. 9.2, *б* изображен один из первоначальных этапов такого преобразования. Картину поля в волноводе следует строить исходя из того, что силовые линии электрического вектора всегда подходят к металлическим стенкам по направлению нормали. В конечном итоге получаем картину одного из типов волн в круглом волноводе, изображенную на рис. 9.2, *в*. Есть основание полагать,

что эта картина соответствует основной волне круглого волновода. В дальнейшем этот факт будет строго доказан.

Несмотря на кажущуюся простоту, метод, основанный на непрерывной деформации контура поперечного сечения волновода, имеет малую практическую ценность, так как не позволяет находить числовые характеристики процессов в круглом волноводе. Поэтому нам потребуются строгие математические методы решения электродинамических задач о полях в круглых волноводах.

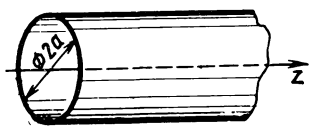


Рис. 9.1. Круглый металлический волновод

Уравнения Максвелла в цилиндрических координатах. Легко видеть, что стенка круглого волновода совпадает с координатной поверхностью $r=a$ цилиндрической системы координат (r, φ, z). Поэтому данная система очень удобна для решения поставленных задач.

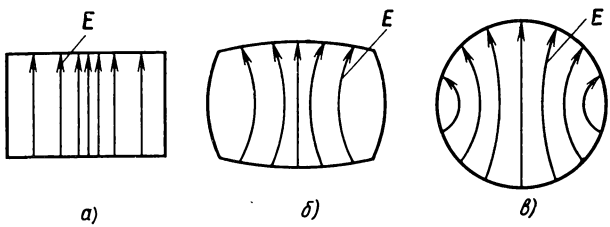


Рис. 9.2. Последовательные этапы деформации прямоугольного волновода

Первые два уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} &= j\omega\varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}, \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} &= -j\omega\mu_0 \dot{\mathbf{H}} \end{aligned} \tag{9.1}$$

в цилиндрической системе координат принимают следующий вид (см. Приложение А):

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \dot{H}_\varphi}{\partial z} &= j\omega\varepsilon_0 \dot{E}_r, \\ \frac{\partial \dot{H}_r}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} &= j\omega\varepsilon_0 \dot{E}_\varphi, \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\dot{H}_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{H}_r}{\partial \varphi} &= j\omega\varepsilon_0 \dot{E}_z, \\ \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \dot{E}_\varphi}{\partial z} &= -j\omega\mu_0 \dot{H}_r, \end{aligned} \tag{9.2}$$

$$\frac{\partial \dot{E}_r}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} = -j\omega\mu_0 \dot{H}_\varphi,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\dot{H}_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{H}_r}{\partial \varphi} = -j\omega\mu_0 \dot{H}_z.$$

Направляемые волны в цилиндрических координатах. Среди всевозможных решений системы уравнений (9.2) особо рассмотрим направляемые волны, распространяющиеся вдоль оси z. Комплексные амплитуды векторов напряженности электрического и магнитного полей направляемых волн запишем в виде

$$\dot{\mathbf{E}}(r, \varphi, z) = \mathbf{E}(r, \varphi)\, e^{-j\hbar z},$$
$$\dot{\mathbf{H}}(r, \varphi, z) = \mathbf{H}(r, \varphi)\, e^{-j\hbar z}. \tag{9.3}$$

Характерный вид зависимостей (9.3) позволяет, как это уже было сделано в гл. 7, выразить поперечные проекции векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ через частные производные от продольных проекций $\dot{E}_z$ и $\dot{H}_z$ по координатам r и φ. В результате получаем следующие формулы перехода:

$$\dot{E}_r = \frac{-j}{g^2}\left(\hbar \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \frac{\omega\mu_0}{r}\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \varphi}\right),$$

$$\dot{E}_\varphi = \frac{-j}{g^2}\left(\frac{\hbar}{r}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi} - \omega\mu_0 \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r}\right),$$

$$\dot{H}_r = \frac{j}{g^2}\left(\frac{\omega\varepsilon_0}{r}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi} - \hbar \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r}\right), \tag{9.4}$$

$$\dot{H}_\varphi = \frac{-j}{g^2}\left(\omega\varepsilon_0 \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \frac{\hbar}{r}\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \varphi}\right).$$

Из этих формул непосредственно вытекает возможность существования в круглом металлическом волноводе волн E- и H-типов. Чтобы исследовать эти волны, необходимо решить уравнения Гельмгольца относительно продольных проекций $\dot{E}_z$ и $\dot{H}_z$:

$$\nabla^2 \dot{E}_z + \beta^2 \dot{E}_z = 0,$$
$$\nabla^2 \dot{H}_z + \beta^2 \dot{H}_z = 0. \tag{9.5}$$

Воспользуемся выражением оператора Лапласа в цилиндрической системе координат и перепишем уравнения (9.5) в развернутой форме:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + \beta^2 \dot{E}_z = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial z^2} + \beta^2 \dot{H}_z = 0. \tag{9.6}$$

Специфический вид зависимостей комплексных амплитуд $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ от продольной координаты z, устанавливаемый формулами (9.3), дает возможность избавиться от частных производных по z, введя поперечное волновое число $g=\sqrt{\beta^2-h^2}$. В результате приходим к поперечным уравнениям Гельмгольца в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2}+g^2E_z=0,\\&\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2}+g^2H_z=0.\end{aligned}\tag{9.7}$$

Разумеется, для получения физически содержательного решения каждое из этих уравнений следует дополнить соответствующими граничными условиями на стенке волновода.

9.2. Волны типа E в круглом волноводе

Задача о волнах электрического типа в круглом металлическом волноводе сводится к решению поперечного уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2}+g^2E_z=0\tag{9.8}$$

при граничных условиях, согласно которым касательная составляющая электрического вектора на стенке волновода обращается в нуль. Очевидно, что из трех возможных проекций комплексной амплитуды $\dot{\mathbf{E}}$, а именно $\dot{E}_r$, $\dot{E}_\varphi$ и $\dot{E}_z$, касательным составляющим к стенкам могут отвечать лишь проекции $\dot{E}_z$ и $\dot{E}_\varphi$. Поэтому необходимо потребовать, чтобы

$$E_z=0 \text{ при } r=a,\tag{9.9}$$

$$E_\varphi=0 \text{ при } r=a.\tag{9.10}$$

Из формул перехода (9.4) с очевидностью следует, что эти два условия не являются независимыми. Действительно, проекция $\dot{E}_\varphi$, пропорциональная в случае волн E-типа частной производной $\partial\dot{E}_z/\partial\varphi$, обращается в нуль, если проекция $\dot{E}_z$ постоянна на контуре поперечного сечения волновода. Таким образом, достаточно, чтобы на идеально проводящей стенке волновода выполнялось граничное условие (9.9). Вместе с уравнением Гельмгольца (9.8) оно образует требуемую краевую задачу.

Метод разделения переменных в цилиндрических координатах. Будем решать задачу (9.8) — (9.9) методом разделения переменных, который уже использовался ранее при изучении электромаг-

нитных колебаний в прямоугольном волноводе. Положим, что искомое решение E_z есть произведение двух функций:

$$E_z(r, \varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi), \tag{9.11}$$

одна из которых зависит только от r, а другая — только от φ. Подставив выражение (9.11) в уравнение (9.8), приходим к равенству, не содержащему частных производных по поперечным координатам:

$$\Phi R'' + \Phi R'/r + R\Phi''/r^2 + g^2 R\Phi = 0. \tag{9.12}$$

Теперь преобразуем уравнение (9.12) таким образом, чтобы в левой части располагались функции только от r, а в правой — только от φ. Для этого разделим левую и правую части на произведение $R\Phi$, предполагая заранее, что это произведение не обращается в нуль тождественно (нулевое решение было бы, конечно, физически бессодержательным):

$$r^2 R''/R + rR'/R + g^2 r^2 = -\Phi''/\Phi. \tag{9.13}$$

Чтобы уравнение (9.13) удовлетворялось при всех значениях r и φ, левая и правая части должны быть некоторым постоянным числом, например

$$-\Phi''/\Phi = m^2. \tag{9.14}$$

Равенство (9.14) является дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Решениями такого уравнения служат функции

$$\Phi(\varphi) = C_0 \begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix} (m\varphi), \tag{9.15}$$

а также их любая линейная комбинация (C_0 — произвольный постоянный коэффициент). Из-за симметрии волновода по угловой координате φ выбор функции не имеет принципиального значения; для конкретности будем считать, что

$$\Phi(\varphi) = C_0 \cos m\varphi. \tag{9.16}$$

Чтобы выполнялось физически очевидное требование периодичности решения по углу φ с периодом 2π, параметр m должен быть *положительным целым числом или нулем.* Число m является одним из индексов волны Е-типа в круглом волноводе.

Рассмотрим теперь левую часть уравнения (9.13) и постараемся вывести дифференциальное уравнение, описывающее распределение поля вдоль радиальной координаты r. Из (9.13) и (9.14) имеем

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(g^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R = 0. \tag{9.17}$$

Целесообразно несколько преобразовать уравнение (9.17), введя безразмерную независимую переменную

$$x=gr. \tag{9.18}$$

Тогда вместо (9.17) получаем уравнение

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)R=0. \tag{9.19}$$

Данное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами хорошо изучено в математике и носит название *уравнения Бесселя.*

Цилиндрические функции. Так принято называть частные решения уравнения (9.19). К ним относятся:

$J_m(x)$ — функция Бесселя или цилиндрическая функция первого рода m-го порядка;

$N_m(x)$ — функция Неймана или цилиндрическая функция второго рода m-го порядка.

Аналитически функции Бесселя и Неймана выражаются посредством бесконечных сходящихся рядов достаточно сложной структуры. Так, если m — целое положительное число или нуль, то

$$J_m(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \tag{9.20}$$

$$N_m(x)=\frac{2}{\pi}J_m(x)\ln\frac{Cx}{2}-\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\times$$

$$\times\left(\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l}+\sum_{l=1}^{k+m}\frac{1}{l}\right)-\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \tag{9.21}$$

где $C=0.5772\ldots$ — постоянная Эйлера.

Функции Бесселя и Неймана линейно независимы, поэтому общее решение уравнения (9.19) имеет вид

$$R(x)=A_1J_m(x)+A_2N_m(x), \tag{9.22}$$

где A_1, A_2 — некоторые произвольные коэффициенты.

В цилиндрической системе координат функции Бесселя и Неймана играют такую же роль, как синусоидальная и косинусоидальная функции в прямоугольной декартовой системе. Взглянув на графики (рис. 9.3), можно заметить, что эти функции отчасти схожи с гармоническими, однако имеются и существенные отличия:

- цилиндрические функции в отличие от гармонических не являются периодическими;
- «амплитуда» цилиндрических функций не постоянна, а уменьшается с ростом аргумента;

● при малых значениях аргумента функции Неймана неограниченно велики: $\lim\limits_{x\to 0} N_m(x) = -\infty$.

В силу последнего свойства при решении задач об электромагнитных полях в круглых волноводах коэффициент при функции Неймана в формуле (9.22) должен быть равен нулю, поскольку бесконечно большие амплитуды полей на оси волновода (при $r = 0$) физически нереальны.

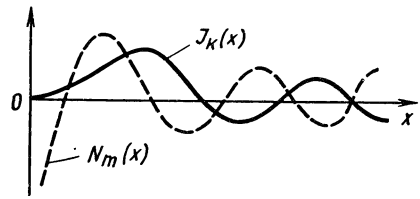


Рис. 9.3. Типичные графики цилиндрических функций

В задачах, интересных с точки зрения радиотехнической практики, чаще всего приходится иметь дело с простейшими цилиндрическими функциями $J_0(x)$ и $J_1(x)$. В математике доказано, что между ними имеется соотношение

$$J_1(x) = -\mathrm{d}J_0(x)/\mathrm{d}x, \tag{9.23}$$

которое вытекает из общей формулы дифференцирования цилиндрических функций

$$J'_m(x) = \frac{m}{x} J_m(x) - J_{m+1}(x), \tag{9.24}$$

справедливой при любых m.

Соответствующие графики представлены на рис. 9.4. Как будет видно из дальнейшего, особый интерес представляют те значения аргумента, при которых обращаются в нуль либо сами функции Бесселя, либо их производные. Введем следующие обозначения: ν_{mn} — n-й по счету корень уравнения $J_m(x) = 0$; μ_{mn} — n-й по счету корень уравнения $J_m'(x) = 0$. Можно заметить, что функция $J_0(x)$ первый раз пересекает ось абсцисс в точке с координатой, приблизительно равной 2.4. По принятой договоренности данную точку будем обозначать символом ν_{01}. Аналогично, первый по счету максимум функции $J_1(x)$ имеет место в точке с координатой $x \approx 1.8$; данное значение должно быть обозначено как μ_{11}.

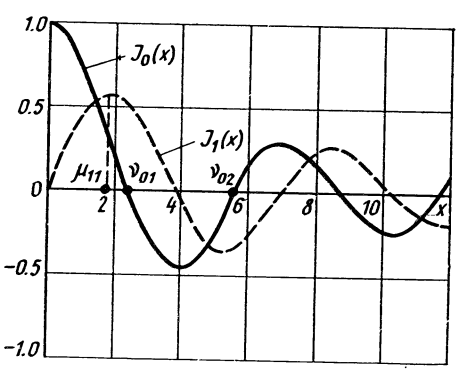


Рис. 9.4. Функции Бесселя $J_0(x)$ и $J_1(x)$

В нижеследующих таблицах со справочными целями приведены значения некоторых корней функций Бесселя и их первой производной

Таблица 9.1. **Корни ν_{mn} функций Бесселя**

n	$m=0$	$m=1$	$m=2$
1	2.405	3.832	5.135
2	5.520	7.016	8.417
3	8.654	10.714	11.620

В математической литературе имеются весьма подробные таблицы таких корней. Кроме того, практически все компьютерные пакеты прикладных программ предоставляют богатые возможности вычислений с цилиндрическими функциями.

Таблица 9.2. **Корни μ_{mn} первой производной функций Бесселя**

n	$m=0$	$m=1$	$m=2$
1	3.832	1.841	3.052
2	7.016	5.335	6.705
3	10.174	8.536	9.965

Критическая длина волны. После краткого знакомства с теорией цилиндрических функций вернемся вновь к исследованию характеристик волн типа E. В соответствии с идеей метода разделения переменных запишем амплитуду продольной проекции вектора напряженности электрического поля в виде

$$E_z = E_0 J_m(gr)\cos m\varphi. \tag{9.25}$$

Поперечное волновое число g пока еще не определено. Чтобы найти его, заметим, что граничное условие $E_z=0$ при $r=a$ будет выполнено лишь в том случае, если аргумент цилиндрической функции в формуле (9.25) при $r=a$ окажется равным одному из корней ν_{mn} функции Бесселя. Это означает, что поперечное волновое число g должно принадлежать бесконечной последовательности g_{mn}, удовлетворяющей соотношению

$$g_{mn}a = \nu_{mn}, \tag{9.26}$$

откуда

$$g_{mn} = \nu_{mn}/a. \tag{9.27}$$

Номер корня n является вторым индексом волны типа E_{mn} в круглом металлическом волноводе.

Физический смысл индексов m и n прост и нагляден: m означает число вариаций поля по угловой координате φ, а n — число вариаций по радиальной координате r. В частном случае $m=0$ амплитуды векторов электромагнитного поля не зависят от угловой координаты; подобные типы волн в круглом волноводе называют *симметричными*.

Критические длины волн E-типа в круглом волноводе находят на основании того же принципа, что и в случае прямоугольного волновода:

$$\lambda_{\text{кр}E_{mn}}=2\pi/g_{mn}=2\pi a/\nu_{mn}. \tag{9.28}$$

Формулы для вычисления длины волны в волноводе и фазовой скорости совершенно аналогичны тем, которые были получены применительно к прямоугольному волноводу:

$$\lambda_{\text{в}}=\frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_{\text{кр}})^2}}; \quad v_{\text{ф}}=\frac{c}{\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_{\text{кр}})^2}}. \tag{9.29}$$

Пример 9.1. Круглый металлический волновод диаметром 50.8 мм возбуждается генератором с частотой $f_0=14$ ГГц ($\lambda_0=21.4$ мм). Проверить возможность распространения волны типа E_{12}. Вычислить длину волны и фазовую скорость.

Из табл. 9.1 находим, что волне типа E_{12} соответствует второй по счету корень функции Бесселя 1-го порядка $\nu_{12}=7.016$. Критическая длина волны

$$\lambda_{\text{кр}E_{12}}=6.28\cdot 25.4/7.016=22.75 \text{ мм}.$$

Поскольку $\lambda_0<\lambda_{\text{кр}}$, волна типа E_{12} в рассматриваемом волноводе является распространяющейся.

Длина волны в волноводе

$$\lambda_{\text{в}}=\frac{21.4}{\sqrt{1-(21.4/22.75)^2}}=63 \text{ мм}.$$

Фазовая скорость волны типа E_{12}

$$v_{\text{ф}}=\frac{3\cdot 10^8}{\sqrt{1-(21.4/22.75)^2}}=8.84\cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Анализируя формулу (9.28) совместно с табл. 9.1, убеждаемся, что среди волн E-типа в круглом волноводе наибольшую критическую длину имеет волна типа E_{01}

$$\lambda_{\text{кр}E_{01}}=2\pi a/2.405=2.61a, \tag{9.30}$$

так как корень ν_{01} является наименьшим из всех корней функций Бесселя любого порядка.

Структура поля волны типа E_{mn} в круглом волноводе. Амплитуда продольной проекции электрического вектора волны типа E_{mn} в круглом волноводе на основании выражений (9.25) и (9.27) имеет следующий вид:

$$E_z = E_0 J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{a}\right)\cos m\varphi. \tag{9.31}$$

Отсюда, используя формулы перехода (9.4), в которых, по определению, $\dot{H}_z = 0$, легко находим совокупность выражений, описывающих пространственные зависимости проекций векторов электромагнитного поля волны типа E_{mn}:

$$\begin{aligned}
\dot{E}_r &= -jhE_0\left[\frac{ma^2}{\nu_{mn}^2 r} J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{a}\right) - \frac{a}{\nu_{mn}} J_{m+1}\left(\frac{\nu_{mn} r}{a}\right)\right]\cos m\varphi e^{-jhz},\\
\dot{E}_\varphi &= jhE_0 \frac{ma^2}{\nu_{mn}^2 r} J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{a}\right)\sin m\varphi e^{-jhz},\\
\dot{E}_z &= E_0 J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{a}\right)\cos m\varphi e^{-jhz},\\
\dot{H}_r &= -\frac{\omega\varepsilon_0}{h}\dot{E}_\varphi, \qquad \dot{H}_\varphi = \frac{\omega\varepsilon_0}{h}\dot{E}_r, \qquad \dot{H}_z = 0.
\end{aligned} \tag{9.32}$$

При выводе формул (9.32) учитывалось правило дифференцирования цилиндрических функций (9.24), а также равенство (9.27).

Подобно тому как это было сделано в теории прямоугольного волновода [см. формулу (8.60)], здесь также можно ввести полезный числовой параметр — характеристическое сопротивление

$$Z_{c\text{в}} = \frac{\sqrt{\dot{E}_r \dot{E}_r^* + \dot{E}_\varphi \dot{E}_\varphi^*}}{\sqrt{\dot{H}_r \dot{H}_r^* + \dot{H}_\varphi \dot{H}_\varphi^*}} = 120\pi\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_{\text{кр}})^2}. \tag{9.33}$$

Рассмотрим некоторые конкретные задачи расчета полей в круглом волноводе.

Пример 9.2. Радиус круглого волновода $a = 15$ мм, длина волны возбуждающего генератора в свободном пространстве $\lambda_0 = 32$ мм, тип волны E_{01}. Амплитуда продольной проекции вектора напряженности электрического поля на оси волновода $E_0 = 7\cdot 10^3$ В/м. Найти величину $E_{rm}(a)$ — амплитудное значение радиальной проекции электрического вектора на стенке волновода.

В данном случае критическая длина волны

$$\lambda_{\text{кр}E_{01}} = 2.61a = 39.15 \text{ мм} > \lambda_0,$$

так что процесс имеет характер распространяющейся волны.

Из формул (9.32) при $m=0$, $n=1$ находим аналитическое выражение комплексной амплитуды радиальной проекции электрического вектора при $r=a$:

$$\dot{E}_r(a,\ z) = j\frac{ha}{\nu_{01}} J_1(\nu_{01})\, e^{-jhz},$$

откуда амплитудное значение искомой проекции

$$E_{rm}(a) = (ha/\nu_{01}) J_1(\nu_{01}).$$

По таблицам функций Бесселя [19] находим $J_1(2.405) = 0.520$. Безразмерный параметр

$$ha = \frac{2\pi a}{\lambda_в} = \frac{6.28 \cdot 15}{32}\sqrt{1-(32/39.15)^2} = 1.697.$$

Отсюда окончательно

$$E_{rm}(a) = 1.697 \cdot 7 \cdot 10^3 \cdot 0.520/2.405 = 2570 \text{ В/м}.$$

Пример 9.3. Используя данные из примера 9.2, вычислить величину $H_{\varphi m}(a)$ — амплитуду азимутальной проекции вектора напряженности магнитного поля на стенке рассматриваемого круглого волновода.

Найдя характеристическое сопротивление

$$Z_{c\text{E}} = 377\sqrt{1-(32/39.15)^2} = 217 \text{ Ом},$$

получаем искомое амплитудное значение

$$H_{\varphi m}(a) = E_{rm}(a)/Z_{c\text{E}} = 11.82 \text{ А/м}.$$

Поскольку в волне типа E_{01} магнитный вектор имеет единственную составляющую $H_\varphi \mathbf{i}_\varphi$, амплитуда вектора плотности поверхностного тока на стенке $\mathbf{J}_{\text{пов}\,m} = 11.82\mathbf{i}_z$ А/м.

Формулы (9.32) позволяют рассчитать и построить картины мгновенного распределения силовых линий электромагнитного поля любой волны типа E_{mn} в круглом волноводе. В качестве примера на рис. 9.5 изображена структура поля простейшей симметричной волны типа E_{01}. Нетрудно заметить, что данное распределение есть результат непрерывной деформации картины силовых линий поля волны типа E_{11} в прямоугольном волноводе. Несколько сложнее выглядят картины поля тех типов волн в круглом волноводе, у которых индекс $m \neq 0$. Примером может служить несимметрич-

ная волна типа E_{11}, эскиз силовых линий которой приведен на рис. 9.6.

Средняя мощность, переносимая по круглому волноводу волной типа E_{01}. Чтобы найти среднюю мощность $P_{ср}$, переносимую электромагнитным полем волны типа E_{01} по круглому волноводу, следует прежде всего в каждой точке вычислить z-ю проекцию ус-

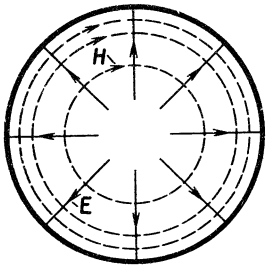


Рис. 9.5. Поперечное распределение силовых линий электромагнитного поля волны типа E_{01} в круглом волноводе

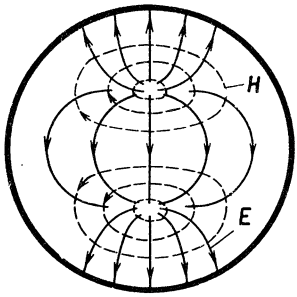


Рис. 9.6. Поперечное распределение силовых линий поля волны типа E_{11} в круглом волноводе

редненного вектора Пойнтинга $\Pi_{ср\,z}$, а затем выполнить интегрирование по поперечному сечению волновода:

$$P_{ср}=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \Pi_{ср\,z}(r,\varphi)\, r\, dr. \tag{9.34}$$

Продемонстрируем методику вычислений на примере поля волны типа E_{01}. Здесь в соответствии с формулами (9.32) электромагнитное поле имеет лишь две поперечные составляющие с проекциями

$$\dot{E}_r=j\frac{ha}{\nu_{01}}E_0 J_1\left(\frac{\nu_{01}r}{a}\right)e^{-jhz}, \tag{9.35}$$

$$\dot{H}_\varphi=(\omega\varepsilon_0/h)\,\dot{E}_r,$$

которые изменяются во времени синфазно.

Усредненный вектор Пойнтинга направлен вдоль оси z и имеет проекцию

$$\Pi_{ср\,z}=\frac{1}{2}\dot{E}_r\dot{H}_\varphi^*=\frac{\omega\varepsilon_0 a^2 h}{2\nu_{01}^2}E_0^2 J_1\left(\frac{\nu_{01}r}{a}\right). \tag{9.36}$$

Подставив этот результат в формулу (9.34), находим, что

$$P_{ср}=\frac{\pi\omega\varepsilon_0 a^2 h}{\nu_{01}^2}E_0^2\int_0^a J_1^2\left(\frac{\nu_{01}r}{a}\right)r\,dr.$$

Входящий сюда интеграл в теории цилиндрических функций называют *интегралом Ломмеля*. Показано [9], что

$$\int_0^a J_1^2\left(\frac{\nu_{01} r}{a}\right) r\,dr = \frac{a^2}{2} J_1^2(\nu_{01}).$$

Отсюда получаем окончательное выражение средней мощности, переносимой волной типа E_{01} в круглом волноводе:

$$P_{ср} = \frac{\pi\omega\varepsilon_0 a^4 h}{2\nu_{01}^2} E_0^2 J_1^2(\nu_{01}). \qquad (9.37)$$

Пример 9.4. Определить предельно допустимую мощность, переносимую волной типа E_{01} в круглом волноводе радиусом $a = 25$ мм, работающем на длине волны $\lambda_0 = 40$ мм. Максимально допустимая напряженность электрического поля на оси волновода $E_0 = 3 \cdot 10^6$ В/м.

Используя исходные данные, находим числовые значения коэффициентов, входящих в формулу (9.37): $\lambda_{кр} = 2.61a = 65.25$ мм, $\lambda_в = 50.63$ мм, $h = 2\pi/\lambda_в = 124$ м$^{-1}$, $J_1(\nu_{01}) = 0.52$. Подставив эти числа в формулу (9.37), получим $P_{ср} = 8.5$ МВт. Удельная плотность потока мощности $P_{ср.уд} = P_{ср}/(\pi a^2) = 433$ кВт/см^2, что весьма близко к цифре, полученной ранее для волны типа H_{10} в прямоугольном волноводе (см. гл. 8).

9.3. Волны типа H в круглом волноводе

При исследовании волн H-типа в круглом волноводе следует исходить из уравнения Гельмгольца относительно проекции $\dot{H}_z$ в цилиндрической системе координат

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial z^2} + \beta^2 \dot{H}_z = 0. \qquad (9.38)$$

Представляя решение этого уравнения в виде

$$\dot{H}_z(r, \varphi, z) = H_z(r, \varphi)\, e^{-jhz} \qquad (9.39)$$

и вводя поперечное волновое число $g = \sqrt{\beta^2 - h^2}$, приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + g^2 H_z = 0. \qquad (9.40)$$

В случае волн H-типа электрический вектор может иметь лишь поперечные составляющие с комплексными амплитудами проекций

$\dot{E}_r$ и $\dot{E}_\varphi$. При этом только азимутальная составляющая с проекцией $\dot{E}_\varphi$ касательна к стенке волновода. Поскольку для волн H-типа

$$\dot{E}_\varphi = \frac{j\omega\mu_0}{g^2}\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r}, \tag{9.41}$$

граничное условие принимает вид

$$\partial H_z/\partial r = 0 \text{ при } r = a. \tag{9.42}$$

Итак, проблема исследования волн H-типа в круглом металлическом волноводе с идеально проводящими стенками сводится к решению однородной краевой задачи (9.40)—(9.42) для поперечного уравнения Гельмгольца.

Как и ранее, данную задачу будем решать методом разделения переменных. Частное решение с m вариациями по азимутальной координате φ запишем в виде

$$H_z(r, \varphi) = H_0 J_m(gr)\cos m\varphi. \tag{9.43}$$

Чтобы найти не известное пока поперечное волновое число g, обеспечивающее существование нетривиального решения, вычислим частную производную

$$\frac{\partial H_z}{\partial r} = H_0 g \frac{\mathrm{d}J_m(x)}{\mathrm{d}x}\cos m\varphi, \tag{9.44}$$

где $x = gr$ — безразмерная переменная. Граничное условие (9.42) будет выполнено, если

$$\frac{\mathrm{d}J_m}{\mathrm{d}x} = 0 \text{ при } x = ga. \tag{9.45}$$

Равенство (9.45), рассматриваемое как уравнение относительно x, имеет неограниченное число корней, обозначаемых μ_{mn}. Таким образом, краевая задача, описывающая распространение волн H-типа в круглом металлическом волноводе, допускает бесконечное множество нетривиальных решений (собственных функций), причем для каждого решения должно выполняться равенство

$$g_{mn}a = \mu_{mn}, \tag{9.46}$$

откуда соответствующее собственное значение

$$g_{mn} = \mu_{mn}/a. \tag{9.47}$$

Итак, z-я проекция вектора напряженности магнитного поля в волне H-типа описывается выражением

$$H_z = H_0 J_m\left(\frac{\mu_{mn}r}{a}\right)\cos m\varphi. \tag{9.48}$$

Отсюда можно получить всю совокупность комплексных амплитуд проекций векторов электромагнитного поля, применив формулы перехода (9.4), в которых, естественно, следует положить $\dot{E}_z=0$:

$$\dot{E}_r=j\frac{\omega\mu_0 ma^2}{\mu_{mn}^2 r}H_0 J_m\left(\frac{\mu_{mn}r}{a}\right)\sin m\varphi\, e^{-jhz},$$

$$\dot{E}_\varphi=j\omega\mu_0 H_0\left[\frac{ma^2}{\mu_{mn}^2 r}J_m\left(\frac{\mu_{mn}r}{a}\right)-\frac{a}{\mu_{mn}}J_{m+1}\left(\frac{\mu_{mn}r}{a}\right)\right]\cos m\varphi\, e^{-jhz}, \tag{9.49}$$

$$\dot{E}_z=0,$$

$$\dot{H}_r=-\frac{h}{\omega\mu_0}\dot{E}_\varphi,\qquad \dot{H}_\varphi=\frac{h}{\omega\mu_0}\dot{E}_r,$$

$$\dot{H}_z=H_0 J_m\left(\frac{\mu_{mn}r}{a}\right)\cos m\varphi\, e^{-jhz}.$$

Основные расчетные формулы остаются теми же, что и для волн электрического типа:

$$\lambda_{\text{кр}H_{mn}}=2\pi a/\mu_{mn}, \tag{9.50}$$

$$\lambda_{\text{в}}=\frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_{\text{кр}})^2}}, \tag{9.51}$$

$$v_\Phi=\frac{c}{\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_{\text{кр}})^2}}. \tag{9.52}$$

Среди всевозможных Н-волн круглого волновода наибольшее практическое применение нашла волна типа H_{11}, у которой

$$\dot{E}_r=j\frac{\omega\mu_0 a^2}{\mu_{11}^2 r}H_0 J_1\left(\frac{\mu_{11}r}{a}\right)\sin\varphi\, e^{-jhz},$$

$$\dot{E}_\varphi=j\omega\mu_0 H_0\left[\frac{a^2}{\mu_{11}^2 r}J_1\left(\frac{\mu_{11}r}{a}\right)-\frac{a}{\mu_{11}}J_2\left(\frac{\mu_{11}r}{a}\right)\right]\cos\varphi\, e^{-jhz}, \tag{9.53}$$

$$\dot{E}_z=0,$$

$$\dot{H}_r=-\frac{h}{\omega\mu_0}\dot{E}_\varphi,\qquad \dot{H}_\varphi=\frac{h}{\omega\mu_0}\dot{E}_r,$$

$$\dot{H}_z=H_0 J_1\left(\frac{\mu_{11}r}{a}\right)\cos\varphi\, e^{-jhz}.$$

Картина силовых линий поля, построенная с помощью соотношений (9.53), изображена на рис. 9.7. Она полностью совпадает с той, которая была получена в § 9.1 путем непрерывной деформации поля волны типа H_{10} прямоугольного волновода.

Определенный интерес представляет также волна типа H_{01} — простейшая симметричная H-волна в круглом волноводе. Проекции векторов электромагнитного поля этой волны имеют следующие комплексные амплитуды:

$$\dot{E}_r=0,$$

$$\dot{E}_\varphi=-j\frac{\omega\mu_0 a}{\mu_{01}}J_1\left(\frac{\mu_{01}r}{a}\right)e^{-j\hbar z},$$

$$\dot{E}_z=0, \qquad (9.54)$$

$$\dot{H}_r=-\frac{h}{\omega\mu_0}\dot{E}_\varphi, \qquad \dot{H}_\varphi=0,$$

$$\dot{H}_z=H_0J_0\left(\frac{\mu_{01}r}{a}\right)e^{-j\hbar z}.$$

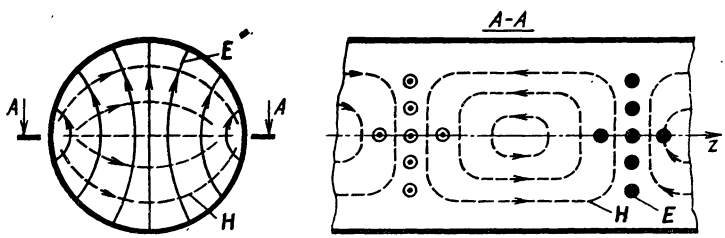


Рис. 9.7. Силовые линии волны типа H_{11} в круглом волноводе

Соответствующая картина поля изображена на рис. 9.8.

Диаграмма типов волн в круглом волноводе. Основываясь на материале §§ 9.2 и 9.3, построим диаграмму типов волн в круглом металлическом волноводе. Располагая такой диаграммой, можно указать низший тип волны и определить область одноволновости данного волновода.

Обратимся к табл. 9.1 и 9.2, в которых приведены корни функций Бесселя и их производных, и выделим прежде всего группу самых малых корней, поскольку именно таким корням отвечают типы волн с наибольшими критическими длинами. Наименьшим из всех корней оказывается первый корень производной функции Бесселя 1-го порядка $\mu_{11}=1.841$, которому соответствует волна типа H_{11}. Подставив этот корень в формулу (9.50), получаем

$$\lambda_{\text{кр}H_{11}}=2\pi a/1.841=3.41a. \qquad (9.55)$$

Итак, как и следовало ожидать, волна типа H_{11}, получаемая непрерывной деформацией поля основной волны прямоугольного волновода, оказывается волной низшего типа в круглом волноводе.

Далее последовательно находим:

$$\lambda_{кр E_{01}} = 2\pi a/2.405 = 2.61a,$$
$$\lambda_{кр H_{21}} = 2\pi a/3.054 = 2.06a, \qquad (9.56)$$
$$\lambda_{кр H_{01}} = \lambda_{кр E_{11}} = 2\pi a/3.832 = 1.64a.$$

Построив диаграмму типов волн (рис. 9.9), отметим, что в круглом волноводе не могут распространяться электромагнитные

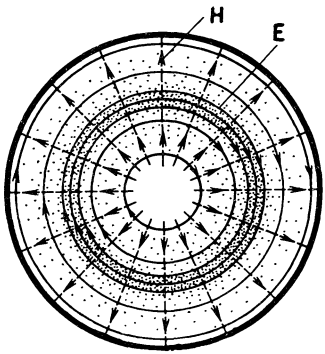


Рис. 9.8. Поперечное распределение поля волны типа H_{01} в круглом металлическом волноводе

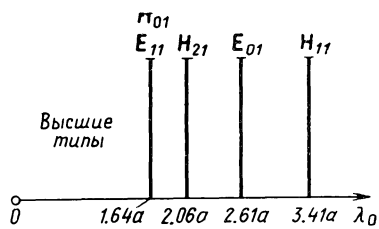


Рис. 9.9. Диаграмма типов волн в круглом волноводе

колебания с длиной волны $\lambda_0 > 3.41a$. Волновод при этом оказывается в режиме отсечки. В интервале длин волн $3.41a > \lambda_0 > 2.61a$ волновод работает в одноволновом режиме, т. е. пропускает лишь основной тип волны H_{11}. Если же $\lambda_0 < 2.61a$, то в круглом волноводе может наблюдаться уже многоволновый режим. На практике ширина области одноволновости должна быть несколько сокращена по причинам, речь о которых шла в гл. 8.

9.4. Основы применения круглых волноводов

Несмотря на очевидные конструктивные и технологические достоинства, круглые волноводы используют значительно реже, чем прямоугольные. Это обусловлено так называемой *поляризационной неустойчивостью* основной волны типа H_{11} в круглом волноводе. Поляризационная неустойчивость — прямое следствие совершенной симметрии круглого волновода. Например, если на входе некоторой волноводной системы волна типа H_{11} поляризована так, как показано на рис. 9.10, то под влиянием различных случайных

или преднамеренных деформаций волноводной линии колебания на выходе имеют уже другое направление плоскости поляризации. Поскольку возбуждающие устройства работают, как правило, лишь с колебаниями вполне определенной поляризации, описанный здесь эффект часто препятствует использованию круглых волноводов в качестве линии передачи СВЧ-сигналов.

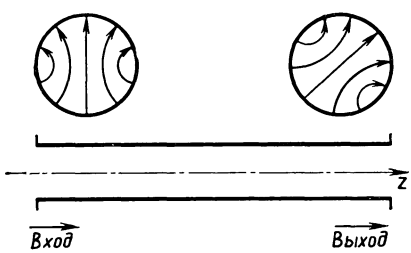


Рис. 9.10. Поляризационная неустойчивость волны типа H_{11} в круглом волноводе

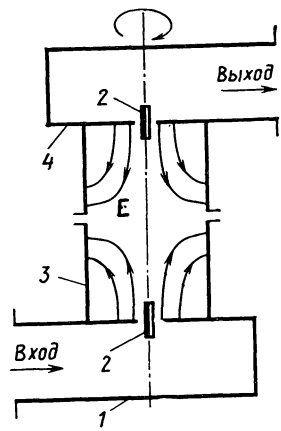


Рис. 9.11. Вращающееся волноводное сочленение

В практическом отношении весьма ценно, что в круглом волноводе могут существовать симметричные типы волн. На основе этих волн работает ряд устройств СВЧ. В качестве примера на рис. 9.11 изображен эскиз так называемого вращающегося волноводного сочленения. Этот элемент тракта СВЧ необходим для подключения передатчика (или приемника) радиолокационной станции к вращающейся антенне. Энергия из неподвижного прямоугольного волновода *1* отбирается с помощью штыревой антенны *2*, которая, в свою очередь, возбуждает волну типа E_{01} в круглом волноводе *3*. Этот волновод имеет поперечный разрез, снабженный контактными пластинами. Аналогично устроен верхний волноводный узел *4*, который может свободно вращаться. Ввиду симметричной структуры поля волны типа E_{01} коэффициент передачи мощности данного устройства не зависит от угла поворота.

Наконец, следует остановиться на одном уникальном свойстве круглого волновода, связанном с частотными характеристиками затухания симметричных H-волн, прежде всего волны типа H_{01}. Теоретически и экспериментально было показано, что затухание таких волн падает с ростом частоты в отличие от волн других ти-

пов как в круглом, так и в прямоугольном волноводах, у которых с ростом частоты затухание увеличивается. Это свойство позволяет в принципе строить дальние волноводные линии связи на базе круглого волновода с волной типа H_{01}. Такие линии способны в полной мере реализовать огромную информационную емкость СВЧ-диапазона. Для того чтобы читатель имел представление о реальных цифрах, можно указать, что на волнах миллиметрового диапазона затухание волны типа H_{01} в километровом отрезке медной трубы диаметром 50.8 мм составляет лишь несколько децибел.

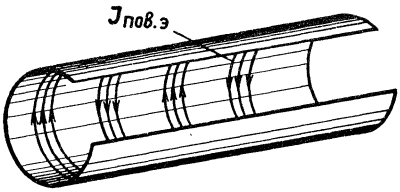


Рис. 9.12. Поверхностные электрические токи на стенках круглого волновода с волной типа H_{01}

Однако на пути практического использования линий передачи с волной типа H_{01} встает ряд трудностей, как принципиальных, так и технических. Они связаны с тем, что волна типа H_{01} не является волной низшего типа в круглом волноводе. Если волна типа H_{01} может распространяться, то способны распространяться и другие типы волн, число которых на достаточно высоких частотах значительно. Расчеты показывают, что в уже упомянутой трубе диаметром 50.8 мм при длине волны генератора 4 мм одновременно распространяются примерно 770 типов волн. Полезная волна типа H_{01} имеет тенденцию перерождаться в паразитные типы волн на случайных изгибах и неоднородностях волноводного тракта. В результате затухание оказывается существенно выше теоретического предела.

Наиболее эффективная мера борьбы с паразитными типами волн основана на использовании характерной структуры электромагнитного поля волны H_{01}. Дело в том, что, как видно из формул (9.54), магнитный вектор на стенке волновода при $r=a$ имеет лишь продольную проекцию $\dot{H}_z$. Линии поверхностного тока всегда перпендикулярны силовым линиям вектора **H**, так что поверхностный ток, отвечающий волне типа H_{01}, протекает лишь в азимутальном направлении, как показано на рис. 9.12. Поэтому волновод, снабженный большим числом поперечных щелей или даже выполненный из проводящих колец, изолированных друг от друга, будет успешно обеспечивать распространение волны желаемого типа. В то же время щели окажутся излучающими для волн паразитных типов и будут обеспечивать их фильтрацию.

Практический опыт показал, что на сегодняшний день дальние линии связи с волной типа H_{01}, по-видимому, существенно уступают более эффективным системам, прежде всего волоконным линиям оптического диапазона.

ЗАДАЧИ

9.1. Определите, какие типы волн являются распространяющимися в круглом волноводе с воздушным заполнением; волновод имеет радиус 15 мм и работает на частоте 7.5 ГГц.

9.2. Определите диапазон частот, в пределах которого в круглом волноводе диаметром 4 см может распространяться только волна основного типа.

9.3. В круглом волноводе, заполненном диэлектриком и имеющем диаметр 5 см, распространяется волна типа H_{11}. Известно, что частота колебаний поля равна 5 ГГц. Найдите диэлектрическую проницаемость заполняющего диэлектрика, если известно, что фазовая скорость волны в точности равна скорости света.

9.4. Волна типа H_{01} распространяется в круглом волноводе с некоторым радиусом a. Определите, на каком расстоянии от оси волновода напряженность электрического поля максимальна.

9.5. В круглом волноводе диаметром 3 см распространяется волна типа H_{11}. Частота колебаний 7.5 ГГц, среднее значение передаваемой мощности 50 кВт. Определите максимальное значение напряженности электрического вектора в данном волноводе.

9.6. Волны типов H_{11} и E_{01} возбуждены в круглом волноводе диаметром 5 см. Известно, что в сечении $z=0$ оба колебания синфазны. Определите, на каком расстоянии от этого сечения разность фаз между данными волнами составит 180°.

Глава десятая

ВОЛНОВОДЫ С ВОЛНАМИ ТИПА Т

В гл. 7 при классификации направляемых волн указывалось, что существует особый класс решений уравнений Максвелла, для которого характерно отсутствие продольных проекций как электрического, так и магнитного векторов. Волны такого вида принято называть поперечными электромагнитными волнами или, короче, волнами типа Т. Во многих радиотехнических устройствах работают волноводы с волнами этого типа.

10.1. Некоторые общие свойства волн типа Т

Пусть гармоническая электромагнитная волна Т-типа распространяется в пространстве, заполненном однородной средой с постоянными, не зависящими от частоты электродинамическими параметрами ε_a, μ_a. Волна распространяется вдоль оси z прямоугольной декартовой системы координат. Поскольку, по определению,

$\dot{E}_z = \dot{H}_z = 0$, первые два уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}, \qquad \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu_a \dot{\mathbf{H}}$$

принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} &= j\omega\varepsilon_a \dot{E}_x, \\
\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} &= j\omega\varepsilon_a \dot{E}_y, \qquad (10.1) \\
\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} &= -j\omega\mu_a \dot{H}_x, \\
\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} &= -j\omega\mu_a \dot{H}_y, \qquad (10.2) \\
\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} &= 0.
\end{aligned}$$

Выведем дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять каждая из проекций векторов такого электромагнитного поля в силу уравнений (10.1) и (10.2). Для этого возьмем, например, второе уравнение из системы (10.2), продифференцируем обе его части по z, а затем подставим в них величину $\partial \dot{H}_y / \partial z$ из первого уравнения системы (10.1). В результате получим

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} = -j\omega\mu_a \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \dot{E}_x.$$

Иными словами, x-я проекция комплексной амплитуды $\dot{\mathbf{E}}(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} + \beta^2 \dot{E}_x = 0, \qquad (10.3)$$

в котором $\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$ — коэффициент фазы однородной плоской волны с частотой ω, которая распространяется в рассматриваемой среде. Несомненно, что такими же окажутся уравнения относительно других проекций, а именно $\dot{E}_y$, $\dot{H}_x$ и $\dot{H}_y$.

Путем прямой подстановки убеждаемся, что общее решение уравнения вида (10.3) имеет вид

$$\dot{E}_x(x, y, z) = E_x(x, y)\, e^{\pm j\beta z}. \qquad (10.4)$$

Данная функция описывает волновой процесс, который распространяется вдоль положительного или отрицательного направления оси z с постоянной, не зависящей от частоты фазовой скоростью $v_ф = \omega/\beta = 1/\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$, равной скорости света в заполняющей среде.

Итак, получен принципиальный результат — волны типа Т в отличие от изученных ранее Е- и Н-волн *не имеют частотной дисперсии фазовой скорости.* Для волн типа Т продольное волновое число h совпадает с коэффициентом фазы β, а поэтому поперечное волновое число $g = \sqrt{\beta^2 - h^2} = 0$. Отсюда непосредственно следует, что критическая длина Т-волн $\lambda_{кр\,т} = 2\pi/g = \infty$. Следовательно, волновод с волной типа Т в равной мере пропускает колебания любых частот начиная с постоянного тока ($\omega = 0$).

Распределение поля в поперечном сечении. Скалярный электрический потенциал. Задача об электромагнитном поле Т-волны будет полностью решена, если тем или иным способом найти функции $E_x(x, y)$ и $E_y(x, y)$, описывающие распределение амплитуды вектора напряженности электрического поля в поперечной плоскости волновода. Аналогичные функции $H_x(x, y)$ и $H_y(x, y)$ получаются при этом автоматически из уравнений Максвелла.

Обратимся к третьему уравнению из системы (10.2) и заметим, что оно будет удовлетворяться, если положить

$$\mathbf{E}(x, y) = -\operatorname{grad} \varphi_э(x, y). \tag{10.5}$$

Здесь $\varphi_э(x, y)$ — вспомогательная функция, называемая *скалярным электрическим потенциалом.* Значения этой функции измеряют в вольтах. Смысл отрицательного знака в правой части равенства (10.5) будет пояснен несколько позднее.

Действительно, по правилам вычисления градиента в декартовой системе координат

$$E_x = -\frac{\partial \varphi_э}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial \varphi_э}{\partial y}, \tag{10.6}$$

и поэтому равенство

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

будет иметь место при любом выборе функции $\varphi_э(x, y)$. Однако следует принять во внимание, что в однородной материальной среде без свободных зарядов электрический вектор должен удовлетворять уравнению $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$, которое в координатной форме записывается так:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0.$$

Отсюда, воспользовавшись равенствами (10.6), получаем дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно скалярного электрического потенциала:

$$\frac{\partial^2 \varphi_э}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_э}{\partial y^2} = 0. \qquad (10.7)$$

Найденное уравнение в математике носит название *уравнения Лапласа.*

Проведенный здесь вывод относился к прямоугольной декартовой системе координат. Однако его можно применить к любой другой системе, так как во всех случаях должно выполняться равенство

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi_э = \nabla_\perp^2 \varphi_э = 0. \qquad (10.8)$$

Конкретная запись оператора Лапласа $\nabla_\perp^2$, действующего по поперечным координатам, зависит от выбора координатной системы.

Разность потенциалов и напряжение. Уравнение Лапласа часто встречается в самых разнообразных физических и технических задачах, описывая всевозможные состояния равновесия в пространственных структурах. В частности, уравнение Лапласа служит основным уравнением электростатики.

Действительно, любое электростатическое поле неизменно во времени и поэтому в силу уравнений Максвелла должно удовлетворять системе векторных дифференциальных уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \qquad (10.9)$$

Если положить, что $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi_э$, то первое уравнение из (10.9) оказывается выполненным на основании тождества $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \equiv 0$, известного из векторного анализа. Второе уравнение выполняется в силу того, что электрический потенциал $\varphi_э$ служит решением уравнения Лапласа (10.8) по предположению.

Отрицательный знак в формуле (10.5) связан с установившейся в физике традицией ориентировать вектор **E** в сторону уменьшения электрического потенциала. Другими словами, силовые линии вектора **E** условно начинаются на проводниках, несущих положительные заряды.

Таким образом, картина силовых линий электрического вектора в поперечной плоскости регулярного волновода с Т-волной целиком совпадает с картиной силовых линий вектора **E** в заряженном цилиндрическом конденсаторе, конфигурация обкладок которого такая же, как и токонесущих поверхностей волновода.

Статический характер поперечного распределения электрического поля в волноводе с Т-волнами позволяет ввести удобную характеристику электромагнитного процесса — *разность потенциалов* между проводниками (рис. 10.1, *а*)

$$U_{AB}=\int\limits_{L(A,B)}\mathbf{E}\,d\mathbf{l}=\varphi_A-\varphi_B. \qquad (10.10)$$

Важно подчеркнуть, что из-за потенциального (безвихревого) характера поперечного распределения электрического поля величина U_{AB} не зависит ни от расположения точек A и B на проводниках, ни от выбора пути интегрирования L в поперечной плоскости волновода.

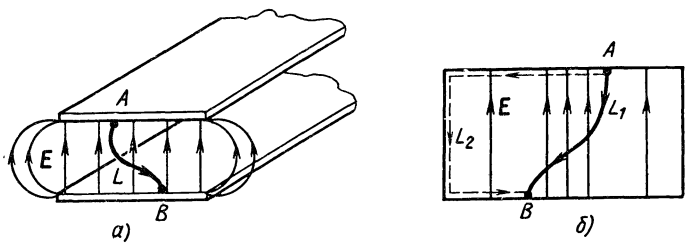


Рис. 10.1. К введению понятий разности потенциалов и напряжения:
а — в волноводе с Т-волной; *б* — в прямоугольном волноводе с волной типа H_{10}

Отметим, что применительно к волнам Е- и Н-типов в изученных ранее полых металлических волноводах ввести понятие разности потенциалов невозможно. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим поле **E** в поперечном сечении прямоугольного волновода с волной типа H_{10} (рис. 10.1, *б*). Здесь, очевидно,

$$\int\limits_{L_1}\mathbf{E}\,d\mathbf{l}\neq 0,$$

так как на всем пути интегрирования векторы **E** и d**l** образуют острый угол, так что скалярное произведение Ed**l** положительно. Если же взять контур интегрирования L_2, проходящий по стенкам волновода, то

$$\int\limits_{L_2}\mathbf{E}\,d\mathbf{l}=0,$$

поскольку на широких стенках вектор **E** перпендикулярен элементарному вектору пути d**l**, а на узкой стенке вектор **E** равен нулю в силу граничного условия.

Этот пример убеждает в том, что применительно к прямоугольным и круглым металлическим волноводам можно говорить не о разности потенциалов, а лишь о напряжении между отдельными точками пространства с обязательным указанием выбранного пути интегрирования. Последнее обстоятельство делает малоэффектив-

ным прямое использование понятия напряжения при анализе полых металлических волноводов.

Можно строго показать, что в металлическом волноводе с замкнутой односвязной формой поперечного сечения волна типа Т существовать не может. Для этого заметим, что во всех точках контура сечения Г такого волновода скалярный электрический потенциал $\varphi_э$ должен быть постоянным. Поэтому функция $\varphi_э$ во внутренней области сечения является решением следующей краевой задачи для уравнения Лапласа:

$$\nabla_\perp^2 \varphi_э = 0, \qquad \varphi_э|_\Gamma = \text{const}. \tag{10.11}$$

В теории дифференциальных уравнений с частными производными доказывается следующее легко запоминающееся свойство функции, удовлетворяющей уравнению Лапласа: такая функция принимает минимальные и максимальные значения не внутри, а *на границе* области своего существования. Отсюда в силу краевого условия из (10.11) приходим к выводу, что единственным подходящим решением уравнения Лапласа во внутренней области служит постоянная величина $\varphi_э(x, y) = \text{const}$. Но при этом, как легко видеть из формулы (10.5), поле в волноводе тождественно равно нулю.

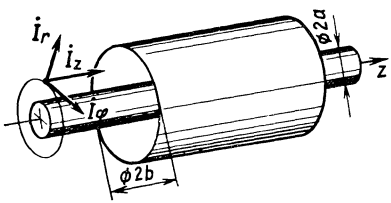


Рис. 10.2. Коаксиальный волновод

Итак, волны типа Т могут распространяться лишь в таких волноводах, где имеются по крайней мере два изолированных друг от друга токонесущих проводника, между которыми устанавливается разность потенциалов.

10.2. Коаксиальный волновод

Данный волновод, широко применяемый в радиотехнических устройствах, представляет собой два соосных металлических цилиндра радиусами a и b, разделенных диэлектриком (рис. 10.2). Для анализа структуры электромагнитного поля в таком волноводе целесообразно ввести цилиндрическую систему координат r, φ, z, продольная ось которой совпадает с осью системы проводящих цилиндров.

Пространственное распределение векторов поля. По причине полной симметрии поперечного сечения рассматриваемого волновода функции, описывающие пространственные зависимости векто-

ров электромагнитного поля, очевидно, не зависят от угловой координаты φ, т. е. $\partial/\partial\varphi=0$.

Ранее было показано, что распределение напряженности электрического поля Т-волны в поперечной плоскости волновода целиком повторяет электростатическое поле в цилиндрическом конденсаторе тех же размеров. Пусть электрический потенциал внутреннего проводника равен U, в то время как наружный проводник волновода находится под нулевым потенциалом. Тогда функция $\varphi_э$, описывающая распределение электрического потенциала в области $a\leqslant r\leqslant b$, должна быть решением следующей краевой задачи:

$$\nabla_\perp^2\varphi_э(r)=0,$$

$$\varphi_э(a)=U, \qquad \varphi_э(b)=0. \tag{10.12}$$

Двумерное уравнение Лапласа в полярной системе координат с учетом симметрии по углу φ имеет вид

$$\frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}\varphi_э}{\mathrm{d}r}\right)=0$$

или

$$r\,\frac{\mathrm{d}\varphi_э}{\mathrm{d}r}=A. \tag{10.13}$$

Общее решение этого уравнения

$$\varphi_э(r)=A\ln r+B \tag{10.14}$$

содержит две произвольные постоянные A и B, которые следует подобрать так, чтобы выполнялись краевые условия на внутреннем и внешнем проводниках:

$$A\ln a+B=U,$$

$$A\ln b+B=0.$$

Решив эту систему линейных алгебраических уравнений, получаем

$$A=\frac{U}{\ln a-\ln b}, \qquad B=\frac{-U\ln b}{\ln a-\ln b},$$

откуда находим окончательно закон распределения скалярного электрического потенциала во внутренней области волновода:

$$\varphi_э(r)=U\,\frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)}.$$

Полученная формула устанавливает, что при увеличении радиальной координаты от a до b потенциал уменьшается по логариф-

мическому закону. Амплитуда вектора напряженности электрического поля в поперечной плоскости

$$\mathbf{E}(r) = -\operatorname{grad}\varphi_э(r) = -\frac{d\varphi_э}{dr}\mathbf{i}_r = \frac{U}{\ln(b/a)\,r}\mathbf{i}_r$$

уменьшается обратно пропорционально координате точки наблюдения и имеет единственную проекцию вдоль единичного вектора $\mathbf{i}_r$.

Предположим, что пространство между проводящими цилиндрами заполнено средой без потерь ($\sigma = 0$) с заданными электродинамическими параметрами ε_a, μ_a. Тогда в соответствии с формулой (10.4) комплексная амплитуда вектора $\mathbf{E}$ волны типа Т, распространяющейся в сторону возрастания координаты z, есть

$$\dot{\mathbf{E}}(r, z) = \frac{U}{\ln(b/a)\,r}\,e^{-j\beta z}\mathbf{i}_r. \qquad (10.15)$$

Чтобы найти комплексную амплитуду $\dot{\mathbf{H}}(r, z)$ магнитного вектора, следует воспользоваться уравнением Максвелла

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu_a\dot{\mathbf{H}},$$

записав операцию rot в цилиндрической системе координат (см. Приложение А):

$$\dot{\mathbf{H}}(r, z) = \frac{j}{\omega\mu_a}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} = \frac{j}{\omega\mu_a}\frac{\partial\dot{E}_r}{\partial z}\mathbf{i}_\varphi = \frac{\sqrt{\varepsilon_a/\mu_a}\,U}{\ln(b/a)\,r}e^{-j\beta z}\mathbf{i}_\varphi. \qquad (10.16)$$

Вектор $\mathbf{H}$ имеет единственную азимутальную проекцию; силовые линии этого векторного поля представляют собой концентрические окружности, которые охватывают внутренний проводник волновода.

Эскиз распределения силовых линий векторов электромагнитного поля Т-волны в коаксиальном волноводе, построенный в соответствии с формулами (10.15)—(10.16), изображен на рис. 10.3. Видно, что данное поле представляет собой неоднородную плоскую волну, область существования которой ограничена металлическими стенками. Интересно отметить, что в каждой точке внутренней области отношение модулей комплексных амплитуд векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ постоянно и равно характеристическому сопротивлению заполняющей среды:

$$\frac{\dot{E}_r}{\dot{H}_\varphi} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = Z_c. \qquad (10.17)$$

Токи на стенках волновода. Магнитный вектор Т-волны, направленный вдоль единичного вектора $\mathbf{i}_\varphi$, оказывается касатель-

ным к токонесущим поверхностям, на которых возникают поверхностные электрические токи с плотностями

$$\dot{\mathbf{J}}_{\text{пов.э}}(a) = [\mathbf{i}_r \dot{\mathbf{H}}(a)],$$
$$\dot{\mathbf{J}}_{\text{пов.э}}(b) = -[\mathbf{i}_r \dot{\mathbf{H}}(b)]. \qquad (10.18)$$

Различие в знаках связано с тем, что единичным вектором внешней нормали к внутреннему цилиндру служит вектор $\mathbf{i}_r$, а к наружному — вектор $-\mathbf{i}_r$.

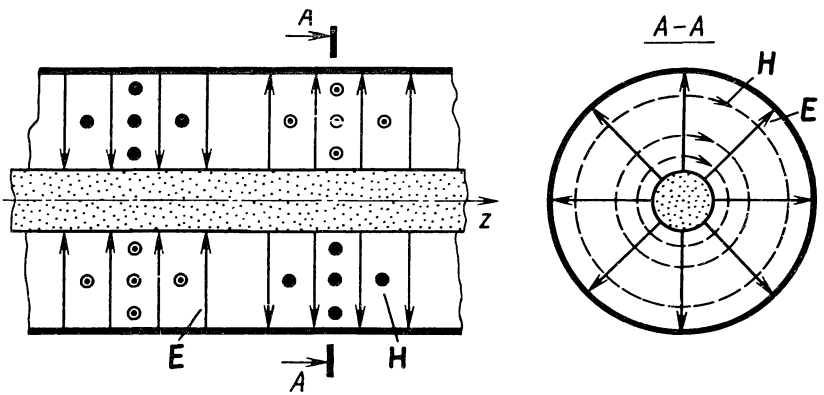


Рис. 10.3. Структура силовых линий электромагнитного поля Т-волны в коаксиальном волноводе

Векторы $\mathbf{i}_r$, $\mathbf{i}_\varphi$, $\mathbf{i}_z$ образуют правую тройку. Отсюда на основании равенств (10.18) приходим к выводу о том, что вдоль проводников распространяются бегущие волны плотности поверхностного тока

$$\dot{\mathbf{J}}_{\text{пов.э}}(a, z) = \frac{\sqrt{\varepsilon_a/\mu_a}\,U}{\ln(b/a)\,a} e^{-j\beta z}\mathbf{i}_z,$$
$$\dot{\mathbf{J}}_{\text{пов.э}}(b, z) = \frac{-\sqrt{\varepsilon_a/\mu_a}\,U}{\ln(b/a)\,b} e^{-j\beta z}\mathbf{i}_z. \qquad (10.19)$$

Амплитуду суммарного тока I на проводниках найдем, умножив амплитуды плотностей поверхностного тока на величины $2\pi a$ и $2\pi b$ соответственно, равные длинам контуров сечений внутреннего и внешнего проводников. Легко видеть, что

$$I(a) = -I(b) = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon_a/\mu_a}}{\ln(b/a)}U. \qquad (10.20)$$

Токи оказываются равными по модулю и противоположными по знаку. Это указывает на то, что по одному из проводников ток от генератора поступает в нагрузку, а по другому вновь возвращается в генератор.

Понятие волнового сопротивления. По определению, отношение амплитуды напряжения к амплитуде тока бегущей волны называют *волновым сопротивлением* $Z_в$ линии передачи с волной типа Т. В данном случае

$$Z_в = \frac{U}{I} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sqrt{\varepsilon_a/\mu_a}} = 60\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad (10.21)$$

Пример 10.1. Коаксиальный волновод имеет размеры $a=2$ мм, $b=6$ мм. Заполняющей средой является диэлектрик с параметрами $\mu=1$, $\varepsilon=2.4$. Найти амплитуду напряжения в бегущей волне, если известно, что амплитуда тока составляет 0.4 А.

По формуле (10.21) находим

$$Z_в = 60\ \ln 3/\sqrt{2.4} = 42.5\ \text{Ом}.$$

Тогда

$$U = IZ_в = 0.4 \cdot 42{,}5 = 17\ \text{В}.$$

Волновое сопротивление служит важнейшей технической характеристикой линии передачи с волной типа Т. Это объясняется тем, что при каскадном включении двух отрезков волноводов с различными параметрами, например с разными диаметрами проводников, мощность из одной линии целиком, без отражений, будет передана в другую, если выполнено условие согласования

$$Z_{в1} = Z_{в2}. \qquad (10.22)$$

Эта формула во многих случаях служит критерием согласования коаксиальных волноводов, обеспечивая точность, достаточную для инженерных целей [3]. Приближенность формулы состоит в том, что она не учитывает изменение структуры поля в непосредственной близости от плоскости скачка геометрических размеров, приводящее к небольшому добавочному отражению волн.

Подчеркнем, что волновое сопротивление, измеряемое, как и сопротивление резистора, в омах, никак не связано с превращением энергии электромагнитного поля в теплоту, а выступает лишь как коэффициент пропорциональности.

Переносимая мощность. Зная комплексные амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей в коаксиальном вол-

новоде, можно вычислить мощность электромагнитного поля, переносимую вдоль оси распространения бегущей волны:

$$P=\frac{1}{2}\int_S \mathrm{Re}[\dot{E}\dot{H}^*]\,dS. \qquad (10.23)$$

Подставив сюда выражения (10.15) и (10.16), находим

$$P=\frac{U^2\sqrt{\varepsilon/\mu}}{120\ln(b/a)}. \qquad (10.24)$$

Формулу (10.24) можно рассматривать как выражение мощности P, выделяемой в некотором воображаемом резисторе с сопротивлением $Z_в$, на который подано гармоническое напряжение с амплитудой U.

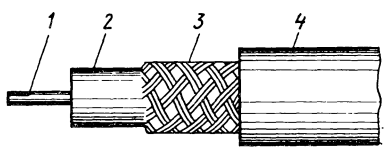


Рис. 10.4. Эскиз конструкции коаксиального кабеля:
1 — центральный проводник; *2* — диэлектрик; *3* — оплетка; *4* — наружное защитное покрытие

10.3. Некоторые применения коаксиальных волноводов

Используемые в радиотехнике коаксиальные волноводы чаще всего имеют вид коаксиальных кабелей — гибких линий передачи, конструкция которых изображена на рис. 10.4. Чтобы обеспечить гибкость, в качестве диэлектрика применяют полимерные материалы, такие, как полиэтилен, фторопласт-4 и др. Для этой же цели наружный проводник коаксиального кабеля выполняют в виде оплетки, состоящей из большого числа тонких медных проводников.

Промышленность выпускает разнообразные кабели, отличающиеся своей конструкцией и областями применения. Однако номинальные значения волновых сопротивлений кабелей стандартизованы. Чаще всего используют коаксиальные линии передачи с волновым сопротивлением 50, 75, 100, 150 и 200 Ом. Стандартизация волновых сопротивлений облегчает создание унифицированных узлов и компонентов радиоэлектронной аппаратуры.

Как правило, коаксиальные кабели — это линии передачи для сравнительно небольших мощностей (до сотен ватт) в диапазоне частот от постоянного тока приблизительно до 10 ГГц. На более высоких частотах поперечные размеры кабеля оказываются сравнимыми с рабочей длиной волны, и по кабелю помимо основной Т-волны могут распространяться волны высших Е- и Н-типов, что обычно нежелательно.

Важной областью применения коаксиальных кабелей является техника многоканальных линий дальней связи, работающих в относительно низкочастотном диапазоне (единицы или десятки мегагерц).

10.4. Полосковые волноводы

За последние десятилетия в технику СВЧ прочно вошел особый класс линий передачи с волнами типа Т, называемых *полосковыми волноводами.* В этих волноводах токонесущие проводники

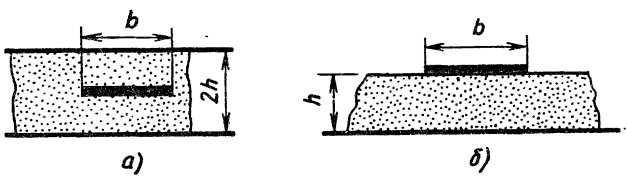


Рис. 10.5. Полосковые волноводы:
а — симметричный; *б* — несимметричный

представляют собой тонкие полоски металла, между которыми находится подложка — плоский слой диэлектрика с малыми потерями. Полосковые волноводы бывают симметричными и несимметричными; поперечные сечения их изображены на рис. 10.5. По многим конструктивным и технологическим соображениям на практике предпочитают несимметричные полосковые волноводы. Чтобы обеспечить высокие электрические и механические характеристики, в качестве материалов для подложки часто используют твердые диэлектрики на основе оксида алюминия — поликор ($\varepsilon=9.6$) и лейкосапфир ($\varepsilon=11.4$). Высокая диэлектрическая проницаемость этих материалов позволяет существенно уменьшить поперечные габариты волноводов. В технической литературе несимметричные полосковые волноводы для сантиметрового и миллиметрового диапазонов часто называют *микрополосковыми волноводами*, подчеркивая этим термином миниатюрность конструкций.

Квази-Т-волны. Строгий электродинамический анализ полей в несимметричном полосковом волноводе является достаточно сложной задачей и проводится в основном численными методами. Это связано с тем, что в отличие от коаксиального волновода здесь параметры заполняющей среды неоднородны по сечению. Как следствие, векторы электромагнитного поля в таком волноводе имеют все шесть декартовых проекций E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z, и поэтому, строго говоря, волн Т-типа здесь не существует. Однако на практике обычно применяют волноводы, у которых толщина подложки h существенно меньше ширины верхнего проводника b. Поэтому

электрическое поле в поперечном сечении волновода распределено примерно так же, как и электростатическое поле в плоском конденсаторе. Достаточно высокое значение относительной диэлектрической проницаемости подложки снижает роль краевых эффектов, так что поле во внутренней области оказывается приблизительно однородным.

Таким образом, при $h/b \ll 1$ и $\varepsilon \gg 1$ можно обоснованно пренебречь сравнительно малыми продольными проекциями E_z и H_z. Низший тип волны в таком микрополосковом волноводе, имеющий нулевое значение критической частоты, принято называть *квази-Т-волной*.

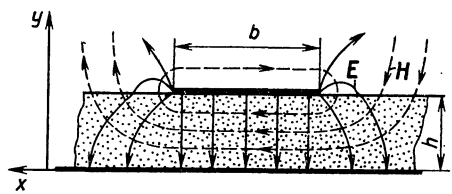


Рис. 10.6. Силовые линии векторов электромагнитного поля в микрополосковом волноводе

Строгий анализ показывает, что фазовая скорость квази-Т-волны зависит от частоты. Дисперсионные явления выражены тем резче, чем выше относительная диэлектрическая проницаемость материала подложки. Все это приходится учитывать при автоматизированном проектировании широкополосных СВЧ-устройств, когда точность компьютерных вычислений должна быть достаточной для того, чтобы изготавливать изделия, не требующие трудоемких и дорогих операций доводки и настройки.

Волновое сопротивление. Рассмотрим картину силовых линий векторов электромагнитного поля в микрополосковом волноводе, изображенную на рис. 10.6. Если между верхним проводником и металлическим основанием имеется гармоническая во времени разность потенциалов $\dot{U}$, то амплитуда y-й проекции вектора напряженности электрического поля вычисляется по формуле плоского конденсатора

$$\dot{E}_y = \dot{U}/h.$$

Вектор напряженности магнитного поля будет иметь поперечную x-ю проекцию, которая в каждой точке связана с E_y посредством характеристического сопротивления заполняющей среды [см. формулу (10.17)]:

$$\dot{H}_x = \frac{\dot{E}_y}{Z_c} = \frac{\dot{U}}{120\pi h\sqrt{\mu/\varepsilon}}.$$

Проекция вектора плотности поверхностного электрического тока на ось z численно совпадает с поперечной проекцией магнитно-

го вектора. Следует учесть также, что электрическое и магнитное поля сосредоточены в основном внутри прямоугольной области сечением $b \times h$, которая непосредственно прилегает к проводящей полоске; ток протекает практически лишь по внутренней стороне полоски. Тогда амплитуда тока в линии будет прямо пропорциональна ширине полоски:

$$I = \frac{\dot{U}_b}{120\pi h \sqrt{\mu/\varepsilon}}.$$

Отсюда находим волновое сопротивление микрополоскового волновода:

$$Z_в = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{h}{b}. \qquad (10.25)$$

Данная формула устанавливает, что волновое сопротивление падает с уменьшением толщины подложки и с ростом ширины верхнего проводника волновода.

Сравнение с данными эксперимента показывает, что точность расчетов по формуле (10.25) недостаточна и поэтому данное соотношение можно применять лишь для грубых оценок. Гораздо лучшие результаты дает формула

$$Z_в = \frac{188.5}{\sqrt{\varepsilon}} \left\{ \frac{b}{2h} + 0.441 + 0.082 \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\varepsilon + 1}{2\pi\varepsilon} \right) \left[1.451 + \ln \left(\frac{b}{2h} + 0.94 \right) \right] \right\}^{-1}, \qquad (10.26)$$

справедливая при условии, что $h/b < 1$, $\mu = 1$.

Пример 10.2. Микрополосковый волновод имеет размеры поперечного сечения $b = 2$ мм, $h = 0.25$ мм. Электродинамические параметры подложки $\mu = 1$, $\varepsilon = 9$. Сравнить результаты расчета волнового сопротивления по приближенной и уточненной формулам.

Применив приближенную формулу (10.25), находим

$$Z_в = 377 \cdot 0.25/(3 \cdot 2) = 15.7 \text{ Ом}.$$

Более точная формула (10.26) дает значение $Z_в = 12.6$ Ом. Таким образом, относительная погрешность грубой формулы составляет около 25%, что в ряде случаев недопустимо.

Микрополосковые линии передачи, обычно применяемые в современных интегральных устройствах СВЧ-диапазона, имеют волновые сопротивления в пределах от 10 до 100 Ом. При этом дос-

тигается компромисс между требованиями к потерям в волноводе, его пробивной прочности, а также к удобству сочленения волновода с узлами и приборами.

10.5. Отрезок волновода с Т-волной как четырехполюсник

Рассмотрим отрезок регулярного волновода без потерь, по которому распространяются волны Т-типа. Считаются известными волновое сопротивление $Z_в$ и длина отрезка l (рис. 10.7). Совместим начало отсчета координаты z с левыми зажимами отрезка, на которых определим входные комплексные амплитуды напряжения $\dot{U}_1$ и тока $\dot{I}_1$. Аналогично, на правых зажимах будем считать известными выходные величины $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$. Данная система представляет собой линейный стационарный четырехполюсник.

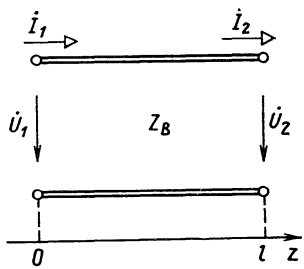


Рис. 10.7. Схематическое изображение отрезка линии передачи

В теории цепей для описания четырехполюсников используют аппарат матричного анализа [2]. Будем характеризовать изучаемый распределенный четырехполюсник его матрицей передачи (A-матрицей). При этом независимыми переменными служат величины $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$, связанные с напряжением и током на входе двумя равенствами:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2,\\ \dot{I}_1 &= A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2.\end{aligned} \tag{10.27}$$

Зная матрицу передачи

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

можно найти любые внешние характеристики четырехполюсника. Например, если к выходным зажимам подключен линейный двухполюсник нагрузки с комплексным сопротивлением $Z_н$, так что $\dot{U}_2/\dot{I}_2 = Z_н$, то из (10.27) следует формула для входного сопротивления со стороны левых зажимов:

$$Z_{вх} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A_{11}Z_н + A_{12}}{A_{21}Z_н + A_{22}}. \tag{10.28}$$

Аналогично находим комплексный коэффициент передачи напряжения:

$$K_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{Z_н}{A_{11}Z_н + A_{12}}. \tag{10.29}$$

Поставим задачу определить элементы А-матрицы отрезка регулярного волновода с Т-волной. Воспользуемся тем, что общее решение уравнения Гельмгольца, записанное относительно комплексных амплитуд напряжения и тока, имеет вид суммы двух волн, падающей и отраженной, бегущих в противоположных направлениях:

$$\dot{U}(z)=C_1e^{-j\beta z}+C_2e^{j\beta z},$$

$$\dot{I}(z)=\frac{C_1}{Z_в}e^{-j\beta z}-\frac{C_2}{Z_в}e^{j\beta z}.$$

Здесь C_1 и C_2 — не известные пока коэффициенты, относящиеся соответственно к падающей и отраженной волнам. Отрицательный знак во втором равенстве связан с тем, что отраженная волна переносит мощность в сторону уменьшения координаты z.

Выразим эти коэффициенты через выходные комплексные амплитуды $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$, получаемые из предыдущих формул подстановкой $z=l$. При этом имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$C_1e^{-j\beta l}+C_2e^{j\beta l}=\dot{U}_2,$$

$$C_1e^{-j\beta l}-C_2e^{j\beta l}=\dot{I}_2Z_в,$$

решение которой элементарно:

$$C_1=\frac{\dot{U}_2+\dot{I}_2Z_в}{2}e^{j\beta l},$$

$$C_2=\frac{\dot{U}_2-\dot{I}_2Z_в}{2}e^{-j\beta l}.$$

Таким образом, комплексные амплитуды напряжения и тока в произвольном сечении выражаются через величины $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$:

$$\dot{U}(z)=\frac{\dot{U}_2+\dot{I}_2Z_в}{2}e^{j\beta(l-z)}+\frac{\dot{U}_2-\dot{I}_2Z_в}{2}e^{-j\beta(l-z)},$$

$$\dot{I}(z)=\frac{\dot{U}_2+\dot{I}_2Z_в}{2Z_в}e^{j\beta(l-z)}-\frac{\dot{U}_2-\dot{I}_2Z_в}{2Z_в}e^{-j\beta(l-z)}.$$

Входные напряжение и ток, соответствующие значению $z=0$,

$$\dot{U}_1=\frac{\dot{U}_2+\dot{I}_2Z_в}{2}e^{j\beta l}+\frac{\dot{U}_2-\dot{I}_2Z_в}{2}e^{-j\beta l},$$

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_2+\dot{I}_2Z_в}{2}e^{j\beta l}-\frac{\dot{U}_2-\dot{I}_2Z_в}{2}e^{-j\beta l},$$

или

$$\dot{U}_1=\dot{U}_2\cos\beta l+j\dot{I}_2Z_в\sin\beta l,$$

$$\dot{I}_1=\dot{U}^2\frac{j}{Z_в}\sin\beta l+\dot{I}_2\cos\beta l. \qquad (10.30)$$

Сравнивая (10.30) и (10.27), видим, что матрица передачи отрезка волновода с волной Т-типа выражается следующим образом:

$$\boldsymbol{A}]=\begin{bmatrix}\cos\beta l & jZ_в\sin\beta l\\ \dfrac{j}{Z_в}\sin\beta l & \cos\beta l\end{bmatrix}. \qquad (10.31)$$

Входное сопротивление нагруженного отрезка волновода. На основании формул (10.28) и (10.31)

$$Z_{вх}=\frac{Z_н\cos\beta l+jZ_в\sin\beta l}{j\dfrac{Z_н}{Z_в}\sin\beta l+\cos\beta l}=\frac{Z_н+jZ_в\operatorname{tg}\beta l}{1+j\dfrac{Z_н}{Z_в}\operatorname{tg}\beta l} \qquad (10.32)$$

Если ввести безразмерные нормированные сопротивления

$$Z'_{вх}=Z_{вх}/Z_в,\qquad Z'_н=Z_н/Z_в,$$

то последнее равенство примет вид

$$Z'_{вх}=\frac{Z'_н+j\operatorname{tg}\beta l}{1+jZ'_н\operatorname{tg}\beta l}. \qquad (10.33)$$

На основании данной формулы можно утверждать, что в общем случае входное сопротивление отрезка, к выходным зажимам которого подключен двухполюсник нагрузки, не совпадает с комплексным сопротивлением этого двухполюсника. Поэтому отрезок линии передачи выполняет роль *трансформатора сопротивления*. Это свойство отрезка служит основой многочисленных технических применений.

Следует отметить, что в режиме согласования (при $Z_н'=1$) входное сопротивление любого отрезка равно волновому сопротивлению линии передачи независимо от его длины и от частоты.

Если отрезок линии на выходе закорочен, так что $Z_н'=0$, то

$$Z'_{вх}=j\operatorname{tg}\beta l. \qquad (10.34)$$

При холостом ходе на выходе $Z_н'=\infty$ и поэтому нормированное входное сопротивление отрезка

$$Z'_{вх}=-j\operatorname{ctg}\beta l. \qquad (10.35)$$

В соответствии с формулами (10.34) и (10.35) входные сопротивления подобных отрезков волноводов всегда чисто реактивны и являются периодическими функциями безразмерного параметра βl. Например, отрезок короткозамкнутой линии длиной $l<\lambda/4$ име-

ет индуктивное входное сопротивление, модуль которого неограниченно возрастает с приближением длины отрезка к значению $\lambda/4$. В интервале $\lambda/4 < l < \lambda/2$ входное сопротивление носит емкостный характер.

Короткозамкнутый отрезок линии передачи часто используется в технике СВЧ. Изменяя его длину при помощи передвижного короткозамыкателя, так называемого поршня, можно осуществлять настройку и регулировку элементов волноводного тракта.

ЗАДАЧИ

10.1. Коаксиальный волновод имеет параметры: $a=0.5$ мм, $b=2$ мм, $\varepsilon=2$, $\mu=1$. Между проводниками создана разность потенциалов $U=300$ В. Найдите напряженность электрического поля на окружности радиусом $r_0=0.75$ мм.

10.2. Диэлектриком коаксиального кабеля служит полиэтилен ($\varepsilon=2.25$, $\mu=1$). Размеры поперечного сечения: $a=0.75$ мм, $b=2.5$ мм. Бегущая электромагнитная волна переносит вдоль кабеля мощность $P=1.5$ кВт. Определите амплитуду напряжения U между проводниками кабеля.

10.3. Коаксиальный волновод имеет воздушное заполнение и проводники радиусами $a=5$ мм, $b=15$ мм. Напряженность электрического поля бегущей электромагнитной волны на поверхности внутреннего проводника равна $6\cdot10^4$ В/м. Вычислите амплитудные значения плотности поверхностного электрического тока $\mathbf{J}_{\text{пов.э}}(a)$ и $\mathbf{J}_{\text{пов.э}}(b)$ на внутреннем и внешнем проводниках.

10.4. Микрополосковый волновод имеет параметры: $b=1$ мм, $h=0.25$ мм, $\varepsilon=9.6$. Предельно допустимая напряженность электрического поля в диэлектрике подложки составляет $8\cdot10^6$ В/м. Определите максимальную мощность, которую можно передавать по этому волноводу на границе режима электрического пробоя.

10.5. Между проводниками микрополоскового волновода создано гармоническое напряжение с амплитудой $U=250$ В. Параметры линии: $b=4$ мм, $h=1$ мм, $\varepsilon=2.1$. Вычислите амплитуду вектора плотности поверхностного электрического тока на проводящей полоске.

10.6. Отрезок линии передачи длиной 0.17λ нагружен на линейный двухполюсник с нормированным сопротивлением $Z_{\text{н}}'=4.5-j0.8$. Найдите нормированное входное сопротивление отрезка.

10.7. Гармонический источник ЭДС с амплитудой 70 В подключен к короткозамкнутому отрезку линии передачи, имеющей волновое сопротивление 150 Ом. Частота источника 90 МГц, длина отрезка 0.8 м, диэлектрик — воздух. Определите амплитуду тока в короткозамыкающей перемычке.

Глава одиннадцатая

ЗАТУХАНИЕ ВОЛН В ПОЛЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

До сих пор процесс распространения электромагнитных волн по волноводам рассматривался в предположении, что источники потерь в них отсутствуют. Однако на практике любые волноводы обладают затуханием, выраженным в той или иной степени. Иногда, например при конструировании линий передачи для питания антенн или при создании дальних линий связи, затухание становится характеристикой, определяющей выбор той или иной волноводной системы.

11.1. Источники потерь в волноводах

Можно выделить два основных источника потерь, присущих полым металлическим волноводам: 1) конечное значение проводимости металла, из которого изготовлены стенки волновода; 2) небольшие токи проводимости в диэлектрике, заполняющем волновод.

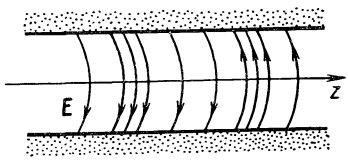


Рис. 11.1. Изгибание силовых линий вектора напряженности электрического поля в волноводе с потерями из-за конечной проводимости стенок

Первый из этих источников потерь приводит к тому, что на поверхности реального металла с конечной проводимостью касательная составляющая вектора напряженности электрического поля не обращается в нуль, а принимает некоторое конечное значение. Структура электромагнитного поля в волноводе становится такой, что силовые линии вектора **E** слегка изгибаются (рис. 11.1). Как следствие, возникает составляющая усредненного вектора Пойнтинга, направленная внутрь металла. Данная составляющая характеризует плотность потока мощности, идущей на нагрев стенок волновода. Следует заметить, что приведенная картина силовых линий изображена в утрированном виде, поскольку из-за высокого значения удельной проводимости металла касательная составляющая вектора **E** гораздо меньше нормальной.

Потери энергии, связанные с неидеальностью диэлектрических свойств заполняющего вещества, имеют, как правило, второстепенное значение, поскольку чаще всего внутри волновода находится столь совершенный диэлектрик, как воздух. В данной главе этот источник потерь не рассматривается, однако его влияние нетрудно учесть развиваемыми здесь методами.

11.2. Коэффициент затухания волн в волноводе

Как известно, комплексные амплитуды векторов электромагнитного поля, распространяющегося в сторону $z>0$, при работе на некотором типе волны записываются следующим образом:

$$\dot{\mathbf{E}}(x, y, z)=\mathbf{E}(x, y)\,e^{-jhz},$$
$$\dot{\mathbf{H}}(x, y, z)=\mathbf{H}(x, y)\,e^{-jhz}, \qquad (11.1)$$

где $\mathbf{E}(x, y)$, $\mathbf{H}(x, y)$ — векторные функции поперечных координат, зависящие от выбранного типа волны; h — продольное волновое число.

Отрезок регулярного волновода можно представить в виде каскадного соединения отрезков меньшей длины. Если каждому отрезку присуще некоторое затухание, то общее затухание должно быть экспоненциальной функцией суммарной длины (см. гл. 3). Поэтому амплитуды векторов электромагнитного поля экспоненциально уменьшаются с ростом длины отрезка волновода. Аналогичная ситуация уже встречалась ранее при изучении затухания плоской электромагнитной волны, распространяющейся в неидеальной среде. Таким образом, следует считать, что в волноводе с потерями продольное волновое число является комплексной величиной:

$$h=h'-jh''. \qquad (11.2)$$

При этом комплексные амплитуды векторов поля в волноводе будут зависеть от декартовых координат следующим образом:

$$\dot{\mathbf{E}}(x, y, z)=\mathbf{E}(x, y)\,e^{-h''z}e^{-jh'z},$$
$$\dot{\mathbf{H}}(x, y, z)=\mathbf{H}(x, y)\,e^{-h''z}e^{-jh'z}. \qquad (11.3)$$

Из вида формул (11.3) следует, что h' является *коэффициентом фазы*, в то время как h'' является *коэффициентом затухания* волны рассматриваемого типа. Следует помнить, что величины h' и h'' зависят от частоты колебаний.

Смысл коэффициента затухания волн в волноводе можно пояснить с помощью следующего мысленного эксперимента. Положим, например, что на входе регулярного отрезка волновода длиной 1 м амплитуда напряженности электрического поля равна $E_{вх}$, в то время как на выходе за счет потерь амплитуда уменьшается до уровня $E_{вых}<E_{вх}$. В соответствии с формулами (11.3) числовое значение коэффициента затухания

$$h''=\ln\,(E_{вх}/E_{вых}). \qquad (11.4)$$

Говорят, что величина h'' является *погонным затуханием* рассматриваемой линии передачи, выраженным в неперах на метр (Нп/м).

В радиотехнике погонное затухание чаще выражают в децибелах на метр (дБ/м), пользуясь формулой

$$\Delta_{\text{пог}} = 20 \lg(E_{\text{вх}}/E_{\text{вых}}). \qquad (11.5)$$

Легко проверить, что между параметрами h'' и $\Delta_{\text{пог}}$ существует связь:

$$\Delta_{\text{пог}} = 8.686 h''. \qquad (11.6)$$

Экспоненциальный характер ослабления амплитуды поля приводит к тому, что в волноводных трактах, длина которых L удовлетворяет неравенству $h''L \gg 1$, практически вся поданная на вход мощность рассеивается в стенках. Это обстоятельство серьезно затрудняет создание протяженных линий передачи.

Пример 11.1. Известно, что некоторый волновод имеет погонное затухание 0.3 дБ/м. Определить отношения напряженностей поля на входе и выходе при длинах волновода $L_1 = 2$ м и $L_2 = 60$ м.

В первом случае затухание в отрезке волновода составит $2 \times 0.3 = 0.6$ дБ. В соответствии с определением понятия затухания отношение $E_{\text{вых}}/E_{\text{вх}} = 10^{-0.6/20} = 0.933$, т. е. амплитуда колебаний на выходе снижается примерно на 7%.

Во втором случае затухание будет равно $60 \cdot 0.3 = 18$ дБ. При этом $E_{\text{вых}}/E_{\text{вх}} = 10^{-18/20} = 0{,}126$. Из-за потерь в стенках наблюдается примерно восьмикратное уменьшение амплитуды на выходе.

В технике СВЧ при проведении измерений чаще приходится иметь дело не с напряженностями полей, а с мощностями. Если $P_{\text{вх}}$ и $P_{\text{вых}}$ — мощности бегущей волны на входе и выходе метрового отрезка регулярного волновода с потерями, то погонное затухание

$$\Delta_{\text{пог}} = 10 \lg (P_{\text{вх}}/P_{\text{вых}}). \qquad (11.7)$$

Различие между формулами (11.5) и (11.7) обусловлено тем, что мощность пропорциональна квадрату напряженности поля.

11.3. Общее выражение для коэффициента затухания

Рассмотрим произвольный регулярный волновод с потерями, ось которого совпадает с осью z. Так как векторы электромагнитного поля в волноводе зависят от z в соответствии с формулами (11.3), то средняя мощность, переносимая волной заданного типа

в любом фиксированном сечении, определяется следующим образом:

$$P(z)=P_0\exp(-2h''z), \tag{11.8}$$

где P_0 — средняя мощность в сечении $z=0$ (по поводу вида показателя экспоненциальной функции см. замечание в конце предыдущего параграфа).

Будем считать проводимость стенок волновода достаточно высокой для того, чтобы можно было использовать приближенные граничные условия Леонтовича, рассмотренные в гл. 6. При этом структура силовых линий электромагнитного поля в волноводе практически остается такой же, как в идеализированной линии передачи с бесконечно высокой проводимостью стенок.

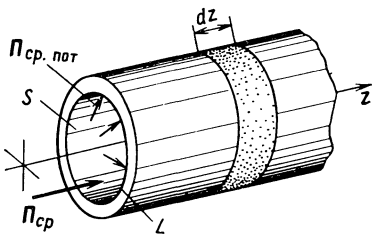


Рис. 11.2. К определению коэффициента затухания волн в волноводе

Дифференцируя формулу (11.8), получаем

$$dP/dz=-2h''P,$$

откуда выводим коэффициент затухания:

$$h''=-\frac{dP/dz}{2P}. \tag{11.9}$$

Входящая сюда величина dP с точностью до знака равна средней мощности потерь в элементарном отрезке волновода длиной dz (рис. 11.2). Плотность средней мощности потерь характеризуется вектором Пойнтинга $\mathbf{П}_{ср.\,пот}$, которой всегда перпендикулярен по отношению к стенкам волновода. Поэтому

$$dP=-dz\int_L |\mathbf{П}_{ср.пот}|\,dl, \tag{11.10}$$

где интегрирование проводится вдоль контура L поперечного сечения линии передачи.

С другой стороны, мощность P, переносимая через какое-нибудь сечение волновода, находится путем интегрирования среднего значения вектора Пойнтинга $\mathbf{П}_{ср}$ по поперечному сечению волновода:

$$P=\int_S \mathbf{П}_{ср}dS. \tag{11.11}$$

Подставив выражения (11.10) и (11.11) в формулу (11.9), получим

$$h''=\frac{\int\limits_L |\Pi_{\text{ср.пот}}|\,dl}{2\int\limits_S \Pi_{\text{ср}}dS}. \qquad (11.12)$$

По определению,

$$\Pi_{\text{ср.пот}}=\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}[\dot{E}_{\tau\text{м}}\dot{H}^*_{\tau\text{м}}], \qquad (11.13)$$

где $\dot{E}_{\tau\text{м}}$ и $\dot{H}_{\tau\text{м}}$ — комплексные амплитуды составляющих электрического и магнитного векторов, касательных к поверхности металла. Приближенно будем считать, что касательная составляющая вектора напряженности магнитного поля на стенке реального волновода с малыми потерями равна аналогичной составляющей магнитного вектора на стенке идеального волновода без потерь:

$$\dot{H}_{\tau\text{м}}=\dot{H}_{\tau\text{м}}\,(\sigma=\infty).$$

Чтобы найти комплексную амплитуду касательной составляющей вектора напряженности электрического поля на стенке реального волновода, обратимся к условиям Леонтовича, согласно которым

$$|\dot{E}_{\tau\text{м}}|=Z_{\text{см}}|\dot{H}_{\tau\text{м}}|. \qquad (11.14)$$

Характеристическое сопротивление металла $Z_{\text{см}}$ зависит от его удельной проводимости и от частоты следующим образом:

$$Z_{\text{см}}=\sqrt{\omega\mu_0/(2\sigma)}\,(1+j) \qquad (11.15)$$

(предполагается, что металл не имеет собственных магнитных свойств и его относительная магнитная проницаемость равна единице).

Если учесть, что $\dot{H}_{\tau\text{м}}\perp\dot{E}_{\tau\text{м}}$, то

$$\int\limits_L |\Pi_{\text{ср.пот}}|\,dl=\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}}\int\limits_L |\dot{H}_{\tau\text{м}}|^2 dl$$

и формула (11.12) приобретает окончательный вид

$$h''=\frac{\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{8\sigma}}\int\limits_L |\dot{H}_{\tau\text{м}}|^2 dl}{\mathrm{Re}\int\limits_S [\dot{E}\dot{H}^*]\,dS}. \qquad (11.16)$$

Таким образом, чтобы вычислить погонное затухание в волноводе, необходимо знать рабочую частоту, удельную проводимость

материала стенок и располагать сведениями о структуре силовых линий векторов электромагнитного поля волны рассматриваемого типа в волноводе без потерь с теми же геометрическими характеристиками.

11.4. Анализ некоторых частных случаев

В данном параграфе будет рассмотрена методика вывода формул для расчета коэффициента затухания применительно к некоторым линиям передачи, часто используемым в радиотехнических устройствах.

Коаксиальный волновод. Данная линия передачи анализировалась в § 10.2. Напомним использованные обозначения: a и b — радиусы внутреннего и внешнего проводников соответственно, ε — относительная диэлектрическая проницаемость заполняющего диэлектрика. Будем полагать, что диэлектрик немагнитный ($\mu=1$) и что омические потери в нем отсутствуют ($\operatorname{tg}\delta=0$).

Комплексные амплитуды проекций векторов электромагнитного поля Т-волны в коаксиальном волноводе без потерь имеют вид

$$\dot{E}_r=\frac{A}{r}e^{-j\beta z},\qquad \dot{H}_\varphi=\frac{\sqrt{\varepsilon}A}{120\pi r}e^{-j\beta z}, \tag{11.17}$$

где A — произвольная постоянная с размерностью напряжения, $\beta=\omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0}$ — коэффициент фазы (продольное волновое число). Отсюда мощность, переносимая вдоль оси z в кольцевой области между проводниками,

$$P=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\int\limits_S[\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*]\,d\mathbf{S}=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_a^b\dot{E}_r\dot{H}_\varphi^* r\,dr=\frac{\sqrt{\varepsilon}A^2}{120}\ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{11.18}$$

Находя числитель из формулы (11.16), следует принять во внимание, что в коаксиальном волноводе магнитный вектор имеет единственную составляющую, которая касательна к поверхностям как внутреннего, так и внешнего проводников. Полагая для конкретности в равенствах (11.17) $z=0$, непосредственно получаем

$$\int\limits_L|\dot{\mathbf{H}}_м|\,dl=2\pi\left[aH_\varphi^2(a)+bH_\varphi^2(b)\right]=\frac{2\varepsilon A^2}{(120)^2\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right). \tag{11.19}$$

Подставив (11.18) и (11.19) в выражение (11.16), приходим к формуле для практического расчета коэффициента затухания (Нп/м) Т-волны в коаксиальном волноводе без учета омических потерь в диэлектрике

$$h''=\frac{\sqrt{\omega\mu_0/(8\sigma)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\sqrt{\varepsilon}}{120\pi\ln(b/a)}.$$

Отсюда погонное затухание коаксиального волновода (дБ/м)

$$\Delta_{\text{пог}} = \frac{\sqrt{\omega\mu_0/(8\sigma)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\sqrt{\varepsilon}}{43.4\ \ln(b/a)}. \qquad (11.20)$$

Пример 11.2. Коаксиальный кабель марки РК-50-3-13 имеет полиэтиленовую изоляцию ($\varepsilon=2.25$) и следующие размеры в поперечном сечении: $a=0.45$ мм, $b=1.5$ мм. Найти погонное затухание Т-волны в данном кабеле при частоте сигнала $f=750$ МГц, считая, что $\sigma=5.7\cdot10^7$ См/м.

Здесь значение параметра $\sqrt{\omega\mu_0/(8\sigma)}=3.6\cdot10^{-3}$ Ом. Тогда в соответствии с формулой (11.20)

$$\Delta_{\text{пог}} = \frac{3.6\cdot10^{-3}\cdot10^3(1/0.45+1/1.5)}{43.4\ \ln(1.5/0.45)} = 0.2 \text{ дБ/м}.$$

Итак, погонное затухание типичного коаксиального кабеля на частотах около 1 ГГц составляет несколько десятых долей децибел на метр.

Зафиксировав диаметр внешнего проводника коаксиального волновода, можно так подобрать диаметр внутреннего проводника, чтобы погонное затухание оказалось минимальным. Действительно, зависящую от a, b составляющую правой части формулы (11.20) можно представить так:

$$\frac{1/a+1/b}{\ln(b/a)} = \frac{1}{b}\,\frac{1+(b/a)}{\ln(b/a)}.$$

На рис. 11.3 изображен график зависимости второго сомножителя данной формулы от безразмерного отношения b/a. Можно видеть, что кривая имеет пологий минимум при $b/a=3.6$. Такая конструкция коаксиальной линии оптимальна с точки зрения наименьших потерь в металле; при $\varepsilon=2.25$ волновое сопротивление оптимизированного волновода

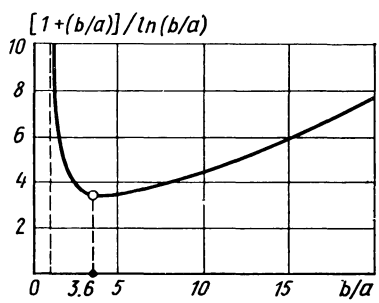


Рис. 11.3. К определению погонного затухания Т-волны в коаксиальном волноводе

$$Z_{\text{в}} = \frac{138}{\sqrt{2.25}}\lg 3.6 = 51 \text{ Ом}. \qquad (11.21)$$

Физическая причина существования оптимального соотношения радиусов такова: при чрезмерном сокращении радиуса внутреннего проводника потери в нем возрастают вследствие увеличения плотности тока; если же отношение радиусов стремится к единице, то погонные потери также растут из-за сокращения площади той части поперечного сечения волновода, по которой переносится электромагнитная энергия.

В заключение отметим, что в коротковолновой части СВЧ-диапазона погонное затухание коаксиальных волноводов обусловлено главным образом рассеянием мощности в неидеальном диэлектрике, а не влиянием конечной проводимости материала стенок.

Прямоугольный металлический волновод. Вычислим погонное затухание волны типа H_{10}, чаще всего применяемой на практике. Воспользуемся формулами (8.53), которые связывают проекции векторов электромагнитного поля с величиной E_{max} — максимальной амплитудой напряженности электрического поля, наблюдаемой в центре широких стенок при $x=a/2$.

Знаменатель формулы (11.16) численно равен удвоенному значению мощности, переносимой бегущей волной типа H_{10}; в соответствии с выражением (8.70) имеем

$$\operatorname{Re}\int_S [\dot{E}\overset{*}{\dot{H}}]\,dS=\frac{E_{max}^2 ab}{240\pi}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}. \qquad (11.22)$$

Чтобы вычислить числитель формулы (11.16), следует заметить, что обе составляющие напряженности магнитного поля с комплексными амплитудами проекций

$$\dot{H}_x=-\frac{h}{\omega\mu_0}E_{max}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-jhz},$$

$$\dot{H}_z=-j\frac{\pi}{\omega\mu_{0a}}E_{max}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-jhz}$$

касательны к стенкам волновода; на узких стенках при $x=0$ и $x=a$ проекция $\dot{H}_x$ обращается в нуль. При этом

$$\int_L |\dot{\mathbf{H}}_{\tau M}|^2 dl=2\int_0^a(\dot{H}_x\overset{*}{\dot{H}}_x+\dot{H}_z\overset{*}{\dot{H}}_z)\,dx+b\dot{H}_z(0)\overset{*}{\dot{H}}_z(0)+$$

$$+b\dot{H}_z(a)\overset{*}{\dot{H}}_z(a)=2\left(\frac{h}{\omega\mu_0}\right)^2E_{max}^2\int_0^a\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx+$$

$$+2\left(\frac{\pi}{\omega\mu_0 a}\right)^2E_{max}^2\int_0^a\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)^2dx+2b\left(\frac{\pi}{\omega\mu_{0a}}\right)^2E_{max}^2=$$

$$=E_{max}^2\left(\frac{h}{\omega\mu_0}\right)^2\left\{a\left[1+\left(\frac{\pi}{ha}\right)^2\right]+2b\left(\frac{\pi}{ha}\right)^2\right\}. \qquad (11.23)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\frac{h}{\omega\mu_0}=\frac{\sqrt{1-[\lambda_0/(2a)]^2}}{120\pi}, \qquad (11.24)$$

$$\left(\frac{\pi}{ha}\right)^2=\frac{[\lambda_0/(2a)]^2}{1-[\lambda_0/(2a)]^2}.$$

Подставив эти выражения в (11.23) и воспользовавшись равенством (11.22), на основании (11.16) после несложных алгебраических преобразований получаем следующую формулу для расчета погонного затухания (дБ/м) волны типа H_{10} в прямоугольном металлическом волноводе с воздушным заполнением:

$$\Delta_{\text{пог}}=\frac{0.793\left[1+\frac{2b}{a}\left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2\right]}{\sqrt{\lambda\sigma}\,b\sqrt{1-[\lambda_0/(2a)]^2}} \qquad (11.25)$$

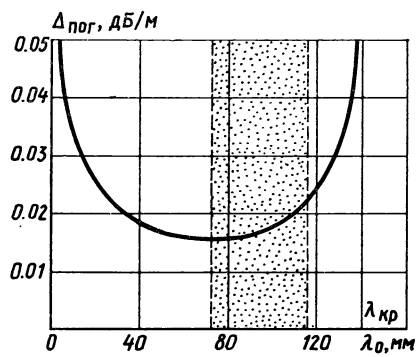


Рис. 11.4. Зависимость погонного затухания колебания типа H_{10} от рабочей длины волны в прямоугольном волноводе сечением 72×34 мм, выполненном из меди ($\sigma=5.7\cdot10^7$ См/м)

График зависимости погонного затухания от рабочей длины волны λ_0 для конкретного волновода показан на рис. 11.4. Видно, что погонное затухание неограниченно возрастает как при стремлении длины волны к нулю, так и вблизи критической длины волны. Рост затухания на высоких частотах объясняется уменьшением толщины поверхностного слоя, что ведет к повышению сопротивления металлических стенок. С другой стороны, если частота стремится к критической, то плоские волны, из которых складывается поле в волноводе, испытывают все большее число отражений от стенок, что также ведет к росту погонных потерь.

Рассматривая представленный график, можно понять, в частности, почему нецелесообразно использовать прямоугольные волноводы стандартного сечения на волнах, длины которых $\lambda_0>1.6a$.

Для волноводов с отношением сторон 2:1 минимум погонного затухания наблюдается в точке $\lambda_0\approx0.8a$. Данное значение лежит вне области одноволновости, однако по причине весьма плавного характера кривой увеличение затухания в рабочей полосе частот по сравнению с минимальным уровнем невелико.

Переход от одного частотного диапазона к другому сопряжен с выбором нового стандартного сечения волновода. Интересно вы-

яснить, как при этом меняется погонное затухание. Для всех стандартных волноводов отношение b/a практически постоянно; на средних частотах диапазонов отношение λ_0/a также остается неизменным. Поэтому числитель в формуле (11.25) не зависит от рабочей длины волны, в то время как в знаменатель входит квадратный корень из длины волны, а также параметр b, пропорциональный первой степени λ_0. В результате имеем

$$\Delta_{\text{пог}} \sim \lambda_0^{-3/2}. \tag{11.26}$$

Проиллюстрируем смысл формулы (11.26) на конкретном примере. Известно, что у стандартного волновода сечением 23×10 мм, изготовленного из меди, на длине волны $\lambda_0=3$ см погонное затухание равно 0.1 дБ/м. Перейдя на длину волны $\lambda_0=3$ мм, следует воспользоваться волноводом с десятикратно уменьшенным сечением, т. е. 2.3×1 мм (весьма миниатюрная конструкция!). Погонное затухание в таком волноводе будет в $10^{3/2}$ раз больше, т. е. составит примерно 3 дБ/м. Резкое возрастание потерь в прямоугольных волноводах стандартных сечений значительно усложняет создание устройств для коротковолновой части миллиметрового диапазона волн.

Частотные зависимости погонного затухания волн высших типов в прямоугольном волноводе имеют такой же экстремальный характер; с ростом индексов погонное затухание волн как E-, так и H-типов возрастает.

Круглый металлический волновод. Выведем формулу для расчета погонного затухания волны типа E_{01} в круглом металлическом волноводе радиусом a. Ранее было получено выражение (9.37), определяющее среднюю мощность, переносимую волной данного типа вдоль оси волновода. Воспользовавшись ею, запишем

$$\operatorname{Re}\int_S [\dot{E}\dot{H}^*]\,dS = \frac{\pi\omega\varepsilon_0 a^4 h}{\nu_{01}^2} E_0^2 J_1^2(\nu_{01}). \tag{11.27}$$

Вычисление криволинейного интеграла от квадрата касательной составляющей вектора напряженности магнитного поля вдоль контура сечения волновода оказывается очень простым. Дело в том, что, согласно формуле (9.35), имеется единственная проекция $\dot{H}_\varphi$, которая к тому же не зависит от азимутального угла, и поэтому

$$\int_L |\dot{\mathbf{H}}_{\tau_M}|^2\,dl = 2\pi a\,|\dot{H}_\varphi| = \frac{2\pi a^3(\omega\varepsilon_0)^2}{\nu_{01}^2} E_0^2 J_1^2(\nu_{01}). \tag{11.28}$$

Если теперь подставить (11.27) и (11.28) в формулу (11.16), то непосредственно получаем

$$h'' = \frac{\sqrt{\omega\mu_0/(2\sigma)}\,\omega\varepsilon_0}{ah}.$$

После несложных преобразований отсюда находим окончательное выражение, связывающее погонное затухание (дБ/м) волны типа E_{01} в круглом волноводе с рабочей длиной волны λ_0:

$$\Delta_{пог}=\frac{0.793}{a\sqrt{\lambda_0\sigma}\sqrt{1-[\lambda_0/(2.61a)]^2}}. \qquad (11.29)$$

Пример 11.3. Вычислить погонное затухание волны типа E_{01} в круглом металлическом волноводе диаметром 50 мм на рабочей частоте $f=7.5$ ГГц. Материал стенок — медь ($\sigma=5.7\cdot10^7$ См/м).

Рабочая длина волны $\lambda_0=c/f=4$ см. На основании формулы (11.29) имеем

$$\Delta_{пог}=\frac{0.793}{2.5\cdot10^{-2}\sqrt{4\cdot10^{-2}\cdot5.7\cdot10^7}\sqrt{1-[4/(2.61\cdot2.5)]^2}}=0.027 \text{ дБ/м}.$$

Эта цифра сравнима с погонным затуханием волны типа H_{10} в прямоугольном волноводе с таким же габаритом поперечного сечения.

Аналогичным образом получаются формулы для расчета погонного затухания волн Н-типов в круглом волноводе. Для справок приведем некоторые из них:

волна типа H_{11}

$$\Delta_{пог}=\frac{0.793\{0.418+[\lambda_0/(3.41a)]^2\}}{a\sqrt{\lambda_0\sigma}\sqrt{1-[\lambda_0/(3.41a)]^2}}; \qquad (11.30)$$

волна типа H_{01}

$$\Delta_{пог}=\frac{0.793[\lambda_0/(1.64a)]^2}{a\sqrt{\lambda_0\sigma}\sqrt{1-[\lambda_0/(1.64a)]^2}}. \qquad (11.31)$$

На рис. 11.5 изображены кривые зависимостей погонного затухания волн типов H_{11} и H_{01} от рабочей длины волны применительно к типичному круглому волноводу сантиметрового диапазона. Как уже упоминалось в гл. 9, для волны типа H_{01} характерно неограниченное уменьшение погонных потерь с ростом частоты колебаний.

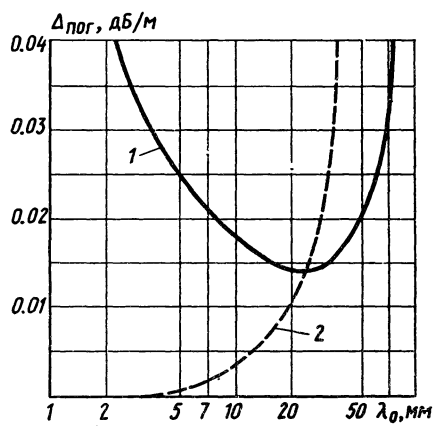


Рис. 11.5. Зависимость погонного затухания некоторых типов волн в круглом волноводе от рабочей длины волны:

1 — волна типа H_{11}; *2* — волна типа H_{01}. Диаметр волновода 50 мм, материал стенок — медь ($\sigma=5.7\times10^7$ См/м)

ЗАДАЧИ

11.1. Отрезок волновода длиной 50 м имеет КПД, равный 70%. Найдите погонное затухание в данном волноводе.

11.2. Коаксиальный кабель для дальней линии связи имеет диаметр внешнего проводника 50 мм и волновое сопротивление 75 Ом. Проводники выполнены из меди. Вычислите погонное затухание Т-волны в данном кабеле на рабочей частоте 1 МГц.

11.3. Выведите приближенную формулу для расчета погонного затухания Т-волны в микрополосковом волноводе, подложка которого выполнена из диэлектрика без потерь с известным значением относительной диэлектрической проницаемости ε. Обозначения геометрических параметров поперечного сечения волновода указаны на рис. 10.5.

11.4. Основываясь на формуле, полученной в задаче 11.3, вычислите погонное затухание волны, распространяющейся в микрополосковом волноводе с параметрами $\varepsilon=9$, $h=0.1$ мм, $\sigma=5.7\times\times10^7$ См/м на частоте 10 ГГц. Можно ли применять такой микрополосковый волновод для создания интегральных СВЧ-устройств, содержащих отрезки линий длиной в несколько сантиметров?

11.5. Выведите формулу для расчета дополнительного погонного затухания Т-волны в коаксиальном волноводе, обусловленного конечным значением параметра $\operatorname{tg}\delta$ заполняющего диэлектрика.

Указание: примите во внимание, что среднее значение вектора Пойнтинга, характеризующего потери в диэлектрике, составит $\sigma E^2/2$; кроме того, $\operatorname{tg}\delta=\sigma/(\omega\varepsilon\varepsilon_0)$.

11.6. Измерения показали, что прямоугольный волновод стандартного сечения 7.2×3.4 мм, работающий на волне основного типа, при частоте генератора $f=33.3$ ГГц имеет погонное затухание $\Delta_{\text{пог}}=1.4$ дБ/м. Определите удельную проводимость материала стенок волновода.

11.7. При разработке конструкции антенны трехсантиметрового диапазона оказалось, что массогабаритные показатели стандартного волновода сечением 23×10 мм не удовлетворяют требованиям технического задания. Поэтому было решено использовать волновод сечением 23×3 мм с резко сокращенным размером узкой стенки. Определите, во сколько раз увеличится при этом погонное затухание, если $\lambda_0=3.2$ см.

11.8. Выведите формулу (11.31), используя выражения (9.54), описывающие комплексные амплитуды проекций векторов электромагнитного поля волны типа H_{01} в круглом волноводе.

Глава двенадцатая

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СВЧ. ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

В настоящей главе исследуются электродинамические процессы в колебательных системах СВЧ. Подобные устройства играют роль линейных частотно-избирательных фильтров, служат основными узлами систем стабилизации частоты и т. д.

12.1. Эволюция электромагнитных колебательных систем при повышении рабочей частоты

В радиотехнических устройствах, работающих на умеренно высоких частотах (до нескольких сотен мегагерц), повсеместно используются колебательные контуры, образованные сосредоточенными конденсаторами и индуктивными катушками. Общей чертой подобных контуров является то, что их геометрические размеры значительно меньше рабочей длины волны. Электродинамические системы, для которых выполняется это условие, в физике принято называть *квазистационарными цепями.*

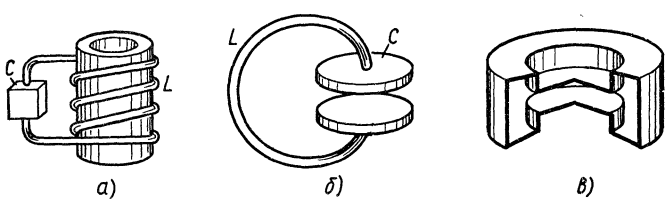


Рис. 12.1. Переход от колебательного контура с сосредоточенными элементами к тороидальному резонатору

На опыте было отмечено, что добротность колебательных систем с резонансными частотами в сотни мегагерц заметно снижается по сравнению с добротностью более низкочастотных цепей. Причина этого явления состоит в следующем. Как известно, для повышения резонансной частоты приходится уменьшать индуктивность и емкость элементов колебательного контура. В пределе обычный контур превращается в систему, у которой конденсатор имеет лишь две пластины, а роль индуктивной катушки играет одиночный виток (рис. 12.1, *а, б*). При этом существенно уменьшается энергия, которая может быть запасена в контуре. Кроме того, возрастает относительная доля активных потерь, что связано, например, с увеличением омического сопротивления проводников на высоких частотах из-за поверхностного эффекта. Дополнительным фактором, снижающим добротность колебательной си-

стемы, является неизбежное излучение электромагнитной энергии открытыми проводниками.

Мера, позволяющая отчасти избежать снижения добротности, а значит, и расширения полосы пропускания контура, состоит в том, что индуктивный виток заменяют сплошной металлической поверхностью (рис. 12.1, *в*), которую можно рассматривать как предельный случай параллельного включения большого числа отдельных витков. При этом, с одной стороны, уменьшается индуктивность системы, что благоприятно для продвижения в высокочастотные области спектра электромагнитных колебаний. С другой стороны, энергия поля внутри такой тороидальной полости значительно больше энергии в одиночном витке.

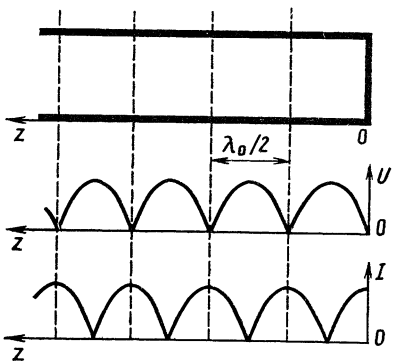


Рис. 12.2. Распределение напряжения и тока в короткозамкнутой линии передачи

Электромагнитные колебательные системы, представляющие собой полностью или частично замкнутые объемы с проводящими стенками, называют *объемными резонаторами*. К ним относится, в частности, рассмотренный здесь тороидальный резонатор, который часто используют в качестве колебательной системы для электровакуумных приборов СВЧ, например для отражательных клистронов.

Однако даже переход к замкнутым конструкциям тороидального типа не позволяет успешно разрешить все трудности. Дело в том, что тороидальный объемный резонатор является прямым аналогом обычного колебательного контура, в котором электрическое и магнитное поля четко локализованы в пространстве. С повышением резонансной частоты приходится уменьшать размеры тороидальной полости, а это неизбежно сопровождается уменьшением запасаемой энергии и сокращением добротности.

Принципиально другой, более многообещающий путь создания колебательных систем СВЧ состоит в использовании резонансных свойств отрезков распределенных линий передачи с малыми потерями.

Рассмотрим полубесконечную двухпроводную линию передачи, короткозамкнутую на конце (рис. 12.2), в которой тем или иным способом возбуждены гармонические колебания. Как известно [3], в такой линии устанавливается стоячая волна, представляющая собой сумму падающей и отраженной волн. Комплексная ампли-

туда напряжения стоячей волны $\dot{U}$ должна удовлетворять граничному условию в точке короткого замыкания:

$$\dot{U}=\dot{U}_{\text{пад}}+\dot{U}_{\text{отр}}=0 \text{ при } z=0. \tag{12.1}$$

Если λ_0 — длина волны в линии, то комплексная амплитуда напряжения зависит от продольной координаты z следующим образом:

$$\dot{U}(z)=U_m \sin(2\pi z/\lambda_0). \tag{12.2}$$

Отсюда видно, что граничное условие (12.1) выполняется в множестве точек оси z, удовлетворяющих соотношению

$$z=p\lambda_0/2, \tag{12.3}$$

где $p=1, 2, 3, \ldots$ — положительное целое число.

Таким образом, если взять замкнутый с обоих концов отрезок линии длиной $l=p\lambda_0/2$, то получим электромагнитную систему, колебания в которой при отсутствии потерь могут существовать неограниченно долго без какого-либо воздействия со стороны внешних источников энергии. В курсе теории цепей показано, что частотная характеристика такой системы вблизи резонансной частоты в точности соответствует частотной характеристике обычного колебательного контура с сосредоточенными элементами. Эскиз конструкции распределенной колебательной системы и ее эквивалентная схема представлены на рис. 12.3.

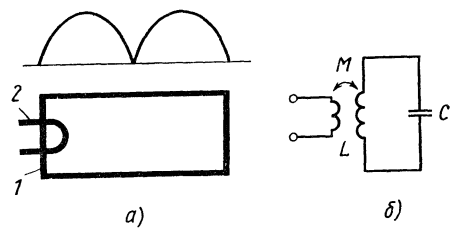


Рис. 12.3. Колебательная система, образованная отрезком линии передачи (*а*), и ее эквивалентная схема (*б*):
1 — отрезок линии, замкнутый с обеих сторон; *2* — элемент индуктивной связи

Из формулы (12.3) следует, что замкнутый с двух сторон отрезок линии передачи в отличие от обычного колебательного контура имеет бесконечное множество резонансных длин волн, определяемых по формуле

$$\lambda_{0\text{рез}}=2l/p. \tag{12.4}$$

Физически такая множественность резонансов соответствует тому, что вдоль линии могут укладываться одна, две, три и т. д. стоячие полуволны.

Пользуясь описанным принципом, можно создавать объемные резонаторы в виде отрезков прямоугольного или круглого металлического волновода с короткозамыкающими стенками с обоих концов. Явления в таких резонаторах несколько сложнее, чем в короткозамкнутом отрезке двухпроводной линии, поскольку стоячие волны могут устанавливаться по всем трем координатным осям.

12.2. Прямоугольный объемный резонатор

Здесь на простейшем примере будет рассмотрен метод, позволяющий рассчитать резонансную длину волны и структуру электромагнитного поля в объемном резонаторе, образованном отрезком прямоугольного волновода.

Рассмотрим отрезок прямоугольного волновода сечением $a \times b$, ограниченный двумя металлическими торцевыми поверхностями, которые располагаются в сечениях $z=0$ и $z=l$ (рис. 12.4). Подобная замкнутая металлическая полость представляет собой прямоугольный объемный резонатор. Исследуем один из частных видов собственных колебаний данного резонатора, руководствуясь следующими соображениями. Пусть по неограниченно протяженному прямоугольному волноводу распространяется основная волна типа H_{10}, которую условно будем называть падающей. Эта волна движется в сторону возрастания координаты z и характеризуется единственной y-й составляющей вектора напряженности электрического поля с комплексной амплитудой

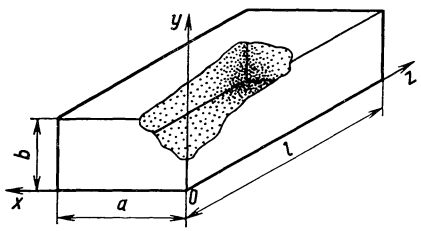


Рис. 12.4. Прямоугольный объемный резонатор

$$\dot{E}_{y\,\text{пад}} = E_{\max} \sin(\pi x/a)\, e^{-jhz}. \tag{12.5}$$

Наличие торцевых плоскостей приводит к возникновению отраженной волны, для которой

$$\dot{E}_{y\,\text{отр}} = AE_{\max} \sin(\pi x/a)\, e^{jhz}, \tag{12.6}$$

где A — не известный пока амплитудный коэффициент.

Если учесть, что при $z=0$ суммарное электрическое поле с проекцией $\dot{E}_y = \dot{E}_{y\,\text{пад}} + \dot{E}_{y\,\text{отр}}$ должно обратиться в нуль из-за граничного условия на идеальном проводнике, то, как нетрудно видеть, $A=-1$. Отсюда, используя формулу Эйлера для суммы двух экспоненциальных функций с мнимыми показателями, получим

$$\dot{E}_y = -j2E_{\max} \sin(\pi x/a) \sin hz. \tag{12.7}$$

Согласно данному равенству, рассматриваемый электромагнитный процесс является двумерной стоячей волной, которая существует как по оси x, так и по оси z; вдоль координаты y напряженность электрического поля постоянна. Однако длина стоячей волны по оси z пока не определена, поскольку никаких требований по отношению к продольному волновому числу h пока не предъявлено.

Эти требования естественным образом вытекают из граничных условий на другой торцевой плоскости:

$$\dot{E}_y = 0 \text{ при } z = l, \tag{12.8}$$

откуда

$$hl = p\pi, \tag{12.9}$$

где по-прежнему p — любое целое положительное число, исключая нуль.

Значение продольного волнового числа, удовлетворяющее равенству (12.9), будем называть *резонансным значением*:

$$h_{\text{рез}} = p\pi/l. \tag{12.10}$$

Отсюда легко перейти к резонансному значению длины волны в волноводе

$$\lambda_{\text{в рез}} = 2\pi/h_{\text{рез}} = 2l/p, \tag{12.11}$$

а затем, воспользовавшись дисперсионным соотношением для волны типа H_{10} в прямоугольном волноводе

$$1/\lambda_{\text{в}}^2 = 1/\lambda_0^2 - 1/(4a^2),$$

вычислить резонансное значение длины волны генератора:

$$\lambda_{0\text{рез}} = 2/\sqrt{(1/a)^2 + (p/l)^2}. \tag{12.12}$$

Пример 12.1. Определить, какова должна быть длина l закороченного с обоих концов отрезка прямоугольного волновода сечением 23×10 мм, если известно, что при резонансной длине волны $\lambda_{0\,\text{рез}} = 3.4$ см вдоль его оси укладываются три стоячие полуволны, т. е. $p = 3$.

Равенство (12.12) можно разрешить относительно l и получить

$$l = p/\sqrt{(4/\lambda_{0\text{рез}}^2) - (1/a^2)}\,.$$

Подставляя сюда исходные числовые данные, находим $l = 7.57$ см.

Подведем некоторые предварительные итоги.

● Для прямоугольной полости с идеально проводящими стенками решения уравнения Гельмгольца вида (12.7) существуют не при любом значении длины волны возбуждающего источника, а лишь при таких длинах волн, которые удовлетворяют резонансному условию (12.12).

● Каждому допустимому значению целочисленного индекса p соответствуют своя резонансная длина волны и своя характерная структура пространственного распределения векторов электромагнитного поля, представляющая собой тип колебаний в прямоугольном объемном резонаторе. В физике типы колебаний в резонаторах, как, впрочем, и типы волн в волноводах часто называют *модами* соответствующих распределенных систем (от латин. modus — образ).

● Типы колебаний в прямоугольном объемном резонаторе можно классифицировать. Далее этот вопрос будет подробно изучен в § 12.3. Здесь укажем лишь, что рассмотренная совокупность мод может быть обозначена как H_{10p}. Такая символика показывает, что поле в объемном резонаторе порождается волноводной волной типа H_{10}, а вдоль оси z укладывается p стоячих полуволн.

Структура электромагнитного поля. Удобнее всего проследить структуру поля в резонаторе на примере простейшей моды H_{101}. Здесь, очевидно, пространственное распределение напряженности электрического поля описывается формулой

$$\dot{E}_y = E_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi z/l), \tag{12.13}$$

где E_0 — произвольный амплитудный множитель. Магнитное поле в резонаторе находим непосредственно на основании второго уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu_0 \dot{\mathbf{H}},$$

из которого после подстановки (12.13) вытекают формулы для всех трех проекций:

$$\dot{H}_x = \frac{-jE_0\pi}{\omega\mu_0 l} \sin(\pi x/a) \cos(\pi z/l),$$

$$\dot{H}_y = 0, \tag{12.14}$$

$$\dot{H}_z = \frac{jE_0\pi}{\omega\mu_0 a} \cos(\pi x/a) \sin(\pi z/l).$$

Необходимо обратить внимание на следующее важное обстоятельство: комплексные амплитуды обеих проекций магнитного вектора содержат мнимые единицы, в то время как комплексная амплитуда единственной отличной от нуля проекции электрического вектора чисто действительна. Это говорит о том, что между мгновенными значениями напряженностей электрического и магнитного полей в резонаторе существует сдвиг фаз по времени на угол 90°. Поэтому в объемном резонаторе, как и в любой другой электромагнитной колебательной системе, происходит непрерывный обмен энергией между электрическим и магнитным полями. Дваж-

ды за период собственных колебаний вся энергия электрического поля переходит в энергию магнитного поля и наоборот. Сказанное иллюстрируется мгновенными картинами распределения силовых линий электромагнитного поля в объемном резонаторе с типом колебаний H_{101} (рис. 12.5). Картины построены для различных моментов времени в пределах половины периода.

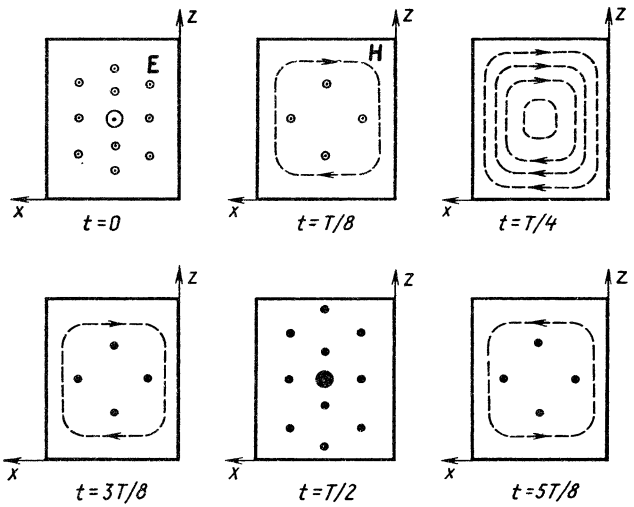


Рис. 12.5. Структура электромагнитного поля для колебания типа H_{101} в последовательные моменты времени

Отметим также, что среднее значение вектора Пойнтинга, образованного полями вида (12.13) и (12.14), тождественно равно нулю. Отсутствие усредненного потока энергии через идеальный резонатор говорит об автономном, не зависящем от параметров внешних устройств характере собственных колебаний в такой электродинамической системе. На языке теории электрических цепей энергию, запасенную в резонаторе, можно назвать реактивной энергией.

12.3. Общая задача о собственных колебаниях в прямоугольном объемном резонаторе. Классификация типов колебаний

Рассмотрим всю совокупность собственных колебаний различных типов в замкнутой полости прямоугольной формы с идеально проводящими стенками. Для этого вновь обратимся к рис. 12.4 и положим, что ось z является осью стоячей волны, а в попереч-

ной плоскости XOY устанавливается распределение поля, отвечающее волне типа E_{mn} прямоугольного волновода. Как уже говорилось, резонансное значение длины волны в волноводе зависит от целочисленного параметра p — числа стоячих полуволн вдоль продольной оси резонатора: $\lambda_{в\,рез}=2l/p$. С другой стороны, величины $\lambda_{в\,рез}$ и $\lambda_{0\,рез}$ связаны общим дисперсионным соотношением

$$1/\lambda^2_{0рез}=1/\lambda^2_{в\,рез}+1/\lambda^2_{кр}. \qquad (12.15)$$

Поскольку волна типа E_{mn} имеет критическую длину

$$\lambda_{кр}=2/\sqrt{(m/a)^2+(n/b)^2}, \qquad (12.16)$$

из равенства (12.15) получаем формулу для расчета резонансной длины волны колебания типа E_{mnp} в прямоугольном объемном резонаторе

$$\lambda_{0рез}=\frac{2}{\sqrt{(m/a)^2+(n/b)^2+(p/b)^2}}. \qquad (12.17)$$

В практических расчетах часто используют также соответствующую резонансную частоту

$$f_{рез}=\frac{c}{\lambda_{0рез}}=\frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{p}{l}\right)^2}. \qquad (12.18)$$

Если допустить, что по прямоугольному волноводу распространяется волна типа H_{mn}, то аналогичным образом в замкнутой полости возникают колебания типа H_{mnp}. Совершенно очевидно, что их резонансные длины волн и резонансные частоты определяются выражениями (12.17) и (12.18).

Пример 12.2. Прямоугольный объемный резонатор заполнен воздухом и имеет следующие размеры: $a=36$ мм, $b=22$ мм, $l=65$ мм. Определить резонансную длину волны для колебания типа E_{112}.

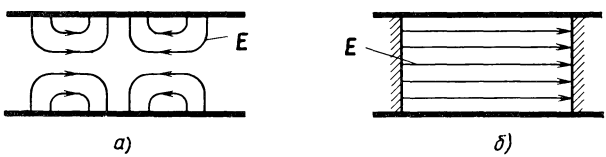
В данном случае $m=1$, $n=1$, $p=2$. Подставив эти числа вместе с заданными размерами ребер в формулу (12.17), получаем

$$\lambda_{0рез}=\frac{2}{\sqrt{(1/36)^2+(1/22)^2+(2/65)^2}}=32.5\text{ мм}.$$

Следует отметить, что в выражения (12.17) и (12.18) размеры a, b и l, относящиеся к осям x, y и z соответственно, входят совершенно равноправно. Поскольку известно, что некоторые индек-

сы типов волн в волноводе могут быть равны нулю, возникает вопрос о том, существуют ли резонаторные моды с индексом $p=0$.

Если $p=0$, то поле в резонаторе не меняется вдоль оси z. Обратимся к волноводной волне типа E_{mn}. Здесь силовые линии электрического вектора в продольном разрезе имеют конфигурацию, показанную на рис. 12.6, *а* для случая $n=1$. Данный рисунок отвечает случаю, когда рассматриваемый тип волны является распространяющимся, т. е. $\lambda_0<\lambda_{кр}$. Если же значение λ_0 стремится к $\lambda_{кр}$, то длина волны в волноводе стремится к бесконечности и



а) *б)*

Рис. 12.6. К вопросу о существовании колебаний типа E_{mn0}

силовые линии вектора напряженности электрического поля приобретают вид «нитей», параллельных оси z (рис. 12.6, *б*). В пределе при $\lambda=\lambda_{кр}$ электрический вектор имеет лишь z-ю составляющую и граничные условия на двух идеально проводящих торцевых стенках резонатора выполняются автоматически независимо от расстояния l между ними. Таким образом, моды типа E_{mn0} в прямоугольном объемном резонаторе возможны.

Обратимся теперь к колебаниям Н-типа. Здесь исходная волна типа H_{mn} в волноводе, по определению, имеет электрические векторы, лежащие лишь в поперечной плоскости. Если все составляющие векторов поля не будут меняться вдоль оси z, как это должно быть в случае резонаторной моды типа H_{mn0}, то поле в любой точке резонатора должно обратиться в нуль, поскольку граничные условия на стенках с координатами $z=0$ и $z=l$ выполняться не могут. Таким образом, в прямоугольном объемном резонаторе колебания типа H_{mn0} физически не существуют.

Итак, классификация типов колебаний в прямоугольном объемном резонаторе включает в себя следующие этапы:

- одна из осей резонатора принимается за продольную ось регулярного прямоугольного волновода;
- устанавливается, какой тип волны, E_{mn} или H_{mn}, существует в таком волноводе;
- определяется значение индекса p — число стоячих полуволн, которые укладываются между торцевыми стенками.

Следует заметить, что такой принцип классификации в значительной степени условен, так как связан с произвольным выбором

продольной оси регулярного прямоугольного волновода. Чтобы уяснить это, обратимся к рис. 12.7, *а*, на котором изображена уже знакомая картина силовых линий векторов электромагнитного поля для колебания типа H_{101}. Если теперь резонатор повернуть в пространстве таким образом, чтобы ребро с размером l было ориентировано вдоль оси y (рис. 12.7, *б*), то этот же самый электромагнитный процесс должен быть назван колебанием типа E_{110}. Легко проверить, что резонансные длины волн для обоих названных типов колебаний одинаковы.

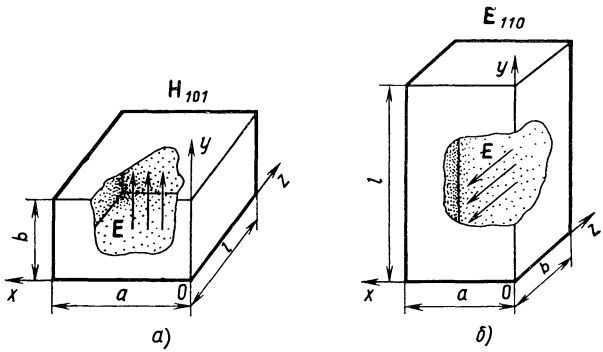


Рис. 12.7. К вопросу об условном характере классификации типов колебаний в прямоугольном объемном резонаторе

Понятие основного типа колебаний. На практике обычно стремятся к тому, чтобы при заданной резонансной частоте геометрические размеры колебательной системы были минимальными. Этого удается достичь возбудив в резонаторе колебание *основного* (*низшего*) *типа*. Так принято называть моду с наибольшей резонансной длиной волны при фиксированных размерах резонансной полости.

Индексы m, n, p для основного типа колебаний, очевидно, должны подбираться так, чтобы предельно уменьшить знаменатель в формуле (12.7). Ясно, что один из индексов при этом должен быть равен нулю, а два оставшихся — единице. Нулевой индекс соответствует той декартовой оси, вдоль которой ориентировано ребро с наименьшей длиной.

Пример 12.3. Прямоугольный объемный резонатор размещен в декартовой системе координат так, как показано на рис. 12.4. Резонатор имеет размеры: $a=40$ мм, $b=25$ мм, $l=15$ мм. Опреде-

лить, какая мода является основной, и вычислить соответствующую резонансную длину волны.

В соответствии со сказанным индекс $p=0$ должен соответствовать самому короткому ребру длиной 15 мм. Поэтому основным будет колебание типа E_{110}, для которого

$$\lambda_{0\text{рез}}=2/\sqrt{(1/40)^2+(1/25)^2}=42.4 \text{ мм}.$$

Следует отметить, что в объемных резонаторах могут существовать *вырожденные моды*, у которых резонансные длины волн совпадают, несмотря на то что структуры поля совершенно различны. Примером могут служить колебания типов E_{351} и H_{135} в резонаторе кубической формы.

Структура электромагнитного поля в прямоугольном резонаторе. Строгий подход к проблеме собственных колебаний электромагнитного поля в замкнутой полости прямоугольной формы с идеально проводящими стенками основан на поиске комплекснозначной функции $\dot{\mathbf{E}}(x, y, z)$, которая удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2\dot{\mathbf{E}}+\beta_0^2\dot{\mathbf{E}}=0 \qquad (12.19)$$

во всех внутренних точках резонатора. Это векторное уравнение есть сокращенная форма записи трех скалярных уравнений относительно декартовых проекций $\dot{E}_\alpha$ (символом α обозначены x, y или z):

$$\frac{\partial^2\dot{E}_\alpha}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\dot{E}_\alpha}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\dot{E}_\alpha}{\partial z^2}+\beta_0^2\dot{E}_\alpha=0. \qquad (12.20)$$

Проведенное ранее исследование наводит на мысль о том, что среди всевозможных решений таких уравнений должны быть особо выделены функции вида трехмерных стоячих волн

$$\dot{E}_\alpha\sim\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \qquad (12.21)$$

со всевозможными комбинациями трех гармонических сомножителей. Прямая подстановка выражения (12.21) в уравнение (12.20) приводит к следующему выводу: уравнение Гельмгольца для резонатора имеет решение не при любом значении коэффициента фазы β_0, а лишь в том случае, когда этот параметр принадлежит дискретной совокупности, определяемой выражением

$$\beta_0^2=\left(\frac{2\pi}{\lambda_{0\text{рез}}}\right)^2=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2, \qquad (12.22)$$

где m, n, p — положительные целые числа, не равные нулю одновременно. Отсюда естественным образом вытекает полученное ранее соотношение для расчета резонансных длин волн вида (12.17).

Теперь учтем, что на идеально проводящих стенках резонатора касательные составляющие электрического вектора должны обратиться в нуль. В развернутой форме это требование означает, что

$$\begin{aligned}
&\dot{E}_x=0 \text{ при } y=0,\ y=b,\ z=0,\ z=l;\\
&\dot{E}_y=0 \text{ при } x=0,\ x=a,\ z=0,\ z=l;\\
&\dot{E}_z=0 \text{ при } x=0,\ x=a,\ y=0,\ y=b.
\end{aligned} \tag{12.23}$$

Равенства (12.23) позволяют конкретизировать допустимые решения и записать их так:

$$\begin{aligned}
\dot{E}_x&=A\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right),\\
\dot{E}_y&=B\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right),\\
\dot{E}_z&=C\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{d}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right),
\end{aligned} \tag{12.24}$$

где A, B, C — не известные пока коэффициенты.

Далее следует принять во внимание то, что проекции электрического вектора внутри резонатора обязаны не только удовлетворять уравнению Гельмгольца (12.20), но и соответствовать векторному полю без источников, для которого

$$\operatorname{div}\dot{\mathbf{E}}=\frac{\partial\dot{E}_x}{\partial x}+\frac{\partial\dot{E}_y}{\partial y}+\frac{\partial\dot{E}_z}{\partial z}=0. \tag{12.25}$$

Подставив выражения (12.24) в формулу (12.25), приходим к выводу о том, что между амплитудными коэффициентами должна существовать линейная связь

$$A\frac{m}{a}+B\frac{n}{b}+C\frac{p}{l}=0. \tag{12.26}$$

Будем рассматривать поле колебания типа E_{mnp}, для которого $\dot{H}_z=0$ или в соответствии со вторым уравнением Максвелла

$$\frac{\partial\dot{E}_y}{\partial x}-\frac{\partial\dot{E}_x}{\partial y}=0.$$

Отсюда получаем еще одно уравнение связи

$$B\frac{m}{a}-A\frac{n}{b}=0. \tag{12.27}$$

Решая систему алгебраических уравнений (12.26) и (12.27) относительно неизвестных A и B, получаем

$$A=-C\frac{pm}{al\left[(m/a)^2+(n/b)^2\right]},$$
$$B=-C\frac{pn}{bl\left[(m/a)^2+(n/b)^2\right]}. \qquad (12.28)$$

Итак, комплексные амплитуды проекций вектора напряженности электрического поля для колебания типа E_{mnp} в прямоугольном объемном резонаторе имеют вид

$$\dot{E}_x=-C\frac{pm}{al\left[(m/a)^2+(n/b)^2\right]}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \qquad (12.29)$$

$$\dot{E}_y=-C\frac{pn}{bl\left[(m/a)^2+(n/b)^2\right]}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right),$$

$$\dot{E}_z=C\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right),$$

где C — произвольный амплитудный коэффициент.

Комплексные амплитуды декартовых проекций магнитного вектора

$$\dot{H}_x=jC\frac{n}{b}\frac{\omega_{\text{рез}}\varepsilon_0}{\pi}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \qquad (12.30)$$

$$\dot{H}_y=-jC\frac{m}{a}\frac{\omega_{\text{рез}}\varepsilon_0}{\pi}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right),$$

$$\dot{H}_z=0.$$

Проекции векторов электромагнитного поля для резонаторных мод типа H_{mnp} находят аналогичным способом.

12.4. Круглый объемный резонатор

Рассмотрим цилиндрический объем, образованный отрезком круглой металлической трубы радиусом a; отрезок имеет длину l и ограничен с обеих сторон проводящими торцевыми стенками (рис. 12.8). Такая система представляет собой круглый объемный резонатор. Поставим задачу найти полную совокупность резонансных частот данной колебательной системы.

Внутри регулярного круглого волновода могут распространяться волны типа E_{mn} и H_{mn}. Длина волны в волноводе $\lambda_в$ связана с

длиной волны в свободном пространстве λ_0 посредством дисперсионного уравнения

$$1/\lambda_0^2 = 1/\lambda_в^2 + 1/\lambda_{кр}^2,$$

которое справедливо для волны любого типа. Как известно, критические длины волн связаны с радиусом волновода и с корнями функций Бесселя или их производной:

$$\lambda_{кр E_{mn}} = 2\pi a/\nu_{mn}; \qquad \lambda_{кр H_{mn}} = 2\pi a/\mu_{mn}.$$

На каждой резонансной частоте вдоль оси колебательной системы должно укладываться целое число стоячих полуволн, т. е. обязано выполняться равенство $\lambda_{в\,рез} = 2l/p$, где $p = 1, 2, 3, \ldots$ — целое положительное число. При анализе прямоугольного объемного резонатора было, кроме того, показано, что возможны моды с индексом $p = 0$, у которых амплитуды полей неизменны вдоль оси z, а стоячие волны возникают в поперечном сечении. Таким образом, из дисперсионного уравнения вытекают следующие формулы для расчета резонансных длин волн в круглом резонаторе:

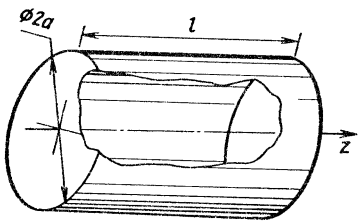


Рис. 12.8. Круглый объемный резонатор

колебания типа E_{mnp}

$$\lambda_{0рез} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\nu_{mn}}{2\pi a}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2}}; \qquad (12.31)$$

колебания типа H_{mnp}

$$\lambda_{0рез} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\mu_{mn}}{2\pi a}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2}}. \qquad (12.32)$$

Ответ на вопрос о возможности существования мод с нулевым значением индекса p таков же, как и в случае прямоугольного объемного резонатора: типы колебаний E_{mn0} возможны, а типов H_{mn0} не существует.

Основной тип колебаний. Из формул (12.31) и (12.32) видно, что резонансная длина волны тем больше, чем меньше корень ν_{mn} (или μ_{mn}) и индекс p. Поэтому основной (низшей) модой в круглом объемном резонаторе может оказаться либо тип колебаний H_{111} ($\mu = 1.841$, $p = 1$), либо тип E_{010} ($\nu_{01} = 2.405$, $p = 0$). Резо-

нансные длины волн указанных типов колебаний становятся одинаковыми при длине l, которая служит корнем уравнения

$$\left(\frac{\nu_{01}}{2\pi a}\right)^2=\left(\frac{\mu_{11}}{2\pi a}\right)^2+\left(\frac{1}{2l}\right)^2,$$

т. е. при $l=2.03a$. В более «длинных» резонаторах основной модой оказывается H_{111}, а в более «коротких» — E_{010}.

Структура электромагнитного поля. Чтобы определить пространственное распределение векторов поля внутри круглого резонатора, требуется решить краевую задачу для векторного уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2\dot{\mathbf{E}}+\beta_0^2\dot{\mathbf{E}}=0 \qquad (12.33)$$

с очевидным граничным условием $\dot{\mathbf{E}}_\tau=0$ на идеально проводящих стенках резонатора при дополнительном условии $\operatorname{div}\dot{\mathbf{E}}=0$.

Действуя так же, как и ранее, приходим к выводу о том, что данная краевая задача имеет ненулевые решения не при любых значениях β_0, а лишь при таких, которые вытекают из формул (12.31) или (12.32).

Приведем окончательные формулы, по которым рассчитывают пространственные распределения комплексных амплитуд проекций векторов поля:

колебания типа E_{mnp}

$$\dot{E}_r=-C\frac{\nu_{mn}}{a}\frac{p\pi}{l}J'_m\left(\frac{\nu_{mn}r}{a}\right)\cos m\varphi\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right),$$

$$\dot{E}_\varphi=C\frac{mp\pi}{rl}J_m\left(\frac{\nu_{mn}r}{a}\right)\sin m\varphi\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right),$$

$$\dot{E}_z=C\left(\frac{\nu_{mn}}{a}\right)^2J_m\left(\frac{\nu_{mn}r}{a}\right)\cos m\varphi\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \qquad (12.34)$$

$$\dot{H}_r=-mC\frac{j\omega_{\text{рез}}\varepsilon_0}{r}J_m\left(\frac{\nu_{mn}r}{a}\right)\sin m\varphi\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right),$$

$$\dot{H}_\varphi=-j\omega_{\text{рез}}C\varepsilon_0\frac{\nu_{mn}}{a}J'_m\left(\frac{\nu_{mn}r}{a}\right)\cos m\varphi\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right),$$

$$\dot{H}_z=0;$$

колебания типа H_{mnp}

$$\dot{E}_r=mC\frac{j\omega_{\text{рез}}\mu_0}{r}J_m\left(\frac{\mu_{mn}r}{a}\right)\sin m\varphi\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right),$$

$$\dot{E}_\varphi=j\omega_{\text{рез}}C\mu_0\frac{\mu_{mn}}{a}J'_m\left(\frac{\mu_{mn}r}{a}\right)\cos m\varphi\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \qquad (12.35)$$

$$\dot{E}_z=0,$$

$$\dot{H}_r = C\frac{\mu_{mn}}{a}\frac{p\pi}{l}J'_m\left(\frac{\mu_{mn}r}{a}\right)\cos m\varphi\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right),$$

$$\dot{H}_\varphi = -C\frac{mp\pi}{rl}J_m\left(\frac{\mu_{mn}r}{a}\right)\sin m\varphi\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right),$$

$$\dot{H}_z = C\left(\frac{\mu_{mn}}{a}\right)^2 J_m\left(\frac{\mu_{mn}r}{a}\right)\cos m\varphi\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right).$$

В формулах (12.34) и (12.35) коэффициент C является произвольным амплитудным множителем.

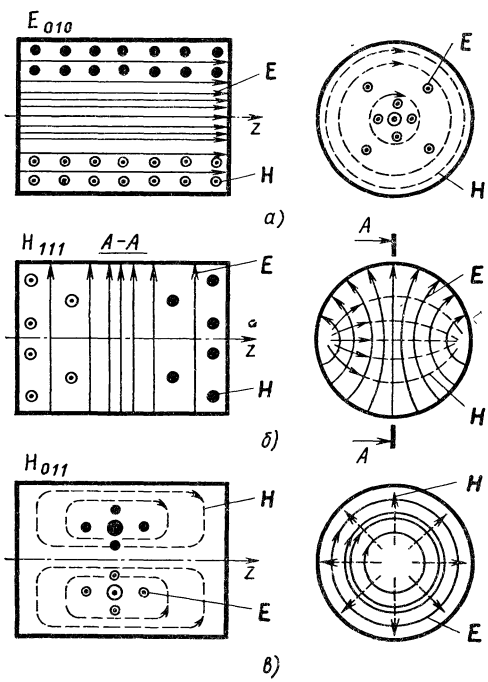


Рис. 12.9. Структура электромагнитного поля для некоторых типов колебаний в круглом объемном резонаторе:
а — для колебания E_{010}; *б* — для колебания H_{111}; *в* — для колебания H_{011}

На рис. 12.9, *а*, *б*, *в* изображены картины силовых линий векторов поля для некоторых часто применяемых типов колебаний в круглом объемном резонаторе. Силовые линии электрического вектора в моде E_{010} имеют вид «пучка» с максимумом интенсивности на оси; силовые линии магнитного вектора имеют вид концентрических колец. Структура полей типов колебаний H_{111} и H_{011} такова, что вдоль оси резонатора укладывается одна стоячая полуволна.

Следует еще раз подчеркнуть, что приведенные здесь картины полей относятся к некоторому фиксированному моменту времени, в который электрическое и магнитное поля не равны нулю.

12.5. Некоторые способы возбуждения и включения объемных резонаторов

Объемный резонатор на практике всегда должен быть тем или иным образом связан с внешними устройствами. При этом особые конструктивные элементы связи осуществляют возбуждение резо-

натора. Среди разнообразных способов возбуждения выделим три, чаще всего применяемые в радиотехнике сверхвысоких частот.

Возбуждение при помощи штыря. При данном способе внутрь резонатора через отверстие в стенке вводят миниатюрную штыревую антенну, длина которой существенно меньше рабочей длины волны. Такой антенной может служить, например, отрезок внутреннего проводника коаксиального кабеля (рис. 12.10). Для эффективного возбуждения резонатора необходимо, зная структуру

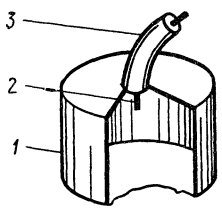


Рис. 12.10. Возбуждение объемного резонатора при помощи штыря:
1 — резонатор; *2* — возбуждающий штырь; *3* — коаксиальный кабель

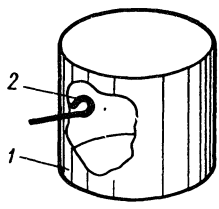


Рис. 12.11. Возбуждение объемного резонатора при помощи петли:
1 — резонатор; *2* — петля

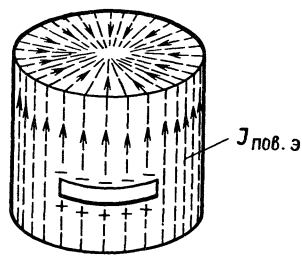


Рис. 12.12. Излучающая щель на стенках круглого резонатора с колебанием типа E_{010}

электромагнитного поля возбуждаемой моды, расположить штырь так, чтобы он был параллелен силовым линиям вектора напряженности электрического поля. Подбирая местоположение штыря и его ориентацию, можно добиться максимума скалярного произведения $\dot{J}_{ст.э}\dot{E}$, где $\dot{J}_{ст.э}$ — комплексная амплитуда вектора плотности стороннего электрического тока в штыревой антенне. При этом в соответствии с энергетическими свойствами электромагнитного поля (см. гл. 2) поток мощности от внешнего источника колебаний внутрь резонатора будет наибольшим.

Необходимо заметить, что процесс возбуждения резонатора всегда является взаимным — мощность можно с равным успехом как подводить к резонатору извне, так и отбирать из него во внешние цепи.

Возбуждение при помощи петли. Другим элементом возбуждения резонатора может быть небольшая петля, по которой протекает переменный ток (рис. 12.11). Амплитуда колебаний, возбужденных в резонаторе, будет наибольшей в том случае, когда плоскость петли в максимальной степени пронизывается магнитным потоком поля резонатора. Возбуждающую петлю следует располагать там, где силовые линии вектора напряженности магнитного поля имеют наибольшую «густоту».

Возбуждение при помощи щели. Если в стенке резонатора имеется узкая щель, перерезающая линии поверхностного тока, то такая щель излучает электромагнитные волны. Она может служить элементом связи между объемным резонатором и внешними устройствами, например волноводными линиями передачи. На рис. 12.12 изображена одна из возможных излучающих щелей, прорезанная в стенке объемного резонатора с колебанием типа E_{010}.

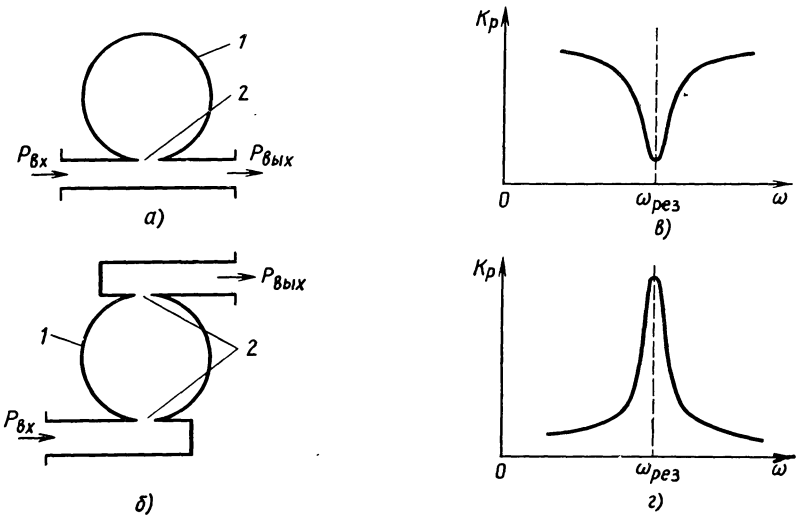


Рис. 12.13. Два способа включения объемного резонатора в волноводный тракт:
1 — резонатор; *2* — отверстие связи

Такие вопросы теории возбуждения электродинамических колебательных систем, как учет влияния возбуждающего элемента на частоту собственных колебаний или построение эквивалентной схемы нагруженного резонатора, математически достаточно сложны и здесь не рассматриваются. Читатель, желающий углубленно изучить этот раздел прикладной электродинамики, может обратиться к литературным источникам [5, 13].

Способы включения объемных резонаторов. Выделим два типичных способа соединения объемного резонатора с внешними СВЧ-цепями. При первом, так называемом *адсорбционном,* способе (рис. 12.13, *а*) в окрестности резонансной частоты происходит более или менее интенсивный отбор мощности из той линии передачи, к которой, подобно двухполюснику, подсоединен резонатор. Как следствие, на резонансной частоте коэффициент передачи мощности $K_P(\omega) = P_{вых}/P_{вх}$ имеет четко выраженный минимум (*в*).

Второй способ включения объемного резонатора называют *проходным* (рис. 12.13, *б*). Здесь резонатор имеет два элемента связи с внешними цепями и используется как четырехполюсник. На резонансной частоте используемого типа колебаний коэффициент передачи мощности проходного резонатора максимален (*г*). В радиотехнических устройствах резонатор, включенный по проходной схеме, выполняет роль полосового частотного фильтра.

12.6. Добротность объемных резонаторов

Частотная селекция сигналов — одна из важнейших технических функций объемного резонатора. Качество частотно-избирательных систем, которые с точки зрения формы АЧХ в окрестности резонансной частоты схожи с простым колебательным контуром, принято характеризовать особым параметром — так называемой *добротностью*

$$Q = f_{\text{рез}}/\Pi_{0.707}. \qquad (12.36)$$

Здесь $\Pi_{0.707}$ — полоса пропускания по уровню $0.707 = 1/\sqrt{2}$ от максимального значения АЧХ, которое наблюдается на резонансной частоте $f_{\text{рез}}$.

Выведем общую формулу для расчета добротности объемного резонатора, работающего на некотором заданном типе колебаний. Будем исходить из того, что в соответствии с общефизическим принципом после того, как в момент времени $t=0$ возбуждающий источник отключается, амплитуда собственных колебаний в резонаторе будет уменьшаться во времени по экспоненциальному закону. При этом, например,

$$E(t) = E_0 e^{-t/\tau} \cos \omega_{\text{рез}} t, \qquad (12.37)$$

где $E(t)$ — любая из трех декартовых проекций вектора напряженности электрического поля, E_0 — амплитуда колебаний в начальный момент времени, τ — так называемая *постоянная времени* колебательной системы. Известно [2], что между параметрами τ и $\omega_{\text{рез}}$ существует связь

$$\tau = 2Q/\omega_{\text{рез}}. \qquad (12.38)$$

Пусть $W_{\text{зап}}$ — начальный запас энергии в резонаторе при $t=0$. Спустя один период собственных колебаний, т. е. при $t = 2\pi/\omega_{\text{рез}}$, амплитуда поля уменьшится до уровня

$$E_0 \exp[-2\pi/(\omega_{\text{рез}}\tau)] = E_0 \exp(-\pi/Q).$$

Так как запасенная энергия пропорциональна квадрату амплитуд векторов поля, то вследствие потерь за один период собственных колебаний в резонаторе будет рассеяна энергия

$$W_{\text{потT}} = W_{\text{зап}}[1 - \exp(-2\pi/Q)]. \qquad (12.39)$$

Данную формулу можно упростить, заметив, что применяемые в радиотехнике резонаторы высокодобротны ($Q \gg 1$) и поэтому $\exp(-2\pi/Q) \approx 1-2\pi/Q$. Тогда с достаточной для практики точностью

$$W_{\text{пот}T} = 2\pi W_{\text{зап}}/Q,$$

откуда

$$Q = 2\pi W_{\text{зап}}/W_{\text{пот}T}. \tag{12.40}$$

Энергию потерь за один период собственных колебаний удобно связать со средней мощностью потерь

$$W_{\text{пот}T} = TP_{\text{ср.пот}} = 2\pi P_{\text{ср.пот}}/\omega_{\text{рез}}.$$

Подставив это выражение в (12.40), получим

$$Q = \omega_{\text{рез}} W_{\text{зап}}/P_{\text{ср.пот}}. \tag{12.41}$$

Следует отметить, что данная формула относится не только к моменту времени $t=0$, но и к любому моменту времени.

Конкретизируем равенство (12.41) для наиболее распространенного частного случая, когда объемный резонатор заполнен воздухом, а единственным источником потерь является неидеальность проводимости металлических стенок. Энергию, запасенную в резонаторе, можно найти проинтегрировав по объему квадраты амплитудных значений электрического или магнитного векторов:

$$W_{\text{зап}} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V E^2\,dV = \frac{\mu_0}{2}\int_V H^2\,dV. \tag{12.42}$$

Мощность потерь, приходящаяся на 1 м^2 поверхности металлических стенок, была определена ранее в гл. 11 при расчете затухания в волноводах. Численно эта мощность совпадает с модулем усредненного вектора Пойнтинга потерь [см. формулу (11.13)]:

$$|\Pi_{\text{ср.пот.}}| = {}^1/_2 \operatorname{Re} Z_{c\text{м}} |\dot{\mathbf{H}}_{\tau\text{м}}|^2 = \sqrt{\omega\mu_0/(8\sigma)}\,|\dot{\mathbf{H}}_{\tau\text{м}}|^2,$$

откуда

$$P_{\text{ср.пот}} = \sqrt{\omega\mu_0/(8\sigma)}\int_S |\dot{\mathbf{H}}_{\tau\text{м}}|^2\,dS, \tag{12.43}$$

где интегрирование ведется по замкнутой поверхности металлических стенок резонатора. На основании равенств (12.42) и (12.43) формулу (12.41) можно записать следующим образом:

$$Q = \frac{\sqrt{2\omega_{\text{рез}}\mu_0\sigma}\int_V H^2\,dV}{\int_S |\dot{\mathbf{H}}_{\tau\text{м}}|^2\,dS}. \tag{12.44}$$

Здесь $\omega_{\text{рез}}$ — резонансная частота рассматриваемой моды.

Некоторые частные случаи. Выведем формулу для расчета добротности колебания типа E_{010} в круглом объемном резонаторе, который имеет радиус a и осевую длину l. Будем исходить из того, что здесь магнитный вектор имеет лишь азимутальную составляющую с комплексной амплитудой

$$\dot{H}_\varphi(r) = H_0 J_1(\nu_{01} r/a), \tag{12.45}$$

где H_0 — произвольный множитель.

Электромагнитное поле колебания типа E_{010} неизменно вдоль оси z, так что интеграл, входящий в числитель формулы (12.44), сводится к интегралу Ломмеля (см. гл. 9):

$$\int_V H^2 \, dV = 2\pi l H_0^2 \int_0^a J_1^2\left(\frac{\nu_{01} r}{a}\right) r \, dr = \pi l a^2 H_0^2 J_1^2(\nu_{01}). \tag{12.46}$$

В то же время числитель указанной формулы представляет собой сумму интеграла по боковой поверхности резонатора и двух одинаковых интегралов по торцевым стенкам:

$$\int_S |\dot{\mathbf{H}}_{\tau M}|^2 \, dS = H_0^2 J_1^2(\nu_{01}) \, 2\pi a l + H_0^2 J_1^2(\nu_{01}) \, 2\pi a^2 =$$

$$= 2\pi a (l + a) H_0^2 J_1^2(\nu_{01}). \tag{12.47}$$

Подставив эти промежуточные результаты в (12.44), имеем

$$Q_{E_{010}} = \frac{\sqrt{\omega_{рез} \mu_0 \sigma} \, l a}{\sqrt{2}\,(l + a)}. \tag{12.48}$$

При практических расчетах целесообразно воспользоваться тем, что для моды E_{010} в круглом резонаторе $\lambda_{0\,рез} = 2.61a$, $\omega_{рез} = 2\pi c/\lambda_{0\,рез} = 2.405c/a$. С учетом этого формула (12.48) запишется так:

$$Q_{E_{010}} = 21.3 \sqrt{\sigma} \, \frac{\sqrt{a}\, l}{a + l}, \tag{12.49}$$

где все размеры даны в метрах.

Пример 12.4. Круглый резонатор с колебанием типа E_{010} выполнен из меди, заполнен воздухом и имеет размеры $a = 38.4$ мм, $l = 40$ мм. Вычислить ширину полосы пропускания по уровню 0.707 от максимального значения АЧХ.

Данная колебательная система имеет резонансную частоту $f_{рез} = c/\lambda_{0\,рез} = c/(2.61a) = 3 \cdot 10^9$ Гц $= 3$ ГГц. На основании формулы (12.49) добротность

$$Q_{E_{010}}=21.3\,(5.7\cdot 10^{7})^{1/2}\,\frac{40\,(38.4\cdot 10^{-3})^{1/2}}{38.4+40}=16\,080.$$

Отсюда полоса пропускания резонатора

$$\Pi_{0.707}=3\cdot 10^{9}/16\,080\approx 187\ \text{кГц}.$$

Как видно из приведенного примера, добротность объемного резонатора может составлять несколько десятков тысяч, в то время как добротность обычных колебательных контуров из сосредоточенных элементов в диапазоне умеренно высоких частот не превышает нескольких сотен. Большая добротность объемных резонаторов обусловлена тем, что при типичных значениях удельной проводимости материала стенок за каждый период собственных колебаний рассеивается лишь весьма незначительная часть запасенной энергии. Добротность резонатора, очевидно, растет с увеличением его геометрических размеров, так как запасенная энергия пропорциональна третьей, а рассеиваемая мощность — второй степени характерного геометрического размера, например радиуса резонатора.

В справочной литературе приводятся формулы для расчета добротности многих резонаторов, используемых в радиотехнике. Например, прямоугольный объемный резонатор с модой H_{101} или, что то же самое, E_{110} имеет добротность

$$Q=\pi\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega_{\text{рез}}\varepsilon_0}}\,\frac{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{l^2}\right)^{3/2}}{\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{b}+\frac{2}{a}\right)+\frac{1}{l^2}\left(\frac{1}{b}+\frac{2}{l}\right)}. \qquad (12.50)$$

В заключение следует указать, что, во-первых, реально достижимые значения добротностей, как правило, несколько ниже тех, которые теоретически предсказываются формулой (12.44). Причиной этого явления могут быть, например, дополнительные потери в трущихся контактах между боковой поверхностью резонатора и одной из его торцевых стенок, которую перемещают вдоль оси в целях перестройки по частоте. Во-вторых, проведенные здесь расчеты не учитывают поглощения части мощности во внешних устройствах, с которыми связан резонатор. Поэтому добротность резонатора, найденную описанным здесь способом, принято называть *собственной* или *ненагруженной добротностью* в отличие от *нагруженной добротности,* которая оказывается тем ниже, чем сильнее связь резонатора с внешними цепями.

12.7. Некоторые другие типы объемных резонаторов

Помимо уже рассмотренных прямоугольных и круглых объемных резонаторов в технике СВЧ применяют резонаторы других конструкций. В первую очередь следует назвать коаксиальный объемный резонатор, представляющий собой закороченный с обоих концов отрезок коаксиального волновода (рис. 12.14). Такой резонатор, как правило, работает на волнах типа Т, и поэтому его поперечные размеры могут быть любыми независимо от значения резонансной частоты. Это обстоятельство благоприятствует

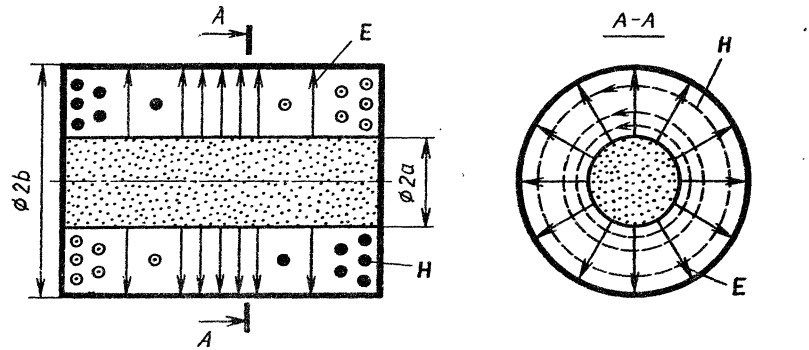


Рис. 12.14. Колебание типа T_{001} в коаксиальном объемном резонаторе

использованию коаксиальных объемных резонаторов на волнах дециметрового диапазона, где аналогичные прямоугольные или круглые резонаторы имели бы недопустимо большие габариты. Моды в коаксиальном резонаторе можно обозначить как T_{00p} (нулевые значения двух первых индексов указывают на отсутствие стоячих волн вдоль координатных направлений r и φ, последний индекс равен числу стоячих полуволн вдоль координаты z). Так, на рис. 12.14 изображена структура силовых линий векторов электромагнитного поля для колебания типа T_{001}. Наличие внутреннего проводника увеличивает поверхность стенок резонатора. Поэтому добротность коаксиального резонатора несколько ниже добротности аналогичной колебательной системы, построенной на базе полого металлического волновода.

Наилучшее соотношение между объемом и поверхностью, а значит, и наивысшую добротность можно получить в сферическом объемном резонаторе. Эта колебательная система представляет собой металлическую сферу, радиус которой близок к резонансной длине волны. Однако сферические резонаторы трудно перестраивать по частоте, и поэтому их редко применяют на практике.

Ранее в данной главе упоминалось, что в электронных приборах СВЧ используют тороидальные объемные резонаторы (рис. 12.15), которые по своей конструкции не сводятся к закороченному с двух концов отрезку регулярного волновода. Для такого резонатора можно приближенно считать, что энергия электрического поля локализуется в малой цилиндрической области зазора с осевым размером d, причем обычно $d \ll h$. Энергия же магнитного поля в основном концентрируется в тороидальной области с наружным диаметром $2b$ и внутренним диаметром $2a$.

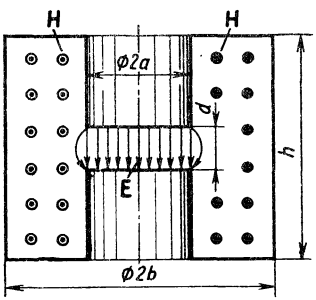


Рис. 12.15. Тороидальный объемный резонатор

Найдем приближенное выражение резонансной частоты данной колебательной системы. Для этого будем считать, что в области зазора вдоль оси резонатора протекает некоторый ток смещения с комплексной амплитудой $\dot{I}$. За счет этого по закону Ампера в тороидальной области на расстоянии r от оси возникает магнитное поле с единственной азимутальной проекцией вектора напряженности

$$\dot{H}_\varphi = \dot{I}/(2\pi r). \tag{12.51}$$

Полагая приближенно, что магнитное поле в резонаторе однородно вдоль оси z, находим магнитный поток, сцепленный с током смещения:

$$\dot{\Phi} = \int_0^h \mathrm{d}z \int_a^b \dot{B}_\varphi(r)\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 h \dot{I}}{2\pi} \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 h \dot{I}}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

откуда эквивалентная индуктивность тороидального резонатора

$$L_{\text{эк}} = \frac{\dot{\Phi}}{\dot{I}} = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{12.52}$$

Эквивалентную емкость тороидального резонатора найдем по приближенной формуле плоского конденсатора

$$C_{\text{эк}} = \varepsilon_0 \pi a^2/d. \tag{12.53}$$

Таким образом, резонансная частота данной колебательной системы

$$f_{\text{рез}} = 1/(2\pi\sqrt{L_{\text{эк}} C_{\text{эк}}}). \tag{12.54}$$

Пример 12.5. Найти резонансную частоту тороидального резонатора с размерами $a=5$ мм, $b=15$ мм, $d=1$ мм, $h=10$ мм. Резонатор заполнен воздухом.

В данном случае

$$L_{эк}=\frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 10^{-2}}{2\pi}\ln 3=2.2\cdot 10^{-9}\text{ Гн},$$

$$C_{эк}=\frac{10^{-9}\pi\cdot 25\cdot 10^{-6}}{36\pi\cdot 10^{-3}}=6.9\cdot 10^{-13}\Phi,$$

откуда по формуле (12.54) получаем $f_{рез}=4.08$ ГГц.

Рассмотренный здесь тороидальный объемный резонатор является, по сути дела, квазистационарной колебательной системой, у которой в отличие от распределенных систем имеется лишь одна резонансная частота. Его преимущество заключается в сравнительно небольших геометрических размерах. Однако добротность тороидального резонатора, как правило, значительно меньше, чем у резонаторов, получаемых закорачиванием отрезков регулярных волноводов.

Существует множество других конструкций объемных резонаторов, которые изучаются в последующих радиотехнических курсах.

ЗАДАЧИ

12.1. Кубический объемный резонатор имеет воздушное заполнение и идеально проводящие стенки с размером 20 мм. Вычислите резонансную длину волны для основной моды.

12.2. Прямоугольный объемный резонатор, заполненный воздухом, имеет размеры $a=2$ см, $b=4$ см, $l=3$ см. Определите, какой тип колебаний в данном резонаторе является основным; какова его резонансная частота; какая мода является ближайшей высшей.

12.3. Перестраиваемый объемный резонатор выполнен на основе прямоугольного металлического волновода сечением 23×10 мм. Для перестройки резонатора одну из торцевых стенок (поршень) перемещают вдоль оси волновода. Вычислите, в каких пределах следует перемещать поршень, чтобы резонатор перестраивался в диапазоне частот от 10 до 12 ГГц.

12.4. Круглый объемный резонатор с воздушным заполнением имеет диаметр 5 см и длину 7.5 см. Определите резонансные длины волн для мод E_{010} и E_{011} в данном резонаторе.

12.5. Круглый объемный резонатор имеет идеально проводящие стенки и воздушное заполнение. Измерения показали, что колебание типа E_{010} имеет резонансную частоту 3.5 ГГц, а колебание типа H_{111} — резонансную частоту 5.8 ГГц. Определите радиус резонатора и его длину.

12.6. Вычислите добротность круглого объемного резонатора, выполненного из меди, имеющего радиус 3 см, длину 4 см и работающего на типе колебаний E_{010}.

12.7. Имеется кубический объемный резонатор с длиной ребра a. В резонаторе возбуждена мода H_{101}. Докажите, что добротность такой колебательной системы $Q=a/(2d)$, где d — толщина поверхностного слоя в материале стенок на резонансной частоте.

12.8. Определите добротность коаксиального объемного резонатора, работающего на основной Т-моде. Радиус внешнего проводника $b=20$ мм, радиус внутреннего проводника $a=10$ мм, длина резонатора $l=80$ мм. Стенки резонатора выполнены из латуни.

12.9. Круглый объемный резонатор заполнен воздухом и работает на типе колебаний E_{010}. Резонатор имеет диаметр 10 см и длину 5 см. Известно, что в резонаторе запасена энергия 0.001 Дж. Вычислите амплитуду напряженности электрического поля на оси резонатора.

Глава тринадцатая

НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ИЗЛУЧАТЕЛИ

До сих пор рассматривались так называемые однородные задачи электродинамики, в рамках которых источники электромагнитного поля предполагались достаточно удаленными от той пространственной области, в которой требуется найти векторы электромагнитного поля. Однако на практике, например при расчете антенн, нужно найти непосредственную связь сторонних электрических токов, являющихся источниками электромагнитного поля, с векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ во всех точках пространства. Подобные же задачи приходится решать, исследуя возбуждение волноводов или объемных резонаторов с помощью штыря, щели, модулированного во времени электронного потока и т. д.

13.1. Постановка задачи

С математической точки зрения решение всех перечисленных задач связано с неоднородной системой уравнений Максвелла, которая записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} - j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{J}}_{ст},\\
&\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} + j\omega\mu_a\dot{\mathbf{H}} = 0,\\
&\operatorname{div}\dot{\mathbf{B}} = 0,\\
&\operatorname{div}\dot{\mathbf{D}} = 0.
\end{aligned} \tag{13.1}$$

Для простоты считается, что во всех точках пространства объемная плотность электрического заряда ρ равна нулю.

В правой части первого уравнения из системы (13.1) фигурирует плотность стороннего электрического тока $\dot{\mathbf{J}}_{ст}$, которая является заданной функцией пространственных координат. В этом смысле имеется прямая аналогия между неоднородной задачей теории электромагнитного поля и гораздо более простой задачей о токах и напряжениях в электрической цепи, которая возбуждается известными сторонними источниками ЭДС. При записи системы (13.1) предполагается, что мгновенные значения физических величин изменяются во времени по гармоническому закону с постоянной угловой частотой ω. Решив такую базовую задачу, можно, по крайней мере теоретически, исследовать возбуждение однородного неограниченного пространства системой электрических токов со сложным спектральным составом, воспользовавшись методом преобразования Фурье [2].

13.2. Векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля

Непосредственно решить систему уравнений (13.1), как правило, весьма трудно хотя бы потому, что нужно определить все шесть неизвестных проекций векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$. Поэтому целесообразно попытаться найти некоторые вспомогательные функции, однозначно связанные с векторами напряженности электрического и магнитного полей и обладающие тем свойством, что переход к ним позволяет упростить процедуру решения неоднородных уравнений Максвелла. Такие вспомогательные функции в электродинамике называют *потенциалами* электромагнитного поля.

Отметим прежде всего, что третьему уравнению из системы (13.1) автоматически удовлетворяет векторное поле $\dot{\mathbf{B}}$, определяемое по формуле

$$\dot{\mathbf{B}} = \operatorname{rot}\dot{\mathbf{A}}_э. \tag{13.2}$$

Здесь $\dot{\mathbf{A}}_э$ — некоторая векторная функция пространственных координат, которую называют *электрическим векторным потенциалом.*

Термин обусловлен тем, что эта функция естественно возникает в задачах о возбуждении электромагнитного поля сторонними электрическими токами. Таким же образом можно выразить векторное поле напряженности магнитного поля:

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_э. \tag{13.3}$$

Соотношения (13.2) и (13.3) весьма неопределенны в том смысле, что единственное условие, налагаемое на функцию $\dot{\mathbf{A}}_э(\mathbf{r})$, — это дифференцируемость, обеспечивающая существование ротора этого векторного поля. Более того, приведенные равенства сохраняют силу, если к полю $\dot{\mathbf{A}}_э$ добавить еще одно векторное поле $\dot{\mathbf{F}} = \operatorname{grad} u(\mathbf{r})$, где $u(\mathbf{r})$ — произвольная гладкая функция радиуса-вектора. Это свойство непосредственно вытекает из тождества, доказываемого в векторном анализе,

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0. \tag{13.4}$$

Попытаемся связать электрический векторный потенциал с напряженностью электрического поля. Для этого подставим вектор $\dot{\mathbf{H}}$ из формулы (13.3) во второе уравнение из системы (13.1):

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} + j\omega \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_э = 0, \tag{13.5}$$

т. е.

$$\operatorname{rot} (\dot{\mathbf{E}} + j\omega \dot{\mathbf{A}}_э) = 0. \tag{13.6}$$

В силу тождества (13.4) уравнение (13.6) будет выполняться всегда, если

$$\dot{\mathbf{E}} + j\omega \dot{\mathbf{A}}_э = -\operatorname{grad} \dot{\varphi}_э.$$

Здесь $\dot{\varphi}_э$ — некоторая функция координат, называемая *скалярным электрическим потенциалом*. Знак правой части последней формулы обусловлен тем, что, как указывалось в гл. 10, для не зависящего от времени электростатического поля должно быть справедливо равенство

$$\dot{\mathbf{E}} = -\operatorname{grad} \dot{\varphi}_э.$$

При этом сохраняется традиционное направление стрелок на силовых линиях электрического поля, при котором истоками поля служат положительные заряды.

Итак, мы нашли способ выразить напряженности электрического и магнитного полей через векторный и скалярный электрические потенциалы:

$$\dot{\mathbf{E}} = -\operatorname{grad} \dot{\varphi}_э - j\omega \dot{\mathbf{A}}_э, \qquad \dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_э. \tag{13.7}$$

При этом достигнуто некоторое упрощение исходной задачи — вместо двух векторных функций ищется одна векторная и одна скалярная.

13.3. Калибровка потенциалов. Неоднородное уравнение Гельмгольца

Подставим соотношения (13.7) в первое уравнение Максвелла из системы (13.1):

$$\frac{1}{\mu_a}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{A}}_э + j\omega\tilde{\varepsilon}_a \operatorname{grad}\dot{\varphi}_э + j\omega\tilde{\varepsilon}_a j\omega\dot{\mathbf{A}}_э = \dot{\mathbf{J}}_{ст}. \tag{13.8}$$

Раскрывая векторную операцию rot rot, отсюда получаем

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}}_э + j\omega\tilde{\varepsilon}_a\mu_a\dot{\varphi}_э) - \nabla^2\dot{\mathbf{A}}_э + \gamma^2\dot{\mathbf{A}}_э = \mu_a\dot{\mathbf{J}}_{ст}, \tag{13.9}$$

где $\gamma = j\omega\sqrt{\tilde{\varepsilon}_a\mu_a}$ — комплексный коэффициент распространения однородной плоской волны в неограниченном пространстве.

До сих пор никаких ограничений на функции $\dot{\mathbf{A}}_э$ и $\dot{\varphi}_э$ не накладывалось. Потребуем теперь, чтобы оба эти потенциала совместно удовлетворяли соотношению

$$\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}}_э + j\omega\tilde{\varepsilon}_a\mu_a\dot{\varphi}_э = 0. \tag{13.10}$$

Формулу (13.10) называют *соотношением калибровки потенциалов* или *условием Лоренца* по имени голландского физика Г. Лоренца (1853—1928), внесшего большой вклад в развитие идей Максвелла. Поскольку функции $\dot{\mathbf{A}}_э$ и $\dot{\varphi}_э$ выбираются в значительной степени произвольно, калибровочное соотношение (13.10) может быть удовлетворено всегда.

Используя условие Лоренца, можно существенно упростить уравнение (13.9) и записать его так:

$$\nabla^2\dot{\mathbf{A}}_э - \gamma^2\dot{\mathbf{A}}_э = -\mu_a\dot{\mathbf{J}}_{ст}. \tag{13.11}$$

Полученное равенство представляет собой *неоднородное уравнение Гельмгольца* относительно векторного электрического потенциала. Правой частью этого уравнения служит известная функция, которая описывает распределение в пространстве плотности стороннего электрического тока.

Проведя операцию калибровки, удается выразить комплексные амплитуды обоих векторов напряженности электромагнитного поля через единственную функцию — электрический векторный потенциал. Действительно, воспользовавшись равенством (13.10), можно записать формулы перехода (13.7) следующим образом:

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega\tilde{\varepsilon}_a\mu_a}(\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}}_э - \gamma^2\dot{\mathbf{A}}_э),$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_a}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{A}}_э. \qquad (13.12)$$

Итак, если решение неоднородного уравнения Гельмгольца (13.11) тем или иным образом получено, то окончательное нахождение векторов электромагнитного поля, возбужденного заданной системой сторонних источников, сводится к простым дифференциальным операциям.

13.4. Решение неоднородного уравнения Гельмгольца. Функция Грина

Приступая к поиску строгого решения задачи о возбуждении неограниченного однородного пространства заданной системой сторонних источников, ограничимся наиболее важным частным случаем, когда потери в среде распространения отсутствуют. При этом комплексный коэффициент распространения $\gamma = j\beta$ и уравнение (13.11) приобретает вид

$$\nabla^2\dot{\mathbf{A}}_э + \beta^2\dot{\mathbf{A}}_э = -\mu_a\dot{\mathbf{J}}_{ст}. \qquad (13.13)$$

Это неоднородное векторное дифференциальное уравнение естественным образом распадается на три независимых уравнения относительно проекций искомой функции $\dot{\mathbf{A}}_э(x, y, z)$ на оси декартовой системы координат:

$$\begin{aligned}
\nabla^2\dot{A}_{эx} + \beta^2\dot{A}_{эx} &= -\mu_a\dot{J}_{стx},\\
\nabla^2\dot{A}_{эy} + \beta^2\dot{A}_{эy} &= -\mu_a\dot{J}_{стy}, \qquad (13.14)\\
\nabla^2\dot{A}_{эz} + \beta^2\dot{A}_{эz} &= -\mu_a\dot{J}_{стz}.
\end{aligned}$$

Все три уравнения из системы (13.14) совершенно идентичны. Поэтому задачу о возбуждении электромагнитных волн в свободном пространстве без потерь можно свести к решению неоднородного скалярного уравнения Гельмгольца вида

$$\nabla^2\dot{U} + \beta^2\dot{U} = \dot{F} \qquad (13.15)$$

относительно некоторой неизвестной функции $\dot{U}(\mathbf{r})$ при заданной правой части $\dot{F}(\mathbf{r})$.

Функция Грина. Способ решения уравнения (13.15) существенным образом опирается на то, что это уравнение линейное, а значит, подчиняется принципу суперпозиции. Рассмотрим некоторую точку пространства Q, имеющую радиус-вектор $\mathbf{r}_0$. Пусть $\dot{F}(\mathbf{r}_0)$ —

значение правой части уравнения (13.15) в этой точке. Окружим точку Q физически малой окрестностью с объемом ΔV и назовем величину $\dot{F}(\mathbf{r}_0)\Delta V$ интенсивностью источников в данной точке.

Если функция $\dot{F}(\mathbf{r}_0)$ всюду принимает лишь конечные значения, то эта интенсивность стремится к нулю при $\Delta V \to 0$. Принято говорить, что в этом случае источники распределены в пространстве *непрерывно*. Однако теоретически возможна и другая ситуация, когда в точке Q размещен источник конечной интенсивности, которая остается неизменной при сколь угодно малом значении ΔV. Говорят, что при этом в точке пространства с радиусом-вектором $\mathbf{r}_0$ расположен *дискретный* источник. Если интенсивность источника равна единице, то правая часть уравнения (13.15) записывается в виде

$$\dot{F}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \tag{13.16}$$

где $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ — трехмерная дельта-функция, которую можно формально представить в виде произведения трех одномерных дельта-функций: $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)$.

Свойства дельта-функции излагаются, например, в курсе теоретической радиотехники [2]. Укажем, в частности, на следующее: при всех $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$ функция $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ равна нулю, однако

$$\int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,dV = \iiint \delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint \delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)\,dx_0\,dy_0\,dz_0 = 1$$

при интегрировании по любому объему, содержащему точку Q; в последней формуле x, y, z — координаты точки наблюдения, а x_0, y_0, z_0 — координаты точки источника.

По определению, *функцией Грина* $\dot{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ уравнения Гельмгольца (13.15) называют решение неоднородного уравнения

$$\nabla^2\dot{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \beta^2\dot{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0), \tag{13.17}$$

которое описывает гармонический волновой процесс, распространяющийся по всем направлениям из точки размещения источника.

Покажем, что, располагая функцией Грина, можно до конца решить задачу о возбуждении свободного пространства произвольной совокупностью сторонних источников, как непрерывных, так и дискретных, причем на основании принципа суперпозиции процедура решения сведется к вычислению некоторого интеграла. Для этого сначала умножим обе части уравнения (13.17) на неизвестную функцию $\dot{U}$, а затем обе части уравнения (13.15) — на функцию $\dot{G}$. Вычитая преобразованные равенства почленно, будем иметь

$$\dot{U}\nabla^2\dot{G} - \dot{G}\nabla^2\dot{U} = \dot{U}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - \dot{G}\dot{F}. \tag{13.18}$$

Возьмем некоторый достаточно большой объем V с поверхностью S, содержащий точку Q, и проинтегрируем по нему обе части формулы (13.18). При этом объемный интеграл от левой части можно заменить поверхностным интегралом, воспользовавшись известной из векторного анализа формулой Грина

$$\int_V (\dot{U}\nabla^2\dot{G} - \dot{G}\nabla^2\dot{U})\,dV = \oint_S (\dot{U}\,\mathrm{grad}\,\dot{G} - \dot{G}\,\mathrm{grad}\,\dot{U})\,dS =$$

$$= \int_V [\dot{U}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - \dot{G}\dot{F}]\,dV. \qquad (13.19)$$

Физически ясно, что при достаточном удалении точек поверхности S от точки размещения источника Q значения функций $\dot{U}$ и $\dot{G}$ на S могут быть сделаны сколь угодно малыми, так что поверхностный интеграл в (13.19) обратится в нуль. Отсюда приходим к соотношению, которому должно удовлетворять искомое решение $\dot{U}(\mathbf{r})$:

$$\int_V \dot{U}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,dV = \int_V \dot{G}\dot{F}\,dV. \qquad (13.20)$$

Обе функции, $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ и $\dot{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ симметричны относительно своих аргументов, т. е.

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}), \qquad \dot{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \dot{G}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}).$$

На этом основании интегрирование в формуле (13.20) можно в равной мере проводить как по координатам точек наблюдения, так и по координатам точек источников. Интегрируя по координатам точек источников x_0, y_0, z_0 и используя фильтрующее свойство дельта-функции [2], получаем общее решение неоднородного скалярного уравнения Гельмгольца с произвольной правой частью:

$$\dot{U}(\mathbf{r}) = \int_V \dot{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\dot{F}(\mathbf{r}_0)\,dx_0\,dy_0\,dz_0. \qquad (13.21)$$

Физический смысл этого решения прост и нагляден — результирующее возмущение, наблюдаемое в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}$, есть взвешенная сумма элементарных возмущений от всех источников; роль весовой функции играет при этом функция Грина уравнения Гельмгольца.

Отметим, что полученная формула применима к любым дифференциальным уравнениям в частных производных, которые описывают разнообразные процессы в пространственно распределенных системах — диффузию, распространение теплоты и т. д. Различными окажутся лишь конкретные формы функций Грина. В литературе функцию Грина часто называют *фундаментальным реше-*

нием соответствующего уравнения, подчеркивая этим значимость данного понятия.

Явное выражение функции Грина для уравнения Гельмгольца. Однородное трехмерное пространство является изотропным — характеристики волн никак не связаны с направлением их распространения. Поэтому можно заранее утверждать, что функция Грина $\dot{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ фактически зависит лишь от одного аргумента $R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|$ — длины радиуса-вектора, проведенного из точки размещения источника в точку наблюдения.

Очевидно, что при всех $R\neq 0$ функция $\dot{G}(R)$ является решением однородного уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2\dot{G}(R)+\beta^2\dot{G}(R)=0,$$

или, раскрывая оператор Лапласа в сферически симметричном случае ($\partial/\partial\theta=\partial/\partial\varphi=0$),

$$\frac{d^2\dot{G}}{dR^2}+\frac{2}{R}\frac{d\dot{G}}{dR}+\beta^2\dot{G}=0. \tag{13.22}$$

Из данного уравнения можно исключить слагаемое с первой производной, если воспользоваться подстановкой $\dot{\psi}=R\dot{G}$. Тогда, как нетрудно убедиться, относительно новой неизвестной функции $\dot{\psi}$ имеем уравнение

$$\frac{d^2\dot{\psi}}{dR^2}+\beta^2\dot{\psi}=0 \tag{13.23}$$

с двумя очевидными решениями: $\dot{\psi}_{1,2}(R)=\exp(\pm j\beta R)$. Каждое такое решение описывает комплексную амплитуду бегущей гармонической волны, распространяющейся вдоль радиальной координаты. Одна из этих волн движется в направлении из бесконечности к источнику, а другая — от источника на бесконечность. Поскольку физический смысл может иметь лишь последняя из упомянутых волн, приемлемым решением оказывается только функция $\dot{\psi}(R)=\exp(-j\beta R)$, которая приводит к следующему выражению функции Грина:

$$\dot{G}(R)=A\frac{e^{-j\beta R}}{R}, \tag{13.24}$$

где A — некоторая постоянная.

Принято говорить, что формула (13.24) описывает *однородную сферическую волну*. Амплитуда этой волны убывает обратно пропорционально первой степени радиуса-вектора.

Чтобы найти числовое значение постоянной A, следует обратиться к уравнению (13.17), записав его в виде

$$\nabla^2\dot{G}(R)+\beta^2\dot{G}(R)=\delta(R). \tag{13.25}$$

Опишем вокруг точки размещения источника малый шар D радиуса ξ; пусть Γ — поверхность этого шара. Проинтегрировав обе части уравнения (13.25) по объему D, имеем

$$\int_D \nabla^2 \dot{G}\, dD + \beta^2 \int_D \dot{G}\, dD = \int_D \delta(R)\, dD = 1.$$

Если $\xi \to 0$, то в левой части последнего равенства следует сохранить только первое слагаемое, поскольку вблизи точечного источника модуль функции, определяемой равенством (13.24), изменяется весьма резко и значение дифференциального выражения $\nabla^2 \dot{G}$ существенно превышает значение самой функции $\dot{G}$. Таким образом,

$$\int_D \nabla^2 \dot{G}\, dD = \int_D \operatorname{div} \operatorname{grad} \dot{G}\, dD = \int_\Gamma \operatorname{grad} \dot{G}\, d\Gamma = 1. \qquad (13.26)$$

Примем во внимание, что градиент сферически-симметричной функции (а именно такой, как указывалось, обязана быть функция Грина) численно равен проиводной по радиальной координате: $\operatorname{grad} \dot{G} = (d\dot{G}/dR)\mathbf{i}_r$. Тогда равенство (13.26) приобретает вид

$$(d\dot{G}/dR)|_{R=\xi} 4\pi\xi^2 = 1,$$

откуда

$$d\dot{G}/dR = 1/(4\pi R^2),$$

Решив это вспомогательное дифференциальное уравнение, находим, что в непосредственной близости от источника функция Грина

$$\dot{G}(R) = -1/(4\pi R).$$

Значит, постоянная, входящая в выражение (13.24), $A = -1/(4\pi)$. Окончательный вид искомой функции Грина таков:

$$\dot{G}(R) = -\frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R},$$

или

$$\dot{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\frac{e^{-j\beta|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{4\pi\,|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\,|}. \qquad (13.27)$$

Данная формула на основании равенства (13.21) позволяет записать решение неоднородного скалярного уравнения Гельмгольца (13.15):

$$\dot{U}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \dot{F}(\mathbf{r}_0) \frac{e^{-j\beta|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\,|}\, dx_0\, dy_0\, dz_0.$$

Этот результат естественным образом обобщается на случай векторного уравнения (13.13):

$$\dot{A}_э(r) = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \dot{j}_{ст}(r_0) \frac{e^{-j\beta|r-r_0|}}{|r-r_0|} dx_0\, dy_0 dz_0. \qquad (13.28)$$

13.5. Элементарный электрический излучатель

Элементарным электрическим излучателем (вибратором) называют идеализированную излучающую систему, в которой переменный электрический ток протекает вдоль отрезка прямой линии при исчезающе малой площади поперечного сечения. Считается, что длина излучающей области l значительно меньше длины электромагнитной волны λ в окружающей среде.

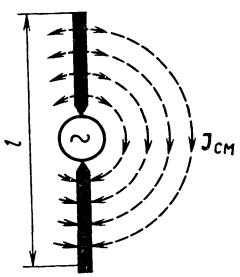


Рис. 13.1. Элементарный электрический излучатель

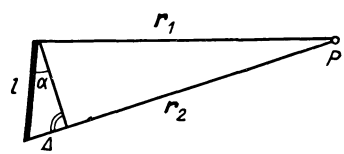


Рис. 13.2. К нахождению разности хода волн от двух крайних точек излучателя

Физическая картина протекания тока по элементарному электрическому излучателю такова. Пусть, например, в разрыв излучающего отрезка проводника включен источник гармонической ЭДС. Тогда ток проводимости проходит по одному плечу излучателя, создает в пространстве ток смещения и через другое плечо возвращается в источник (рис. 13.1).

Малость длины излучателя по сравнению с длиной волны позволяет рассматривать его как точечный источник электромагнитных волн. Действительно, в произвольным образом расположенную точку наблюдения P приходят сферические волны, возбуждаемые всеми участками излучающего проводника. Наибольшая геометрическая разность хода (рис. 13.2) для двух волн с радиусами-векторами r_1 и r_2 составит при этом

$$\Delta = l \sin \alpha, \qquad (13.29)$$

откуда разность фаз возбужденных колебаний, выраженная в радианах,

$$\delta\varphi=\beta\Delta=\frac{2\pi l}{\lambda}\sin\alpha. \tag{13.30}$$

Согласно формуле (13.30), при $l/\lambda\ll 1$ система излучает как бы единую сферическую волну и в этом смысле может считаться точечным источником электромагнитных волн.

Будем считать, что элементарный излучатель расположен в начальной точке сферической системы координат (r, θ, φ), причем для определенности излучатель ориентирован параллельно полярной оси z (рис. 13.3). Благодаря малости геометрических размеров излучателя по сравнению с длиной волны формулу (13.28) можно несколько упростить, вынеся за знак интеграла те сомножители, вид которых определяется характером функции Грина; при этом считаем, что $r_0=0$ и $\mu_a=\mu_0$ (среда распространения — воздух или вакуум):

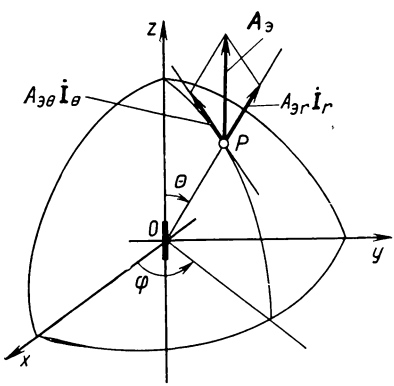


Рис. 13.3. Определение сферических проекций векторного потенциала

$$\dot{\mathbf{A}}_э(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{e^{-j\beta r}}{r}\int\limits_V \dot{\mathbf{J}}_{ст}\,dx_0\,dy_0\,dz_0. \tag{13.31}$$

Чтобы вычислить входящий сюда интеграл, воспользуемся тем, что комплексная амплитуда вектора плотности стороннего электрического тока выражается следующим образом:

$$\dot{\mathbf{J}}_{ст}=\dot{I}\delta(x_0)\,\delta(y_0)\,\mathbf{i}_z.$$

Действительно, каждая из дельта-функций имеет размерность 1/м, так что размерность плотности тока оказывается равной А/м^2. Вдоль элементарного излучателя плотность тока считается неизменной и поэтому, используя фильтрующее свойство дельта-функции, находим

$$\int\limits_V \dot{\mathbf{J}}_{ст}\,dx_0\,dy_0\,dz_0=\mathbf{i}_z\int\limits_0^l dz\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dot{I}\delta(x_0)\,\delta(y_0)\,dx_0\,dy_0=\dot{I}l\mathbf{i}_z. \tag{13.32}$$

Подставляя этот результат в формулу (13.31), имеем

$$\dot{\mathbf{A}}_э(r)=\frac{\mu_0\dot{I}l}{4\pi}\,\frac{e^{-j\beta r}}{r}\,\mathbf{i}_z. \tag{13.33}$$

Из полученного выражения следует, что векторный электрический потенциал электромагнитного поля, возбуждаемого элементарным вибратором, описывается функцией вида однородной сферической волны, которая распространяется вдоль радиальной координаты r со скоростью света.

Для дальнейшего анализа необходимо разложить вектор $\dot{\mathbf{A}}_э$ в каждой точке пространства по единичным векторам сферической системы координат. Такое разложение показано на рис. 13.3. Можно заметить, что в данном случае электрический векторный потенциал имеет лишь две отличные от нуля проекции:

$$\dot{A}_{эr}=\dot{A}_э\cos\theta=\frac{\mu_0 \dot{I} l}{4\pi}\,\frac{e^{-j\beta r}}{r}\cos\theta,$$

$$\dot{A}_{э\theta}=-\dot{A}_э\sin\theta=-\frac{\mu_0 \dot{I} l}{4\pi}\,\frac{e^{-j\beta r}}{r}\sin\theta, \qquad (13.34)$$

$$\dot{A}_{э\varphi}=0.$$

Азимутальная проекция потенциала $\dot{A}_{э\varphi}$ обращается в нуль из-за того, что в каждой точке пространства вектор $\dot{\mathbf{A}}_э$ ориентирован вдоль полярной оси сферической системы координат.

13.6. Структура поля элементарного электрического излучателя

Элементарный электрический излучатель представляет собой простейшую антенну, возбуждающую в пространстве электромагнитные колебания. Изучим законы пространственного распределения напряженностей электрического и магнитного полей, создаваемых таким излучателем. Для этого воспользуемся формулой

$$\dot{\mathbf{H}}=\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{A}}_э,$$

которая связывает магнитный вектор поля с электрическим векторным потенциалом. Целесообразно вычислять ротор в сферической системе координат, используя проекции, задаваемые формулами (13.34). Следует иметь в виду, что, с одной стороны, проекция $\dot{A}_{э\varphi}=0$, а с другой — отличные от нуля проекции $\dot{A}_{эr}$ и $\dot{A}_{э\theta}$ не зависят от азимутального угла φ, так что $\partial/\partial\varphi=0$. Это обстоятельство значительно упрощает выкладки:

$$\dot{H}_r=\frac{1}{\mu_0}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\dot{A}_{э\varphi})-\frac{\partial\dot{A}_{э\theta}}{\partial\varphi}\right)\right]=0,$$

$$\dot{H}_\theta=\frac{1}{\mu_0}\left[\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial\dot{A}_{эr}}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\dot{A}_{э\varphi})\right)\right]=0, \qquad (13.35)$$

$$\dot{H}_\varphi = \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(r\dot{A}_{э\theta})}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{A}_{эr}}{\partial \varphi}\right] = \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\dot{A}_{э\theta}) =$$

$$= \frac{\dot{I}l}{4\pi r^2}(1 + j\beta r)\sin\theta\, e^{-j\beta r}.$$

Как правило, на практике интересуются полями на расстояниях r от излучающего источника, значительно превышающих длину волны λ. При этом безразмерный параметр $\beta r \gg 1$, и точка наблюдения находится в так называемой *дальней зоне* излучателя. На основании равенств (13.35) приходим к выводу, что в дальней зоне магнитный вектор излучаемого электромагнитного поля имеет лишь единственную проекцию вдоль азимутальной координаты; приближенно эта проекция вычисляется по формуле

$$\dot{H}_\varphi = \frac{j\dot{I}l\beta}{4\pi}\sin\theta\frac{e^{-j\beta r}}{r}. \qquad (13.36)$$

Электрический вектор поля, возбуждаемого излучателем, можно найти на основании первого равенства из системы (13.12), однако проще воспользоваться уравнением Максвелла

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}},$$

в правую часть которого следует подставить уже найденную проекцию магнитного вектора. Вычислив в сферической системе координат ротор векторного поля $\dot{\mathbf{H}}$ с единственной отличной от нуля проекцией вида (13.36), находим проекции электрического вектора в дальней зоне:

$$\dot{E}_r = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\dot{H}_\varphi)\right] = \frac{\dot{I}l\beta}{2\pi\omega\varepsilon_0 r^2}\cos\theta\, e^{-j\beta r}, \qquad (13.37)$$

$$\dot{E}_\theta = -\frac{1}{j\omega\varepsilon_0 r}\frac{\partial}{\partial r}(r\dot{H}_\varphi) = \frac{j\dot{I}l\beta^2}{4\pi\omega\varepsilon_0}\sin\theta\frac{e^{-j\beta r}}{r},$$

$$\dot{E}_\varphi = 0.$$

Следует отметить, что модуль проекции $\dot{E}_r$ убывает с ростом радиуса пропорционально множителю $1/r^2$, в то время как модуль проекции $\dot{E}_\theta$ изменяется по закону $1/r$, т. е. гораздо медленнее. Это дает основание полагать, что в дальней зоне проекцией $\dot{E}_r$ можно пренебречь и единственной отличной от нуля проекцией электрического вектора оказывается

$$\dot{E}_\theta = \frac{j\dot{I}l\beta^2}{4\pi\omega\varepsilon_0}\sin\theta\frac{e^{-j\beta r}}{r} = \frac{j\dot{I}l\beta}{4\pi}Z_0\sin\theta\frac{e^{-j\beta r}}{r}, \qquad (13.38)$$

где $Z_0 = 120\pi = 377$ Ом — характеристическое сопротивление вакуума.

Рассматривая формулы (13.36) и (13.38) совместно, приходим к следующим выводам:

- электромагнитное поле, возбуждаемое в пространстве элементарным электрическим излучателем, представляет собой сферическую волну [ср. с выражением (13.24)];
- в каждой точке пространства отношение комплексных амплитуд $\dot{E}_\theta/\dot{H}_\varphi = Z_0$, что характерно для однородной плоской волны в неограниченном свободном пространстве;
- возбуждаемая сферическая волна является неоднородной, поскольку амплитуды полей зависят от полярного угла;
- вектор Пойнтинга в дальней зоне направлен вдоль единичного вектора $\mathbf{i}_r$, т. е. волна переносит мощность в радиальном направлении.

Пример 13.1. Электрический излучатель имеет длину $l=0.2$ м и возбуждается от источника с частотой $f=15$ МГц. Амплитуда тока в излучателе $I_m=4$ А. Найти амплитудные значения проекций $H_{\varphi m}$ и $E_{\theta m}$ на расстоянии $r=5$ км от данного вибратора, полагая, что радиус-вектор, проведенный в точку наблюдения, образует угол $\theta=60°$ с осью излучателя. Средой распространения является вакуум.

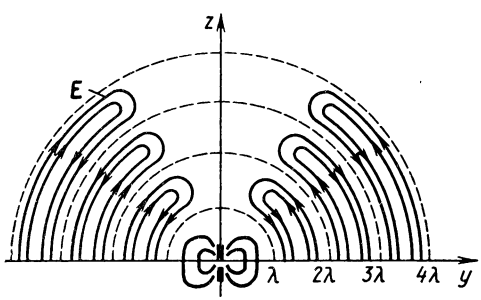


Рис. 13.4. Структура силовых линий вектора напряженности электрического поля вблизи элементарного излучателя.

В данном случае $\lambda = c/f = 20$ м, так что отношение $l/\lambda = 0.01$ и поэтому излучатель можно считать элементарным источником. Коэффициент фазы $\beta = 2\pi/\lambda = 0.314$ м$^{-1}$, параметр $\beta r = 1570$; следовательно, точка наблюдения находится в дальней зоне. По формуле (13.36),

$$H_{\varphi m} = \frac{I_m l \beta}{4\pi r} \sin\theta = 3.46 \cdot 10^{-6} \text{ А/м},$$

отсюда

$$E_{\theta m} = Z_0 H_{\varphi m} = 1.31 \cdot 10^{-3} \text{ В/м}.$$

На рис. 13.4 приведен эскиз мгновенного распределения силовых линий электрического вектора в дальней зоне элементарного

электрического излучателя. В общих чертах этот эскиз повторяет оригинальный рисунок, приведенный в свое время Г. Герцем. Так как проекции векторов электромагнитного поля не зависят от угла φ, картина силовых линий одна и та же в любой плоскости, которая включает в себя полярную ось. Силовые линии вектора напряженности электрического поля имеют вид искривленных замкнутых фигур. На достаточном удалении от источника кривизной силовых линий в малой окрестности точки наблюдения можно пренебречь и считать, что изучаемое поле представляет собой локально плоскую волну.

13.7. Диаграмма направленности элементарного электрического излучателя

В теории антенн исключительно важную роль играет функция, которая описывает зависимость комплексных амплитуд полей, возбуждаемых в пространстве некоторой излучающей системой, от углов наблюдения θ и φ. Такую функцию называют *диаграммой направленности* антенны.

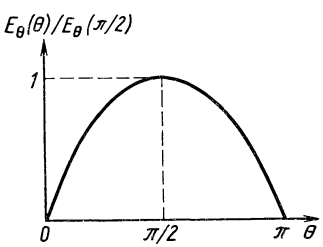


Рис. 13.5. Нормированная диаграмма направленности элементарного излучателя

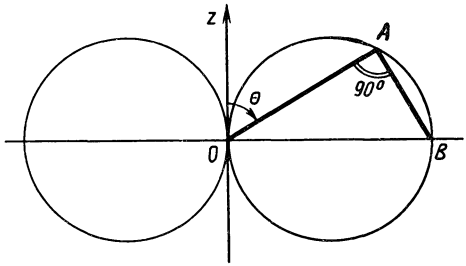


Рис. 13.6. Построение диаграммы направленности элементарного электрического излучателя в полярной системе координат

В случае элементарного электрического излучателя угловая зависимость амплитуды излучаемого поля имеет вид $\sin\theta$; от угла φ амплитуда поля не зависит. Начальные фазы проекций векторов поля, как это видно из формул (13.36) и (13.38), вообще не связаны с угловыми координатами, т. е. волновые фронты (поверхности равных фаз) образуют семейство концентрических сфер. Максимум излучения наблюдается при $\theta=\pi/2$, т. е. в экваториальной плоскости сферической системы координат; вдоль оси вибратора ($\theta=0$ или π) излучение отсутствует.

На практике обычно пользуются нормированными диаграммами направленности. При этом по оси ординат откладывают модуль

напряженности поля при заданном угле наблюдения, отнесенный к максимальному значению напряженности поля. Нормированная диаграмма направленности элементарного электрического излучателя (рис. 13.5) представляет собой синусоидальную функцию, построенную на отрезке значений аргумента от 0 до $\pi/2$.

Для наглядности нормированную диаграмму направленности часто изображают в полярной системе координат. Принцип построения такой диаграммы заключается в том, что на каждом луче, проведенном из начала координат под заданным углом θ, откладывают нормированное значение модуля напряженности поля; масштаб рисунка может быть любым. Нетрудно убедиться, что геометрическим местом точек диаграммы направленности элементарного электрического излучателя будет окружность (рис. 13.6), так как

$$OA = OB \sin\theta. \tag{13.39}$$

Несмотря на то что истинной областью изменения угла является отрезок $[0, \pi]$, диаграмму направленности часто изображают в обеих полуплоскостях, подчеркивая этим, что вибратор равномерно (изотропно) излучает по всем углам φ. Именно таким образом построена диаграмма направленности на рис. 13.6.

13.8. Сопротивление излучения. Коэффициент направленного действия элементарного излучателя

Вычислим мощность, излучаемую элементарным вибратором в среднем за один период колебаний. Для этого мысленно окружим излучатель замкнутой поверхностью S произвольной формы. Значение излученной мощности P_Σ найдем, проинтегрировав среднее значение вектора Пойнтинга $\mathbf{\Pi}_{ср}$ по поверхности S:

$$P_\Sigma = \int_S \mathbf{\Pi}_{ср}\, d\mathbf{S}. \tag{13.40}$$

Ясно, что результат не зависит от конкретного выбора поверхности интегрирования. Поэтому проще всего взять S в виде сферы некоторого радиуса r, такого, что $\beta r \gg 1$, так что точки сферы располагаются в дальней зоне излучателя.

Используя проекции векторов электромагнитного поля, описываемые формулами (13.36) и (13.38), находим радиальную проекцию среднего вектора Пойнтинга в дальней зоне, которая из-за синфазности величин $\dot{E}_\theta$ и $\dot{H}_\varphi$ оказывается чисто действительной:

$$\Pi_{ср\,r} = \frac{1}{2}\dot{E}_\theta \dot{H}_\varphi^* = \frac{I_m^2 l^2 \beta^2 Z_0}{32\pi^2 r^2}\sin^2\theta. \tag{13.41}$$

При интегрировании по поверхности сферы учтем, что дифференциал площади $dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$. Отсюда получаем

$$P_\Sigma = \frac{I_m^2 I^2 \beta^2 Z_0}{32\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta. \qquad (13.42)$$

Если воспользоваться табличным интегралом

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta = \frac{4}{3},$$

то выражение (13.42) можно привести к следующему виду:

$$P_\Sigma = \frac{I_m^2 I^2 \beta^2 Z_0}{12\pi}. \qquad (13.43)$$

Согласно данной формуле, мощность излучения пропорциональна квадрату амплитуды тока, протекающего по излучателю. В этом смысле есть прямая аналогия между выражением (13.43) и формулой из теории цепей, которая выражает мощность переменного тока в некотором резистивном двухполюснике. Другими словами,

$$P_\Sigma = I_m^2 R_\Sigma / 2,$$

где

$$R_\Sigma = \frac{1}{6\pi} Z_0 (\beta l)^2 = 20 (\beta l)^2 = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right), \text{ Ом} \qquad (13.44)$$

— так называемое *сопротивление излучения* элементарного электрического излучателя. Данная величина характеризует излучательную способность антенны. Действительно, при одной и той же амплитуде тока в излучателе значение излученной мощности тем больше, чем выше сопротивление излучения.

Пример 13.2. Используя условия, сформулированные в примере 13.1, найти амплитуду тока в элементарном электрическом излучателе, если известно, что мощность $P_\Sigma = 2.5$ Вт.

Сопротивление излучения рассматриваемой антенны

$$R_\Sigma = 80 \cdot (3.14)^2 \cdot (0.01)^2 = 0.079 \text{ Ом}.$$

Амплитуда тока в антенне

$$I_m = \sqrt{2P_\Sigma / R_\Sigma} = \sqrt{2 \cdot 2.5 / 0.079} = 7.95 \text{ А}.$$

Данный пример показывает, что для изучения даже умеренной мощности могут потребоваться весьма значительные токи в ан-

тенне. С этой трудностью приходится сталкиваться при создании передающих антенн с приемлемыми в практическом отношении габаритами для диапазонов километровых и гектометровых волн.

В соответствии с формулой (13.41) максимальное значение модуля вектора Пойнтинга имеет место при $\theta=\pi/2$ и составляет

$$\Pi_{\text{ср max}}=\frac{I_m^2\beta^2l^2Z_0}{32\pi^2r^2}. \qquad (13.45)$$

Если же мысленно допустить, что мощность излучается по всем направлениям изотропно, то в соответствии с равенством (13.43) плотность потока мощности на удалении r от источника

$$\Pi_{\text{ср.равн}}=\frac{P_\Sigma}{4\pi r^2}=\frac{I_m^2\beta^2l^2Z_0}{48\pi^2r^2}. \qquad (13.46)$$

Принято вводить обобщающую числовую характеристику антенного устройства

$$D=\Pi_{\text{ср max}}/\Pi_{\text{ср.равн}},$$

которую называют *коэффициентом направленного действия* (КНД) антенны. Подчеркнем, что этот коэффициент относится к направлению максимума излучения. Для элементарного электрического излучателя на основании выражений (13.45) и (13.46) находим, что $D=1.5$. Столь небольшой КНД свидетельствует о том, что элементарный вибратор слабо концентрирует излучение в пространстве. Современные сложные антенны, например антенные решетки, состоящие из множества отдельных излучателей, имеют значения КНД, достигающие сотен и даже тысяч.

Пример 13.3. Некоторая антенна имеет КНД, равный 500. Мощность излучения составляет 30 кВт. Найти значение $\Pi_{\text{ср max}}$ в направлении максимума излучения на расстоянии 80 км от антенны.

Если бы антенна излучала по всем направлениям изотропно, то плотность потока мощности на заданном расстоянии должна равняться частному от деления значения излучаемой мощности на площадь сферы:

$$\Pi_{\text{ср.равн}}=\frac{P_\Sigma}{4\pi r^2}=\frac{3\cdot10^4}{4\cdot3{,}14\cdot(8\cdot10^4)^2}=3.73\cdot10^{-7}\ \text{Вт/м}^2.$$

Отсюда получаем максимальную плотность потока мощности для заданной антенны:

$$\Pi_{\text{ср max}}=D\Pi_{\text{ср.равн}}=500\cdot3.73\cdot10^{-7}=1.87\cdot10^{-4}\ \text{Вт/м}^2.$$

13.9. Элементарный излучатель в режиме приема

Любая антенна может с равным успехом работать как на передачу, так и на прием колебаний. Изучим общие закономерности работы приемной антенны на примере элементарного электрического излучателя длиной l, который облучается плоской электромагнитной волной, у которой вектор $\mathbf{E}$ параллелен оси излучателя.

Если зажимы антенны разомкнуты, то под действием поля на них возникает переменное напряжение, комплексная амплитуда которого в первом приближении

$$\dot{U}=\dot{E}l. \tag{13.47}$$

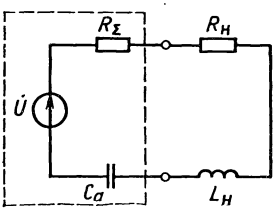


Рис. 13.7. Эквивалентная схема элементарного электрического излучателя в режиме приема (выделена пунктиром)

Данная формула, достаточно ясная интуитивно, может быть доказана строго, на чем мы здесь не останавливаемся. В теории антенн она отображает важный *принцип наводимых ЭДС.*

Чтобы извлечь мощность из вибратора, его следует нагрузить на некоторое, в общем случае комплексное, сопротивление $Z_н$. Обычно таким двухполюсником нагрузки служат входные цепи приемника. При этом в замкнутой цепи будет возникать наведенный ток и антенна будет переизлучать (рассеивать) падающее поле. Это обстоятельство является принципиальным — любая антенна неизбежно рассеивает часть мощности в окружающее пространство.

На рис. 13.7 изображена эквивалентная схема элементарного излучателя, работающего в режиме приема. Из-за эффекта переизлучения внутреннее сопротивление эквивалентного генератора обязательно содержит действительную (активную) часть, численно равную сопротивлению излучения R_Σ. Кроме того, данная антенна, похожая в сущности на небольшой конденсатор с двумя обкладками, имеет некоторое реактивное сопротивление, для учета которого на эквивалентной схеме предусмотрен емкостный элемент C_a.

Мощность, передаваемая из антенны в нагрузку, будет максимальной в режиме согласования, при котором абсолютные значения реактивных сопротивлений элементов C_a и $L_н$ на рабочей частоте одинаковы. Это означает, что цепь антенны должна быть настроена *в резонанс.* Кроме того, в режиме согласования обеспечивается равенство действительных частей полных сопротивлений антенны и нагрузки:

$$R_н=R_\Sigma. \tag{13.48}$$

При этом ток в антенне будет иметь комплексную амплитуду $\dot{I}=\dot{U}/(2R_{\Sigma})$, а мощность, выделяемая в нагрузке, примет максимально достижимое значение

$$P_{н\max}=\frac{1}{2}I_m^2R_{\Sigma}=\frac{U_m^2}{8R_{\Sigma}}. \qquad (13.49)$$

Если подставить сюда величину U_m в соответствии с равенством (13.47) и использовать выражение $R_{\Sigma}=20(\beta l)^2$ [см. формулу (13.44)], то окажется, что

$$P_{н\max}=\frac{E_m^2\lambda^2}{640\pi^2}, \qquad (13.50)$$

причем, и это довольно неожиданно, мощность в нагрузке *не зависит от длины антенны.* Причина состоит в том, что с ростом длины антенны наведенное напряжение увеличивается, однако вместе с этим растет действительная часть ее внутреннего сопротивления.

Если теперь учесть, что среднее значение вектора Пойнтинга падающей волны в точке размещения антенны

$$\Pi_{ср}=E_m^2/(240\pi),$$

то формулу (13.50) можно записать так:

$$P_{н\max}=\Pi_{ср}A_{эф}, \qquad (13.51)$$

где

$$A_{эф}=3\lambda^2/(8\pi)=0.119\lambda^2 \qquad (13.52)$$

представляет собой так называемую *эффективную площадь* элементарного излучателя в режиме приема.

Таким образом, элементарный электрический излучатель способен извлечь из падающей плоской электромагнитной волны и передать в согласованную нагрузку всю мощность, переносимую в пределах участка волнового фронта площадью $0.119\lambda^2$.

В диапазонах декаметровых и метровых волн действительная часть входного сопротивления приемника, как правило, существенно превосходит сопротивление излучения обычно применяемых штыревых антенн, коротких по сравнению с длиной волны. К тому же добиться резонансного режима в антенной цепи технически довольно сложно. Поэтому для повышения уровня полезного сигнала целесообразно по возможности увеличивать длину штыревой антенны.

Для надежного и высококачественного приема необходимо, чтобы мощность сигнала в нагрузке антенны $P_н$ ощутимо, скажем, в 5—10 раз превышала мощность $P_ш$ собственных шумов приемника, которую вычисляют по формуле [2]

$$P_ш=kT_ш\Delta f. \qquad (13.53)$$

Здесь $k=1.38\cdot10^{-23}$ Вт/(Гц·К) — постоянная Больцмана; $T_ш$ — параметр, называемый приведенной шумовой температурой приемника, К; Δf — ширина полосы пропускания приемника, Гц.

Пример 13.4. Элементарный вибратор длиной $l=0.5$ м ориентирован параллельно электрическому вектору плоской электромагнитной волны с напряженностью $E_m=5$ мкВ/м. Длина волны $\lambda=6$ м (частота $f=50$ МГц). Вычислить мощность $P_{н\,max}$ в нагрузке, согласованной с антенной, а также мощность $P_н$ в нагрузке с активным сопротивлением $R_н=600$ Ом. В обоих случаях считать, что реактивные составляющие сопротивлений антенны и нагрузки (приемника) взаимно скомпенсированы. Для второго из рассматриваемых случаев найти числовое значение так называемого отношения сигнал/шум $q=P_н/P_ш$, характеризующего уровень полезного сигнала на входе приемника по отношению к уровню собственного шума. Положить $T_ш=300$ К (комнатная температура), $\Delta f=100$ кГц.

Эффективная площадь данной антенны $A_{эф}=0.119\lambda^2=4.284$ м^2. Среднее значение вектора Пойнтинга падающей волны $\Pi_{ср}=E_m^2/(240\pi)=3.3\cdot10^{-14}$ Вт/м^2. Мощность сигнала в нагрузке, согласованной с антенной, $P_{н\,max}=\Pi_{ср}A_{эф}=1.414\cdot10^{-13}$ Вт.

Сопротивление излучения рассматриваемого вибратора $R_Σ=80\pi^2(l/\lambda)^2=5.48$ Ом значительно меньше активной части входного сопротивления приемника (600 Ом) во втором случае. Это значит, что приближенно данную антенну можно рассматривать как источник ЭДС с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. Амплитуда напряжения источника сигнала на входе приемника $U_m=E_ml=2.5\cdot10^{-6}$ В; при этом мощность в нагрузке $P_н=U_m^2/(2R_н)=6.25\cdot10^{-12}/(2\cdot600)=5.2\cdot10^{-15}$ Вт, что примерно в 25 раз меньше мощности в согласованной нагрузке.

Мощность шума, приведенная ко входу приемника, $P_ш=kT_ш\Delta f=1.38\cdot10^{-23}\cdot3\cdot10^2\cdot10^5=4.14\cdot10^{-16}$ Вт. Тогда отношение сигнал/шум $q=P_н/P_ш=12.56$. Такая цифра свидетельствует о возможности уверенного приема заданного сигнала.

13.10. Элементарный щелевой излучатель

Данная излучающая система представляет собой бесконечную идеально проводящую плоскость, в которой прорезана щель длиной l и шириной Δ (рис. 13.8). Если поперек щели создать переменное электрическое поле, то, как известно, такая щель становится элементом, по которому протекает гипотетический магнитный ток в направлении, параллельном длинным кромкам щели.

В соответствии с принципом перестановочной двойственности щелевой излучатель дуален по отношению к изученному ранее электрическому излучателю и поэтому может называться также магнитным излучателем.

Возбуждение щели осуществляют различными способами. Можно, например, к длинным кромкам щели непосредственно подключить источник высокочастотного напряжения (рис. 13.8, *а*). При этом возникает двустороннее возбуждение щели, так как энергия электромагнитного поля излучается в оба полупространства. Однако чаще прибегают к одностороннему возбуждению щелевого излучателя, например, при помощи прямоугольного волновода с волной типа H_{10} (рис. 13.8, *б*). Здесь переменные во времени электрические заряды на кромках щели наводятся за счет протекания поверхностных токов по тому участку металлической плоскости, который закорачивает волновод.

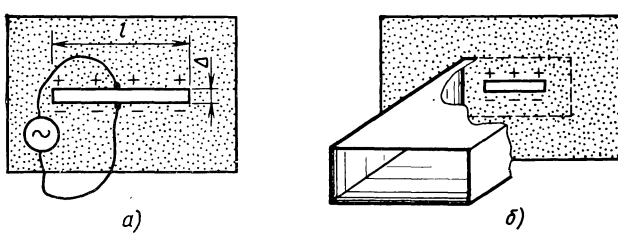


Рис. 13.8. Элементарный щелевой излучатель:
а — с двусторонним излучением; *б* — с односторонним излучением

Для того чтобы рассматриваемая щель могла считаться элементарным излучателем, необходимо потребовать выполнения неравенства $l \ll \lambda$; при этом щель обычно является узкой, т. е. $\Delta \ll l$. Не ограничивая общности, будем изучать щелевой излучатель с двусторонним возбуждением. При этом нет нужды решать какую-либо новую электродинамическую задачу, поскольку достаточно применить принцип перестановочной двойственности к найденным ранее проекциям векторов поля элементарного электрического излучателя. Выпишем формулы, описывающие поля обоих излучателей в дальней зоне.

Электрический излучатель

$$\dot{H}_\varphi = \frac{j\dot{I}_э l\beta}{4\pi} \sin\theta \frac{e^{-j\beta r}}{r},$$

$$\dot{E}_\theta = \frac{j\dot{I}_э l\beta}{4\pi} Z_0 \sin\theta \frac{e^{-j\beta r}}{r}. \qquad (13.54)$$

Щелевой излучатель

$$\dot{E}_\varphi = \frac{-j\dot{I}_м l\beta}{4\pi} \sin\theta \frac{e^{-j\beta r}}{r}, \qquad (13.55)$$

$$\dot{H}_\theta = \frac{j\dot{I}_м l\beta}{4\pi Z_0} \sin\theta \frac{e^{-j\beta r}}{r}.$$

При переходе от (13.54) к (13.55) выполнена замена $Z_0 \leftrightarrow 1/Z_0$. Общий характер такого соотношения вытекает из формул (2.31); знак в правой части обусловлен тем, что векторы Пойнтинга исходного и двойственного электромагнитных полей должны быть ориентированы в одну сторону.

Заметим, что в дальней зоне элементарный щелевой излучатель имеет электрический вектор с единственной составляющей, направленной вдоль орта азимутальной координаты. Это означает, что силовые линии вектора напряженности электрического поля, выходя из щели, на некотором расстоянии приобретают форму окружностей (см. рис. 2.5, *б*).

На практике в качестве величины, характеризующей возбуждающий источник, вместо довольно абстрактной амплитуды стороннего магнитного тока $\dot{I}_м$ гораздо удобнее использовать комплексную амплитуду $\dot{U}_щ$ напряжения в щели, измеряемую непосредственно в вольтах. Свяжем между собой эти две величины, для чего вновь обратимся к рис. 2.5, *а*, *б*. Касательную проекцию магнитного вектора на поверхности идеально проводящей полоски можно найти, совместив путь интегрирования с контуром поперечного сечения проводника, а затем воспользовавшись законом полного тока:

$$\dot{H}_\tau = \dot{I}_э/(2\Delta). \qquad (13.56)$$

Здесь предполагается, что толщина полоски равна нулю.

Применив элементарную формулу электростатики и считая приближенно, что напряженность электрического поля поперек щели неизменна, находим

$$\dot{E}_\tau = \dot{U}_ш/\Delta. \qquad (13.57)$$

Поскольку в силу принципа перестановочной двойственности электрический и магнитный векторы взаимозаменяемы, последняя формула должна соответствовать равенству (13.56) и записываться в виде

$$\dot{E}_\tau = \dot{I}_м/(2\Delta), \qquad (13.58)$$

откуда

$$\dot{I}_м = 2\dot{U}_щ. \qquad (13.59)$$

Итак, комплексная амплитуда стороннего магнитного тока, протекающего по щелевому излучателю, численно равна удвоенной комплексной амплитуде напряжения в щели. Окончательные формулы для расчета проекций векторов электромагнитного поля в дальней зоне щелевого излучателя таковы:

$$\dot{E}_\varphi = \frac{-j\dot{U}_{щ} l\beta}{2\pi} \sin\theta \frac{e^{-j\beta r}}{r}; \qquad \dot{H}_\theta = \frac{j\dot{U}_{щ} l\beta}{2\pi Z_0} \sin\theta \frac{e^{-j\beta r}}{r}. \tag{13.60}$$

Сопротивление излучения щелевого излучателя. В соответствии с равенствами (13.60) усредненный за период колебаний вектор Пойнтинга имеет единственную составляющую, направленную вдоль орта радиального направления (обратите внимание на знак в правой части):

$$\Pi_{ср\,r} = -{}^1/_2 \dot{E}_\varphi \dot{H}_\theta^* = \frac{U_{щ\,m}^2 (\beta l)^2 \sin^2\theta}{8\pi^2 r^2 Z_0}. \tag{13.61}$$

Мощность, излучаемую элементарным щелевым вибратором, находим путем интегрирования радиальной проекции усредненного вектора Пойнтинга по поверхности S сферы достаточно большого радиуса, точки которой расположены в дальней зоне излучателя:

$$P_\Sigma = \int_S \Pi_{ср\,r}\, dS = \frac{U_{щ\,m}^2 (\beta l)^2}{8\pi^2 Z_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta = \frac{U_{щ\,m}^2 (\beta l)^2}{3\pi Z_0}. \tag{13.62}$$

Поскольку мощность излучения оказывается пропорциональной квадрату напряжения в щели, формулу (13.62) можно записать в следующем виде:

$$P_\Sigma = U_{щ\,m}^2 / (2R_{\Sigma щ}), \tag{13.63}$$

где $R_{\Sigma\,щ}$ — величина, измеряемая в омах и называемая сопротивлением излучения щелевого излучателя. В теории цепей доказывается, что именно такой оказывается активная мощность, выделяемая в резисторе под действием гармонического напряжения. Сопоставляя выражения (13.62) и (13.63), убеждаемся, что

$$R_{\Sigma щ} = \frac{3\pi Z_0}{2(\beta l)^2} = 45\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2. \tag{13.64}$$

Чем меньше длина волны по сравнению с рабочей длиной волны, тем больше сопротивление излучения и тем меньше излученная мощность.

В заключение сравним эффективность рассмотренных элементарных излучателей, электрического и щелевого. Предположим, что имеются два совершенно одинаковых по конфигурации излучателя разных типов. Пусть по электрическому излучателю протекает ток с амплитудой I_m. Спрашивается, какова должна быть амплитуда $U_{щ\,m}$ напряжения в щели для того, чтобы оба вибратора излучали одинаковую мощность, т. е. выполнялось равенство

$$I_m^2 R_\Sigma/2 = U_{щ\,m}^2/(2R_{\Sigma щ}).$$

Положим для определенности, что $I_m = 1$ А. Тогда в соответствии с формулами (13.45) и (13.64) получаем $U_{щ\,m} = 188$ В. Этот результат в известном смысле говорит о недостатке щелевого излучателя, так как напряжение в щели существенно ограничено возможностью электрического пробоя между близко расположенными кромками.

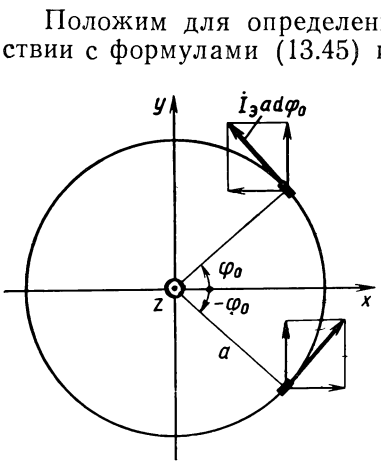


Рис. 13.9. Элементарный рамочный излучатель

13.11. Элементарный рамочный излучатель

Так принято называть круговой виток из проводника радиусом $a \ll \lambda$, по которому протекает переменный электрический ток с комплексной амплитудой $\dot{I}_э$, одинаковой во всех точках проводящей рамки.

Предположим, что рамка располагается в экваториальной плоскости сферической системы координат; точка начала координат совпадает с центром излучающего элемента (рис. 13.9). Рассмотрим два элемента тока величиной по $\dot{I}_э a\,\mathrm{d}\,\varphi_0$, расположенные симметрично по отношению к оси x в точках с координатами $\pm\varphi_0$. Каждый такой элемент ведет себя подобно элементарному электрическому излучателю и на основании принципа суперпозиции может быть представлен в виде двух составляющих по осям x и y. При этом, как легко заметить, x-составляющие взаимно компенсируются, а y-составляющие, складываясь, удваиваются. Значит, каждая пара таких элементов тока создает в пространстве электрический векторный потенциал с единственной проекцией вдоль азимутальной координаты φ.

Будем считать, что точка наблюдения P лежит в плоскости XOZ, имеет полярную координату θ и располагается в дальней зоне, т. е. на расстоянии не менее нескольких длин волн от излу-

чающей рамки. Как следует из рис. 13.9, геометрическая разность хода до точки наблюдения из центра рамки и из выделенных элементов равна $a \sin\theta \cos\varphi_0$. Эту величину необходимо учесть в быстроосциллирующем экспоненциальном множителе, входящем в формулу (13.33). В то же время длина радиуса-вектора, фигурирующая в знаменателе этой формулы, с большой точностью может считаться одинаковой и равной r для всех точек излучающей рамки. На основании сказанного по аналогии с (13.28) имеем

$$\dot{A}_{э\varphi} = \frac{\mu_0 a \dot{I}_э}{2\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \int_0^{\pi} \cos\varphi_0 \, e^{j\beta a \sin\theta \cos\varphi_0} \, d\varphi_0. \qquad (13.65)$$

Так как размер рамки намного меньше длины волны, т. е. $\beta a \ll 1$, то подынтегральную функцию в (13.65) можно существенно упростить, воспользовавшись двумя первыми членами разложения экспоненты в ряд Тейлора

$$e^{j\beta a \sin\theta \cos\varphi_0} \approx 1 + j\beta a \sin\theta \cos\varphi_0.$$

Тогда

$$\dot{A}_{э\varphi} = \frac{\mu_0 a \dot{I}_э}{2\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \int_0^{\pi} (1 + j\beta a \sin\theta \cos\varphi_0) \cos\varphi_0 \, d\varphi_0 =$$

$$= \frac{j\mu_0 I_э S_р}{2\lambda} \sin\theta \frac{e^{-j\beta r}}{r}, \qquad (13.66)$$

где $S_р$ — площадь рамки. Отсюда в соответствии с формулой $\mathbf{H} = (1/\mu_0) \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_э$ находим проекции вектора напряженности магнитного поля, возбуждаемого в пространстве элементарным рамочным излучателем:

$$\dot{H}_r = \frac{1}{\mu_0 r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \dot{A}_{э\varphi}) = \frac{j\dot{I}_э S_р}{\lambda} \cos\theta \frac{e^{-j\beta r}}{r^2}, \qquad (13.67)$$

$$\dot{H}_\theta = -\frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial}{\partial r} (r\dot{A}_{э\varphi}) = -\frac{\dot{I}_э S_р \beta}{2\lambda} \sin\theta \frac{e^{-j\beta r}}{r}. \qquad (13.68)$$

Следует обратить внимание на то, что амплитуда проекции $\dot{H}_r$ уменьшается с ростом радиуса по закону $1/r^2$, т. е. гораздо быстрее, чем амплитуда проекции $\dot{H}_\theta$. Поэтому можно обоснованно считать, что в дальней зоне магнитный вектор имеет лишь одну проекцию $\dot{H}_\theta$.

Электромагнитное поле, создаваемое рамочным излучателем, в дальней зоне представляет собой сферическую (локально-плоскую) волну, переносящую мощность в радиальном направлении.

Поэтому на основании равенства (13.68) единственная отличная от нуля проекция электрического вектора

$$\dot{E}_\varphi = -Z_0 \dot{H}_\theta = \frac{Z_0 \dot{I}_э S_р \beta}{2\lambda} \sin\theta \frac{e^{-j\beta r}}{r}. \qquad (13.69)$$

Сравнивая формулы (13.68) и (13.69) с аналогичными выражениями (13.60), найденными ранее для элементарного щелевого излучателя, убеждаемся в том, что рамка, малая по сравнению с длиной волны, может рассматриваться как *элементарный магнитный излучатель,* у которого воображаемый магнитный ток протекает перпендикулярно плоскости рамки. Диаграмма направленности рамки описывается функцией $\sin\theta$, и поэтому такой элемент не излучает (а значит, и не принимает) волн в осевом направлении.

Не останавливаясь на подробностях вычислений, приведем окончательную формулу для сопротивления излучения рамки (Ом):

$$R_\Sigma = 2P_\Sigma / I^2_{р\,m} = 320\pi^4 S_р^2 / \lambda^4. \qquad (13.70)$$

Например, если $S_р = 10^{-2}$ м^2, $\lambda = 30$ м, то $R_\Sigma = 3.85 \cdot 10^{-4}$ Ом. Столь малое значение сопротивления излучения серьезно затрудняет создание эффективных рамочных антенн для работы в передающем режиме. Действительно, в рассматриваемом случае при протекании тока с амплитудой $I_{р\,m} = 2$ А рамка излучает лишь мощность $P_\Sigma = I^2_{р\,m} R_\Sigma / 2 = 7.7 \cdot 10^{-4}$ Вт. Чтобы увеличить сопротивление излучения, прибегают к многовитковым рамкам. Нетрудно показать, что их сопротивление излучения растет пропорционально множителю N^2, где N — число витков.

Рамочные антенны часто применяют в радиоприемной технике, например в радиокомпасах для пеленгации угла прихода волн. В портативных приемниках повсеместно используют многовитковые рамочные антенны, намотанные на ферритовых стержнях. Такие антенны выгодно отличаются малыми габаритами.

ЗАДАЧИ

13.1. Вычислите проекции векторов электромагнитного поля, возбуждаемого в воздухе элементарным электрическим излучателем длиной 10 см на расстоянии 100 м в экваториальной плоскости ($\theta = 90°$). Частота колебаний 100 МГц, амплитуда тока в антенне 2 А.

13.2. Применительно к условиям, сформулированным в задаче 13.1, определите сопротивление излучения, а также излучаемую мощность.

13.3. Антенна передающей станции длинноволнового радиовещательного диапазона представляет собой вертикальную мачту

высотой 120 м. Предположив, что амплитуда неизменна в каждом сечении мачты, найдите ток в антенне, если излучаемая мощность равна 75 кВт.

13.4. Элементарный щелевой излучатель имеет двустороннее возбуждение и работает на частоте 600 МГц. Длина излучателя 4 см. Известно, что в точке свободного пространства с координатами $r=800$ м, $\theta=30^{\circ}$ данный излучатель создает электрическое поле, имеющее азимутальную проекцию $E_{\varphi m}=10$ мкВ/м. Определите амплитуду напряжения между кромками щели.

13.5. Приемный электрический вибратор имеет длину, малую по сравнению с длиной волны принимаемых колебаний. Ось вибратора ориентирована параллельно вектору напряженности электрического поля падающей плоской электромагнитной волны. Найдите мощность, поступающую во входные цепи радиоприемного устройства в согласованном режиме, если известно, что частота поля равна 40 МГц, а напряженность электрического поля падающей волны составляет 200 мкВ/м.

13.6. Одновитковый рамочный излучатель имеет диаметр 0.5 м и работает на частоте 25 МГц. По излучателю протекает переменный гармонический ток с амплитудой 0.3 А. Найдите амплитуду вектора напряженности магнитного поля, создаваемого таким излучателем в экваториальной плоскости ($\theta=90^{\circ}$) на расстоянии 10 км от излучателя.

Глава четырнадцатая

РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН В ЗЕМНЫХ УСЛОВИЯХ

В настоящей главе обсуждаются особенности работы реальных радиолиний, у которых приемная и передающая антенны располагаются в непосредственной близости от земной поверхности. Показано, что условия распространения электромагнитных волн существенно зависят от физических параметров как земной поверхности, так и атмосферы, причем эти влияния оказываются различными в разных частотных диапазонах.

14.1. Общие характеристики диапазонов радиоволн

Как правило, термин «радиоволны» обозначает электромагнитные волны, принадлежащие тому или иному диапазону частот, применяемому в радиотехнике. Специальным решением Международного союза электросвязи (МСЭ) и Международной электротех-

нической комиссии (МЭК) принято различать следующие диапазоны радиочастот и соответствующих длин радиоволн:

- очень низкие частоты (ОНЧ) — от 3 до 30 кГц, или мириаметровые волны (длина волны от 100 до 10 км);
- низкие частоты (НЧ) — от 30 до 300 кГц, или километровые волны (длина волны от 10 до 1 км);
- средние частоты (СЧ) — от 300 кГц до 3 МГц, или гектометровые волны (длина волны от 1 км до 100 м);
- высокие частоты (ВЧ) — от 3 до 30 МГц, или декаметровые волны (длина волны от 100 до 10 м);
- очень высокие частоты (ОВЧ) — от 30 до 300 МГц, или метровые волны (длина волны от 10 до 1 м);
- ультравысокие частоты (УВЧ) — от 300 МГц до 3 ГГц, или дециметровые волны (длина волны от 1 м до 10 см);
- сверхвысокие частоты (СВЧ) — от 3 до 30 ГГц, или сантиметровые волны (длина волны от 10 до 1 см);
- крайне высокие частоты (КВЧ) — от 30 до 300 ГГц, или миллиметровые волны (длина волны от 1 см до 1 мм).

Радиотехника исторически развивалась с неуклонной тенденцией к освоению все более высокочастотных диапазонов. Это было связано прежде всего с необходимостью создавать высокоэффективные антенные системы, концентрирующие энергию в пределах узких телесных углов. Дело в том, что антенна с узкой диаграммой направленности обязательно должна иметь поперечные размеры, существенно превышающие рабочую длину волны. Такое условие легко выполнить в метровом, а тем более в сантиметровом диапазоне, в то время как остронаправленная антенна для мириаметровых волн имела бы совершенно неприемлемые габариты.

Вторым фактором, определяющим ценные свойства высокочастотных диапазонов, служит то обстоятельство, что здесь удается реализовать большое число радиоканалов со взаимно не пересекающимися полосами частот. Это дает возможность, с одной стороны, широко использовать принцип частотного разделения каналов [2], а с другой — применять широкополосные системы модуляции, например частотную модуляцию. При определенных условиях такие системы модуляции способны обеспечить высокую помехоустойчивость работы радиоканала.

В практике радиовещания и телевидения сложилась также несколько упрощенная классификация диапазонов радиоволн. Согласно ей, мириаметровые волны называют сверхдлинными волнами (СДВ), километровые — длинными волнами (ДВ), гектометровые — средними волнами (СВ), декаметровые — короткими волнами (КВ), а все более высокочастотные колебания с длинами волн короче 10 м относят к ультракоротким волнам (УКВ). Вол-

ны сантиметрового и длинноволновой части миллиметрового диапазонов иногда называют также микроволнами (англ. microwaves).

14.2. Электродинамические свойства земной поверхности и атмосферы Земли

Земной шар представляет собой тело почти сферической формы радиусом около 6370 км. В большинстве радиолиний, исключая космические, приемные и передающие антенны приподняты над земной поверхностью на высоты, существенно меньшие радиуса

Таблица 14.1. Электродинамические параметры подстилающих сред

Среда	ε	σ, См/м
Морская вода	75	1—6
Пресная вода	80	10^{-2}—$3\cdot10^{-2}$
Влажная почва	20—30	$2\cdot10^{-2}$—0.1
Сухая почва	3—5	10^{-5}—$2\cdot10^{-3}$
Лед	4—5	10^{-2}—$0.1\,0^{-2}$—0.1
Снег	1.2	10^{-6}
Лес	1.04	10^{-6}—10^{-5}

Земли. В то же время длина трассы, т. е. расстояние между передатчиком и приемником, измеренное вдоль земной поверхности, может изменяться в очень широких пределах, колеблясь от нескольких километров (телевидение, ближняя радиосвязь) до нескольких тысяч километров (радиовещание, радионавигация). По этой причине при расчете технических характеристик приземных радиоканалов используются различные модели формы земной поверхности. В простейшем случае короткой трассы кривизной поверхности Земли обычно пренебрегают и считают, что граница раздела этой поверхности с атмосферой является плоской. Если же длина трассы сравнима с радиусом Земли, то приходится учитывать реальную форму границы раздела, поскольку прямая видимость между начальной и конечной точками трассы отсутствует. Затеняющее действие земной поверхности приводит к известному из физики явлению дифракции радиоволн. Как следствие, принятая волна оказывается существенно ослабленной.

Электродинамические параметры земной поверхности. В земных условиях волны распространяются над той или иной подстилающей поверхностью (почва, скальный грунт, лес, пресная или морская вода, лед и т. д.). Все эти материальные среды являются практически немагнитными, и их относительная магнитная проницаемость μ с достаточной для практики точностью может считать-

ся равной единице. Основными параметрами материала подстилающей поверхности оказываются относительная диэлектрическая проницаемость ε и удельная электрическая проводимость σ. Как показывают эксперименты, оба эти параметра подвержены частотной дисперсии, которая, однако, выражена достаточно слабо. В табл. 14.1 приводятся числовые данные для наиболее распространенных сред применительно к частотам ниже 300 МГц.

Нужно заметить, что подобные параметры, часто встречающиеся в литературе по распространению радиоволн и по радиолокации, описывают усредненные характеристики, получаемые на основе многочисленных измерений, проводимых в различных географических и метеорологических условиях. Достоверность таких цифр применительно к отдельно взятому конкретному эксперименту не слишком высока и дает возможность проводить лишь ориентировочные расчеты, которые тем не менее во многих случаях удовлетворяют практическим запросам.

Как указывалось в § 2.3, обобщающей числовой характеристикой немагнитной материальной среды с омическими потерями служит комплексная диэлектрическая проницаемость

$$\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon\varepsilon_0 - j\sigma/\omega. \qquad (14.1)$$

Вещественная часть этого комплексного числа пропорциональна суммарной плотности тока смещения и тока поляризации, в то время как мнимая часть характеризует объемную плотность токов проводимости. Можно заметить, что с понижением рабочей частоты ω относительная доля токов проводимости непрерывно возрастает, и при $\omega \to 0$ материальная среда с потерями становится металлоподобной.

Пример 14.1. Определить значение частоты, при которой в сухой почве с параметрами $\varepsilon = 5$, $\sigma = 10^{-3}$ См/м действительная и мнимая части комплексной диэлектрической проницаемости становятся одинаковыми.

В соответствии с формулой (14.1) $\operatorname{Re}\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon\varepsilon_0 = 5 \cdot 10^{-9}/(36\pi) = 4.42 \cdot 10^{-11}$ Ф/м. Отсюда искомая частота $\omega = \sigma/(\varepsilon\varepsilon_0) = 10^{-3}/(4.42 \cdot 10^{-11}) = 2.26 \cdot 10^7$ с$^{-1}$ или $f = 3.6$ МГц.

Таким образом, на волнах длинноволнового и средневолнового диапазонов сухая почва может рассматриваться как металлоподобная среда с потерями. Еще в большей степени это относится к такой распространенной подстилающей поверхности, как морская вода, занимающая большую часть поверхности Земного шара.

В грубом приближении при расчете радиолиний низкочастотных диапазонов (с частотами менее 1 МГц) земную поверхность можно приближенно считать идеально проводящей, что существенно упрощает решение любых задач о распространении радиоволн. С ростом рабочей частоты омические потери начинают сказываться все в большей степени. Это обстоятельство приводит к дополнительному ослаблению радиоволн. В диапазоне УКВ большинство материальных сред, из которых сложена земная поверхность, могут рассматриваться как несовершенные диэлектрики, у которых действительная часть комплексной диэлектрической проницаемости существенно превосходит мнимую часть.

Атмосфера Земли и ее строение. Химический состав земной атмосферы в настоящее время изучен весьма тщательно. Атмосфера Земли представляет собой смесь молекулярного азота (78 %) и молекулярного кислорода (21 %). На долю прочих компонентов, главным образом водяного пара и некоторых инертных газов, приходится лишь 1 %.

Физические параметры атмосферы Земли весьма сильно зависят от высоты. По этой причине общепринято рассматривать атмосферу как объединение двух областей: нижней атмосферы — области с высотами от нуля до 60 км, и верхней атмосферы, которая располагается в интервале высот от 60 до 20 000 км. В свою очередь, нижняя атмосфера делится на *тропосферу* (высоты до 15 км) и *стратосферу* (высоты от 15 до 60 км).

Физические процессы в тропосфере и стратосфере определяют собой погодные и климатические явления на Земле. Они связаны с интенсивным массо- и теплообменом, а также переносом больших воздушных масс.

Верхняя атмосфера Земли, чаще называемая *ионосферой,* подвергается интенсивному облучению Солнца и других космических источников. За счет этого происходит ионизация атомов газов, что существенным образом влияет на характер распространения радиоволн в ионосфере.

Следует заметить, что деление атмосферы на различные области носит условный характер и проводится лишь с тем, чтобы упростить раздельное изучение тех или иных физических явлений. Какие-либо четко очерченные границы между областями атмосферы, безусловно, отсутствуют.

Атмосфера удерживается за счет действия гравитационного поля Земли. Внутри атмосферы существует гидростатическое давление p, которое в средних широтах на уровне Мирового океана составляет около 0.1 МПа. С увеличением высоты в тропосфере давление воздуха падает приблизительно по линейному закону со скоростью 12 кПа/км. В ионосфере давление воздуха с ростом высоты падает по экспоненциальному закону, т. е. еще более резко.

Вторым физическим параметром атмосферного воздуха служит его абсолютная температура T. Измерения показывают, что температура воздуха на поверхности Земли составляет в среднем 300 К. При увеличении высоты температура меняется по сложному немонотонному закону, падая до 200 К на верхней границе стратосферы. В ионосфере температура газа непрерывно растет, достигая 1200 К на высотах порядка 1000 км.

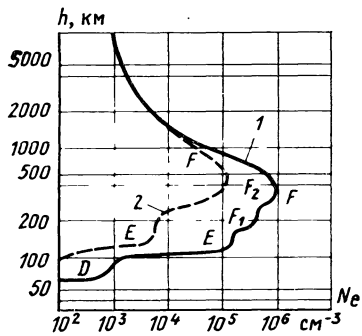


Рис. 14.1. Распределение электронной концентрации в ионосфере по высоте:
1 — днем; *2* — ночью

Зная параметры p и T, можно рассчитать концентрацию молекул газа $N_м$, воспользовавшись формулой из курса физики

$$N_м = p/(kT), \qquad (14.2)$$

где $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана. Задавшись, например, цифрами $p = 10^5$ Па, $T = 300$ К, находим оценочное значение концентрации молекул на поверхности Земли: $N_м = 2.41 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$ $= 2.41 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$.

Как уже указывалось, исключительно важную роль в формировании условий распространения радиоволн играет ионосфера Земли. Плотность газа в ионосфере очень мала, и поэтому жесткое электромагнитное излучение Солнца (в основном ультрафиолетовое и рентгеновское) оказывается здесь весьма интенсивным. Энергия квантов этого излучения достаточна не только для диссоциации молекул, приводящей к образованию атомарных газов, но и для отрыва электронов от атомов. В результате ионизации части атомов газ превращается в хаотическую смесь ионов, свободных электронов, нейтральных атомов, а также нейтральных молекул, не претерпевших диссоциации. Электродинамические свойства такой ионизированной среды, называемой газовой плазмой, рассматривались в гл. 5.

Следует заметить, что фотохимический процесс ионизации в плазме является обратимым — наряду с ним постоянно идет процесс рекомбинации ионов и свободных электронов, приводящий к возникновению нейтральных атомов газа. В стационарных условиях между процессами ионизации и рекомбинации устанавливается динамическое равновесие, уровень которого определяется главным образом интенсивностью ионизирующего излучения.

Как подчеркивалось в гл. 5, важнейшим физическим параметром ионизированной газовой среды служит электронная концент-

рация N_e, определяющая число свободных электронов в единице объема. Характерные графики распределения электронной концентрации в зависимости от высоты h точки наблюдения представлены на рис. 14.1. Одна из кривых относится к дневным, а другая — к ночным часам. Принципиально важно, что обе кривые имеют немонотонный характер; на некоторой высоте значение N_e оказывается максимальным. Причина этого состоит в следующем. На больших высотах плотность потока солнечного излучения велика, однако атмосфера здесь весьма разрежена и поэтому значения N_e сравнительно малы. Вблизи земной поверхности, наоборот, плотность газа велика, однако поток ионизирующего излучения сильно ослаблен толщей атмосферы, что также приводит к малым значениям электронной концентрации.

В высотном профиле распределения электронной концентрации принято выделять ряд более или менее выраженных слоев, получивших специальные буквенные символы (рис. 14.1):

- Слой D. Так называют самый нижний слой ионосферы, лежащий на высотах от 60 до 90 км. Слой D существует только днем. Электронная концентрация в нем изменяется во времени пропорционально угловой высоте Солнца над горизонтом и не превышает 10^3—10^4 см$^{-3}$. Ночью этот слой исчезает под действием рекомбинации.
- Слой E. Располагается на высотах порядка 110 км. Днем значение N_e в данном слое достигает $1.5 \cdot 10^5$ см$^{-3}$, а ночью падает до $5 \cdot 10^3$ см$^{-3}$.
- Слой F. Существует на высотах порядка 250 км днем и 320 км ночью. Данный слой характеризуется наивысшей электронной концентрацией, которая достигает $2 \cdot 10^6$ см$^{-3}$ в полуденные часы. Ночью значения N_e в слое F не превышают $2 \cdot 10^5$ см$^{-3}$. Днем слой F разделяется на два подслоя F_1 и F_2, которые ночью сливаются в единый слой.

Заметим, что кривые, приведенные на рис. 14.1, имеют усредненный характер и могут существенно варьироваться в зависимости от выбора географических координат точки наблюдения. Кроме того, числовые значения электронной концентрации во всех ионосферных слоях существенным образом зависят от уровня солнечной активности, которая, в свою очередь, испытывает как регулярные изменения с периодом в 11 лет, так и случайные колебания. Имеется специальная международная служба, занимающаяся прогнозом состояния ионосферы. Использование таких прогнозов дает возможность существенно повысить надежность работы радиоканалов в земных условиях.

14.3. Влияние тропосферы и ионосферы на распространение радиоволн

В соответствии с формулой (14.2) концентрация молекул в тропосфере $N_м$ падает при увеличении высоты. Это, в свою очередь, приводит к снижению диэлектрической проницаемости воздуха ε, а значит, и его показателя преломления $n=\sqrt{\varepsilon}$. Фактически показатель преломления воздуха в пределах тропосферы весьма мало отличается от единицы при любых условиях. Поэтому в инженерных расчетах для удобства применяют так называемый *индекс преломления*

$$N=(n-1)\cdot 10^6. \qquad (14.3)$$

Это безразмерное число зависит от метеорологических условий и от выбора пункта наблюдения на поверхности Земли. В среднем значение N колеблется в пределах от 250 до 450.

При увеличении высоты h индекс преломления тропосферы падает практически по линейному закону со скоростью $\mathrm{d}N/\mathrm{d}h=-40$ км$^{-1}$. Формула справедлива в интервале высот, не превышающих нескольких километров.

Пример 14.2. Известно, что на уровне земной поверхности значение индекса преломления $N_0=300$. Найти относительную диэлектрическую проницаемость воздуха ε на земле и на высоте $h=3$ км.

Формула, определяющая параметр ε, непосредственно вытекает из (14.3):

$$\varepsilon=\left(1+\frac{N}{10^6}\right)^2.$$

Индекс преломления на высоте 3 км $N=N_0-(\mathrm{d}N/\mathrm{d}h)h=300-40\cdot 3=180$. Подставляя соответствующие цифры, находим, что $\varepsilon(h=0)=1.0006$, в то время как $\varepsilon(h=3\text{ км})=1.00036$.

Рассмотренный пример убеждает, что абсолютные изменения оптической плотности атмосферного воздуха при увеличении высоты оказываются незначительными. В большинстве случаев они не оказывают существенного влияния на процесс распространения радиоволн, например, в радиовещательных каналах длинноволнового и средневолнового диапазонов. Однако встречаются ситуации, когда важнейшей информацией служит *угол прихода* радиоволн, поступающих в приемную антенну. В частности, с этим приходится

сталкиваться при создании высокоточных радиолокаторов и систем радионавигации. Здесь необходимо учитывать даже небольшое искривление луча из-за непостоянства коэффициента преломления атмосферного воздуха вдоль вертикальной координаты. Это явление получило название *атмосферной рефракции.* Соответствующий чертеж приведен на рис. 14.2. Слой неоднородного воздуха упрощенно представлен в виде двух соприкасающихся однородных слоев *1* и *2* с показателями преломления n_1 и n_2, причем $n_2<n_1$. Углы падения φ и преломления ψ связаны между собой формулой (6.24):

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}=\frac{2}{n_1}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \qquad (14.4)$$

Легко видеть, что в рассматриваемом случае всегда $\psi>\varphi$, т. е. луч в неоднородной по высоте тропосфере *искривляется в сторону земной поверхности.*

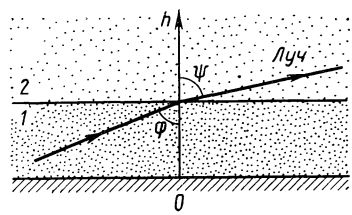


Рис. 14.2. Атмосферная рефракция

Пример 14.3. Оценить эффект атмосферной рефракции для конкретных условий, описанных в примере 14.2. Реальный неоднородный слой заменить двумя однородными слоями с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_1=1.0006$ и $\varepsilon_2=1.00036$. Положить угол падения $\varphi=70°$.

Используя найденные в примере 14.2 значения индексов преломления $N_0=300$ и $N=180$, находим показатели преломления обоих слоев по формуле $n=10^{-6}N+1$, откуда $n_1=1.0003$ и $n_2=1.00018$. Подставив эти результаты в формулу (14.4), находим угол преломления:

$$\psi=\arcsin\left(\frac{\sin 70°}{0.99958}\right)=70°4'.$$

Таким образом, искривление траектории луча под действием атмосферной рефракции оказывается небольшим. Однако если путь, проходимый волной в тропосфере, достаточно протяжен и составляет, скажем, 10 км, то угловая ошибка в 4′ или 1.16×10^{-3} рад приведет к погрешности в определении координаты цели по поперечной координате около 11 м. В ряде случаев такая ошибка может оказаться существенной. К тому же следует иметь в виду, что выше рассматривалась атмосферная рефракция в стандартных условиях. Если же под действием метеорологических факторов возникают большие градиенты температуры и плотности воздуха, то эффект рефракции может существенно возрасти.

Обратимся теперь к вопросу о затухании радиоволн в тропосфере. Эксперименты показывают, что на частотах ниже 1000 МГц затухание в чистом воздухе пренебрежимо мало. На более высоких частотах начинает сказываться резонансное поглощение радиоволн молекулами тех газов, из которых состоит атмосфера. Особенно сильно этот эффект проявляется в коротковолновой части сантиметрового и в миллиметровом диапазоне. На рис. 14.3 приведены кривые, описывающие вклады в общее затухание двух наиболее существенных компонентов — молекулярного кислорода O_2 и водяного пара H_2O. Особенно ярко выраженными оказываются резонансные пики поглощения в кислороде на длине волны 5 мм и в водяном паре на длине волны 12.5 мм. Существуют и «окна прозрачности» атмосферы, например в окрестности длины волны $\lambda=8$ мм.

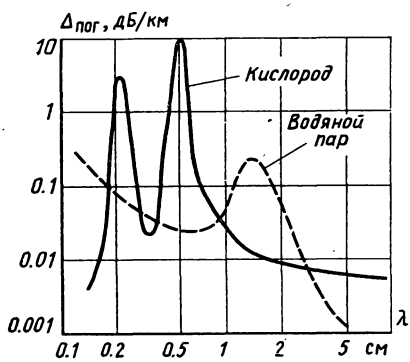


Рис. 14.3. Зависимости погонного затухания радиоволн в атмосферном кислороде и в водяном паре от длины волны

Наконец, необходимо указать на тот вклад в ослабление радиоволн СВЧ-диапазона, который могут вносить туман и атмосферные осадки. Особенно сильно их влияние проявляется на волнах короче 3 см. Здесь дополнительное ослабление из-за сильного дождя может достигать 1 дБ/км и даже более. Это обстоятельство серьезно осложняет работу систем ближней радиолокации, а также лимитирует наивысшие частоты, применяемые в радиорелейных линиях связи. Что же касается наземных лазерных линий связи оптического диапазона, то для них потери энергии сигнала из-за рассеяния на водяных каплях служат основным фактором, лимитирующим дальность связи.

Отражение радиоволн от ионосферных слоев. Как известно, бесстолкновительная плазма представляет собой диспергирующую среду, показатель преломления которой зависит от частоты поля f и в соответствии с формулой (5.15) записывается в виде

$$n=\sqrt{1-(f_{пл}/f)^2}, \qquad (14.5)$$

где $f_{пл}=8.98\sqrt{N_e}$ — плазменная частота, Гц; электронная концентрация N_e имеет размерность $м^{-3}$.

Предположим, что плоская электромагнитная волна падает из вакуума по направлению нормали на однородную полубесконеч-

ную плазменную среду. Характеристическое сопротивление плазмы

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon}} = \frac{Z_0}{\sqrt{1-(f_{пл}/f)^2}} \tag{14.6}$$

обращается в бесконечность при $f=f_{пл}$; на частотах, превышающих плазменную частоту, это сопротивление действительно, а при $f<f_{пл}$ характеристическое сопротивление плазмы оказывается чисто мнимым. Если теперь обратиться к формуле (6.11) и записать коэффициент отражения от границы раздела плазма — воздух в виде

$$R = \frac{Z_c - Z_0}{Z_c + Z_0} = \frac{1-\sqrt{1-(f_{пл}/f)^2}}{1+\sqrt{1-(f_{пл}/f)^2}}, \tag{14.7}$$

то можно заметить, что величина $|R|$ равна единице при $f=f_{пл}$; это равенство сохраняется и на всех частотах, более низких, чем плазменная, т. е. в условиях непрозрачности плазмы для радиоволн.

Итак, полубесконечный плазменный слой полностью отражает все электромагнитные волны, частоты которых не превосходят критической частоты $f_{кр}$, численно совпадающей с плазменной частотой $f_{пл}$. Как уже говорилось, наибольшая электронная концентрация наблюдается в слое F ионосферы. Если принять, что для этого слоя $N_{e\,max}=2\cdot 10^{12}$ м$^{-3}$ в дневные часы и $N_{e\,max}=2\times 10^{11}$ м$^{-3}$ ночью, то значение частоты $f_{кр}$ составит 12.7 МГц днем и 4 МГц ночью.

Рассмотрим теперь падение плоской волны на полубесконечную бесстолкновительную плазму под произвольным углом φ, который отсчитывается от направления нормали к границе раздела плазма — воздух. В общем случае в плазме будет возникать преломленная волна; угол преломления ψ может быть найден из закона Снелля

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = n = \sqrt{1-(f_{пл}/f)^2}. \tag{14.8}$$

Если $f<f_{пл}$, то правая часть равенства (14.8) оказывается мнимой, а это, в свою очередь, означает, что угол преломления ψ становится комплексным. Как указывалось в § 6.8, вся мощность падающей волны при этом отражается от границы раздела назад в воздушную среду.

Если же $f>f_{пл}$, т. е. плазма как таковая прозрачна для электромагнитных волн, то преломленная волна в плазме принципиально может существовать. Однако здесь следует учитывать, что показатель преломления плазмы n является действительным чис-

лом, но всегда меньше единицы. Поэтому в данном случае $\psi > \varphi$ и возможно явление полного внутреннего отражения, когда $\psi = 90°$, так что преломленная волна перестает быть обычной однородной плоской волной (см. § 6.7). Критическим углом падения $\varphi_{кр}$ плоской волны на однородный плазменный слой называют такой угол падения φ, при котором возникает полное внутреннее отражение от границы раздела (рис. 14.4). В соответствии с формулой (14.8)

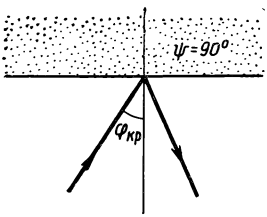


Рис. 14.4. Падение плоской волны на плазменное полупространство под критическим углом

$$\varphi_{кр} = \arcsin \sqrt{1 - (f_{пл}/f)^2}. \qquad (14.9)$$

Если $\varphi \geqslant \varphi_{кр}$, то падающая из воздуха плоская волна целиком отражается от полубесконечного плазменного слоя; если же $\varphi < \varphi_{кр}$, то падающая волна частично преломляется внутрь плазмы.

Пример 14.4. Плоская волна падает на слой E ионосферы с электронной концентрацией $N_e = 10^{11}$ м$^{-3}$ под углом $\varphi = 60°$. Определить наибольшее значение частоты f_{max}, при котором еще наблюдается полное отражение от слоя.

Для данного ионосферного слоя плазменная частота $f_{пл} = 8.98\sqrt{10^{11}} = 2.84 \cdot 10^6$ Гц $= 2.84$ МГц. Заданный угол падения станет критическим на частоте f_{max}, которая удовлетворяет уравнению

$$\sin 60° = \sqrt{3}/2 = \sqrt{1 - (2.84 \cdot 10^6/f_{max})^2}.$$

Решив это уравнение, получаем $f_{max} = 5.68$ МГц.

Заметим еще раз, что при наклонном падении плазменный слой способен отражать колебания более высоких частот по сравнению с теми, которые полностью отражаются при нормальном падении.

Пример 14.5. Ионосферный слой F с концентрацией электронов $N_e = 10^{12}$ м$^{-3}$ располагается на высоте $h = 400$ км от поверхности Земли. Найти наивысшее значение частоты поля f_{max}, которое еще обеспечивает полное отражение электромагнитной волны от этого слоя.

Обращаясь к чертежу, представленному на рис. 14.5, можно заметить, что угол падения волны на слой φ будет наибольшим в том случае, когда луч падающей волны AC направлен по касательной к земной поверхности, проведенной в точке A, где раз-

мещен передатчик. Так как $OA=OB=6370$ км (радиус Земли), $BC=h=400$ км (высота слоя F), а треугольник OAC прямоугольный, то

$$\sin\varphi=\frac{OA}{OC}=\frac{6370}{6770}=0.941,$$

откуда $\varphi=70°$.

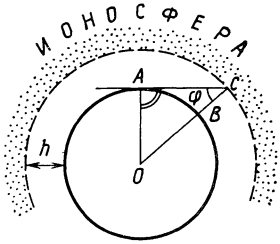


Рис. 14.5. К примеру 14.5

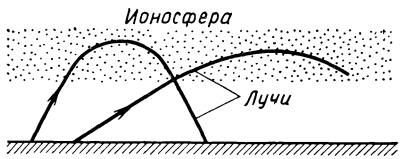


Рис. 14.6. Реальные траектории лучей в неоднородной ионосфере

Плазменная частота слоя $f_{пл}=8.98$ МГц. Поэтому искомая частота есть корень уравнения

$$\sqrt{1-(8.98/f_{max})^2}=0.941,$$

из которого легко находим, что $f_{max}=27$ МГц. Все волны с более высокими частотами ни при каких условиях не смогут отражаться от ионосферы.

Итак, ионосфера Земли представляет собой природное «зеркало», полностью возвращающее в приземное пространство все радиоволны с частотами ниже 15—20 МГц. Отражение радиоволн от ионосферы было теоретически предсказано в 20-х годах Хевисайдом и Кенелли. Практическое использование этого явления дало возможность в последующие десятилетия широко развить сети радиовещания и радиосвязи.

В заключение отметим, что использованная нами модель ионосферного отражения, в рамках которой реальный ионизированный слой с плавным изменением электронной концентрации условно заменяется полубесконечной однородной плазменной средой, является весьма упрощенной. На самом деле траектории лучей в ионосфере выглядят приблизительно так, как это показано на рис. 14.6, т. е. представляют собой гладкие кривые. Методы построения лучевых траекторий в неоднородной среде подробно изучаются в гл. 17.

Укажем также на то, что процесс распространения радиоволн в ионосфере сопровождается затуханием из-за соударений электронов с нейтральными атомами и молекулами. Этот вопрос рассматривался нами в гл. 5. Если длина ионосферного участка трассы распространения радиоволн оказывается значительной, то дополнительный вклад в общее затухание может составить единицы и даже десятки децибел.

14.4. Формула идеальной радиосвязи. Множитель ослабления

В данном параграфе изучаются общие закономерности, позволяющие связать между собой мощность, излучаемую передатчиком на одном конце радиолинии, и мощность, поступающую на вход приемника на другом ее конце.

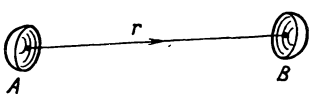


Рис. 14.7. Идеальная радиолиния

Пусть A и B — точки размещения передатчика и приемника соответственно (рис. 14.7). Символом r обозначим длину отрезка AB. Передатчик излучает гармонические колебания с заданной длиной волны λ. Известна также эффективная (действующая) мощность $P_{\text{прд}}$, развиваемая передатчиком на зажимах своей антенны. Считается, что средой распространения служит вакуум (или воздух) с параметрами ε_0, μ_0, так что омические потери на трассе распространения радиоволн отсутствуют. Ставится задача определить мощность $P_{\text{пр}}$, поступающую в приемник.

Первым шагом на пути решения этой базовой задачи будет следующий мысленный эксперимент. Предположим, что передающая антенна представляет собой гипотетический изотропный излучатель, создающий однородные сферические волны с одинаковым значением амплитуды в пределах каждого волнового фронта. Такой подход уже использовался нами в § 13.8 при изучении направленных свойств элементарного электрического излучателя. Модуль вектора Пойнтинга на удалении r от передатчика при этом составит

$$\Pi_{\text{ср.равн}} = \frac{P_{\text{прд}}}{4\pi r^2}. \qquad (14.10)$$

Естественно считать, что передающая антенна ориентирована в пространстве таким образом, что максимум ее излучения наблюдается в направлении на точку размещения приемной антенны. Тогда фактическое значение плотности потока мощности от передатчика вблизи антенны приемника составит

$$\Pi_{ср} = \frac{D_{прд} P_{прд}}{4\pi r^2}, \qquad (14.11)$$

где $D_{прд}$ — коэффициент направленного действия (КНД) передающей антенны.

Мощность, поступающую в приемник, проще всего вычислить, предположив, что приемная антенна принадлежит к классу так называемых апертурных антенн. Так в радиотехнике называют антенны, у которых можно четко выделить конечную поверхность, которая ориентирована перпендикулярно вектору Пойнтинга падающей волны и «собирает» энергию волнового электромагнитного поля. Именно так выглядят наиболее распространенные в СВЧ-диапазоне зеркальные, линзовые и рупорные антенны.

Пусть $A_{пр}$ — площадь поверхности приемной антенны, называемая также площадью ее *раскрыва*. Строгий анализ, проводимый в курсе антенных устройств [15], показывает, что «сбор» всей мощности, проходящей через раскрыв, принципиально невозможен и так называемая *эффективная площадь раскрыва* $A_{пр.эф}$ всегда меньше, чем $A_{пр}$. Например, для весьма распространенных на практике зеркальных параболических антенн обычно считают, что $A_{пр.эф} = 0.54\, A_{пр}$.

Оказывается, что КНД приемной антенны $D_{пр}$ связан с ее эффективной площадью соотношением

$$D_{пр} = \frac{4\pi A_{пр.эф}}{\lambda^2}. \qquad (14.12)$$

Совершенно аналогично вычисляют параметр $D_{прд}$, поскольку антенные устройства являются обратимыми системами и с одинаковой эффективностью работают как на прием, так и на передачу.

Мощность, поступающая в приемник,

$$P_{пр} = \Pi_{ср} A_{пр.эф}. \qquad (14.13)$$

Воспользовавшись соотношениями (14.11) и (14.12), представим формулу (14.13) так:

$$P_{пр} = P_{прд} D_{пр} D_{прд} \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2. \qquad (14.14)$$

Равенство (14.14) получило название *формулы идеальной радиосвязи*. Эта формула достаточно хорошо описывает энергетические соотношения в радиоканале при отсутствии дополнительных потерь за счет среды распространения.

Пример 14.6. Космическая линия связи имеет протяженность 400 км. Мощность передатчика 80 Вт, длина волны 3 см. Антенны приемника и передатчика идентичны и представляют собой параболические зеркала диаметром 1 м. Определить мощность, поступающую на вход приемника.

Геометрическая площадь каждой антенны $A=0.785$ м^2, эффективная площадь $A_{эф}=0.54A=0.424$ м^2. В соответствии с (14.12) значение КНД каждой антенны $D=12.56\cdot 0.424/(0.03)^2=5900$. Подставив полученные цифры в формулу (14.14), находим, что мощность сигнала на входе приемника радиолинии $P_{пр}=10^{-9}$ Вт.

Оценивая реальное качество работы радиоканала, следует иметь в виду, что на входе приемника неизбежно присутствует шум, эффективная мощность которого [см. формулу (13.58)]

$$P_ш=kT_ш\Delta f$$

пропорциональна шумовой температуре приемника $T_ш$, приведенной к его входу, а также полосе пропускания приемника Δf. Числовое значение параметра $T_ш$ зависит как от конструкции входных цепей приемника, так и от уровня шумового сигнала, поступающего в антенну. В СВЧ-диапазоне основную роль играют шумы от радиозвезд, радиогалактик и других внеземных источников. Современные приемники сантиметрового диапазона имеют шумовую температуру от нескольких десятков до нескольких сотен кельвин. В диапазонах гектометровых и декаметровых волн основную роль играют шумы промышленного происхождения, а также импульсные помехи из-за грозовых разрядов в атмосфере. Соответствующая шумовая температура в неблагоприятных условиях может достигать уровня нескольких миллионов кельвин и даже более.

Пример 14.7. Космическая радиолиния снабжена антеннами и передатчиком, описанными в условиях примера 14.6. Используется приемник с шумовой температурой 150 К. Линия предназначена для передачи телевизионного изображения среднего качества и имеет полосу пропускания шириной 4 МГц. Вычислить длину трассы r, при которой мощность принятого сигнала в 10 раз превышает мощность шума, т. е. отношение сигнал/шум $q=P_{пр}/P_ш=10$.

В рассматриваемой системе мощность шума, приведенная ко входу приемника, $P_ш=1.38\cdot 10^{-23}\cdot 150\cdot 4\cdot 10^6=8.28\cdot 10^{-15}$ Вт. Чтобы реализовать заданное отношение сигнал/шум, мощность принятого сигнала $P_{пр}$ должна составить $8.28\cdot 10^{-14}$ Вт.

Уравнение идеальной радиосвязи (14.14) можно разрешить относительно искомой длины трассы r и получить

$$r=\frac{\lambda}{4\pi}\left(\frac{P_{\text{пр}}}{P_{\text{прд}}D_{\text{пр}}D_{\text{прд}}}\right)^{-1/2}.$$

Подставляя сюда соответствующие числовые значения параметров, находим, что $r=4.38\cdot10^5$ км. Таким образом, рассматриваемая радиолиния способна обеспечить передачу телевизионных изображений в пределах орбиты Луны.

Чтобы учитывать влияние среды распространения, в формулу (14.14) принято вводить так называемый *множитель ослабления* F и записывать ее так:

$$P_{\text{пр}}=P_{\text{прд}}D_{\text{пр}}D_{\text{прд}}\left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2F. \qquad (14.15)$$

Если, например, распространение радиоволн происходит в среде с погонным затуханием Δ, дБ/км, то, очевидно, множитель ослабления

$$F=10^{-r\Delta/10}, \qquad (14.16)$$

где r — длина трассы, км. Если, например, $\Delta=0.3$ дБ/км (типичное погонное затухание сантиметровых волн в дожде средней интенсивности), $r=50$ км, то в соответствии с формулой (14.16) $F=0.031$, что свидетельствует о достаточно сильном ослаблении амплитуды сигнала в точке приема.

Понятие множителя ослабления широко используется при инженерном расчете самых разнообразных радиолиний. В частности, с помощью такого множителя принято описывать потери не только за счет поглощения радиоволн, но и за счет дифракции волн на разнообразных препятствиях.

14.5. Особенности распространения радиоволн различных диапазонов

В данном параграфе кратко обсуждаются особенности построения радиолиний различных диапазонов, связанные со специфическими условиями распространения радиоволн различных частот. Более подробно эти вопросы изложены в книгах, специально посвященных проблемам распространения радиоволн [7, 8].

Распространение сверхдлинных волн. Как отмечалось ранее, сверхдлинные (мириаметровые) волны имеют частоты менее 30 кГц. В этом диапазоне практически любые природные среды, образующие подстилающую поверхность, хорошо отражают радио-

волны, приближаясь по своим свойствам к идеальному проводнику. С другой стороны, сравнительно низкая частота колебаний обусловливает практически полное отражение сверхдлинных волн даже от самых нижних, наименее плотных ионосферных слоев D и E. В результате эти волны распространяются в сферическом приземном «волноводе» Земля — ионосфера. При современной технике генерирования и приема радиоволн дальность сверхдлинноволновых радиолиний может составлять несколько тысяч километров.

Распространение сверхдлинных волн выгодно отличается постоянством уровня сигнала в разное время суток и в различные сезоны года. Из-за весьма большой длины волны глубина поверхностного слоя в почве и в морской воде составляет десятки метров, что позволяет создавать системы подземной и подводной радиосвязи. Однако передающие антенны рассматриваемого диапазона получаются громоздкими, и, что самое главное, из-за низкого значения несущей частоты здесь не удается осуществить модуляцию достаточно высокими частотами. Как следствие, подобные радиоканалы имеют очень малую скорость передачи информации и пригодны в основном для работы в телеграфном режиме. Основная область применения сверхдлинных волн — создание систем устойчивой дальней навигации для вождения кораблей и самолетов.

Распространение длинных волн. Условия распространения длинных (километровых) волн приближаются к тем, которые были описаны выше применительно к сверхдлинным волнам. Сравнительно низкая частота длинных волн приводит к тому, что они хорошо отражаются ионосферой как в дневные, так и в ночные часы. С этим обстоятельством связана высокая устойчивость работы длинноволновых радиоканалов.

Структура электромагнитного поля длинноволнового диапазона в приземном пространстве на расстояниях в несколько сотен километров от передатчика оказывается весьма сложной, так как одновременно существуют *земная* (поверхностная) и *ионосферная* (пространственная) *волны*, которые складываются друг с другом. Распространение длинных волн сопровождается потерями за счет конечной проводимости подстилающей поверхности, а также за счет дифракции.

Для расчета напряженности поля в длинноволновом диапазоне пользуются эмпирической *формулой Остина,* согласно которой множитель ослабления, входящий в выражение (14.15), имеет вид

$$F = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{0.0014r}{\lambda^{0,6}}\right), \qquad (14.17)$$

где расстояние r и длина волны λ выражены в километрах. Данная формула была получена еще в 20-х годах на основе статистической обработки данных о работе радиовещательных каналов длинноволнового диапазона. Добавочное ослабление поля порой оказывается значительным. Так, если $r=5000$ км и $\lambda=2$ км, то $F=0.005$.

Основные области применения длинных волн — радиовещание, служебная телеграфная связь и навигация. Большой недостаток длинноволнового диапазона — его относительная узкополосность. Здесь полная ширина всего диапазона частот не превышает 270 кГц. Это обстоятельство ограничивает число радиоканалов, способных одновременно работать в длинноволновом диапазоне без взаимных помех.

Распространение средних волн. Условия распространения средних (гектометровых) волн оказываются различными в дневные и в ночные часы. Дело в том, что днем эти радиоволны сильно поглощаются в низколежащем слое D ионосферы. Поэтому они могут распространяться лишь в форме земных волн на сравнительно короткие расстояния до 1000 км. Ночью слой D исчезает, и средние волны могут распространяться на несколько тысяч километров за счет отражения от ионосферных слоев E и F.

Средние волны используют в основном для создания радиовещательных каналов.

Работа средневолновых радиоканалов осложняется так называемыми *замираниями*. Сущность этого явления заключается в следующем. Ионосферные слои всегда неоднородны, т. е. представляют собой хаотические чередования пространственных областей с повышенной и пониженной электронной концентрацией. Эти области перемещаются под действием сильных ветров, постоянно присутствующих на больших высотах. Если передающая антенна имеет невысокую направленность и излучает волны в широком интервале углов, то возможна ситуация, когда в точку приема одновременно приходят несколько лучей, отраженных от разных неоднородностей. Фазы приходящих сигналов случайны, поэтому при сложении колебаний возникают беспорядочные изменения амплитуды напряжения на входе приемника с характерным временным интервалом в десятки секунд. Глубина замираний может быть весьма значительной. Частично ликвидировать замирания удается в том случае, если приемник имеет достаточный запас усиления до детектора и снабжен системой автоматической регулировки усиления (АРУ). Радикальным способом борьбы с замираниями служит прием на несколько одинаковых антенн, разнесенных в пространстве на несколько длин волн, с последующим сложением сигналов.

Распространение коротких волн. Широкое применение коротких волн в практике радиосвязи и радиовещания обусловлено прежде всего тем, что в этом диапазоне удается создать передающие антенны приемлемых габаритов с достаточно высокой направленностью излучения. Это позволяет в полной мере использовать отражающие свойства ионосферного слоя Земли и осуществлять достаточно надежные радиоканалы протяженностью в несколько тысяч и даже десятков тысяч километров при весьма ограниченной мощности передатчика, порой составляющей лишь несколько ватт. Влияние земных волн в коротковолновом диапазоне, как правило, незначительно.

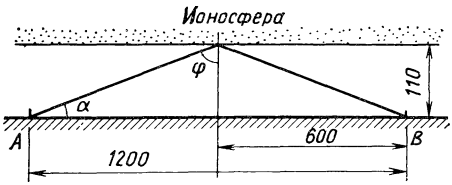


Рис. 14.8. Радиолиния КВ-диапазона (размеры указаны в километрах)

Проектирование радиолинии КВ-диапазона требует сведений о характере распределения электронной концентрации в ионосфере применительно к конкретному времени суток и к известным географическим координатам точек размещения передатчика и приемника. Пусть, например, требуется создать радиолинию между пунктами A и B, удаленными друг от друга на 1200 км. Так как длина трассы невелика по сравнению с длиной земного экватора, поверхность Земли в данном случае можно приближенно рассматривать как плоскость (рис. 14.8). Связь осуществляется в ночные часы. В качестве отражателя используется ионосферный слой E с электронной концентрацией $N_e = 5 \cdot 10^9$ м$^{-3}$, располагающийся на высоте $h = 110$ км.

Из чертежа следует, что точка отражения от ионосферы размещается посередине трассы. Луч передатчика должен быть направлен под углом $\alpha = \operatorname{arc\,tg}(110/600) = 10°$ по отношению к горизонту; при этом угол падения волны на слой $\varphi = 80°$. Волны будут отражаться от ионосферы на частотах, не превышающих некоторого значения f_{max}. Эта частота, называемая *максимально применимой частотой* (МПЧ), в соответствии с (14.8) должна удовлетворять уравнению

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - (f_{пл}/f_{max})^2},$$

откуда

$$f_{max} = f_{пл}/\cos\varphi. \qquad (14.18)$$

В данном случае $f_{пл} = 0.635$ МГц и, значит, $f_{max} = 3.52$ МГц. Фактически рабочая частота должна быть несколько ниже и составлять примерно 80 % от максимально применимой частоты.

Связь между теми же самыми пунктами A и B можно осуществить, используя отражение от более высокого и более плотного слоя F, который существует как днем, так и ночью. Для этого придется несколько увеличить угол α, под которым волна излучается на передающем конце линии, а также взять бо́льшую рабочую частоту, чтобы расположенный ниже слой E оказался прозрачным для радиоволн. Однако, как правило, поглощение волн в слое E достаточно интенсивно, так что общие потери в высокочастотном радиоканале могут оказаться выше, чем в низкочастотном. Практика показывает, что высокочастотный участок КВ-диапазона ($\lambda=15\div30$ м) целесообразно использовать в дневные часы. Для работы в ночное время более пригоден низкочастотный участок диапазона ($\lambda=40\div100$ м).

Важно отметить, что чисто ионосферный механизм распространения коротких волн приводит к тому, что лучи принципиально не могут попасть в точки земной поверхности, находящиеся примерно под областью отражения. Как следствие, электромагнитное поле здесь отсутствует. Такие участки вдоль трассы называют *зонами молчания.*

Электромагнитные волны КВ-диапазона могут испытывать целый ряд скачков, т. е. последовательных отражений от ионосферы и от поверхности Земли. Это дает возможность существенно увеличивать протяженность канала, а при благоприятных условиях даже поддерживать радиосвязь между антиподами, т. е. корреспондентами, располагающимися на одной прямой, проходящей через центр Земли.

Отметим в заключение, что распространение волн КВ-диапазона на большие расстояния обычно сопровождается глубокими замираниями, которые серьезно осложняют работу радиоканалов и наряду с интенсивными помехами препятствуют высококачественному радиовещанию на волнах этого диапазона. Большие сложности возникают также из-за исключительно высокой плотности размещения передатчиков в этом участке спектра.

Распространение ультракоротких волн. Электромагнитные волны с частотами выше 30 МГц практически не отражаются от ионосферных слоев в обычных условиях. С другой стороны, малость длины волны таких колебаний по сравнению с радиусом Земли приводит к тому, что дифракционные эффекты в этих диапазонах выражены слабо. Если приемная антенна размещается ниже уровня горизонта, т. е. попадает в область геометрической «тени», то поле в точке приема будет, как правило, весьма слабым. Поэтому радиолинии УКВ работают обычно в условиях прямой видимости.

Эти условия естественно выполняются в космических линиях связи. Если же приемник и передатчик размещены вблизи земной

поверхности, то факторами, ограничивающими протяженность УКВ-радиолинии, служат высоты подъема антенн над землей.

Обратимся к рис. 14.9, на котором условно изображены антенны, приподнятые над земной поверхностью на отрезки h_1 и h_2. Предельно возможная длина трассы распространения с прямой видимостью будет получена в том случае, когда луч AB касается поверхности Земли в точке C. Примем во внимание, что $OC=R_з=6370$ км, а также то, что обычно $h_1/R_з \ll 1$, $h_2/R_з \ll 1$. Тогда максимальная длина трассы

$$L=AC+CB=\sqrt{(R_з+h_1)^2-R_з^2}+\sqrt{(R_з+h_2)^2-R_з^2}.$$

Пренебрегая квадратами малых величин, отсюда получим

$$L\approx 2\sqrt{R_з}\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}\right)=5.05\cdot 10^3\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}\right); \qquad (14.19)$$

все входящие сюда величины выражены в метрах.

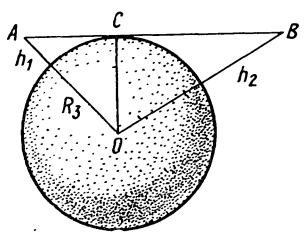


Рис. 14.9. Вычисление предельной длины трассы с прямой видимостью (масштаб чертежа условный)

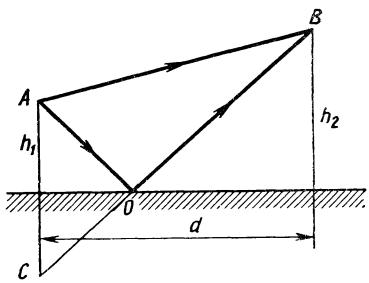


Рис. 14.10. Интерференция прямой и отраженной волн

Рассмотрим, например, УКВ-радиолинию между диспетчерской службой аэропорта и командиром воздушного лайнера. Пусть $h_1=50$ м — высота антенны аэропорта, $h_2=10\,000$ м — высота полета самолета. В соответствии с формулой (14.19) предельная длина трассы с прямой видимостью $L=540$ км, что обычно вполне достаточно для оперативного управления воздушным движением в зоне аэропорта. Заметим, что фактически длина трассы даже несколько больше из-за атмосферной рефракции радиоволн.

Если направленные свойства применяемых антенн недостаточно совершенны, то часть энергии излучается передающей антенной по направлению к земной поверхности, отражается от нее и попадает на вход приемника наряду с энергией прямой волны. Описанное явление представляет собой интерференцию падающей и от-

раженной волн, которая может оказывать существенное влияние на работу радиолинии УКВ-диапазона.

На рис. 14.10 схематически изображена подобная радиолиния с передатчиком в точке A и приемником в точке B. Геометрическая длина пути отраженной волны равна сумме длин отрезков AO и OB. Из построения видно, что эта сумма равна длине отрезка CB, соединяющего «зеркальное изображение» передающей антенны с точкой размещения приемной антенны.

Если d — длина трассы, измеренная вдоль земной поверхности, то

$$AB=\sqrt{(h_2-h_1)^2+d^2};\quad CB=\sqrt{(h_2+h_1)^2+d^2}.$$

Разность геометрических длин двух путей

$$\delta=CB-AB=d\left[\sqrt{1+\left(\frac{h_2+h_1}{d}\right)^2}-\sqrt{1+\left(\frac{h_2-h_1}{d}\right)^2}\right]. \quad (14.20)$$

На практике обычно $h_1/d\ll 1$; $h_2/d\ll 1$, т. е. относительные высоты подъема антенн невелики. Это дает основание воспользоваться приближенным равенством $\sqrt{1+x}\approx 1+x/2$, справедливым при $x\ll 1$. Выполнив элементарные преобразования, убеждаемся, что формулу (14.20) можно представить следующим образом:

$$\delta\approx 2h_1h_2/d. \quad (14.21)$$

Предположим для простоты, что передающая антенна излучает волны с одной и той же интенсивностью по всем направлениям. Тогда в точке приема амплитуды колебаний, обусловленных прямой и отраженной волнами, будут одинаковыми. Фазы же этих колебаний окажутся различными: во-первых, при достаточно наклонном падении на земную поверхность фаза отраженного колебания получит дополнительный сдвиг на угол, близкий к 180° (см. гл. 6); во-вторых, отраженный луч длиннее прямого луча на величину δ, которая устанавливается формулой (14.21). В результате комплексная амплитуда сигнала на входе приемной антенны приобретает вид

$$\dot{E}=\dot{E}_0\left[1-\exp\left(-j\frac{2\beta h_1h_2}{d}\right)\right], \quad (14.22)$$

где $\dot{E}_0$ — некоторая амплитуда, относящаяся к прямому лучу (ее конкретное значение не играет роли); $\beta=2\pi/\lambda$ — коэффициент фазы плоской волны в свободном пространстве.

Назовем величину

$$V=1-\exp\left(-j\frac{2\beta h_1h_2}{d}\right) \quad (14.23)$$

интерференционным множителем. Амплитуда сигнала на входе приемника пропорциональна модулю этого комплексного числа:

$$|V| = \left\{\left[1-\cos\left(\frac{2\beta h_1 h_2}{d}\right)\right]^2 + \sin^2\left(\frac{2\beta h_1 h_2}{d}\right)\right\}^{1/2} = 2\left|\sin\frac{\beta h_1 h_2}{d}\right|. \quad (14.24)$$

Данное равенство представляет собой *интерференционную формулу* для расчета УКВ-радиолинии, полученную в свое время акад. Б. А. Введенским. Как следует из (14.24), если изменять высоту приемной антенны h_2, оставив другие параметры системы неизменными, то амплитуда принимаемого сигнала будет изменяться по немонотонному закону. В частности, если $\beta h_1 h_2/d = \pi$, то отраженный луч «гасит» прямой и сигнал на входе приемника исчезает.

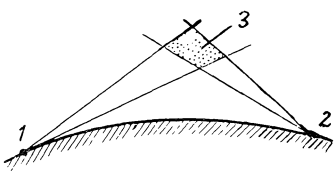


Рис. 14.11. Тропосферное рассеяние радиоволн:
1 — передатчик; *2* — приемник; *3* — рассеивающий объем

Чтобы бороться с интерференционными явлениями, следует сужать диаграммы направленности применяемых антенн.

В УКВ-диапазоне нашел практическое применение интересный механизм дальнего распространения, получивший название *тропосферного рассеяния* (рис. 14.11). Здесь для создания поля в точке приема, находящейся глубоко за горизонтом, используется рассеяние падающей волны на турбулентных неоднородностях тропосферы, которые всегда присутствуют на высотах 10—20 км. Этот способ связи требует применения остронаправленных антенн и передатчиков значительной мощности (от единиц до сотен киловатт). Однако в большинстве случаев тропосферные линии дальней УКВ-связи экономически выгодны, так как не требуют никаких промежуточных сооружений вдоль трассы.

Используются также линии связи на УКВ с рассеянием от метеорных следов, время от времени возникающих в атмосфере на высотах 60—100 км. Эти высокоионизированные плазменные образования существуют всего несколько секунд, но имеют большую отражательную способность и дают возможность отдельными «порциями» передавать значительные объемы цифровой информации на расстояния в несколько сотен километров.

Отметим в заключение, что волны УКВ-диапазона часто используются для организации связи между подвижными объектами, например между автомобилями в условиях больших городов. Условия распространения волн оказываются здесь весьма сложны-

ми из-за дифракции на местных предметах. Расчет и проектирование таких радиолиний ведется на основе сбора статистической информации об условиях приема радиосигналов в различных условиях.

Экологические проблемы. Заканчивая главу, кратко остановимся на важном вопросе который хотя и не связан непосредственно с распространением радиоволн, но приобрел в наши дни особое значение. Дело в том, что технологическое развитие общества сопровождается непрерывным возрастанием интенсивности электромагнитных полей искусственного происхождения, которые окружают человека на производстве и в быту. Как следствие, актуальной становится защита здоровья человека от вредного влияния мощных полей, длительно воздействующих на организм.

Упомнутая здесь проблема относится к компетенции радиационной биологии, которая среди прочего занимается комплексным изучением влияния электромагнитного поля на живое вещество. Установлено, что наиболее опасными для человека оказываются ионизирующие излучения, энергия квантов которых достаточна для отрыва электронов от атома. Такими свойствами обладают ультрафиолетовая радиация и все другие более коротковолновые излучения, например электромагнитные волны рентгеновского диапазона.

Биологический эффект поглощенного ионизирующего излучения выражают в особых единицах — грэях (Гр). Одному грэю соответствует поглощение энергии в 1 Дж на 1 кг массы вещества.

Важнейшее средство защиты человека — ограничение дозы поглощенного излучения. По нормам, принятым в США, для лиц, подвергающихся облучению на производстве, предельно допустимая годовая доза составляет 50 мГр. Индивидуальная доза для остального населения не должна превышать 50 мГр за 30 лет без учета естественного радиационного фона [41].

На радиочастотах энергия квантов (фотонов) недостаточна для ионизации атомов вещества. Падающее электромагнитное поле переводит атомы или молекулы в возбужденное состояние. Вслед за этим атомы или молекулы возвращаются в исходное состояние, излучая новые кванты той же самой частоты. В конечном итоге вся энергия радиоволн, поглощаемая организмом, переходит в теплоту. Этим часто пользуются в медицине для прогревания внутренних органов. Однако длительное воздействие на человека СВЧ-полей с плотностью потока мощности в несколько мВт/см^2 приводит к болезненным явлениям, прежде всего к помутнению хрусталика глаза. Не исключается возможность генетических изменений в организме. Поэтому при эксплуатации соответствующего оборудования следует неукоснительно соблюдать научно обоснованные нормы радиочастотного облучения персонала [42].

ЗАДАЧИ

14.1. Покажите, что сухая почва на частоте 300 МГц может рассматриваться как диэлектрическая среда с потерями.

14.2. Рассмотрите задачу об атмосферной рефракции в плоскослоистой среде, образованной соприкасающимися слоями без потерь толщиной d каждый. Слои имеют убывающие по высоте показатели преломления $n_1 > n_2 > n_3 > \ldots$. Известным считается угол падения φ на первый слой из вакуума.

14.3. На полубесконечную плазменную среду падает плоская электромагнитная волна с частотой, в 1.5 раза превышающей плазменную частоту. Найдите значение критического угла падения на такую среду.

14.4. Передающий конец космической радиолинии снабжен зеркальной параболической антенной с площадью 1000 м^2. Аналогичная по конструкции приемная антенна имеет площадь 30 м^2. Рабочая длина волны 7.5 см. Приемник с полосой пропускания 15 кГц имеет шумовую температуру 120 К. Определите предельную длину радиолинии, при которой отношение сигнал/шум на входе приемника будет не ниже 3 дБ.

14.5. На сколько сократится длина линии, рассмотренной в задаче 14.4, если полосу пропускания приемника расширить до 1 МГц?

14.6. Спроектируйте линию КВ-связи длиной 1200 км, работающую за счет отражения радиоволн от слоя F ионосферы. Концентрация электронов в слое $1.5 \cdot 10^{12}$ м$^{-3}$, высота слоя 260 км.

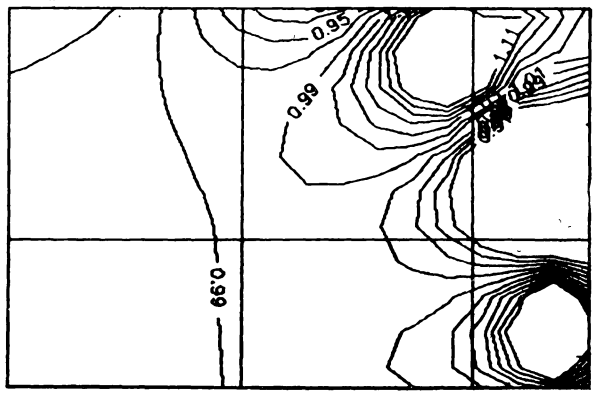
14.7. Найдите предельную длину трассы с прямой видимостью между антенной Останкинского телецентра ($h = 500$ м) и антенной коллективного приема телевидения, расположенной на крыше жилого дома ($h = 40$ м).

Часть вторая

Факультативный курс

Но кто введет меня в еще более скрытую область, где Мысль сочетается с Фактом, где мы видим умственную работу математика и физическое действие молекул в их истинном соотношении?

Максвелл



Глава пятнадцатая

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ И ЗАМЕДЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

В предыдущих главах рассматривались волноводные линии передачи, в которых фазовая скорость распространяющихся колебаний была равна скорости света или превосходила ее. Однако для создания многих электронных приборов СВЧ требуются волноводные системы, в которых фазовая скорость электромагнитных волн была бы равна скорости пучка электронов. Очевидно, что при этом фазовая скорость волн должна удовлетворять неравенству $v_ф < c$. Подобные волноводные системы называют *замедляющими структурами*. Эти структуры находят применение и в других областях радиоэлектроники, в частности при создании некоторых видов антенн СВЧ-диапазона.

Настоящая глава посвящена исследованию основных свойств электромагнитных процессов в этих волноводах. Будут также описаны наиболее распространенные виды замедляющих структур.

15.1. Замедление электромагнитных волн диэлектрической пластиной. Поверхностные волны

Изучим электромагнитные процессы в системе, состоящей из диэлектрической пластины толщиной a и идеально проводящего основания (рис. 15.1). Материал пластины имеет относительную диэлектрическую проницаемость ε; для простоты будем считать, что диэлектрик немагнитный ($\mu_a = \mu_0$) и без потерь ($\sigma = 0$). Будет показано, что такая пластина может играть роль волновода замедленных волн.

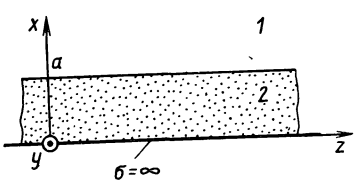


Рис. 15.1. Диэлектрическая пластина на идеально проводящем основании

Наша основная цель — найти структуру электромагнитного поля замедленной волны и определить степень ее замедления. Будем решать поставленную задачу, рассматривая отдельно полупространство, заполненное воздухом или вакуумом (область *1*), и ограниченную область *2* внутри пластины. Проекции векторов электромагнитного поля в каждой области будут снабжаться соответствующими индексами.

Поверхностные волны Е-типа. Сделаем три существенных предположения:

1) рассматриваются замедленные волны, поэтому длина волны в волноводе удовлетворяет неравенству $\lambda_в < \lambda_0$, которое, будучи записанным относительно продольного волнового числа h, приобретает вид $h > \beta_0$;

2) система имеет неограниченную протяженность вдоль координатных осей y и z, показанных на рис. 15.1;

3) изучаемое электромагнитное поле представляет собой гармоническую волну, распространяющуюся вдоль оси z. Магнитный вектор волны имеет единственную составляющую, направленную по координате y. Все проекции векторов поля вдоль этой координаты считаются неизменными. На основании предыдущего условия отсюда вытекает, что силовые линии магнитного поля имеют вид бесконечных «нитей», параллельных поверхности пластины. Так как при этом $\partial \dot{H}_y/\partial y = 0$, то уравнение $\operatorname{div} \dot{\mathbf{H}} = 0$ выполняется автоматически.

Рассмотрим электромагнитное поле в области *1*. Комплексная амплитуда $\dot{H}_{y1}$ единственной отличной от нуля проекции магнитного вектора здесь удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 \dot{H}_{y1} + \beta_0^2 \dot{H}_{y1} = 0. \tag{15.1}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде бегущей волны, распространяющейся вдоль оси z с не известным пока продольным волновым числом h и амплитудным множителем, который зависит лишь от поперечной координаты x:

$$\dot{H}_{y1}(x, z) = H_{y1}(x)\, e^{-jhz}. \tag{15.2}$$

Подставив формулу (15.2) в уравнение (15.1), приняв во внимание условие $\partial/\partial y = 0$, а также сокращая результат на общий для всей левой части экспоненциальный множитель $\exp(-jhz)$, приходим к дифференциальному уравнению второго порядка в обыкновенных производных относительно амплитудного коэффициента искомой проекции вектора напряженности магнитного поля:

$$\frac{d^2 H_{y1}}{dx^2} - p^2 H_{y1} = 0. \tag{15.3}$$

Входящий сюда параметр $p = \sqrt{h^2 - \beta_0^2}$ является прямым аналогом поперечного волнового числа в теории полых металлических волноводов. Отметим, что для замедленных волн, у которых $\lambda_в < \lambda_0$, число p всегда действительно.

Общее решение уравнения (15.3) находится элементарно:

$$H_{y1}(x) = Ae^{-hx} + Be^{px}, \tag{15.4}$$

где A, B — произвольные постоянные. Из физических соображений ясно, что $B = 0$, так как в противном случае амплитуда поля не-

ограниченно увеличивалась бы при удалении от пластины, что невозможно.

Итак, с точностью до произвольной амплитудной постоянной

$$\dot{H}_{y1}(x, z)=Ae^{-px}e^{-jhz}. \tag{15.5}$$

Формула (15.5) дает возможность сделать принципиально важный вывод о том, что *замедленная волна одновременно является поверхностной.* Действительно, с удалением точки наблюдения от пластины вдоль поперечной оси x амплитуда поля уменьшается по экспоненциальному закону. Чем меньше фазовая скорость волны $v_ф$ по сравнению со скоростью света c, тем короче длина волны в волноводе $\lambda_в$, а значит, тем больше продольное волновое число $h=2\pi/\lambda_в$ по сравнению с коэффициентом фазы $\beta_0=2\pi/\lambda_0$ колебаний той же частоты в свободном пространстве. Сокращение фазовой скорости приводит к росту параметра p, который входит в показатель действительного экспоненциального выражения. Как следствие, поле сильнее «прижимается» к направляющей поверхности диэлектрической пластины. Сделанный вывод имеет большую общность и справедлив применительно к любым замедляющим системам.

Проекции вектора напряженности электрического поля в области *1* легко найти, подставив выражение (15.5) в первое уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_1=j\omega\varepsilon_0\dot{\mathbf{E}}_1.$$

Вычисления существенно упрощаются благодаря тому, что у магнитного вектора имеется лишь одна проекция и, кроме того, все проекции векторов поля не зависят от поперечной координаты. Вычисляя ротор в прямоугольной декартовой системе координат, имеем:

$$\dot{E}_{x1}=-\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\frac{\partial\dot{H}_{y1}}{\partial z}=\frac{h}{\omega\varepsilon_0}Ae^{-px}e^{-jhz}, \tag{15.6}$$

$$\dot{E}_{y1}=0, \tag{15.7}$$

$$\dot{E}_{z1}=\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\frac{\partial\dot{H}_{y1}}{\partial x}=\frac{jp}{\omega\varepsilon_0}Ae^{-px}e^{-jhz}. \tag{15.8}$$

Поскольку продольная проекция электрического вектора $\dot{E}_{z1}\neq 0$, в то время как магнитное поле чисто поперечно, рассматриваемые здесь колебания в соответствии с принятой нами классификацией должны быть причислены к Е-волнам или волнам электрического типа.

Следует обратить внимание на то, что аргументы комплексных амплитуд $\dot{E}_{x1}$ и $\dot{H}_{y1}$ оказываются одинаковыми, а значит, соответ-

ствующие проекции колеблются в фазе. Поэтому z-я проекция комплексного вектора Пойнтинга является чисто действительной и электромагнитный процесс переносит вдоль указанной оси действительную мощность. В то же время аргументы комплексных амплитуд $\dot{E}_{z1}$ и $\dot{H}_{y1}$ отличаются на $\pi/2$, о чем свидетельствует дополнительный множитель j в формуле (15.8). Как следствие, проекция комплексного вектора Пойнтинга вдоль поперечной координаты x оказывается чисто мнимой. Это свидетельствует о том, что никакого переноса активной мощности вдоль данной оси не происходит.

Пример 15.1. Поверхностная электромагнитная волна имеет частоту $f=15$ ГГц (длина волны $\lambda_0=20$ мм) и распространяется над диэлектрической пластиной толщиной $a=12$ мм, имеющей металлическое основание. Измерения показали, что длина волны в замедляющей системе $\lambda_в=14$ мм; амплитуда вектора напряженности магнитного поля на поверхности пластины при $x=a$ составляет 80 А/м. Определить, на каком расстоянии x от идеально проводящей плоскости амплитуда магнитного вектора уменьшится в 100 раз.

В данном случае продольное волновое число $h=2\pi/\lambda_в=$ $=0.449$ мм$^{-1}$, в то время как коэффициент фазы гармонической волны заданной частоты в свободном пространстве $\beta_0=2\pi/\lambda_0=$ $=0.314$ мм$^{-1}$. Это означает, что параметр $p=\sqrt{h^2-\beta_0^2}=$ $=0.321$ мм$^{-1}$.

В соответствии с равенством (15.5) искомое значение координаты x входит в систему двух уравнений

$$A\exp(-0.321a)=80,$$

$$A\exp(-0.321x)=0.8.$$

Исключив отсюда произвольную постоянную A, находим

$$x=\frac{\ln 100}{0.321}+a=26.3 \text{ мм}.$$

Проведенный расчет показывает, что поверхностная волна действительно может оказаться сконцентрированной в пределах сравнительно тонкого слоя с поперечным размером порядка одной длины волны.

Обратимся теперь к исследованию электромагнитного поля в области *2*, которая заполнена диэлектриком. Здесь комплексная

амплитуда поперечной проекции вектора напряженности магнитного поля удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 \dot{H}_{y2} + \varepsilon\beta_0^2 \dot{H}_{y2} = 0, \tag{15.9}$$

которое отличается от уравнения (15.1) лишь наличием множителя ε во втором слагаемом левой части. Решение этого уравнения будем искать в виде

$$\dot{H}_{y2}(x, z) = H_{y2}(x)\, e^{-j\hbar z}. \tag{15.10}$$

Отметим, что продольное волновое число h, входящее в формулы (15.2) и (15.10), *должно быть одним и тем же*, поскольку поле в обеих областях представляет собой единый волновой процесс с некоторой общей фазовой скоростью.

Тем же способом, что и ранее, находим дифференциальное уравнение относительно амплитудного коэффициента

$$\frac{d^2 H_{y2}}{dx^2} + q^2 H_{y2} = 0, \tag{15.11}$$

в которое входит параметр $q = \sqrt{\varepsilon\beta_0^2 - h^2}$. Ранее (см. гл. 6) уже говорилось о том, что фазовая скорость волн в подобных системах не может стать меньше фазовой скорости волны в неограниченном однородном диэлектрике. Отсюда непосредственно вытекает, что величина $\sqrt{\varepsilon}\beta_0$, равная коэффициенту фазы однородной плоской волны в безграничном диэлектрике, превышает продольное волновое число h, и поэтому величина q всегда действительна.

Уравнение (15.11) внешне напоминает уравнение гармонического осциллятора. Разница состоит лишь в том, что здесь роль независимой переменной играет не время, а пространственная координата. Общее решение такого уравнения целесообразно искать в виде

$$H_{y2}(x) = C \cos qx + D \sin qx. \tag{15.12}$$

Выбор значений произвольных постоянных C и D должен осуществляться исходя из граничных условий на поверхности идеального проводника при $x=0$ и на поверхности раздела вакуум — диэлектрик при $x=a$.

На поверхности проводника касательной оказывается z-я составляющая вектора напряженности электрического поля с комплексной амплитудой [см. выражение (15.8)]

$$\dot{E}_{z2} = \frac{1}{j\omega\varepsilon\varepsilon_0} \frac{\partial \dot{H}_{y2}}{\partial x}. \tag{15.13}$$

Вторая из возможных касательных составляющих электрического вектора, направленная вдоль оси y, тождественно обращается в

нуль в силу выбранного направления поляризации магнитного поля поверхностной волны.

Подстановка (15.10) в равенство (15.13) показывает, что синусоидальное слагаемое в выражении (15.12) не обеспечивает обращения в нуль проекции $\dot{E}_{z2}$ при $x=0$. Поэтому в формуле (15.12) необходимо положить $D=0$. Таким образом,

$$\dot{H}_{y2}(x, z)=C\cos qx\,\mathrm{e}^{-jhz}, \tag{15.14}$$

откуда с помощью первого уравнения Максвелла находим комплексные амплитуды проекций электрического вектора в диэлектрике:

$$E_{x2}=\frac{h}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}C\cos qx\,\mathrm{e}^{-jhz}, \tag{15.15}$$

$$\dot{E}_{y2}=0, \tag{15.16}$$

$$\dot{E}_{z2}=\frac{jq}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}C\sin qx\mathrm{e}^{-jhz}. \tag{15.17}$$

Дисперсионное уравнение замедляющей системы. Выше на основе общих соображений получены функциональные зависимости, которые описывают проекции векторов электромагнитного поля в вакууме и диэлектрике. Тем не менее вопрос о связи коэффициентов фазы β_0 и h, от которой зависят замедляющие свойства системы, остается открытым. Не найдена пока и зависимость между амплитудными коэффициентами A и C. Чтобы ответить на эти вопросы, воспользуемся условиями непрерывности касательных составляющих векторов электромагнитного поля на границе раздела при $x=a$. Эти условия имеют вид

$$\dot{E}_{z1}=\dot{E}_{z2};\qquad \dot{H}_{y1}=\dot{H}_{y2}. \tag{15.18}$$

Подставив в данные равенства конкретные выражения проекций векторов из (15.5), (15.8), (15.14) и (15.17), а также сокращая на общие множители, получаем

$$\begin{aligned} -pA\,\mathrm{e}^{-pa}+\frac{q}{\varepsilon}C\sin qa=0,\\ A\,\mathrm{e}^{-pa}-C\cos qa=0. \end{aligned} \tag{15.19}$$

Равенства (15.19) образуют систему двух однородных линейных уравнений относительно неизвестных амплитудных коэффициентов A и C. Из алгебры известно, что такая система уравнений является совместной и имеет отличные от нуля решения лишь в том случае, когда ее определитель обращается в нуль. Отсюда не-

посредственно получаем соотношение, устанавливающее взаимную связь между параметрами p и q:

$$p\cos qa - \frac{q}{\varepsilon}\sin qa = 0, \tag{15.20}$$

или в безразмерном виде

$$pa = \frac{1}{\varepsilon} qa \operatorname{tg} qa. \tag{15.21}$$

Равенство (15.21) называют *дисперсионным уравнением* рассматриваемой замедляющей системы, поскольку оно дает возможность построить дисперсионную характеристику — зависимость длины волны в волноводе от длины волны в свободном пространстве. В данное уравнение входят две неизвестные величины pa и qa. Чтобы определить их однозначно, уравнение (15.21) нужно дополнить еще одним соотношением

$$(pa)^2 + (qa)^2 = (\varepsilon - 1)(\beta_0 a)^2, \tag{15.22}$$

которое непосредственно вытекает из определения величин p и q.

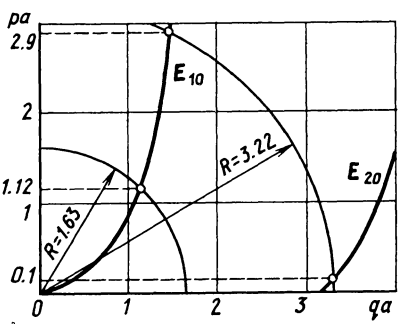


Рис. 15.2. Графический способ решения дисперсионного уравнения поверхностных волн в диэлектрической пластине

Равенства (15.21) и (15.22) следует рассматривать как систему двух уравнений относительно неизвестных pa и qa. Первое из этих уравнений трансцендентное, а второе — алгебраическое второй степени. Такие системы уравнений целесообразно решать численными методами на компьютере, используя многочисленные стандартные подпрограммы. Можно также воспользоваться весьма наглядным графическим методом, точность которого вполне достаточна для инженерных целей.

Проиллюстрируем графический метод решения на конкретном примере, приняв следующие исходные данные: $\varepsilon = 2.56$ (диэлектрик — полистирол), толщина пластины $a = 10$ мм, длина волны в свободном пространстве $\lambda_0 = 4.8$ см (частота $f = 6.25$ ГГц). Требуется определить длину волны $\lambda_в$ поверхностной электромагнитной волны E-типа над такой замедляющей структурой.

На рис. 15.2 построены две кривые из бесконечного множества, описываемого уравнением (15.21). Кривые рассчитаны с учетом заданного значения диэлектрической проницаемости пласти-

ны. Заметим, что для решения дисперсионного уравнения достаточно строить кривые только при $pa>0$, так как всегда $p>0$.

Искомые решения определяются точками пересечения построенных кривых с геометрическим местом точек, соответствующих уравнению (15.22). Нетрудно видеть, что данное равенство описывает семейство концентрических окружностей, радиусы которых зависят от диэлектрической проницаемости материала пластины, ее толщины и рабочей длины волны:

$$R=\sqrt{\varepsilon-1}\,\beta_0 a.$$

Подставив сюда числовые данные, находим, что в данном случае $R=1.63$. Эта окружность построена на рисунке. Снося точку пересечения окружности и кривой, которая описывается дисперсионным уравнением, получаем значение безразмерного параметра $pa=1.12$, откуда $p=0.112$ мм$^{-1}$. Значит, продольное волновое число поверхностной волны $h=\sqrt{p^2+\beta^2_0}=0.172$ мм$^{-1}$, а длина волны в волноводе $\lambda_в=2\pi/h=3.65$ см.

В инженерной практике эффективность работы замедляющей системы оценивают, вводя безразмерный *коэффициент замедления*

$$K_{зам}=c/v_ф=\lambda_0/\lambda_в. \qquad (15.23)$$

Для рассмотренного случая $K_{зам}=4.8/3.65=1.315$, т. е. фазовая скорость волны примерно на 30% меньше скорости света.

Отметим, что при выбранных параметрах замедляющей системы точка пересечения окружности и дисперсионной кривой оказалась единственной. Это свидетельствует о том, что на заданной частоте может распространяться поверхностная волна лишь одного типа. Данную волну (замедленную моду) целесообразно обозначить как E_{10}. Первый индекс представляет собой порядковый номер корня дисперсионного уравнения, а второй указывает на то, что поле такой волны неизменно в поперечном направлении. Волна типа E_{10} является низшей модой в рассматриваемой замедляющей структуре и существует при любой частоте. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что точка пересечения окружности и кривой будет иметь место всегда, независимо от радиуса окружности.

Одноволновый режим работы замедляющей структуры сохраняется вплоть до значения $R=\pi$, т. е. на длинах волн, удовлетворяющих неравенству

$$\lambda_0 \geqslant 2a\sqrt{\varepsilon-1}. \qquad (15.24)$$

При более высоких частотах в системе потенциально могут существовать поверхностные волны высших типов, такие, как E_{20}, E_{30} и т. д. В частности, на рис. 15.2 изображена окружность радиу-

сом $R=3.22$, которая соответствует колебаниям с длиной волны в свободном пространстве $\lambda_0=2.44$ см (частота $f=12.3$ ГГц). Точке пересечения этой окружности со второй ветвью дисперсионной кривой соответствует волна типа E_{20}, замедление которой весьма невелико ($pa=0.1$, $K_{зам}=1.0008$). Наряду с этой высшей модой в замедляющей системе может быть возбуждена и основая мода E_{10}, испытывающая достаточно сильное замедление ($pa=2.9$,

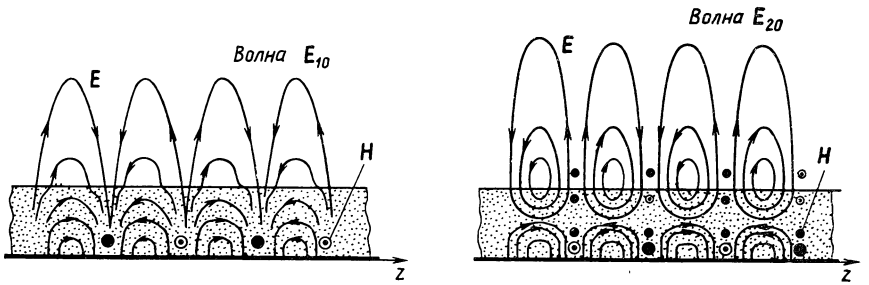


Рис. 15.3. Эскизы силовых линий электромагнитного поля волн типов E_{10} и E_{20} в диэлектрической пластине

$K_{зам}=1.50$). По причинам, излагавшимся ранее, волноводные конструкции следует строить так, чтобы обеспечить одноволновый режим работы линии передачи.

Эскизы распределения силовых линий векторов электромагнитного поля для мод E_{10} и E_{20} приведены на рис. 15.3. Картины силовых линий для волн с более высоким значением первого индекса могут быть построены по аналогии. Данные рисунки наглядно иллюстрируют факт экспоненциального уменьшения амплитуды поля при удалении точки наблюдения от замедляющей структуры.

Поверхностные волны Н-типа. В системе из диэлектрической пластины и идеально проводящей подстилающей плоскости помимо уже изученных Е-волн могут существовать волны Н-типа. Кратко рассмотрим свойства таких волн, опуская некоторые промежуточные выкладки; смысл параметров p и q остается прежним.

Предположим, что в области *1* (см. рис. 15.1) распространяется замедленная волна, у которой комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля имеет единственную проекцию

$$\dot{E}_{y1}(x, z)=E_{y1}(x)\,e^{-j\hbar z}. \qquad (15.25)$$

Функция вида (15.25) в указанной области является решением уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2\dot{E}_{y1}+\beta_0^2\dot{E}_{y1}=0,$$

и по аналогии с (15.5) может быть представлена следующим образом:

$$\dot{E}_{y1}(x, z)=A\,\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{e}^{-j\hbar z}. \tag{15.26}$$

Отсюда, воспользовавшись вторым уравнением Максвелла, находим магнитный вектор поля в области *1*, который имеет отличную от нуля продольную проекцию с комплексной амплитудой

$$\dot{H}_{z1}=\frac{-1}{j\omega\mu_0}\,\frac{\partial\dot{E}_{y1}}{\partial x}=\frac{p}{j\omega\mu_0}\,A\mathrm{e}^{-px}\mathrm{e}^{-j\hbar z}. \tag{15.27}$$

Таким образом, рассматриваемый электромагнитный процесс действительно является волной Н-типа.

В области *2* электрический вектор поверхностной волны имеет лишь составляющую, направленную вдоль оси y; комплексная амплитуда соответствующей проекции удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\dot{E}_{y2}+\varepsilon\beta_0^2\dot{E}_{y2}=0,$$

решение которого имеет вид

$$\dot{E}_{y2}(x, z)=B\sin qx\,\mathrm{e}^{-j\hbar z}, \tag{15.28}$$

где B — произвольная постоянная. Заметим, что в формуле (15.28) оставлен лишь член с синусоидальным амплитудным множителем, чтобы выполнялось граничное условие на идеально проводящей плоскости при $x=0$.

Продольная проекция магнитного вектора в области *2* имеет комплексную амплитуду

$$\dot{H}_{z2}=\frac{-1}{j\omega\mu_0}\,\frac{\partial\dot{E}_{y2}}{\partial x}=\frac{-1}{j\omega\mu_0}\,qB\cos qx\,\mathrm{e}^{-j\hbar z}. \tag{15.29}$$

Теперь воспользуемся условиями на границе раздела вакуум — диэлектрик

$$\dot{E}_{y1}=\dot{E}_{y2};\qquad \dot{H}_{z1}=\dot{H}_{z2}\ \text{при}\ x=a. \tag{15.30}$$

Подставив сюда выражения (15.26)—(15.29), приходим к однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно амплитудных коэффициентов A и B:

$$A\mathrm{e}^{-pa}-B\sin qa=0,$$

$$Ap\,\mathrm{e}^{-pa}+Bq\cos qa=0. \tag{15.31}$$

Очевидное условие разрешимости этой системы приводит к дисперсионному уравнению для Н-волн

$$da=-qa\operatorname{ctg}qa, \tag{15.32}$$

которое следует дополнять соотношением (15.22), связывающим переменные pa и qa.

Методика графического решения полученного дисперсионного уравнения показана на рис. 15.4. Построение в принципе не отличается от того, которое использовалось при анализе Е-волн. Однако следует заметить, что первая ветвь дисперсионной кривой, отвечающая низшей моде H_{10}, начинается не из начала координат, как было ранее, а из точки на оси абсцисс с координатой $qa=\pi/2$. Отсюда следует, что при достаточно низких частотах, когда выполняется неравенство $R<\pi/2$, поверхностных волн Н-типа в данной системе существовать не может. Критическую длину волны $\lambda_{кр}$ для моды H_{10} можно найти из условия $\sqrt{\varepsilon-1}\,\beta_{кр}a=\pi/2$. Так как $\beta_{кр}=2\pi/\lambda_{кр}$, то

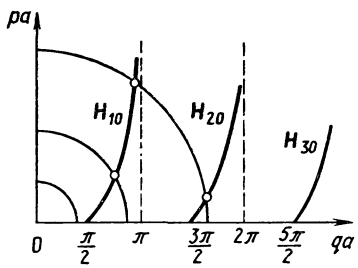


Рис. 15.4. Решение дисперсионного уравнения для волн магнитного типа в диэлектрической пластине

$$\lambda_{кр}=4\sqrt{\varepsilon-1}\,a. \qquad (15.33)$$

Таким образом, критические длины волн для мод Н-типов по порядку величин совпадают с толщиной пластины.

Пример 15.2. Найти критическую длину волны для моды типа H_{30}, если известны параметры диэлектрической пластины: $a=0.5$ мм, $\varepsilon=9$ (пластина выполнена из оксида алюминия).

Волне типа H_{30} отвечает третья ветвь дисперсионной кривой, как это показано на рис. 15.4. Данная ветвь начинается из точки с абсциссой $qa=5\pi/2$. Значит, $\sqrt{\varepsilon-1}\beta_{кр}a=5\pi/2$, откуда $\lambda_{кр}=4\sqrt{\varepsilon-1}\,a/5=1.13$ мм, т. е. такую моду можно возбудить лишь в коротковолновой части миллиметрового диапазона.

15.2. Гребенчатая замедляющая система

Чертеж этой замедляющей структуры, весьма распространенной в технике СВЧ, представлен на рис. 15.5. Система представляет собой периодическую последовательность канавок прямоугольного профиля, прорезанных в металлическом основании и ориентированных параллельно оси y. На рисунке обозначены геометрические размеры — глубина канавок l, ширина a, а также толщина межканавочных гребней b.

Оказывается, что при определенных условиях в области *1* над гребенчатой структурой может быть возбуждена поверхностная электромагнитная волна, которая распространяется в направлении продольной оси z, т. е. поперек канавок. Напряженность поля этой волны с ростом поперечной координаты x уменьшается по экспоненциальному закону.

Сделаем существенное предположение — будем считать, что пространственный период структуры $a+b$ значительно меньше рабочей длины волны λ_0. Как будет видно из дальнейшего, это дополнительное условие облегчает поиск решений уравнений Максвелла, которые описывают электромагнитное поле в гребенчатой структуре.

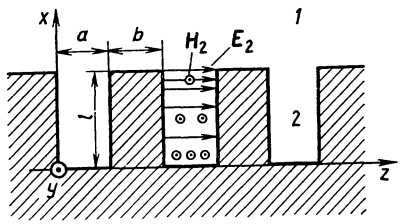


Рис. 15.5. Гребенчатая замедляющая система

Будем изучать волны Е-типа, у которых магнитный вектор имеет единственную отличную от нуля составляющую, направленную вдоль оси y. Тогда, считая, что область *1* над гребенкой заполнена воздухом, а вся структура является бесконечно протяженной по координате y, можно непосредственно воспользоваться полученными ранее формулами (15.5) и (15.8), записав

$$\dot{H}_{y1} = Ae^{-px}e^{-jhz}, \tag{15.34}$$

$$\dot{E}_{z1} = \frac{jp}{\omega\varepsilon_0} Ae^{-px}e^{-jhz}. \tag{15.35}$$

Рассмотрим теперь поле в области *2*, которая представляет собой совокупность канавок, заполненных воздухом. Если принять во внимание предположение, согласно которому ширина канавки значительно меньше длины волны, то можно заключить, что в пределах отдельно взятой канавки поле практически неизменно вдоль координаты z. Поэтому решением уравнений Максвелла в области *2* может быть лишь стоячая Т-волна с единственной отличной от нуля проекцией электрического вектора

$$\dot{E}_{z2} = B \sin \beta_0 x, \tag{15.36}$$

где B — некоторый произвольный амплитудный множитель. Легко убедиться, что формула (15.36) действительно описывает электрическое поле, удовлетворяющее уравнениям

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \beta_0^2 \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \dot{\mathbf{E}} = 0. \tag{15.37}$$

В равной мере такое поле удовлетворяет граничным условиям как на дне канавки при $x=0$, так и на ее боковых стенках.

Чтобы найти напряженность магнитного поля в области 2, следует воспользоваться вторым уравнением Максвелла

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_2=-j\omega\mu_0\dot{\mathbf{H}}_2.$$

Учитывая, что, по предположению, $\dot{E}_{x2}=\dot{E}_{y2}=0$, имеем

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & \dot{E}_{z2}\end{vmatrix}=-\frac{\partial\dot{E}_{z2}}{\partial x}\,\mathbf{i}_y,$$

откуда с учетом равенства (15.36)

$$\dot{H}_{y2}=\frac{\beta_0}{j\omega\mu_0}B\cos\beta_0 x. \tag{15.38}$$

На границе раздела областей 1 и 2 касательные составляющие векторов электромагнитного поля должны быть непрерывны. Такое представление, в сущности, является приближенным. Оно обусловлено малостью пространственного периода структуры по сравнению с рабочей длиной волны, вследствие чего можно не считаться с конечной толщиной металлических гребней и рассматривать всю область 2 как некоторую «искусственную среду», электродинамические свойства которой зависят лишь от соотношения между длиной волны и глубиной канавки.

Так как фактические значения амплитудных множителей A и B несущественны, подойдем к проблеме граничных условий при $x=l$ несколько по-иному, введя в рассмотрение вспомогательные величины

$$Z_{\text{пов}1}=\dot{E}_{z1}/\dot{H}_{y1}|_{x=l}, \tag{15.39}$$

$$Z_{\text{пов}2}=\dot{E}_{z2}/\dot{H}_{y2}|_{x=l}, \tag{15.40}$$

которые имеют размерность сопротивления и называются *поверхностными импедансами* соответствующих областей[1]. Очевидно, что обычные граничные условия, согласно которым при $x=l$ касательные составляющие векторов поля должны быть непрерывны, с точностью до несущественного общего множителя можно заменить так называемым импедансным граничным условием

$$Z_{\text{пов}1}=Z_{\text{пов}2}. \tag{15.41}$$

[1] Термин «импеданс», повсеместно принятый в электродинамике СВЧ, является синонимом термина «комплексное сопротивление» из теории электрических цепей.

Обратившись к формулам (15.34) и (15.35), убеждаемся, что поверхностный импеданс среды *1*

$$Z_{\text{пов1}} = jp/(\omega\varepsilon_0), \tag{15.42}$$

причем эта величина оказывается даже неизменной во всех точках верхнего полупространства. Так как для замедленной волны параметр $p>0$, то поверхностный импеданс должен быть чисто реактивным и носить индуктивный характер по аналогии с известной формулой $Z_L = j\omega L$.

Поверхностный импеданс для поля в области *2* найдем, воспользовавшись равенствами (15.36) и (15.38):

$$Z_{\text{пов2}} = \frac{j\omega\mu_0}{\beta_0} \operatorname{tg} \beta_0 l = jZ_0 \operatorname{tg} \beta_0 l, \tag{15.43}$$

где Z_0 — характеристическое сопротивление вакуума.

Приравнивая эти два импеданса и учитывая, что $\omega\varepsilon_0 Z_0 = \beta_0$, получаем дисперсионное уравнение гребенчатой замедляющей системы

$$p = \beta_0 \operatorname{tg} \beta_0 l. \tag{15.44}$$

Как уже указывалось, левая часть этого уравнения должна быть положительной. Поэтому поверхностная волна может существовать не при любом соотношении между параметрами l и λ_0, а лишь тогда, когда $\operatorname{tg} \beta_0 l > 0$. Действительно, в соответствии с (15.43) только в этом случае поверхностный импеданс области *2* будет иметь индуктивный характер. В частности, допустимыми оказываются значения l, удовлетворяющие неравенствам

$0 < l < \lambda_0/4$, $\lambda_0/2 < l < 3\lambda_0/4$ и т. д.

Дисперсионное уравнение гребенчатой замедляющей системы (15.44) несколько проще уравнений (15.21)—(15.22), которые описывают свойства поверхностных волн в системе с диэлектрической пластиной. Дело в том, что равенство (15.44) выражает параметр p в явном виде, так что из него непосредственно следует формула для расчета коэффициента замедления гребенчатой структуры. Действительно, так как $K_{\text{зам}} = \lambda_0/\lambda_{\text{в}} = h/\beta_0$, то

$$K_{\text{зам}} = \frac{\sqrt{p^2 + \beta_0^2}}{\beta_0} = \frac{1}{\cos \beta_0 l}. \tag{15.45}$$

Отсюда видно, что если глубина канавки приближается к $\lambda_0/4$, то длина замедленной волны $\lambda_{\text{в}}$, а значит, и ее фазовая скорость стремятся к нулю.

Пример 15.3. Подобрать минимальную глубину канавок гребенчатой замедляющей структуры таким образом, чтобы при длине волны генератора $\lambda_0=3.2$ см фазовая скорость поверхностной волны составляла $1.8\cdot10^8$ м/с.

В данном случае параметр $K_{зам}=3/1.8=1.66$. Отсюда в соответствии с формулой (15.45) находим $\beta_0 l=\arccos(1/1.66)=0.924$, а так как коэффициент фазы плоской волны в свободном пространстве $\beta_0=6.28/3.2=1.963$ см$^{-1}$, то требуемая глубина канавок $l=0.47$ см$=4.7$ мм.

На практике фазовая скорость поверхностной волны всегда имеет некоторое ненулевое значение, хотя из формулы (15.45) и следует, что эта скорость стремится к нулю при $\beta_0 l\to\pi/2$. Такое противоречие между теорией и экспериментом объясняется тем, что наш анализ является приближенным, поскольку не учитывает в явном виде параметров a и b структуры. Строгое решение задачи о волнах в гребенчатой структуре достаточно сложно и выходит за рамки настоящей книги.

Гребенчатая замедляющая структура не имеет диэлектрических элементов конструкции и поэтому удобна для использования в мощных электронных приборах и малогабаритных антеннах СВЧ-диапазона.

15.3. Некоторые другие замедляющие системы

Одной из первых замедляющих структур, нашедших применение на практике, явился *спиральный волновод,* схематически изображенный на рис. 15.6. Такой волновод представляет собой достаточно тонкий проводник, навитый на круглый цилиндр радиусом a по винтовой линии с некоторым постоянным шагом d. Замедляющее действие спирального волновода можно упрощенно объяснить следующим образом. При возбуждении такого волновода вдоль проводника распространяется бегущая волна тока, причем скорость этой волны весьма близка к скорости света в вакууме. Поскольку путь тока вдоль проводника значительно превышает проекцию этого пути на ось волновода, фактическая скорость распространения колебаний вдоль волновода оказывается меньше скорости света.

Чтобы найти коэффициент замедления спирального волновода, рассмотрим развертку одного витка спирали (рис. 15.7). Очевидно, что коэффициент замедления равен отношению длин путей вдоль проводника и вдоль оси волновода, т. е.

$$K_{зам} = 1/\sin\alpha, \qquad (15.46)$$

где α — угол намотки спирали.

Таким образом, в первом приближении фазовая скорость замедленной электромагнитной волны в спиральном волноводе определяется лишь геометрией спирали и не зависит от частоты. Это

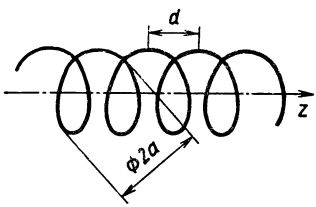


Рис. 15.6. Спиральный волновод

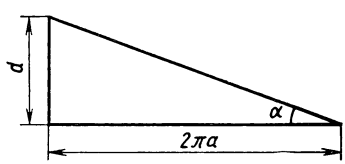


Рис. 15.7. Развертка одного витка спирали

простое, на первый взгляд, свойство объясняет высокую широкополосность лампы бегущей волны (ЛБВ), которая используется в качестве усилителя СВЧ-колебаний. Работа ЛБВ (рис. 15.8) основана на том, что при условии синхронизма между электронным

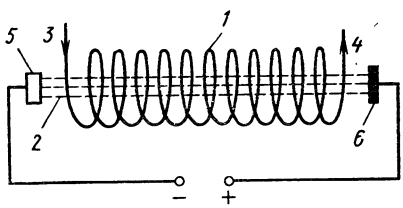


Рис. 15.8. Конструкция лампы бегущей волны:

1 — спираль; *2* — электронный пучок; *3* — вход энергии СВЧ; *4* — выход усиленного сигнала; *5* — катод; *6* — коллектор электронов

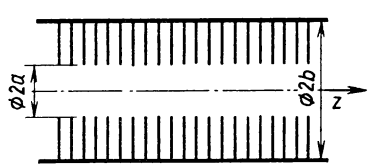


Рис. 15.9. Диафрагмированный волновод

потоком и распространяющейся волной часть кинетической энергии пучка электронов может быть передана электромагнитной волне. За счет этого амплитуда колебаний на выходе прибора существенно превосходит амплитуду колебаний на входе. Очевидно, что отсутствие частотной дисперсии (зависимости фазовой скорости волн от частоты) благоприятствует работе ЛБВ в широкой полосе частот.

Строгая теория распространения электромагнитных волн в спиральном волноводе довольно сложна с математической точки зрения и здесь не рассматривается Отметим лишь, что формула (15.46) справедлива только при условии $\lambda_0 < d$. В противном слу-

чае волна «перескакивает» с витка на виток, в результате чего коэффициент замедления спирали становится функцией рабочей частоты.

Интересной модификацией гребенчатой структуры, имеющей практическое применение, является *диафрагмированный волновод* (рис. 15.9), представляющий собой круглую металлическую трубу, внутри которой с одинаковым шагом размещены диафрагмы. Подобную систему можно рассматривать как гребенчатую структуру, свернутую в кольцо по направлению канавок. Диафрагмированный волновод особенно удобен для применения в линейных ускорителях заряженных частиц. Это объясняется конструктивной особенностью данного волновода — наличием отверстий в диафрагмах, сквозь которые проходит сфокусированный и сгруппированный поток частиц.

ЗАДАЧИ

15.1. Замедляющая система представляет собой бесконечную диэлектрическую пластину с параметрами $\varepsilon_a = \varepsilon\varepsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$; толщина пластины равна $2a$. Пластина расположена параллельно плоскости ZOY декартовой системы координат таким образом, что ее плоские поверхности имеют координаты $x = \pm a$. Электромагнитная волна распространяется вдоль оси z. Покажите, что в данной замедляющей системе могут распространяться волны E-типа, причем существуют как четные волны, у которых поперечные проекции векторов поля представляют собой четные функции координаты x, так и нечетные волны, у которых эти проекции описываются нечетными функциями. Выведите дисперсионные уравнения для волн четных и нечетных типов.

15.2. Замедляющая структура с плоской границей раздела (например, пластина диэлектрика на металлическом основании) возбуждается колебаниями с частотой 7.5 ГГц. Известно, что на расстоянии 6 см от границы раздела амплитуда вектора напряженности магнитного поля уменьшается в 8 раз по сравнению с амплитудой этого вектора на границе раздела. Определите длину волны в данной замедляющей структуре.

15.3. Найдите фазовую скорость и длину поверхностной волны, распространяющейся вдоль гребенчатой замедляющей структуры с глубиной пазов 5 мм при частоте поля 10 ГГц.

15.4. Известно, что поверхностный импеданс некоторой гребенчатой замедляющей структуры равен $j650$ Ом. Вычислите фазовую скорость волны, распространяющейся вдоль системы.

15.5. Спиральная замедляющая система имеет радиус $a = 4$ мм и шаг $d = 0.6$ мм. Определите приближенное значение длины волны в этой спирали на частоте 2.8 ГГц. Каков должен быть поря-

док скорости электронного пучка, эффективно взаимодействующего с такой замедляющей системой?

15.6. Составьте дисперсионное уравнение, описывающее характеристики поверхностной волны, которая распространяется в системе, состоящей из гребенки и идеально проводящей плоскости, параллельной границе гребенчатой структуры. Расстояние между гребенкой и плоскостью равно d, глубина паза гребенки равна l. Указание: приравняйте поверхностные импедансы полей на границе гребенчатой структуры.

Глава шестнадцатая

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Ранее в гл. 1 указывалось, что некоторые материальные среды обладают анизотропией электромагнитных свойств. Это находит отражение в том, что материальные уравнения таких сред в самом общем виде имеют следующий вид:

$$\mathbf{D}=\overleftrightarrow{\varepsilon}_a\mathbf{E}, \qquad \mathbf{B}=\overleftrightarrow{\mu}_a\mathbf{H},$$

где $\overleftrightarrow{\varepsilon}_a$ и $\overleftrightarrow{\mu}_a$ — тензоры абсолютной диэлектрической и абсолютной магнитной проницаемостей соответственно. В частных случаях может проявляться только электрическая или только магнитная анизотропия. Например, для магнитно-анизотропной среды абсолютная магнитная проницаемость представляет собой тензор, в то время как абсолютная диэлектрическая проницаемость является скалярной величиной.

Внутренней причиной анизотропии является особенность атомно-молекулярного строения вещества, в частности упорядоченное пространственное расположение атомов в узлах кристаллической решетки. Любые монокристаллы (кварц, кремний, оксид алюминия и т. д.) анизотропны, различия состоят лишь в степени выраженности анизотропных свойств. Анизотропными становятся также аморфные вещества, помещенные в достаточно сильные постоянные электрические или магнитные поля.

Изучением распространения электромагнитных волн в анизотропных средах занимаются специальные разделы физики, в частности кристаллооптика. Общая теория оказывается достаточно сложной и громоздкой в математическом отношении. Поэтому в дальнейшем мы сосредоточим внимание на изучении лишь одного класса анизотропных веществ — намагниченных ферритов, получивших за последние десятилетия широкое применение при конст-

руировании волноводных СВЧ-устройств. Несмотря на такую ограниченность объекта исследования, нам удастся познакомиться с рядом важнейших свойств, присущих любым анизотропным средам.

16.1. Физический механизм анизотропии ферритов. Уравнение движения намагниченности

Ферриты представляют собой твердые вещества, подобные керамике. Их получают искусственно, проводя высокотемпературное спекание оксида железа с соединением какого-либо двухвалентного металла, например Zn, Ba, Sr и т. д. Условная химическая формула феррита имеет вид $M_n(Fe_2O_3)_n$, где символом M обозначен ион двухвалентного металла.

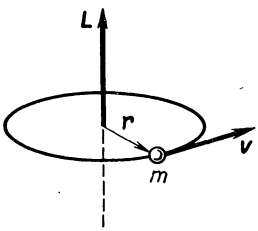


Рис. 16.1. Вектор момента количества движения

При комнатной температуре электроны всех атомов, входящих в кристаллическую решетку феррита, прочно удерживаются обменными силами. Поэтому концентрация электронов в зоне проводимости весьма мала и ферриты в отличие от металлов проявляют четко выраженные свойства изолятора. На частотах СВЧ-диапазона относительная диэлектрическая проницаемость ферритов в среднем составляет 10—20; диэлектрические потери соответствуют значению $\operatorname{tg}\delta \approx 10^{-3}$.

Классические представления, основанные на понятии молекулярных токов (см. гл. 1), недостаточны для объяснения электромагнитных явлений в ферритах. Приходится использовать квантово-механические понятия. Квантовая теория магнетизма веществ основана на том факте, что последний электрон в оболочке иона двухвалентного металла обладает собственными механическим и магнитным моментами, или, как говорят в физике, такой электрон имеет *спин*. Обсудим этот вопрос несколько подробнее, опираясь на материал вузовского курса физики [14].

Как известно, характеристикой тела, находящегося во вращательном движении, служит *момент импульса*. Рассмотрим вращающуюся материальную точку массой m, имеющую скорость $\mathbf{v}$ (рис. 16.1). Если через $\mathbf{r}$ обозначить радиус-вектор точки относительно центра вращения, то, по определению, момент импульса данной точки относительно центра вращения

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}\,(m\mathbf{v})]. \qquad (16.1)$$

Ясно, что вектор $\mathbf{L}$ перпендикулярен плоскости орбиты точки.

Если на точку действует некоторая сила **F**, то справедлив закон Ньютона

$$\mathbf{F}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{v}). \tag{16.2}$$

Векторно умножив левую и правую части равенства (16.2) на радиус-вектор **r**, получим

$$[\mathbf{rF}]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathbf{r}(m\mathbf{v})]. \tag{16.3}$$

Величину

$$\mathbf{K}=[\mathbf{rF}] \tag{16.4}$$

называют *моментом силы* **F** относительно выбранной оси вращения. Воспользовавшись этим понятием, можно переписать уравнение (16.3) таким образом:

$$\mathbf{K}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{L}. \tag{16.5}$$

Пусть имеется некоторое материальное тело конечных размеров. Если это тело может силовым образом взаимодействовать с постоянным магнитным полем, то говорят, что оно обладает некоторым магнитным моментом **m**. Данный вектор имеет физическую размерность А·м^2 и перпендикулярен плоскости воображаемого элементарного витка с током (см. гл. 1). В квантовой механике установлена числовая связь между магнитным моментом электрона **m** и его моментом импульса **L**. Теоретически и экспериментально показано, что

$$\mathbf{m}=-\gamma\mathbf{L}, \tag{16.6}$$

где $\gamma=e/m=1.76\cdot10^{11}$ Кл/кг — величина, равная отношению заряда электрона к его массе и называемая *гиромагнитным отношением* электрона. Отрицательный знак в формуле (16.6) указывает на то, что в пространстве векторы **m** и **L** антипараллельны.

Уравнения движения намагниченности. Предположим теперь, что образец феррита помещен в постоянное магнитное поле $\mathbf{H}_0$, ориентированное произвольным образом и называемое *подмагничивающим полем*. В курсе физики доказывается, что любая система, обладающая магнитным моментом, стремится при этом занять такое положение, чтобы векторы **m** и $\mathbf{H}_0$ стали параллельными. При таком положении потенциальная энергия магнитной системы оказывается минимальной. Можно показать, что момент силы, действующей на систему в магнитном поле,

$$\mathbf{K}=\mu_0[\mathbf{mH}_0]. \tag{16.7}$$

Подставив это выражение в формулу (16.5) и учитывая соотношение (16.6), приходим к дифференциальному уравнению, которое описывает динамику вектора магнитного момента электрона:

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = -\mu_0\gamma[\mathbf{m}\mathbf{H}_0]. \tag{16.8}$$

Предположим, что в единице объема феррита содержится N элементарных магнитных систем (валентных электронов). Тогда, введя вектор намагниченности $\mathbf{M}=\mathbf{m}N$, из (16.8) получаем *уравнение движения намагниченности*

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\mu_0\gamma[\mathbf{M}\mathbf{H}_0]. \tag{16.9}$$

Частота ферромагнитного резонанса. Пусть для определенности постоянное подмагничивающее поле $\mathbf{H}_0$ ориентировано вдоль оси z декартовой системы координат, так что $\mathbf{H}_0=H_0\mathbf{i}_z$. Вектор намагниченности является суммой составляющих по трем пространственным осям:

$$\mathbf{M}=M_x\mathbf{i}_x+M_y\mathbf{i}_y+M_z\mathbf{i}_z. \tag{16.10}$$

Подставив это разложение в (16.9), получаем систему трех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}
\frac{dM_x}{dt} &= -\mu_0\gamma H_0 M_y,\\
\frac{dM_y}{dt} &= \mu_0\gamma H_0 M_x,\\
\frac{dM_z}{dt} &= 0,
\end{aligned} \tag{16.11}$$

которая описывает свободное движение вектора намагниченности в феррите, происходящее без внешних возбуждающих сил.

Следует заметить, что в системе (16.11) третье уравнение, по сути дела, никак не связано с первыми двумя и просто означает, что $M_z=\text{const}$. В теории ферритов часто приближенно считают, что продольная (вдоль поля $\mathbf{H}_0$) проекция M_z равна так называемой *намагниченности насыщения* M_s (от англ. saturation — насыщение). Это означает, что все элементарные магнитные моменты ионов ориентированы вдоль направления подмагничивающего поля. Значения M_s оказываются различными у ферритов разных марок и приводятся в справочниках по радиотехническим материалам.

Обращаясь теперь к системе двух первых уравнений из (16.11), дополним ее некоторыми начальными условиями:

$$M_x|_{t=0}=M_{x0}; \qquad M_y|_{t=0}=M_{y0}, \tag{16.12}$$

где M_{x0} и M_{y0} — произвольные постоянные величины, характеризующие состояние вещества при $t=0$. Совокупность уравнений (16.11) и начальных условий (16.12) образует так называемую задачу Коши для рассматриваемых линейных дифференциальных уравнений. Подобные задачи встречаются в теории цепей, где они описывают процессы собственных колебаний.

Продифференцировав первое уравнение из (16.11) по времени и воспользовавшись вторым уравнением, можно исключить неизвестную M_y и получить уравнение второго порядка относительно проекции M_x:

$$\frac{d^2M_x}{dt^2}+\omega_p^2M_x=0. \tag{16.13}$$

Входящий сюда параметр $\omega_p=\mu_0\gamma H_0$ называют *частотой ферромагнитного резонанса.*

Уравнение (16.13) представляет собой хорошо известное уравнение гармонического осциллятора, которое в физике описывает свободные колебания в динамических системах второго порядка без потерь. Будем искать решение этого уравнения как сумму двух гармонических слагаемых с не известными пока амплитудными коэффициентами:

$$M_x(t)=A\cos\omega_p t+B\sin\omega_p t. \tag{16.14}$$

Прямая подстановка убеждает в том, что выражение (16.14) действительно служит решением уравнения (16.13).

В соответствии с первым уравнением из системы (16.11)

$$M_y=-\frac{1}{\omega_p}\frac{dM_x}{dt}=A\sin\omega_p t-B\cos\omega_p t. \tag{16.15}$$

Подставив значение $t=0$ в равенства (16.14) и (16.15), а также используя начальные условия (16.12), находим, что $A=M_{x0}$, $B=-M_{y0}$ и поэтому

$$\begin{aligned} M_x&=M_{x0}\cos\omega_p t-M_{y0}\sin\omega_p t,\\ M_y&=M_{x0}\sin\omega_p t+M_{y0}\cos\omega_p t. \end{aligned} \tag{16.16}$$

Чтобы уяснить физический смысл полученного результата, заметим, что

$$M_x^2+M_y^2=M_{x0}^2+M_{y0}^2=\text{const}, \tag{16.17}$$

т. е. при свободных колебаниях вектор **M** перемещается в пространстве таким образом, что его конец описывает окружность постоянного радиуса (рис. 16.2). Из рисунка видно, что вектор **M** всегда параллелен образующей конуса с высотой M_s; вращение вектора происходит с резонансной частотой, а направление вращения зависит от начальных условий.

Движения такого вида часто встречаются в природе. Примерами могут служить круговое движение грузика, подвешенного на нерастяжимой нити, а также вращательное движение оси волчка, наблюдаемое в том случае, если внезапно возникает сила, действующая перпендикулярно оси вращения. В теории гироскопов такое движение волчка называют прецессией. По аналогии говорят, что рассмотренное явление в намагниченном феррите является свободной прецессией вектора намагниченности.

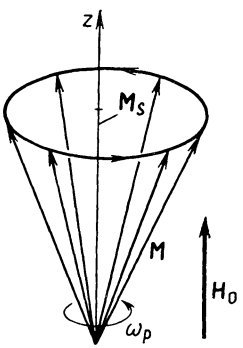


Рис. 16.2. Свободное движение вектора намагниченности в феррите

Частота ω_p зависит от напряженности подмагничивающего поля H_0 и может оказаться весьма высокой. Например, если индукция подмагничивающего поля $B_0=1.5$ Тл (такое поле можно создать с помощью мощного постоянного магнита), то $\omega_p=\mu_0\gamma H_0=\gamma B_0=2.64\cdot10^{11}$ с$^{-1}$ или $f_p=4.2\cdot10^{10}$ Гц$=42$ ГГц. Этой частоте соответствует длина волны $\lambda_0=7.14$ мм, т. е. собственные колебания вектора намагниченности происходят в миллиметровом диапазоне.

Влияние затухания. Физически ясно, что амплитуда свободных колебаний вектора намагниченности с течением времени должна уменьшаться из-за неизбежных потерь. Было предложено описывать потери в намагниченной среде, введя дополнительные члены в уравнения движения:

$$\frac{dM_x}{dt}=-\omega_p M_y-\frac{M_x}{T},$$
$$\frac{dM_y}{dt}=\omega_p M_x-\frac{M_y}{T}. \qquad (16.18)$$

Уравнения вида (16.18) называют *уравнениями Блоха*. Входящий в них параметр T представляет собой время релаксации свободных колебаний вектора намагниченности. Значения T находят экспериментально, изучая, например, отклик среды на внешнее воздействие вида короткого импульса или снимая амплитудно-частотную характеристику системы.

Покажем, что уравнения Блоха действительно описывают свободные колебания вектора намагниченности при наличии потерь. Для этого будем искать решения системы (16.18) в виде экспоненциальных функций времени с не известными заранее коэффициентами:

$$M_x = Ae^{pt}; \qquad M_y = Be^{pt}. \tag{16.19}$$

Подставив (16.19) в (16.18), убеждаемся, что коэффициенты A и B должны удовлетворять системе однородных линейных уравнений

$$\left(p + \frac{1}{T}\right)A + \omega_p B = 0,$$

$$-\omega_p A + \left(p + \frac{1}{T}\right)B = 0.$$

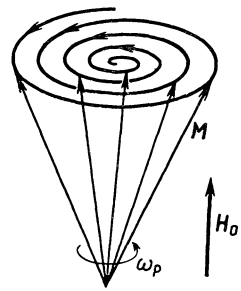


Рис. 16.3. Влияние потерь на характер движения вектора намагниченности

Эта система будет совместной, если ее определитель равен нулю, т. е. параметр p является корнем квадратного уравнения

$$\left(p + \frac{1}{T}\right)^2 + \omega_p^2 = 0,$$

откуда

$$p_{1,2} = -\frac{1}{T} \pm j\omega_p. \tag{16.20}$$

Подставляя эти значения корней в (16.19), приходим к выводу, что общий вид зависимостей поперечных проекций вектора намагниченности от времени таков:

$$M_{x,y} \sim e^{-t/T} \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \omega_p t. \tag{16.21}$$

Эта формула очень напоминает ту, которая описывает свободный процесс в колебательном контуре без потерь [2]. Легко сообразить, что конец вектора **M** перемещается теперь не по окружности, как это было в случае среды без потерь, а по спирали (рис. 16.3); при $t \to \infty$ этот вектор стремится стать параллельным подмагничивающему полю. Время релаксации T служит оценкой длительности процесса установления равновесия в данной системе. Как правило, на практике выполняется неравенство $\omega_p T \gg 1$, т. е. прецессирующий вектор намагниченности успевает совершить много оборотов вокруг оси, прежде чем процесс собственных колебаний закончится.

Недостаток уравнений Блоха состоит в том, что они введены чисто феноменологически, без обсуждения физического механизма

возникновения потерь в феррите. Более последовательным оказывается подход, основанный на векторном уравнении движения намагниченности в форме Ландау — Лифшица

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\mu_0\gamma[\mathbf{M}\mathbf{H}_0] - \mu_0\alpha\frac{[\mathbf{M}[\mathbf{M}\mathbf{H}_0]]}{M^2}. \qquad (16.22)$$

Второе слагаемое правой части обычно называют диссипативным членом уравнения; параметр α определяют экспериментально.

16.2. Тензор магнитной проницаемости намагниченного феррита

Рассмотрим случай, когда в однородной бесконечно протяженной ферритовой среде помимо постоянного магнитного поля с вектором напряженности $\mathbf{H}_0$ существует высокочастотное магнитное поле $\mathbf{H}_1$, гармонически изменяющееся во времени с частотой ω. Полагая, что вектор $\mathbf{H}_0$ ориентирован вдоль оси z, запишем суммарное магнитное поле:

$$\mathbf{H} = H_0\mathbf{i}_z + \mathbf{H}_1. \qquad (16.23)$$

Если феррит находится в режиме насыщения, то соответствующий вектор намагниченности будет иметь вид

$$\mathbf{M} = M_s\mathbf{i}_z + \mathbf{M}_1, \qquad (16.24)$$

где $\mathbf{M}_1$ — переменная составляющая вектора намагниченности, вызванная наличием высокочастотного магнитного поля.

В дальнейшем будем рассматривать часто встречающийся на практике случай малого высокочастотного сигнала, когда выполняются следующие неравенства:

$$H_1/H_0 \ll 1; \qquad M_1/M_0 \ll 1. \qquad (16.25)$$

Ставится задача на основе уравнения движения вектора намагниченности (16.9) найти связь между векторами $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{M}_1$. Чтобы упростить решение, воспользуемся приближением малого сигнала, пренебрегая в правой части уравнения движения произведением малых величин вида M_1H_1, которое имеет второй порядок малости. Подставив соотношения (16.23) и (16.24) в правую часть исходного уравнения (16.9) и используя комплексную форму представления гармонических полей, будем иметь

$$j\omega\dot{\mathbf{M}}_1 = -\mu_0\gamma[\dot{\mathbf{M}}_1\dot{\mathbf{H}}_0] - \mu_0\gamma[\dot{\mathbf{M}}_s\dot{\mathbf{H}}_1]. \qquad (16.26)$$

Если записать векторные произведения в координатном виде и произвести упомянутое выше упрощение, то векторное уравнение (16.26) окажется эквивалентным системе двух скалярных уравнений

$$j\omega\dot{M}_{1x}=-\omega_p\dot{M}_{1y}+\omega_s\dot{H}_{1y},$$
$$j\omega\dot{M}_{1y}=\omega_p\dot{M}_{1x}-\omega_s\dot{H}_{1x}. \qquad (16.27)$$

Здесь введены следующие обозначения: $\omega_p=\mu_0\gamma H_0$ — уже встречавшаяся ранее частота ферромагнитного резонанса (частота свободной прецессии вектора намагниченности феррита); $\omega_s=\mu_0\gamma M_s$ — вспомогательный расчетный параметр, имеющий размерность частоты. Отметим, что система (16.27) содержит только два уравнения, так как из (16.26) следует, что в первом приближении высокочастотная часть продольной проекции вектора намагниченности $\dot{M}_{1z}$ обращается в нуль.

Предположим, что проекции переменного магнитного вектора $\dot{H}_{1x}$ и $\dot{H}_{1y}$ тем или иным образом заданы. Тогда равенства (16.27) становятся системой линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных комплексных амплитуд $\dot{M}_{1x}$ и $\dot{M}_{1y}$. Решение этой системы имеет следующий вид:

$$\dot{M}_{1x}=-\frac{\omega_p\omega_s}{\omega^2-\omega_p^2}\dot{H}_{1x}-j\frac{\omega\omega_s}{\omega^2-\omega_p^2}\dot{H}_{1y},$$
$$\dot{M}_{1y}=\frac{j\omega\omega_s}{\omega^2-\omega_p^2}\dot{H}_{1x}-\frac{\omega_p\omega_s}{\omega^2-\omega_p^2}\dot{H}_{1y}. \qquad (16.28)$$

Безразмерные коэффициенты в правых частях равенств (16.28) по своему физическому смыслу соответствуют введенной ранее магнитной восприимчивости (см. гл. 1). Используя обозначения

$$k_м=\frac{\omega_p\omega_s}{\omega^2-\omega_p^2};\qquad k'_м=\frac{\omega\omega_s}{\omega^2-\omega_p^2}, \qquad (16.29)$$

запишем полную систему уравнений, связывающих между собой проекции высокочастотного магнитного поля $\dot{\mathbf{H}}_1$ и высокочастотной намагниченности $\dot{\mathbf{M}}_1$, возбуждаемой этим полем:

$$\dot{M}_{1x}=-k_м\dot{H}_{1x}-jk'_м\dot{H}_{1y}+0\cdot\dot{H}_{1z},$$
$$\dot{M}_{1y}=jk'_м\dot{H}_{1x}-k_м\dot{H}_{1y}+0\cdot\dot{H}_{1z}, \qquad (16.30)$$
$$\dot{M}_{1z}=0\cdot\dot{H}_{1x}+0\cdot\dot{H}_{1y}+0\cdot\dot{H}_{1z}.$$

Система уравнений (16.30) дает возможность образовать таблицу из девяти чисел (отличными от нуля оказываются лишь четыре)

$$\overleftrightarrow{k}_м=\begin{bmatrix}-k_м & -jk'_м & 0\\ jk'_м & -k_м & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \qquad (16.31)$$

которую называют тензором магнитной восприимчивости намагниченного феррита. С математической точки зрения таблица (16.31) представляет собой матрицу: закон образования декартовых проекций вектора $\dot{\mathbf{M}}_1$ соответствует обычным правилам умножения матрицы $\overleftrightarrow{k}_м$ на вектор-столбец $\dot{\mathbf{H}}_1$.

Воспользовавшись введенным ранее определением, можно выразить вектор высокочастотной магнитной индукции $\dot{\mathbf{B}}_1$ через напряженность магнитного поля $\dot{\mathbf{H}}_1$ и намагниченность $\dot{\mathbf{M}}_1$:

$$\dot{\mathbf{B}}_1 = \mu_0 (\dot{\mathbf{H}}_1 + \dot{\mathbf{M}}_1). \tag{16.32}$$

Учитывая, что комплексные амплитуды $\dot{\mathbf{M}}_1$ и $\dot{\mathbf{H}}_1$ связаны между собой тензором магнитной восприимчивости $\overleftrightarrow{k}_м$, соотношение (16.32) можно также представить в тензорном виде:

$$\dot{\mathbf{B}}_1 = \mu_0 \overleftrightarrow{\mu} \dot{\mathbf{H}}_1, \tag{16.33}$$

где $\overleftrightarrow{\mu}$ — тензор относительной магнитной проницаемости намагниченного феррита, представляемый следующей матрицей:

$$\overleftrightarrow{\mu} = \begin{bmatrix} \mu & -j\mu' & 0 \\ j\mu' & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{16.34}$$

Связь между компонентами обоих тензоров такова:

$$\mu = 1 - k_м; \qquad \mu' = k_м'. \tag{16.35}$$

Материальные среды с тензором магнитной проницаемости вида (16.34) называют *гиротропными средами*. Данный термин подчеркивает связь механизма возникновения анизотропии магнитных свойств с прецессией вектора намагниченности. В литературе тензор вида (16.34) часто называют *тензором Полдера*. Перечислим его основные свойства.

- При отсутствии потерь в веществе диагональные компоненты тензора Полдера действительные, а внедиагональные — чисто мнимые, причем всегда $\mu_{ij} = \mu^*_{ji}$.
- Отличные от нуля компоненты зависят от напряженности подмагничивающего поля и от частоты колебаний. Последнее означает, что намагниченный феррит является материальной средой с частотной дисперсией фазовой скорости.
- На частоте ферромагнитного резонанса компоненты тензора Полдера испытывают разрыв. Это связано с тем, что примененная нами модель не учитывает эффекта затухания прецессии из-за потерь. Поэтому, строго говоря, полученные результаты справедливы лишь на частотах, не слишком близких к частоте ферромагнитного резонанса.

Пример 16.1. Некоторый феррит, имеющий намагниченность насыщения $M_s=3.6\cdot10^4$ А/м, помещен в подмагничивающее поле с напряженностью $H_0=9\cdot10^4$ А/м. Найти числовые значения компонентов тензора Полдера для данного феррита на частоте $\omega=1.5\cdot10^{10}$ с$^{-1}$.

В данном случае частота ферромагнитного резонанса $\omega_p=\mu_0\gamma H_0=2\cdot10^{10}$ с$^{-1}$, т. е. возбуждение феррита происходит на частоте, далекой от резонансной, и формулой (16.34) можно пользоваться достаточно обоснованно. Параметр $\omega_s=\mu_0\gamma M_s=8\cdot10^9$ с$^{-1}$. Применив выражение (16.29), находим компоненты тензора магнитной восприимчивости: $k_м=-0.914$, $k_м'=-0.686$. Отсюда в соответствии с равенством (16.35) получаем компоненты тензора Полдера: $\mu=1.914$, $\mu'=-0.686$.

16.3. Уравнения Максвелла в гиротропной среде

Проследим, как изменяется форма записи уравнений Максвелла, описывающих электромагнитные процессы в материальной среде с гиротропными свойствами. Как уже отмечалось, будем полагать, что относительная диэлектрическая проницаемость вещества ε — обычная скалярная величина, в то время как относительная магнитная проницаемость $\overleftrightarrow{\mu}$ — тензор, задаваемый формулой (16.34).

Запишем систему из двух первых уравнений Максвелла относительно комплексных амплитуд напряженностей полей:

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}=j\omega\varepsilon_a\dot{\mathbf{E}}, \tag{16.36}$$

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}=-j\omega\mu_0\overleftrightarrow{\mu}\dot{\mathbf{H}}. \tag{16.37}$$

Здесь для простоты считается, что сторонние электрические и магнитные токи отсутствуют, т. е. данные уравнения описывают свободные колебания поля в магнитно-анизотропной среде.

Переходя к координатной форме записи, отсюда имеет следующие системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\dot{H}_z}{\partial y}-\frac{\partial\dot{H}_y}{\partial z}&=j\omega\varepsilon_a\dot{E}_x,\\
\frac{\partial\dot{H}_z}{\partial x}-\frac{\partial\dot{H}_x}{\partial z}&=-j\omega\varepsilon_a\dot{E}_y,\\
\frac{\partial\dot{H}_y}{\partial x}-\frac{\partial\dot{H}_x}{\partial y}&=j\omega\varepsilon_a\dot{E}_z,
\end{aligned} \tag{16.38}$$

$$\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = -j\omega\mu_0\mu\dot{H}_x - \omega\mu_0\mu'\dot{H}_y,$$

$$\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} = -\omega\mu_0\mu'\dot{H}_x + j\omega\mu_0\mu\dot{H}_y, \qquad (16.39)$$

$$\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = -j\omega\mu_0\dot{H}_z.$$

Достаточно беглого взгляда на эти уравнения, чтобы понять, что конфигурация электромагнитного поля в гиротропной среде может оказаться весьма сложной. Поэтому сделаем в дальнейшем ряд упрощающих предположений относительно геометрических особенностей решаемых задач. Это прежде всего касается выбора направления распространения волн по отношению к ориентации вектора постоянного подмагничивающего поля. Будет показано, что в гиротропной среде наблюдаются специфические волновые эффекты, не свойственные простым изотропным средам и делающие гиротропные материалы весьма ценными с точки зрения возможности создания важных технических устройств СВЧ-диапазона.

16.4. Поперечное распространение электромагнитных волн в намагниченном феррите

Рассмотрим идеализированную задачу о распространении однородной плоской электромагнитной волны в неограниченной гиротропной среде при условии, что волна распространяется в направлении, перпендикулярном вектору постоянного подмагничивающего поля $\mathbf{H}_0$. Для краткости будем говорить, что при этом происходит *поперечное* распространение волны.

Пусть по-прежнему вектор $\mathbf{H}_0$ ориентирован вдоль положительного направления оси z. Предположим, что плоская электромагнитная волна распространяется вдоль оси x, так что все проекции векторов поля имеют комплексные амплитуды, пропорциональные множителю $\exp(-j\beta x)$, где β — некоторый коэффициент фазы (продольное волновое число). Будем считать также, что электромагнитное поле однородно в любой плоскости, параллельной плоскости YOZ, и поэтому $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$.

Предположим вначале, что магнитный вектор плоской волны имеет единственную отличную от нуля проекцию $\dot{H}_z$, в то время как $\dot{H}_x = \dot{H}_y = 0$. Тогда из первого уравнения системы (16.38) следует, что $\dot{E}_x = 0$, а из третьего уравнения той же системы вытекает, что $\dot{E}_z = 0$. Таким образом, волновой процесс характеризуется лишь двумя комплексными амплитудами $\dot{H}_z$ и $\dot{E}_y$, которые удовлетворяют системе двух уравнений

$$\frac{d\dot{H}_z}{dx} = -j\omega\varepsilon_a\dot{E}_y,$$
$$\frac{d\dot{E}_y}{dx} = -j\omega\mu_0\dot{H}_z. \qquad (16.40)$$

Заметим, что здесь использованы символы не частных, а обыкновенных производных, так как векторы поля зависят лишь от координаты x.

Если теперь из уравнений (16.40) исключить одно неизвестное, скажем $\dot{E}_y$, продифференцировав первое уравнение по x, то приходим к уравнению Гельмгольца

$$\frac{d^2\dot{H}_z}{dx^2} + \omega^2\varepsilon_a\mu_0\dot{H}_z = 0. \qquad (16.41)$$

Одно из линейно независимых решений такого уравнения описывает однородную плоскую волну, которая распространяется в сторону увеличения координаты x:

$$\dot{H}_z = H_m e^{-j\beta x}, \qquad (16.42)$$

где H_m — произвольный амплитудный коэффициент, $\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_0}$ — коэффициент фазы. Такую волну, ничем не отличающуюся от плоской электромагнитной волны в однородной изотропной среде с электродинамическими параметрами ε_a и μ_0, называют *обыкновенной* волной.

Рассмотрим теперь другую электромагнитную волну, также распространяющуюся в поперечном направлении вдоль координаты x, но с иной поляризацией, а именно будем считать, что электрический вектор такой волны имеет единственную отличную от нуля проекцию $\dot{E}_z$. В этом случае из третьего уравнения системы (16.39) следует, что $\dot{H}_z = 0$. Кроме того, в соответствии с первым уравнением данной системы проекции $\dot{H}_x$ и $\dot{H}_y$ связаны линейным соотношением

$$j\mu\dot{H}_x + \mu'\dot{H}_y = 0,$$

т. е.

$$\dot{H}_x = j\frac{\mu'}{\mu}\dot{H}_y. \qquad (16.43)$$

Обратившись ко второму уравнению из (16.39), с учетом равенства (16.43) имеем

$$\frac{d\dot{E}_z}{dx} = j\omega\mu_0\left(\mu - \frac{\mu'^2}{\mu}\right)\dot{H}_y. \qquad (16.44)$$

В то же время третье уравнение из системы (16.38) при сделанных предположениях можно записать так:

$$\frac{d\dot{H}_y}{dx} = j\omega\varepsilon_a \dot{E}_z. \tag{16.45}$$

Объединяя формулы (16.44) и (16.45), приходим к уравнению Гельмгольца

$$\frac{d^2\dot{H}_y}{dx^2} + \beta^2 \dot{H}_y = 0,$$

решение которого описывает однородную плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x. Коэффициент фазы данной волны

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_0}\sqrt{\mu - \frac{\mu'^2}{\mu}} \tag{16.46}$$

определяется числовыми значениями компонентов тензора Полдера. Такая волна помимо поперечной составляющей магнитного вектора с проекцией $\dot{H}_y$ имеет продольную составляющую с проекцией $\dot{H}_x$ и поэтому в соответствии с нашей классификацией является волной Н-типа. Ее принято называть *необыкновенной* волной.

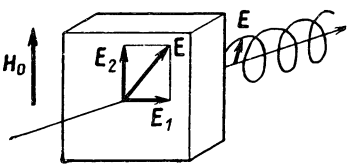


Рис. 16.4. Эффект Коттон — Мутона

Фазовые скорости обыкновенной и необыкновенной волн в общем случае различны, что приводит к интересной особенности волнового процесса в гиротропной среде. Предположим, что на слой намагниченного феррита толщиной l из вакуума падает плоская электромагнитная волна в направлении, перпендикулярном направлению подмагничивающего поля (рис. 16.4). Если плоскость поляризации волны ориентирована произвольным образом, то в общем случае вектор $\mathbf{E}$ падающей волны имеет составляющую $\mathbf{E}_1$, перпендикулярную подмагничивающему полю, и составляющую $\mathbf{E}_2$, которая направлена вдоль вектора $\mathbf{H}_0$. На основании вышеизложенного ясно, что составляющая $\mathbf{E}_1$ возбуждает в феррите обыкновенную, а составляющая $\mathbf{E}_2$ — необыкновенную волну. Фазовые скорости этих двух пространственно-ортогональных волн различны. Поэтому в полупространстве за пластиной обыкновенная и необыкновенная волны оказываются сдвинутыми по фазе. Складываясь, эти две волны образуют однородную плоскую волну с вращающейся эллиптической поляризацией. В частном случае, когда фазовый сдвиг составляет 90°, а амплитуды обеих волн равны, поляризация прошедшей волны будет круговой.

Описанное здесь явление преобразования поляризационных характеристик плоской волны в слое гиротропной среды при поперечном распространении получило название *эффекта Коттон—Мутона.*

Пример 16.2. Намагниченный феррит имеет параметры, приведенные в условиях примера 16.1. Относительная диэлектрическая проницаемость феррита $\varepsilon=10$, частота поля $\omega=1.5\cdot10^{10}$ с$^{-1}$. Определить толщину ферритовой пластины l, при которой фазовый сдвиг между обыкновенной и необыкновенной волнами на выходе составляет 90°.

Коэффициент фазы обыкновенной волны

$$\beta_{об}=\omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0}=\omega\sqrt{\varepsilon}/c=\frac{1.5\cdot10^{10}}{3\cdot10^8}\sqrt{10}=158.1\ \text{м}^{-1}.$$

На основании формулы (16.46) коэффициент фазы необыкновенной волны

$$\beta_{н.об}=\beta_{об}\sqrt{\mu-\frac{\mu'^2}{\mu}}=158.1\sqrt{1.914-(0{,}686)^2/1.914}=204.2\ \text{м}^{-1}.$$

В соответствии с условием задачи получаем уравнение

$$\pi/2=(\beta_{н.об}-\beta_{об})\,l,$$

откуда

$l=0.034$ м $=34$ мм.

16.5. Продольное распространение электромагнитных волн в намагниченном феррите

Рассмотрим теперь другой случай, когда плоская электромагнитная волна распространяется в неограниченной гиротропной среде вдоль направления постоянного подмагничивающего поля. При этом все проекции векторов поля будут зависеть от продольной координаты z по закону $\exp(\mp j\beta z)$; выбор знака аргумента комплексной экспоненты диктуется выбором одного из двух возможных направлений движения волновых факторов.

Будем по-прежнему считать, что волны однородны в поперечной плоскости и поэтому $\partial/\partial x=\partial/\partial y=0$. Отсюда в соответствии с последними уравнениями из систем (16.38) и (16.39) находим, что

$\dot{E}_z = \dot{H}_z = 0$, т. е. рассматриваемые решения уравнений Максвелла обязательно являются чисто поперечными Т-волнами.

Воспользуемся общей системой уравнений Максвелла (16.38) и (16.39) для гиротропной среды и перепишем ее с учетом отмеченных здесь особенностей:

$$\begin{aligned}
\frac{d\dot{H}_y}{dz} &= -j\omega\varepsilon_a\dot{E}_x,\\
\frac{d\dot{H}_x}{dz} &= j\omega\varepsilon_a\dot{E}_y,\\
\frac{d\dot{E}_y}{dz} &= j\omega\mu_0\mu\dot{H}_x + \omega\mu_0\mu'\dot{H}_y,\\
\frac{d\dot{E}_x}{dz} &= \omega\mu_0\mu'\dot{H}_x - j\omega\mu_0\mu\dot{H}_y.
\end{aligned} \tag{16.47}$$

Данная система содержит не два, а четыре независимых уравнения и непосредственно свести ее к уравнению Гельмгольца не удается. Поэтому попытаемся сократить число искомых переменных, продифференцировав почленно первую строку и объединив ее с четвертой, а затем продифференцировав вторую строку и выразив производную $d\dot{E}_y/dz$ через правую часть равенства в третьей строке. В результате приходим к эквивалентной системе двух дифференциальных уравнений второго порядка, которую, введя обозначение $\beta_\Phi{}^2 = \omega^2\varepsilon_a\mu_0$, можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\dot{H}_y}{dz^2} &= -j\beta_\Phi^2\mu'\dot{H}_x - \beta_\Phi^2\mu\dot{H}_y,\\
\frac{d^2\dot{H}_x}{dz^2} &= -\beta_\Phi^2\mu\dot{H}_x + j\beta_\Phi^2\mu'\dot{H}_y.
\end{aligned} \tag{16.48}$$

Будем искать решения этих уравнений в виде произведений некоторых постоянных комплексных чисел и функций вида $\exp(\pm j\beta z)$, где β — пока не известный коэффициент фазы:

$$\begin{aligned}
\dot{H}_x &= \dot{H}_{x0}\exp(\mp j\beta z),\\
\dot{H}_y &= \dot{H}_{y0}\exp(\mp j\beta z).
\end{aligned} \tag{16.49}$$

Верхние знаки соответствуют плоской волне, распространяющейся вдоль положительного направления вектора $\mathbf{H}_0$, а нижние — волне противоположного направления. Воспользовавшись правилом дифференцирования экспоненциальных функций, из (16.48) получаем систему двух однородных алгебраических уравнений относитель-

но амплитудных коэффициентов составляющих магнитного вектора по двум взаимно ортогональным поперечным осям:

$$j\beta_{\phi}^2\mu'\dot{H}_{x0}+(\beta_{\phi}^2\mu-\beta^2)\dot{H}_{y0}=0,$$

$$(\beta_{\phi}^2\mu-\beta^2)\dot{H}_{x0}-j\beta_{\phi}^2\mu'\dot{H}_{y0}=0. \qquad (16.50)$$

Чтобы эти уравнения были совместными, необходимо потребовать обращения в нуль определителя данной системы:

$$\beta_{\phi}^4\mu'^2-(\beta_{\phi}^2\mu-\beta^2)^2=0. \qquad (16.51)$$

Получено алгебраическое уравнение четвертой степени относительно неизвестного коэффициента фазы β, которое имеет четыре корня. Процедура решения элементарна — извлекая квадратный корень, имеем $\pm\beta^2_{\phi}\mu'=\beta^2_{\phi}\mu-\beta^2$,
откуда

$$\beta=\pm\beta_{\phi}\sqrt{\mu\mp\mu'}. \qquad (16.52)$$

Выбрав для определенности знак «+» перед правой частью последнего равенства, который соответствует волнам, распространяющимся в сторону возрастания координаты z, подставим величину β в любое, скажем первое, уравнение из системы (16.50). Сократив на общие множители, получим

$$j\dot{H}_{x0}\pm\dot{H}_{y0}=0,$$

или

$$\dot{H}_{y0}=\mp j\dot{H}_{x0}. \qquad (16.53)$$

Как известно (см. гл. 3), плоская электромагнитная волна с двумя ортогональными пространственными компонентами, сдвинутыми по фазе на угол 90°, представляет собой волну, поляризованную по кругу. Таким образом установлено, что при продольном распространении волн в намагниченном феррите существуют две независимые моды:

1) поляризованная по кругу волна *с левым направлением вращения*, у которой $\dot{H}_{y0}=-j\dot{H}_{x0}$ и коэффициент фазы

$$\beta_{л}=\beta_{\phi}\sqrt{\mu-\mu'}; \qquad (16.54)$$

2) аналогичная волна *с правым направлением вращения*, у которой $\dot{H}_{y0}=j\dot{H}_{x0}$ и коэффициенты фазы

$$\beta_{пр}=\beta_{\phi}\sqrt{\mu+\mu'}. \qquad (16.55)$$

Теперь предположим, что в какой-либо плоскости, скажем при $z=0$, одновременно возбуждены обе моды с одинаковыми ампли-

тудами. Тогда в этой плоскости комплексная амплитуда суммарного магнитного вектора

$$\dot{\mathbf{H}}(0)=\dot{H}_{x0}\mathbf{i}_x+j\dot{H}_{x0}\mathbf{i}_y+\dot{H}_{x0}\mathbf{i}_x-j\dot{H}_{x0}\mathbf{i}_y=2\dot{H}_{x0}\mathbf{i}_x$$

ориентирована вдоль оси x и отвечает линейно поляризованной волне.

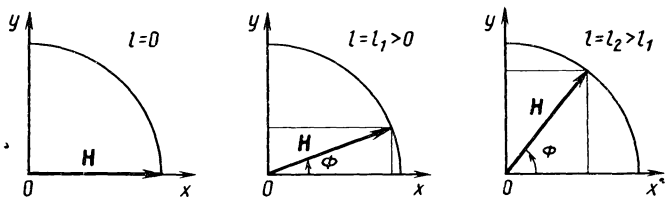


Рис. 16.5. Эффект Фарадея

Учтем, что обе моды с круговой поляризацией, из которых складывается такая волна, распространяются с разными фазовыми скоростями, и поэтому в поперечной плоскости с произвольной координатой z магнитный вектор имеет комплексную амплитуду

$$\dot{\mathbf{H}}(z)=\dot{H}_{x0}\left(\mathrm{e}^{-j\beta_{\text{пр}}z}\mathbf{i}_x+j\,\mathrm{e}^{-j\beta_{\text{пр}}z}\mathbf{i}_y+\mathrm{e}^{-j\beta_{\text{л}}z}\mathbf{i}_x-j\mathrm{e}^{-j\beta_{\text{л}}z}\mathbf{i}_y\right).$$

Правую часть данного равенства можно преобразовать с помощью формул Эйлера и получить

$$\dot{\mathbf{H}}(z)=2\dot{H}_{x0}\exp\left(-j\frac{\beta_{\text{пр}}+\beta_{\text{л}}}{2}\right)z\times$$

$$\times\left[\cos\left(\frac{\beta_{\text{пр}}-\beta_{\text{л}}}{2}z\right)\mathbf{i}_x+\sin\left(\frac{\beta_{\text{пр}}-\beta_{\text{л}}}{2}z\right)\mathbf{i}_y\right]. \qquad (16.56)$$

Отсюда следует, во-первых, что коэффициент фазы результирующей плоской волны равен среднеарифметическому значению коэффициентов фазы обеих мод с круговой поляризацией:

$$\beta=(\beta_{\text{пр}}+\beta_{\text{л}})/2. \qquad (16.57)$$

Во-вторых, обе декартовы проекции результирующего магнитного вектора колеблются во времени синфазно, так что при любом z суммарная волна имеет линейную поляризацию. Если в начальной плоскости с координатой $z=0$ магнитный вектор волны ориентирован вдоль оси x, то при $z=l$ окажется повернутым относительно оси x на угол

$$\Phi(l)=(\beta_{\text{пр}}-\beta_{\text{л}})\,l/2. \qquad (16.58)$$

Соответствующий чертеж представлен на рис. 16.5.

Явление поворота плоскости поляризации электромагнитной волны в гиротропной среде при ее распространении вдоль постоянного подмагничивающего поля называют *эффектом Фарадея.*

Пример 16.3. Параметры намагниченного феррита указаны в условиях примера 16.2. Частота колебаний $\omega = 1.5 \cdot 10^{10}$ с$^{-1}$. Вычислить угол Φ поворота плоскости поляризации при прохождении волной расстояния $l = 50$ мм вдоль направления подмагничивающего поля. Определить длину волны λ в данной среде.

При заданной частоте значение $\beta_\Phi = 158.1$ м$^{-1}$. На основании выражений (16.54) и (16.55) имеем

$$\beta_л = 158.1\sqrt{1.914 + 0.686} = 254.9 \text{ м}^{-1},$$

$$\beta_{пр} = 158.1\sqrt{1.914 - 0{,}686} = 175.2 \text{ м}^{-1}.$$

Используя формулу (16.58), получаем

$$\Phi = (175.2 - 254.9) \cdot 0.05/2 = -2 \text{ рад}.$$

Отрицательное значение угла поворота плоскости поляризации связано с тем, что в рассматриваемом случае параметр $\mu > 0$, в то время как $\mu' < 0$, и, как следствие, $\beta_л > \beta_{пр}$. Если же увеличить рабочую частоту, сделав ее выше частоты ферромагнитного резонанса, то в соответствии с формулой (16.35) компонент μ' тензора Полдера станет положительным и плоскость поляризации будет поворачиваться в другую сторону.

На основании равенства (16.57) коэффициент фазы волны с линейной поляризацией

$$\beta = (254.9 + 175.2)/2 = 215.05 \text{ м}^{-1},$$

откуда $\lambda = 2\pi/\beta = 2.92$ см.

Интересной и практически важной особенностью процесса продольного распространения электромагнитных волн в намагниченном феррите является *невзаимный* характер поворота плоскости поляризации. Дело в том, что знак угла Φ, вычисляемого по формуле (16.58), будет одним и тем же для волн, распространяющихся в противоположных направлениях, поскольку правополяризованная прямая волна полностью эквивалентна левополяризованной обратной, и наоборот. Таким образом, если, например, вектор **E** при распространении вдоль подмагничивающего поля поворачивается против движения стрелки часов, то при обратном распространении этот вектор будет поворачиваться в таком же самом направлении (рис. 16.6, *а*).

В противоположность этому отрезок скрученного прямоугольного волновода (рис. 16.6, *б*) осуществляет взаимный (обратимый) поворот плоскости поляризации. При распространении волн от входа *1* к выходу *2* и в обратном направлении вектор поворачивается в разные стороны.

Указанная особенность волновых процессов в продольно намагниченном феррите позволяет создавать *волноводные вентили* — невзаимые развязывающие устройства, которые практически без ослабления пропускают волны от генератора к нагрузке и эффективно поглощают отраженные волны.

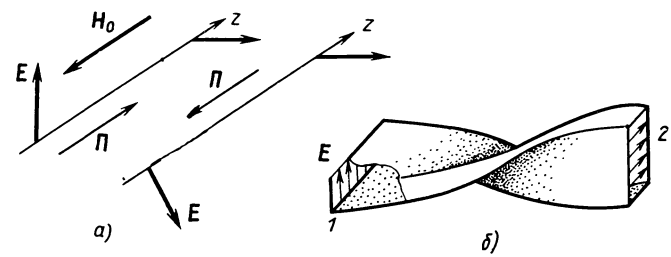


Рис. 16.6. Вращение плоскости поляризации электромагнитного поля:
а — в продольно намагниченном феррите; *б* — в скрученном прямоугольном волноводе

Отметим в заключение, что анизотропия электродинамических свойств наблюдается не только в намагниченных ферритах, но и в ионосферной плазме [7], находящейся в постоянном магнитном поле Земли, напряженность которого в среднем составляет около 40 А/м. Это приводит к ряду физических эффектов (вращение плоскости поляризации, расщепление падающей волны на обыкновенную и необыкновенную и т. д.). Такие эффекты существенно влияют на распространение радиоволн КВ-диапазона, особенно во время ионосферно-магнитных бурь, часто происходящих в приполярных областях.

ЗАДАЧИ

16.1. Две плоские линейно поляризованные волны распространяются вдоль оси x в монокристалле корунда (Al_2O_3), который имеет тензор относительной диэлектрической проницаемости вида

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}.$$

Частоты колебаний обеих волн одинаковы и равны 10 ГГц. Значения диагональных компонентов тензора $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ таковы: $\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}=13.2$, $\varepsilon_{zz}=11.4$. Определите разность фаз этих волн, возникающую при прохождении пути в 1 см, если электрический вектор первой волны ориентирован вдоль оси y, а второй — вдоль оси z.

16.2. Плоская электромагнитная волна падает из воздуха по направлению нормали на кристалл корунда, параметры которого указаны в условиях предыдущей задачи. Граница раздела воздух — твердое тело параллельна оси z. Найдите коэффициенты отражения обыкновенной и необыкновенной волн при частоте 10 ГГц.

16.3. Найдите коэффициенты фазы обыкновенной и необыкновенной волн в безграничном ферритовом образце с намагниченностью насыщения $M_s=3.6\cdot10^4$ А/м, который помещен в постоянное магнитное поле, имеющее напряженность 10^5 А/м. Частота колебаний поля 12 ГГц.

16.4. Плоская электромагнитная волна с линейной поляризацией распространяется вдоль постоянного подмагничивающего поля в толще однородного феррита с намагниченностью насыщения $M_s=5\cdot10^4$ А/м и относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=16$. Частота поля равна 7.4 ГГц. Найдите напряженность подмагничивающего поля, если известно, что при прохождении отрезка пути длиной 60 мм плоскость поляризации волны поворачивается на угол 120°.

Глава семнадцатая

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ И ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Многие задачи прикладной электродинамики сводятся к нахождению полей, возбуждаемых в окружающем пространстве различными системами излучателей. Примерами таких систем могут служить, например, разнообразные сложные антенны, имеющие высокую пространственную направленность характеристик излучения и приема. Явление сложения волн, приходящих в точку наблюдения из нескольких источников, в физике называют *интерференцией* волн.

Если электромагнитная волна определенного вида, например плоская или сферическая, падает на объект, отличающийся электродинамическими свойствами от окружающей среды, то имеет место *дифракция* волны на этом объекте.

Между интерференцией и дифракцией волн много общего, но существуют и некоторые различия. Когда говорят об интерферен-

ции, обычно полагают, что амплитуды возбуждающих источников заранее заданы. В теории дифракции ситуация иная — падающая волна возбуждает на поверхности или в объеме рассеивающего тела некоторые токи, которые, в свою очередь, служат вторичными источниками электромагнитных волн. Амплитуды вторичных источников заранее не известны, и, строго говоря, их можно найти лишь на основе решения дифракционной задачи в целом. Сказанное здесь подчеркивает сложность теории дифракции электромагнитных волн.

К задачам дифракции тесно примыкает теория распространения электромагнитных волн в пространственно неоднородных материальных средах, например в земной атмосфере с турбулентными возмущениями плотности воздуха.

Решение задач об интерференции и дифракции электромагнитных волн, как правило, сопряжено с серьезными математическими трудностями. Поэтому в настоящей главе не ставится цель изложить основы всеобъемлющей теории. Предпринята гораздо более скромная попытка познакомить читателя с ведущими принципами этой области электродинамики и с приемами решения некоторых частных проблем, важных в прикладном отношении. Желающие глубже вникнуть в современную теорию дифракции могут обратиться к обширной литературе по этой тематике, например к монографии [4].

17.1. Условие излучения. Принцип предельного поглощения

Рассмотренные в предыдущих главах задачи об электромагнитных полях в замкнутых системах, таких, как волноводы или объемные резонаторы, характерны тем, что при их постановке область существования поля пространственно ограниченна хотя бы по некоторым координатам. Если же требуется найти поле излучения системы сторонних токов в свободном пространстве или в неограниченной материальной среде, то задача осложняется тем, что вопрос о поведении векторов поля на достаточном удалении от источников не может быть разрешен заранее и требует дополнительного исследования.

Предположим, что точечный источник гармонических электромагнитных волн (элементарный излучатель) помещен в начало сферической системы координат. Среда, в которой распространяются волны, считается однородной и обладающей свойствами вакуума: $\varepsilon_a=\varepsilon_0$, $\mu_a=\mu_0$, $\sigma=0$. Обозначим через $\dot{\psi}$ комплексную скалярную функцию, представляющую собой комплексную амплитуду произвольно взятой проекции одного из векторов электромаг-

нитного поля. Всюду, за исключением точки $r=0$, функция $\dot{\psi}$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2\dot{\psi}+\beta_0^2\dot{\psi}=0, \tag{17.1}$$

где $\beta_0=2\pi/\lambda=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ — коэффициент фазы волнового процесса при заданной частоте источника.

Для простоты будем считать, что функция $\dot{\psi}$ обладает сферической симметрией, т. е. не зависит от угловых координат θ и φ. Тогда, используя выражение оператора Лапласа в сферической системе координат, запишем уравнение (17.1) следующим образом:

$$\frac{d^2\dot{\psi}}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\dot{\psi}}{dr}+\beta_0^2\dot{\psi}=0. \tag{17.2}$$

Применив непосредственную подстановку, легко проверить, что (17.2) эквивалентно уравнению

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\dot{\psi})+\beta_0^2(r\dot{\psi})=0, \tag{17.3}$$

не содержащему первой производной. Равенство (17.3) представляет собой классическое уравнение гармонического осциллятора. Система его фундаментальных решений состоит из двух функций вида $\exp(\mp j\beta_0 r)$. Полагая, что соответствующие амплитудные коэффициенты равны единице, отсюда находим два линейно независимых решения уравнения (17.2):

$$\dot{\psi}_1=\exp(-j\beta_0 r)/r, \tag{17.4}$$

$$\dot{\psi}_2=\exp(j\beta_0 r)/r. \tag{17.5}$$

С подобными функциями мы уже встречались в гл. 13, изучая теорию элементарных излучателей. Разные знаки аргументов экспоненциальных функций означают, что первому из найденных решений соответствует сферическая волна, уходящая от источника на бесконечность. Второе решение описывает аналогичную сферическую волну с противоположным направлением фазовой скорости, т. е. волну, которая приходит из удаленных областей пространства в точку начала координат.

Повседневный опыт убедительно говорит о том, что волны, возбужденные источником и ушедшие в свободное пространство, *никогда не возвращаются назад*. Поэтому решения вида (17.5) не соответствуют реальному волновому процессу и должны быть исключены из рассмотрения.

Если речь идет о простейших сферических волнах, то здесь принцип отбора физически обоснованных решений весьма прост и

сводится лишь к выбору правильного знака в экспоненциальном фазовом множителе. Однако, как правило, поле, возбуждаемое сложной системой излучателей, описывается функциями всех трех сферических координат r, θ, φ, причем по своему виду эти функции могут и не напоминать внешне простейших решений (17.4) и (17.5). Требуется аналитический критерий, который позволил бы отличать волны, уходящие на бесконечность, от физически нереализуемых волновых процессов, приходящих из бесконечности к источнику. Этот критерий был найден в начале XX в. немецким физиком А. Зоммерфельдом, который показал, что любое решение уравнения Гельмгольца, обладающее свойством волны, уходящей на бесконечность, должно при $r\to\infty$ удовлетворять предельному условию вида

$$\lim_{r\to\infty} r\,(\partial\dot{\psi}/\partial r + j\beta_0\dot{\psi}) = 0. \tag{17.6}$$

В теории волновых процессов формулу (17.6) называют *условием излучения* или *условием Зоммерфельда.* В качестве упражнения читателю предлагается показать, что уходящая сферическая волна вида (17.4) удовлетворяет, а приходящая волна вида (17.5) не удовлетворяет условию излучения.

Изложенные положения дают возможность уяснить роль комплексного характера решений уравнения Гельмгольца в свободном пространстве. Дело в том, что наряду с комплексными можно построить и действительные решения уравнения (17.2), выполнив суперпозицию функций (17.4) и (17.5). Форма их записи такова:

$$\dot{\Psi}_1 = \frac{\cos\beta_0 r}{r}; \qquad \dot{\Psi}_2 = \frac{\sin\beta_0 r}{r}. \tag{17.7}$$

Легко проверить, что ни одна из этих функций не удовлетворяет условию излучения. Это связано с тем, что решения вида (17.7) отображают стоячие сферические волны, которые возникают при наложении двух бегущих волн с противоположными направлениями распространения, подобно колебаниям в замкнутых объемных резонаторах. Понятно, что для возникновения таких стоячих волн в бесконечно удаленной области пространства должна существовать идеально проводящая сферическая оболочка. Физическая абсурдность такого предположения несомненна. Однако даже существование такого сферического отражателя не смогло бы обеспечить возникновения во всем пространстве стоячих волн. Это связано с тем, что любая материальная среда, сколь бы ни была совершенной в электродинамическом отношении, обязательно поглощает энергию распространяющихся электромагнитных волн за счет необратимого взаимодействия поля и вещества. Поэтому вся энергия, излученная источником, будет обязательно рассеяна в прост-

ранстве. Это качественное соображение лежит в основе важной концепции, которую называют *принципом предельного поглощения.* Данный принцип устанавливает содержательный физический смысл условия Зоммерфельда, которое внешне выступает как чисто математическое утверждение.

17.2. Возбуждение пространства нитью электрического тока. Цилиндрические волны

Как пример расчета интерференции волн рассмотрим задачу об электромагнитном поле, которое создается бесконечно тонкой нитью электрического тока, ориентированной вдоль оси z цилиндрической системы координат. Ток изменяется во времени по гармоническому закону с частотой ω; комплексная амплитуда тока I в каждой точке оси z считается неизменной. Электродинамические свойства безграничной среды заданы параметрами ε_0 и μ_0.

Поле на больших расстояниях от нити. Обратимся к случаю, когда расстояние r от точки наблюдения до оси достаточно велико в волновом масштабе, т. е. выполняется неравенство $\beta r \gg 1$. Если мысленно разбить излучающую нить на бесконечно малые отрезки длиной dz, то каждый из них будет представлять собой элементарный электрический излучатель (диполь). Пусть z — текущая координата вдоль нити тока, а точка наблюдения P лежит в плоскости $z=0$ (рис. 17.1). Длина отрезка, соединяющего выделенный элемент тока и точку наблюдения, $R=\sqrt{r^2+z^2}$. Азимутальная координата φ в цилиндрической системе координат и в локальной сферической системе, связанной с излучающим элементом тока, оказывается одной и той же. Поэтому бесконечно малый вклад $d\dot{H}_\varphi$ в комплексную амплитуду магнитного вектора можно определить, воспользовавшись известной формулой (13.36) из теории элементарного электрического излучателя, справедливой для дальней зоны,

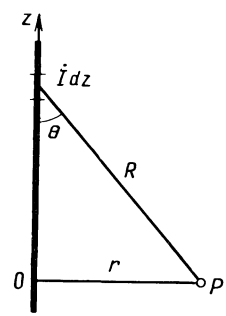


Рис. 17.1. Вычисление поля на больших расстояниях от нити тока

$$d\dot{H}_\varphi = \frac{j\dot{I}\beta r}{4\pi\sqrt{r^2+z^2}}\,\frac{e^{-j\beta R}}{R}\,dz, \qquad (17.8)$$

поскольку, как видно из чертежа, $\sin\theta = r/\sqrt{r^2+z^2}$. На основании принципа суперпозиции находим комплексную амплитуду напря-

женности результирующего магнитного поля, интегрируя все элементарные вклады вида (17.8):

$$\dot{H}_\varphi(r) = \int d\dot{H}_\varphi = \frac{j\dot{I}\beta r}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\beta\sqrt{r^2+z^2}}}{r^2+z^2}\, dz. \qquad (17.9)$$

Подобные выражения, называемые интерференционными интегралами, часто встречаются в теории дифракции волн. Отличительная черта таких интегралов, осложняющая их вычисление, состоит в следующем. Мнимый показатель экспоненты под знаком интеграла содержит безразмерный «большой параметр» $\beta r \gg 1$. Поэтому действительная и мнимая части этой функции быстро осциллируют с изменением переменной z и вклады обеих частей в интеграл оказываются знакопеременными.

Метод стационарной фазы. Так называют один из наиболее распространенных приемов приближенной оценки интерференционных интегралов. Сущность метода состоит в том, что основной вклад в интеграл вносит лишь малый участок оси z вокруг так называемой *точки стационарной фазы*, в которой производная от фазовой функции обращается в нуль. Вклады от остальных участков оси взаимно компенсируются из-за знакопеременного характера подынтегрального выражения.

Рассмотрим интеграл

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \xi)\, e^{-jf(t, \xi)}\, dt, \qquad (17.10)$$

где $g(t, \xi)$ — медленная функция формальной переменной t, ξ — большой параметр задачи. Пусть t_0 — единственный действительный корень уравнения $\partial f/\partial t = 0$ (рассуждения легко обобщить на случай нескольких корней). Тогда вблизи этой точки разложение функции $f(t, \xi)$ в ряд Тейлора

$$f(t, \xi) = f(t_0, \xi) + {}^1\!/_2 f''(t_0, \xi)(t-t_0)^2 + \ldots \qquad (17.11)$$

с точностью до величин высшего порядка малости представляет собой квадратичную функцию аргумента $t - t_0$. Предположим также, что экстремум функции $f(t, \xi)$ в точке t_0 является достаточно резким и поэтому в разложении (17.11) можно ограничиться лишь выписанными членами. Тогда, подставляя (17.11) в (17.10), приходим к приближенному равенству

$$J \approx e^{-jf(t_0, \xi)}\, g(t_0, \xi) \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-jf''(t_0, \xi)(t-t_0)^2/2]\, dt. \qquad (17.12)$$

Имеются табличные интегралы, справедливые при любых значениях $a>0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(ay^2)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(ay^2)\,dy = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}.$$

Тогда, представив экспоненциальную функцию в подынтегральном выражении из (17.12) как сумму действительной и мнимой частей, получим приближенно

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-jf''(t_0, \xi)(t-t_0)^2/2]\,dt \approx \sqrt{\frac{\pi}{f''(t_0, \xi)}}(1-j) =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{f''(t_0, \xi)}}\, e^{-j\pi/4}.$$

Подставляя этот результат в формулу (17.12) и считая, что $f''(t_0, \xi)>0$, находим окончательно

$$J \approx \sqrt{\frac{2\pi}{f''(t_0, \xi)}}\, g(t_0, \xi)\, e^{-j[f(t_0, \xi)+\pi/4]}. \qquad (17.13)$$

Применим метод стационарной фазы к оценке интерференционного интеграла (17.9). Здесь

$$f(z, r) = \beta\sqrt{r^2+z^2}, \qquad f'(z, r) = \beta z/\sqrt{r^2+z^2},$$

поэтому точка стационарной фазы имеет координату $z=0$. Вычислив вторую производную, находим, что $f''(0, r)=\beta/r>0$. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\beta\sqrt{r^2+z^2}}}{r^2+z^2}\,dz \approx \sqrt{\frac{2\pi r}{\beta}}\,\frac{1}{r^2}\,e^{-(\beta r+\pi/4)},$$

откуда получаем комплексную амплитуду единственной отличной от нуля проекции магнитного вектора:

$$\dot{H}_\varphi(r) \approx \dot{I}\sqrt{\frac{\beta}{8\pi r}}\, e^{-j(\beta r-\pi/4)}. \qquad (17.14)$$

Чтобы определить вектор напряженности электрического поля, следует воспользоваться первым уравнением Максвелла $\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon_0\dot{\mathbf{E}}$. Учтем, что в данном случае $\partial/\partial z = \partial/\partial\varphi = 0$ в силу геометрических особенностей задачи. Кроме того, в данном случае $\dot{H}_r = \dot{H}_z = 0$. Тогда

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial(r\dot{H}_\varphi)}{\partial r}\,\mathbf{i}_z, \qquad (17.15)$$

откуда следует, что во всем пространстве электрический вектор имеет единственную отличную от нуля проекцию вдоль оси z с комплексной амплитудой

$$\dot{E}_z=\frac{1}{j\omega\varepsilon_0 r}\frac{\partial}{\partial r}(r\dot{H}_\varphi)=\frac{\dot{I}\sqrt{\beta}\,e^{j\pi/4}}{j\sqrt{8\pi}\,\omega\varepsilon_0}\left[\frac{e^{-j\beta r}}{2r\sqrt{r}}-\frac{j\beta e^{-j\beta r}}{\sqrt{r}}\right].$$

Так как нас интересует поле на расстояниях от возбуждающей нити, значительно превышающих длину волны, т. е. при значениях $\beta r\gg 1$, первым слагаемым в квадратных скобках можно пренебречь по сравнению со вторым и получить

$$\dot{E}_z\approx -\dot{I}\sqrt{\frac{\beta}{8\pi r}}Z_0 e^{-j(\beta r-\pi/4)}. \qquad (17.16)$$

Формулы (17.14) и (17.16) описывают однородную *цилиндрическую волну*. Поверхности равных фаз такой волны представляют собой концентрические цилиндры, перемещающиеся в радиальном направлении с фазовой скоростью $v_\Phi=\omega/\beta=c$. Для рассматриваемой задачи специфичен дополнительный фазовый сдвиг на 45° между возбуждающим током и напряженностью поля.

На большом удалении от нити тока цилиндрическая волна является локально-плоской. Действительно, здесь $|\dot{E}_z|/|\dot{H}_\varphi|=Z_0=$ $=377$ Ом. Легко убедиться в том, что знаки проекций $\dot{E}_z$ и $\dot{H}_\varphi$ таковы, что вектор $\mathbf{\Pi}_{\text{ср}}$ ориентирован в радиальном направлении. Интересно отметить также, что амплитуды векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ в цилиндрической волне уменьшаются с ростом радиуса не по закону $1/r$, как в сферической волне, а пропорционально множителю $1/\sqrt{r}$, т. е. значительно медленнее.

Строгое решение задачи о возбуждении свободного пространства нитью синфазного тока [11] приводит к следующему результату:

$$\dot{H}_\varphi(r)=\dot{I}\frac{\beta}{4j}H_1^{(2)}(\beta r), \qquad (17.17)$$

где $H_1^{(2)}(x)=J_1(x)-jN_1(x)$ — функция Ганкеля второго рода 1-го порядка, которая при больших значениях аргумента имеет следующее асимптотическое представление:

$$H_1^{(2)}(x)\underset{x\to\infty}{\approx}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-j(x-3\pi/4)}. \qquad (17.18)$$

Подставив это выражение в (17.17), сразу приходим к формуле (17.14).

Пример 17.1. Цилиндрическая волна возбуждается нитью тока с амплитудой $I_m=5$ А, частота колебаний $f=300$ МГц (длина волны $\lambda=1$ м). Определить амплитуду напряженности магнитного поля $H_{\varphi m}$ на расстоянии $r=4$ м от оси. Сравнить полученный результат с напряженностью H_0 магнитного поля, создаваемого нитью постоянного тока $I_0=5$ А.

В данном случае коэффициент фазы $\beta=2\pi/\lambda=6.283$ м$^{-1}$. Используя формулу (17.14), находим

$$H_{\varphi m}=I_m\sqrt{\beta/(8\pi r)}=2.5 \text{ А/м}.$$

На основании закона Ампера находим напряженность магнитного поля, создаваемого нитью постоянного тока:

$$H_0=I_0/(2\pi r)=5/(8\pi)=0.2 \text{ А/м}.$$

Таким образом, напряженность магнитного поля в цилиндрической волне примерно в десять раз больше напряженности магнитного поля, создаваемого стационарным током.

17.3. Метод физической оптики. Дифракция плоской волны на щели в идеально проводящем экране

Основная трудность решения задач дифракции волн заключается в том, что полное поле во всем пространстве есть сумма падающего и рассеянного полей:

$$\dot{\mathbf{E}}=\dot{\mathbf{E}}_{\text{пад}}+\dot{\mathbf{E}}_{\text{рас}}, \qquad \dot{\mathbf{H}}=\dot{\mathbf{H}}_{\text{пад}}+\dot{\mathbf{H}}_{\text{рас}}.$$

При этом токи, наводимые в препятствии и являющиеся физической причиной возникновения рассеянного поля, сами зависят от напряженностей этого поля.

Процедура решения дифракционных задач существенно упрощается в рамках *метода физической оптики*. Этот приближенный метод основан на допущении, согласно которому причиной возникновения рассеянных волн служит только падающее поле, причем значения векторов этого поля *не зависят* от наличия или отсутствия рассеивающего препятствия.

Как пример, иллюстрирующий метод физической оптики, рассмотрим задачу о дифракции плоской электромагнитной волны на идеально проводящем экране, в котором имеется щель шириной $2a$, бесконечно протяженная вдоль оси y (рис. 17.2). Поляризация падающей волны такова, что в выбранной системе координат комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля

имеет вид $E_0 \exp(-j\beta z)\mathbf{i}_x$, т. е. электрический вектор перпендикулярен кромкам щели. Падающая волна перемещается слева направо, существуя в полупространстве $z<0$. Требуется определить рассеянное (дифрагированное) электромагнитное поле в полупространстве $z>0$ за препятствием.

Как известно, электромагнитное волновое поле в однородной среде без источников является соленоидальным, т. е.

$$\operatorname{div}\dot{\mathbf{E}}=0, \qquad \operatorname{div}\dot{\mathbf{H}}=0,$$

и подчиняется векторным уравнениям Гельмгольца

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\dot{\mathbf{E}}+\beta^2\dot{\mathbf{E}}=0,\\ \nabla^2\dot{\mathbf{H}}+\beta^2\dot{\mathbf{H}}=0.\end{aligned}\right\} \tag{17.19}$$

Применительно к поставленной задаче из физических соображений ясно, что на достаточно большом удалении от возбуждающей щели силовые линии электрического вектора в полупространстве $z>0$ по форме будут напоминать дуги окружностей с центрами в точке ($x=0$, $y=0$). Поэтому у вектора $\dot{\mathbf{E}}$ имеются две отличные от нуля проекции $\dot{E}_x$ и $\dot{E}_z$, а третья возможная проекция $\dot{E}_y$ заведомо отсутствует. Однако если интересоваться волновым процессом лишь в области пространства вблизи оси z, то можно предположить, что поляризационная структура дифрагированного поля *такая же, как и у падающей волны.* Поэтому приближенно в указанной области пространства электрический вектор будет иметь единственную отличную от нуля проекцию $\dot{E}_x(x, z)$. Такое предположение, по сути дела, сводит векторную задачу к скалярной и тем самым существенно упрощает выкладки.

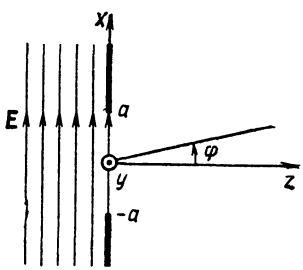


Рис. 17.2. Дифракция плоской волны на щели в проводящем экране

Итак, нам нужно найти решение скалярного уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2\dot{E}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\dot{E}_x}{\partial z^2}+\beta^2\dot{E}_x=0 \tag{17.20}$$

в полупространстве $z>0$, удовлетворяющее определенным граничным условиям на плоскости $z=0$. В соответствии с принципом физической оптики потребуем, чтобы значение поля обращалось в нуль на участках поверхности, закрытых идеальным проводником, а в щели равнялось невозмущенной напряженности падающего по-

ля E_0. Таким образом, граничные условия для искомого поля таковы:

$$\dot{E}_x(x, 0)=\begin{cases} 0 \text{ при } x>a,\ x<-a, \\ E_0 \text{ при } -a\leqslant x\leqslant a. \end{cases} \tag{17.21}$$

Применим к уравнению метод разделения переменных и будем искать его решение в виде

$$\dot{E}_x(x, z)=X(x)\,Z(z).$$

С подобными задачами мы неоднократно встречались ранее. Легко проверить, что частным решением уравнения Гельмгольца (17.20), имеющим вид произведения двух функций, является

$$\dot{E}_x(x, z)=Ae^{j(\varkappa x+z\sqrt{\beta^2-\varkappa^2})} \tag{17.22}$$

при любых значениях амплитудного коэффициента A и параметра $\varkappa$. Выбирая этот параметр тем или иным образом, можно описывать различные волновые процессы. Так, если значение $\varkappa$ действительно и $\varkappa^2<\beta^2$, то формула (17.22) описывает однородную плоскую волну с постоянной амплитудой. Волна распространяется под некоторым углом к оси z, который зависит от соотношения между $\varkappa$ и β. При $\varkappa^2>\beta^2$ это выражение описывает неоднородную плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x со скоростью, меньшей скорости света; амплитуда волны экспоненциально убывает с ростом координаты z.

Из частных решений вида (17.22) можно построить общий интеграл

$$\dot{E}_x(x, z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\varkappa)\,e^{j(\varkappa x+z\sqrt{\beta^2-\varkappa^2})}\,d\varkappa \tag{17.23}$$

с не известной пока весовой функцией $A(\varkappa)$, которую нужно подобрать так, чтобы удовлетворить граничным условиям (17.21). Подставив в формулу (17.23) значение $z=0$, находим, что

$$\dot{E}_x(x, 0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\varkappa)\,e^{j\varkappa x}\,d\varkappa. \tag{17.24}$$

Видно, что функция $A(\varkappa)$ есть преобразование Фурье [2] от распределения поля в плоскости экрана. Чтобы найти эту функцию, следует обратить формулу (17.24) по Фурье:

$$A(\varkappa)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dot{E}_x(x, 0)\,e^{-j\varkappa x}\,dx. \tag{17.25}$$

В рассматриваемом случае

$$A(\varkappa)=\int_{-a}^{a}E_0 e^{-j\varkappa x}\,dx=2E_0\int_{0}^{a}\cos\varkappa x\,dx=2E_0 a\frac{\sin\varkappa a}{\varkappa a}.$$

Таким образом, получено интегральное представление волнового поля в полупространстве за экраном:

$$\dot{E}_x(x,\ z)=\frac{E_0 a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\varkappa a}{\varkappa a}e^{j(\varkappa x+z\sqrt{\beta^2-\varkappa^2})}\,d\varkappa. \tag{17.26}$$

Данный интеграл удобно вычислить методом стационарной фазы. Введем полярную систему координат $x=r\sin\varphi$, $z=r\cos\varphi$. Тогда

$$\dot{E}_x(r,\ \varphi)=\frac{E_0 a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\varkappa a}{\varkappa a}e^{jr(\varkappa\sin\varphi+\sqrt{\beta^2-\varkappa^2}\cos\varphi)}\,d\varkappa. \tag{17.27}$$

Точка стационарной фазы $\varkappa_{ст}$ служит корнем уравнения

$$\frac{d}{d\varkappa}(\varkappa\sin\varphi+\sqrt{\beta^2-\varkappa^2}\cos\varphi)=0, \tag{17.28}$$

откуда

$$\varkappa_{ст}=\frac{\beta\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}}=\beta\sin\varphi. \tag{17.29}$$

Как отмечалось ранее, ограничимся наиболее важным случаем так называемой *малоугловой дифракции*, когда поля вычисляются в непосредственной близости от оси и поэтому $\varphi\ll 1$. Выполнив предельный переход в формуле (17.29), убеждаемся, что при сделанном предположении точка стационарной фазы приближенно имеет координату $\varkappa_{ст}\approx\beta\varphi$. Вторая производная от показателя экспоненциальной функции, входящей в подынтегральное выражение формулы (17.26), равна

$$\frac{d^2}{d\varkappa^2}[-r(\varkappa\sin\varphi+\sqrt{\beta^2-\varkappa^2}\cos\varphi)]_{\varkappa=\varkappa_{ст}}\approx\frac{r}{\beta}.$$

Воспользовавшись формулой (17.13), окончательно получаем

$$\dot{E}_x(r,\ \varphi)\approx E_0 a\sqrt{\frac{2\beta}{\pi r}}\,\frac{\sin\beta a\varphi}{\beta a\varphi}e^{-j(\beta r-\pi/4)}. \tag{17.30}$$

Данное выражение описывает цилиндрическую волну (об этом свидетельствует убывание амплитуды поля по закону $1/\sqrt{r}$), которая уже не является однородной, а имеет угловую зависимость амплитуды поля, выраженную тем сильнее, чем больше безразмер-

ный параметр βa, т. е. чем больше отношение ширины щели к длине волны. Интентивность излучения щели максимальна в направлении $\varphi=0$; первый дифракционный нуль излучения наблюдается под углами φ_0, которые удовлетворяют равенствам $\beta a\varphi_0=\pm\pi$.

Угловая зависимость дифракционного поля щели имеет лепестковый характер (рис. 17.3). Вокруг направления $\varphi=0$ формируется *основной лепесток,* по обе стороны от которого возникают симметричные *боковые лепестки* рассеянного поля.

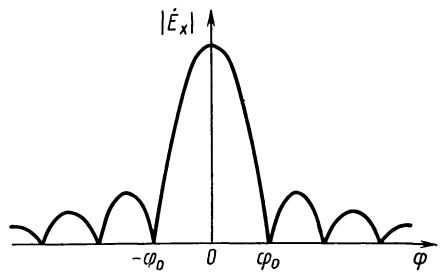


Рис. 17.3. Диаграмма направленности дифракционного поля за щелью

17.4. Принцип Гюйгенса. Формула Кирхгофа

При анализе и проектировании антенн СВЧ-диапазона часто требуется определить электромагнитное поле, возбуждаемое в свободном пространстве не дискретной системой элементарных излучателей, а непрерывной излучающей системой с конечной площадью. В качестве примера на рис. 17.4 изображен эскиз широко распространенной рупорной антенны, представляющей собой отрезок прямоугольного волно-

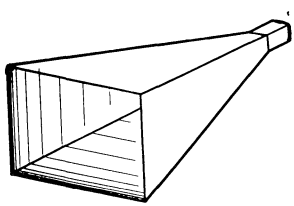


Рис. 17.4. Рупорная антенна

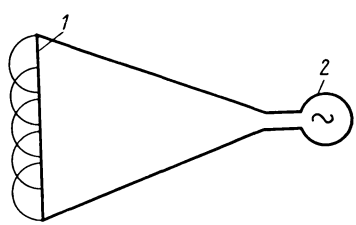


Рис. 17.5. Принцип Гюйгенса: *1* — фиктивные источники поля; *2* — истинные источники

вода с плавно увеличивающейся площадью сечения. Широкий конец рупора, излучающий электромагнитное поле в пространство, называют *апертурой* или *раскрывом* этой антенны. При расчете подобных антенн, а к их числу относят также линзовые, зеркальные и прочие так называемые апертурные антенны, требуется найти векторы электромагнитного поля во всем пространстве при условии, что возбуждающее поле в раскрыве задано.

Основой приближенного инженерного анализа апертурных антенн служит известный из физики принцип Гюйгенса [14], согласно

которому каждая точка на волновом фронте служит фиктивным источником воображаемой сферической волны. Полное поле в области впереди волнового фронта есть результат интерференции сферических волн, излучаемых фиктивными источниками. Такие источники обычно называют вторичными, чтобы отличить их от первичных, или истинных, источников, которыми являются токи в проводниках или движущиеся заряды (рис. 17.5).

В дальнейшем будем рассматривать такие задачи дифракции, которые при разумной идеализации допускают скалярную постановку. Это возможно всегда, если из физических соображений заранее ясно, что одна из трех возможных проекций какого-либо вектора поля значительно больше двух других. Пример антенной системы, для которой допустима такая идеализация, приведен в § 17.3.

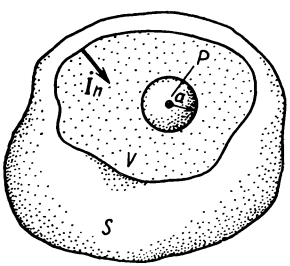


Рис. 17.6. К выводу формулы Кирхгофа

Формула Кирхгофа. Рассмотрим произвольный объем V, ограниченный поверхностью S (рис. 17.6). Считается, что эта поверхность достаточно гладкая, поэтому в каждой ее точке можно однозначно построить единичный вектор нормали $\mathbf{i}_n$, направленный внутрь объема. Требуется найти такую скалярную функцию $\dot{\psi}$, которая в области V удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2\dot{\psi}+\beta^2\dot{\psi}=0$$

при условии, что значения функции $\dot{\psi}$ и ее нормальной производной $\partial\dot{\psi}/\partial n$ в каждой точке поверхности S заранее заданы. Таким образом, речь идет о поиске волнового поля, возбуждаемого известными поверхностными источниками.

В середине прошлого века немецкий физик Г. Кирхгоф (1824—1887) доказал, что решение поставленной задачи дается формулой

$$\dot{\psi}(P)=-\frac{1}{4\pi}\int_S\left[\frac{e^{-j\beta r}}{r}\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial n}-\dot{\psi}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-j\beta r}}{r}\right)\right]dS, \qquad (17.31)$$

где r — расстояние между текущей точкой на поверхности и точкой наблюдения P.

Доказательство формулы Кирхгофа основывается на известной из курса математики теореме Грина, согласно которой дважды дифференцируемые функции $\dot{\psi}$ и $\dot{\varphi}$ пространственных координат удовлетворяют тождеству

$$\int_V (\dot{\varphi}\nabla^2\dot{\psi} - \dot{\psi}\nabla^2\dot{\varphi})\,dV = \int_S \left(\dot{\varphi}\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial n} - \dot{\psi}\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial n}\right)dS. \tag{17.32}$$

Предположим, что как искомая функция $\dot{\psi}$, так и вспомогательная функция $\dot{\varphi}$ в области V являются решениями одного и того же уравнения Гельмгольца

$$\begin{aligned}\nabla^2\dot{\psi} + \beta^2\dot{\psi} &= 0,\\ \nabla^2\dot{\varphi} + \beta^2\dot{\varphi} &= 0.\end{aligned} \tag{17.33}$$

Очевидно, что в силу уравнений (17.33) левая часть формулы (17.32) обращается в нуль:

$$\int_S \left(\dot{\varphi}\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial n} - \dot{\psi}\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial n}\right)dS = 0. \tag{17.34}$$

Будем считать, что вспомогательной функцией $\dot{\varphi}$ служит уже известное решение скалярного уравнения Гельмгольца

$$\dot{\varphi} = \exp(-j\beta r)/r, \tag{17.35}$$

описывающее расходящуюся сферическую волну. Здесь под r подразумевается длина отрезка между выбранной точкой наблюдения P и произвольной точкой внутри объема V.

Поскольку функция $\dot{\varphi}$ в точке P имеет особенность, исключим из области V малый шар радиусом a с центром в точке P. Обозначив символом S' поверхность этого шара, на основании (17.34) можно записать

$$\int_{S'} \left(\dot{\varphi}\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial n} - \dot{\psi}\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial n}\right)dS' = -\int_S \left(\dot{\varphi}\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial n} - \dot{\psi}\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial n}\right)dS. \tag{17.36}$$

Следующим этапом вычислим подынтегральное выражение в левой части формулы (17.36). Так как перемещение по направлению нормали к поверхности S' означает увеличение координаты r, то

$$\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial n} = \frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial r} = -\left(\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2}\right)e^{-j\beta r}. \tag{17.37}$$

Поэтому левую часть равенства (17.36) можно представить в виде

$$\int_{S'} \left[\frac{e^{-j\beta r}}{r}\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial r} + \left(\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\dot{\psi}e^{-j\beta r}\right]dS'. \tag{17.38}$$

Теперь устремим к нулю радиус вспомогательной сферы, учитывая, что искомое поле $\dot{\psi}$, по предположению, внутри V не имеет

источников и поэтому всюду ограниченно и непрерывно. В подынтегральное выражение (17.38) входят слагаемые, обратно пропорциональные как правой степени, так и квадрату текущего радиуса. Легко проверить, что вклад слагаемых первого рода равен нулю:

$$\lim_{a\to 0}\int\limits_{S'}\frac{dS'}{a}=0, \tag{17.39}$$

поскольку площадь сферы, равная $4\pi a^2$, стремится к нулю быстрее, нежели ее радиус. В то же время

$$\lim_{a\to 0}\int\limits_{S'}\frac{dS'}{a^2}=4\pi. \tag{17.40}$$

На основании изложенного из равенства (17.36) получаем выражение для расчета искомого поля в точке P

$$\dot{\psi}(P)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S}\left[\frac{e^{-j\beta r}}{r}\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial n}-\right.$$

$$\left.-\dot{\psi}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-j\beta r}}{r}\right)\right]dS,$$

совпадающее с формулой Кирхгофа (17.31).

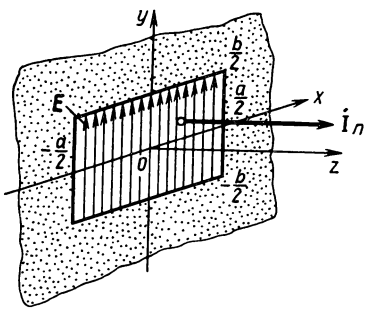


Рис. 17.7. Прямоугольное отверстие в экране, возбужденное плоской волной

17.5. Дифракция плоской волны на прямоугольном отверстии в идеально проводящем экране

Простейшей моделью апертурной антенны является бесконечный идеально проводящий экран с отверстием, через которое осуществляется электромагнитная связь между двумя полупространствами. Будем считать, что это отверстие имеет форму прямоугольника со сторонами a и b (рис. 17.7). Предположим, что отверстие возбуждается однородной плоской волной, которая движется в левом полупространстве $z<0$ по направлению нормали к плоскости экрана и имеет единственную отличную от нуля проекцию электрического вектора $\dot{E}_y$.

Пусть отверстие достаточно велико в волновом масштабе, т. е. $a\gg\lambda$, $b\gg\lambda$. Предположим, что поле в отверстии совпадает с полем возбуждающей плоской волны при отсутствии экрана. Иными словами, будем считать, что в плоскости раскрыва

$$\dot{E}_y=E_0\exp(-j\beta z). \tag{17.41}$$

Данное равенство имеет место в прямоугольной области, границы которой устанавливаются неравенствами $-a/2 \leqslant x \leqslant a/2$, $-b/2 \leqslant y \leqslant b/2$; вне раскрыва возбуждающее поле обращается в нуль. Такие предположения характерны для метода физической оптики, в рамках которой приходится задавать возбуждающее поле, прибегая к тем или иным интуитивным соображениям. Приближенный характер подхода физической оптики очевиден уже потому, что поле вида (17.41) *не удовлетворяет* граничным условиям на кромках отверстия при $x = \pm a/2$.

Обратившись к рис. 17.7, видим, что здесь $\partial/\partial n = \partial/\partial z$, откуда на основании формулы Кирхгофа находим напряженность электрического поля в произвольной точке наблюдения P, расположенной в полупространстве $z > 0$:

$$\dot{E}_y(P) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \left[\frac{e^{-j\beta r}}{r}\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} - \dot{E}_y \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{-j\beta r}}{r}\right)\right] dS. \qquad (17.42)$$

Интегрирование проводится по площади раскрыва; все производные вычисляются в плоскости отверстия при $z = 0$. Радиус-вектор $\mathbf{r}$, соединяющий точку Q на раскрыве с координатами x, y, 0 и точку наблюдения P, имеющую координаты ξ, η, ζ, характеризуется длиной

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \zeta^2}. \qquad (17.43)$$

Вычислим обе производные, входящие в подынтегральное выражение формулы Кирхгофа (17.42):

$$\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = -j\beta E_0, \qquad (17.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{-j\beta r}}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-j\beta r}}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-j\beta r}}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial \zeta}. \qquad (17.45)$$

Принимая во внимание, что

$$\partial r/\partial \zeta = \zeta/r = \cos\theta,$$

где θ — угол между нормалью к раскрыву и радиусом-вектором, а также используя формулу (17.37), будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{-j\beta r}}{r}\right) = \left(\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\cos\theta \cdot e^{-j\beta r}. \qquad (17.46)$$

С учетом равенств (17.44) и (17.46), запишем формулу (17.42) следующим образом:

$$\dot{E}_y(P) = \frac{E_0}{4\pi}\int\limits_S \left[j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r}(1 + \cos\theta) + \frac{\cos\theta}{r^2} e^{-j\beta r}\right] dS. \qquad (17.47)$$

Данное выражение дает формальное решение поставленной задачи.

Дифракция Фраунгофера. Если точка наблюдения P отстоит от излучающего раскрыва на расстоянии, исчисляемом многими длинами волн (случай, наиболее типичный для радиотехники), то $\beta/r=2\pi/(\lambda r)\gg 1/r^2$ и поэтому формулу (17.47) можно упростить, отбросив слагаемое с множителем $1/r^2$:

$$\dot{E}_y(P)=\frac{jE_0\beta}{4\pi}\int\limits_S(1+\cos\theta)\frac{e^{-j\beta r}}{r}\,dS. \tag{17.48}$$

При анализе антенных систем обычно приходится находить поле на расстоянии r, значительно превышающем размеры раскрыва a и b. При этом угол θ можно считать одинаковым для всех точек раскрыва, а расстояние r, фигурирующее в знаменателе подынтегрального выражения формулы (17.48),— равным расстоянию r_0 от точки наблюдения до центра раскрыва. Величину r, входящую в аргумент экспоненциальной функции, на основании сделанных предположений можно приближенно представить следующим образом:

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+\zeta^2}\approx\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2-2x\xi-2y\eta}\approx$$
$$\approx\sqrt{r_0^2-2x\xi-2y\eta}\approx r_0-\frac{x\xi}{r_0}-\frac{y\eta}{r_0}. \tag{17.49}$$

Случай, когда оказывается справедливой формула (17.49), принято называть *дифракцией Фраунгофера.* При этом на большом расстоянии от излучающей апертуры

$$\dot{E}_y(P)=\frac{jE_0\beta}{4\pi r_0}e^{-j\beta r_0}(1+\cos\theta)\int\limits_{-a/2}^{a/2}e^{j\beta x\xi/r_0}\,dx\int\limits_{-b/2}^{b/2}e^{j\beta y\eta/r_0}\,dy=$$
$$=\frac{jE_0\beta}{4\pi r_0}e^{-j\beta r_0}(1+\cos\theta)\frac{\sin\left(\frac{\beta a\xi}{2r_0}\right)}{\frac{\beta a\xi}{2r_0}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\beta b\eta}{2r_0}\right)}{\frac{\beta b\eta}{2r_0}}. \tag{17.50}$$

Подробное обсуждение полученного выражения не входит в круг задач настоящей книги и относится скорее к курсу антенных устройств. Отметим лишь, что формула (17.50) дает возможность построить диаграммы направленности апертурной антенны. Если через θ_1 обозначить угол между вектором $\mathbf{r}_0$ и осью x, а через θ_2 — угол между $\mathbf{r}_0$ и осью y, то угловая зависимость поля будет выражаться множителем вида

$$F(\theta_1, \theta_2) = \frac{\sin\left(\frac{\beta a}{2}\cos\theta_1\right)}{\frac{\beta a}{2}\cos\theta_1} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\beta b}{2}\cos\theta_2\right)}{\frac{\beta b}{2}\cos\theta}. \qquad (17.51)$$

Здесь принято во внимание, что при больших значениях безразмерных параметров βa и βb множитель (17.51) оказывается более быстрой функцией угловых координат, чем множитель $(1+\cos\theta)$, входящий в формулу (17.50).

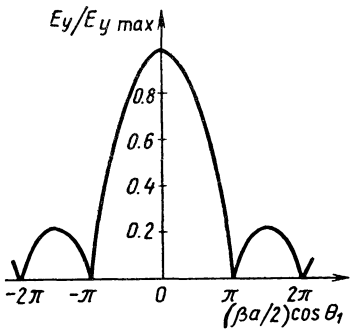


Рис. 17.8. Диаграмма направленности прямоугольного отверстия

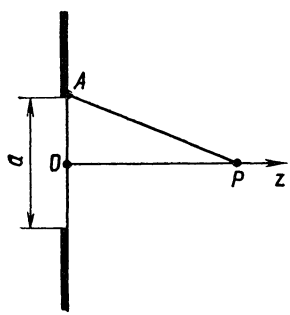


Рис. 17.9. Вычисление поля в точке на оси системы

Если $\theta_2=\pi/2$, т. е. точка наблюдения перемещается в плоскости XOZ, то нормированная диаграмма направленности прямоугольного раскрыва, равномерно возбужденного синфазными источниками, согласно формуле (17.51), запишется в виде

$$\frac{E_y(P)}{E_{y\max}} = \frac{\sin\left(\frac{\beta a}{2}\cos\theta_1\right)}{\frac{\beta a}{2}\cos\theta_1}. \qquad (17.52)$$

Типичная диаграмма направленности, построенная по данной формуле, изображена на рис. 17.8.

Обратим внимание на то, что ширина диаграммы направленности полностью определяется отношением размера апертуры к длине волны и может быть сделана весьма малой с ростом этого отношения. Например, если $a/\lambda=100$, то первый дифракционный нуль диаграммы направленности будет характеризоваться равенством $100\pi\cos\theta_1=\pi$, откуда ширина основного лепестка диаграммы направленности, измеренная по нулям, составит $2\Delta\theta_1=0.02$ рад$=1.15°$.

Дифракция Френеля. До сих пор речь шла о вычислении поля в точках пространства, удаление которых от излучающего отверстия значительно превышает его геометрические размеры. При этом если требовалось найти поле в точке P, лежащей на оси системы (рис. 17.9), то в соответствии с принципом дифракции Фраунгофера элементарные колебания, поступающие из всех точек апертуры, считались синфазными. Однако фактически это не так, поскольку длины путей от точек апертуры до точки наблюдения не одинаковы; максимальная геометрическая разность хода

$$\Delta_{\text{геом}} = AP - OP = z\sqrt{1+\left(\frac{a}{2z}\right)^2} - z \approx \frac{a^2}{8z}$$

соответствует фазовому сдвигу между колебаниями

$$\Delta\varphi = 2\pi\Delta_{\text{геом}}/\lambda = \pi a^2/(4\lambda z). \qquad (17.53)$$

Дифракция Фраунгофера имеет место в том случае, если точка наблюдения P столь удалена от излучающей системы, что $\Delta\varphi \leqslant \pi/8$ (последняя цифра во многом условна и принята для конкретности оценок). Говорят, что при этом точка наблюдения находится *в дальней зоне* апертурной антенны. В соответствии с формулой (17.50) поле в дальней зоне имеет вид неоднородной сферической волны.

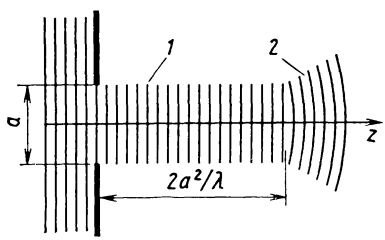


Рис. 17.10. Характер распределения поля в ближней зоне апертурной антенны:
1 — лучевая трубка; *2* — сферическая волна

Если приблизить точку наблюдения к излучающей апертуре, то максимальный фазовый сдвиг между элементарными колебаниями становится больше $\pi/8$. Говорят, что при этом точка наблюдения располагается *в ближней зоне антенны*. Условной границей между ближней и дальней зонами служит плоскость с координатой

$$z_0 = 2a^2/\lambda, \qquad (17.54)$$

что вытекает из равенства (17.53). Анализ показывает, что для ближней зоны характерна локализация энергии электромагнитного поля в пределах «лучевой трубки» (рис. 17.10), поперечник которой сравним с размерами апертуры.

Пример 17.2. Оптический прожектор с размером апертуры $a = 200$ мм возбуждается монохроматическим лазерным излучением, имеющем длину волны $\lambda = 62.8$ нм, соответствующую красной части

спектра видимого диапазона. Определить длину «лучевой трубки», создаваемой данной апертурной антенной.

В соответствии с формулой (17.54) ближняя зона прожектора простирается на расстояние

$$z_0 = \frac{2a^2}{\lambda} = \frac{2(2\cdot 10^{-1})^2}{6.28\cdot 10^{-8}} = 1274 \text{ км}.$$

Столь большая протяженность ближней зоны позволяет создавать высокоэффективные лазерные линии связи с высокой концентрацией энергии в канале и с малым взаимным влиянием соседних каналов.

Чтобы вычислить дифракционное поле в ближней зоне, используем вместо равенства (17.49) выражение для расстояния r между точками источника и наблюдения, учитывающее квадратичные члены:

$$r \approx \zeta + \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{2\zeta}. \qquad (17.55)$$

Принято говорить, что волновая картина, рассматриваемая в данном приближении, соответствует *дифракции Френеля*.

Будем, как это обычно принято, интересоваться полем вблизи оси излучающей системы, когда $(1+\cos\theta) \approx 2$. Подставив (17.55) в выражение (17.48) получим

$$\dot{E}_y(P) \approx \frac{jE_0\beta}{2\pi} \frac{e^{-j\beta\zeta}}{\zeta} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} e^{-j\beta\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{2\zeta}} d\zeta. \qquad (17.56)$$

В последней формуле зависимость поля от координат ξ и η выражается как произведение интегралов одинаковой структуры. Рассмотрим один из них:

$$J = \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left[-j\beta\frac{(x-\xi)^2}{2\zeta}\right] dx.$$

Используя подстановку

$$u = \sqrt{\beta/(2\zeta)}\,(x-\xi),$$

запишем этот интеграл в виде

$$J = \sqrt{\frac{2\zeta}{\beta}} \int_{-\sqrt{\beta/(2\zeta)}\,(a/2+\xi)}^{\sqrt{\beta/(2\zeta)}\,(a/2-\xi)} \exp(-ju^2)\,du.$$

Такие интегралы принято выражать через неэлементарные функции — интегралы Френеля [9]:

$$C(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^w \cos u^2\,\mathrm{d}u,$$

$$S(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^w \sin u^2\,\mathrm{d}u,$$

так что

$$\int_w^{\infty} \exp(-ju^2)\,\mathrm{d}u=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,[C(w)-jS(w)].$$

Воспользовавшись последним равенством, получим

$$J=\sqrt{\frac{\pi\zeta}{\beta}}\{C[g(a/2-\xi)]-C[g(a/2+\xi)]-jS[g(a/2-\xi)]+$$
$$+jS[g(a/2+\xi)]\}, \qquad (17.56)$$

где введен параметр $g=\sqrt{\beta/(2\zeta)}$.

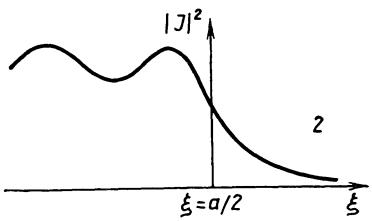


Рис. 17.11. Характер распределения интенсивности поля вблизи границы между освещенной областью и областью тени

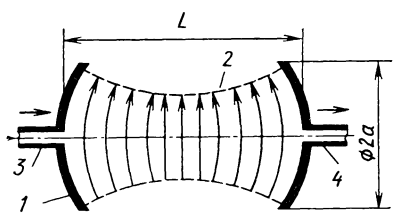


Рис. 17.12. Конфокальный открытый резонатор:

1 — зеркало; *2* — область поля; *3, 4* — волноводы

Обычно интересуются не самой величиной J, а квадратом модуля $|J|^2$, который пропорционален среднему значению вектора Пойнтинга. Расчеты показывают, что при дифракции Френеля сохраняются многие черты чисто лучевой оптики. Так, значения $\xi=\pm a/2$ и $\eta=\pm b/2$ служат условными границами областей света и тени. Интенсивность поля в освещенной области оказывается немонотонной функцией пространственных координат (рис. 17.11).

Область прикладной электродинамики, занимающаяся построением устройств, работающих на принципах дифракции Френеля,

носит название *квазиоптики.* К числу важнейших квазиоптических приборов светового, инфракрасного и СВЧ-диапазонов относятся открытые объемные резонаторы. На рис. 17.12 приведен эскиз открытого резонатора конфокального типа. Этот резонатор представляет собой систему из двух металлических зеркал сферического профиля; фокусные расстояния зеркал равны длине резонатора. Принципиально важно, что радиусы зеркал a и расстояние между ними L значительно превышают длину волны λ.

Теоретически и экспериментально показано, что в конфокальном резонаторе существует бесконечная последовательность собственных типов колебаний (резонаторных мод), отличающихся как структурой электромагнитного поля, так и резонансными частотами. Простейшей модой является колебание типа T_{00n}, где n — число стоячих полуволн, укладывающихся вдоль оси резонатора. У такой моды структура поля в поперечном сечении близка к обычной Т-волне, однако напряженности поля убывают при удалении от оси резонатора по закону квадратичной экспоненты (гауссовской функции). Поэтому говорят, что моды открытого объемного резонатора представляют собой гауссовские волновые пучки. Резонансную длину волны для моды типа T_{00n} вычисляют по приближенной формуле

$$\lambda_{рез}=2L/n. \tag{17.57}$$

Квазиоптическим объемным резонаторам присущи специфические дифракционные потери, связанные с утечкой части энергии за края зеркал. Чтобы сделать эти потери приемлемо малыми, стремятся так выбрать геометрические размеры резонатора, чтобы одно из зеркал полностью перекрывало «лучевую трубку», созданную другим зеркалом. Для оценки величины дифракционных потерь принято вводить так называемый *дифракционный параметр*

$$c=\beta a^2/L. \tag{17.58}$$

Было показано, что дифракционные потери чрезвычайно быстро уменьшаются с ростом дифракционного параметра. Так, при $c>2\pi$ добротность конфокального резонатора может быть сделана порядка 10^6 и даже более. Это обстоятельство имеет важное значение в лазерной технике, использующей конфокальные открытые резонаторы как высокодобротные колебательные системы оптического и инфракрасного диапазонов.

17.6. Дифракция плоской электромагнитной волны на идеально проводящем цилиндре

В настоящем параграфе рассмотрен пример *строгого решения* задачи о дифракции плоской волны на идеально проводящем теле. Пусть имеется круговой цилиндр радиусом a, ось которого ориен-

тирована вдоль оси z декартовой системы координат (рис. 17.13). Считается, что данный цилиндр, выполненный из идеального проводника ($\sigma=\infty$), бесконечно протяжен в осевом направлении. Плоская электромагнитная волна с линейной поляризацией падает на цилиндр слева направо в положительном направлении оси x, как показано на рисунке. Плоскость поляризации падающей волны выбрана таким образом, что соответствующий вектор напряженности электрического поля имеет единственную отличную от нуля проекцию $\dot{E}_{z\,\text{пад}}$, которая считается известной. Требуется вычислить пространственное распределение комплексной амплитуды электрического вектора рассеянной волны во всем пространстве.

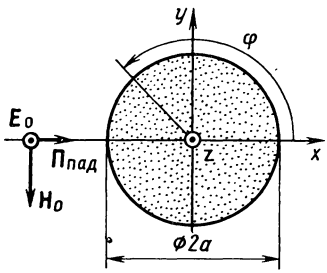


Рис. 17.13. Падение плоской волны на идеально проводящий цилиндр

Решая поставленную задачу в строгой постановке, будем избегать каких-либо упрощающих предположений, основываясь исключительно на уравнениях Максвелла. Для этого введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) и запишем комплексную амплитуду вектора напряженности электрического поля падающей волны в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{E}}_{\text{пад}}=E_0 e^{-j\beta x}\mathbf{i}_z=E_0 e^{-j\beta r\cos\varphi}\mathbf{i}_z. \qquad (17.59)$$

Проекция этого вектора на ось z является периодической функцией угловой координаты φ с периодом 2π, поэтому можно воспользоваться разложением в ряд Фурье; коэффициентами такого ряда служат функции Бесселя $J_n(\beta r)$. Здесь можно усмотреть прямую аналогию со спектральным представлением ЧМ-сигнала [2]. В результате будем иметь

$$\dot{E}_{z\,\text{пад}}=E_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(\beta r)\,e^{jn(\varphi-\pi/2)}. \qquad (17.60)$$

Очевидно, что при выбранной поляризации поле рассеянной волны будет иметь единственную отличную от нуля проекцию $\dot{E}_{z\,\text{рас}}$ вектора напряженности электрического поля. При этом на поверхности идеально проводящего цилиндра должно выполняться очевидное граничное условие

$$(\dot{E}_{z\,\text{пад}}+\dot{E}_{z\,\text{рас}})|_{r=a}=0. \qquad (17.61)$$

Рассеянное поле должно являться решением однородного уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2\dot{E}_{z\,\text{рас}}+\beta^2\dot{E}_{z\,\text{рас}}=0,$$

которое в данном случае приобретает вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \dot{E}_{z\,\text{рас}}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \dot{E}_{z\,\text{рас}}}{\partial \varphi^2}+\beta^2 \dot{E}_{z\,\text{рас}}=0. \tag{17.62}$$

Рассеянное поле существует в бесконечной области $r>a$, причем при $r\to\infty$ должно выполняться условие излучения Зоммерфельда. Решение уравнения (17.62) представляет собой периодическую функцию аргумента φ с периодом 2π, которую можно искать в виде ряда Фурье, совпадающего по форме с (17.60)

$$\dot{E}_{z\,\text{рас}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(r)\,e^{jn(\varphi-\pi/2)} \tag{17.63}$$

с не известными пока амплитудными коэффициентами $a_n(r)$ отдельных угловых гармоник. Поскольку

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{z\,\text{рас}}}{\partial \varphi^2}=-\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 a_n(r)\,e^{jn(\varphi-\pi/2)},$$

каждый из этих коэффициентов должен быть решением дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 a_n}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{da_n}{dr}+\left(\beta^2-\frac{n^2}{r^2}\right)a_n=0,$$

которое заменой переменной $\xi=\beta r$ сводится к обычному уравнению Бесселя

$$\frac{d^2 a_n}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{da_n}{d\xi}+\left(1-\frac{n^2}{\xi^2}\right)a_n=0. \tag{17.64}$$

Подходящей системой линейно независимых решений уравнения (17.64) служат функции Ганкеля $H_n^{(1)}(\xi)$ и $H_n^{(2)}(\xi)$ первого и второго рода соответственно [9]. При больших значениях аргумента справедливы следующие асимптотические формулы:

$$H_n^{(1)}(\xi)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi\xi}}\,e^{j\left[\xi-\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]},$$

$$H_n^{(2)}(\xi)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi\xi}}\,e^{-j\left[\xi-\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]}.$$

Ясно, что цилиндрическую волну, уходящую на бесконечность, описывает функция $H_n^{(2)}(\xi)$. Таким образом,

$$\dot{E}_{z\,\text{рас}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(2)}(\beta r)\,e^{jn(\varphi-\pi/2)}, \tag{17.65}$$

причем в соответствии с (17.60) для выполнения граничного условия на поверхности цилиндра необходимо потребовать, чтобы

$$A_n = -E_0 \frac{J_n(\beta a)}{H_n^{(2)}(\beta a)}. \qquad (17.66)$$

Итак, комплексная амплитуда электрического вектора рассеянного поля выражается бесконечным рядом Фурье

$$E_{z\,\text{рас}} = -E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(\beta a)}{H_n^{(2)}(\beta a)} H_n^{(2)}(\beta r)\, e^{jn(\varphi-\pi/2)}. \qquad (17.67)$$

На большом удалении от цилиндра (при $\beta r \to \infty$) это поле имеет вид цилиндрической волны с неоднородным угловым распределением амплитуды:

$$\dot{E}_{z\,\text{рас}} \approx -E_0 \sqrt{\frac{2}{\pi\beta r}}\, e^{-j(\beta r-\pi/4)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(\beta a)}{H_n^{(2)}(\beta a)} e^{jn\varphi}. \qquad (17.68)$$

Полученный ряд быстро сходится только при $\beta a \ll 3$; расчет дифракционного поля в случае достаточно толстых цилиндров представляет известные трудности, даже если используется быстродействующий компьютер. Численный анализ показывает, что:

- цилиндры малых радиусов ($a/\lambda < 0.1$) рассеивают энергию практически изотропно по всем углам;
- более толстые цилиндры ($a/\lambda \approx 1-3$) имеют резко выраженный максимум рассеяния «вперед», т. е. в область углов φ, близких к нулю;
- если $a/\lambda \gg 1$, то рассеяние происходит в основном «назад», а вокруг направления $\varphi = 0$ располагается область *геометрической тени*.

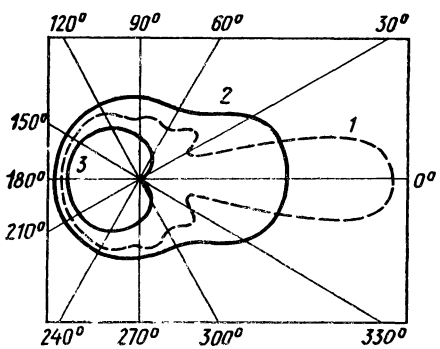


Рис. 17.14. Диаграммы углового распределения рассеянного поля при дифракции плоской волны на идеально проводящем цилиндре:
1 — при $a/\lambda = 1.28$; *2* — при $a/\lambda = 0.24$; *3* — при $a/\lambda = 0.08$

На рис. 17.14 представлены почерпнутые из [24] графики углового распределения амплитуды рассеянного поля при некоторых значениях отношения a/λ; кривые построены в условном масштабе.

Интересное и до некоторой степени неожиданное явление рассеяния «вперед» связано с тем, что токи на поверхности цилиндра при определенных условиях существуют не только в освещенной

области при $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, как это принимается в рамках метода физической оптики, но и могут затекать на теневую сторону.

17.7. Уравнения Максвелла в неоднородной среде

Электродинамика неоднородных сред в настоящее время является обширной научной областью с многочисленными и важными инженерными приложениями. В данном параграфе выведены дифференциальные уравнения, которые описывают распространение гармонических электромагнитных волн в неограниченной неоднородной среде.

Будем считать, что в каждой точке такой среды между комплексными амплитудами векторов поля существует линейная связь, устанавливаемая материальными уравнениями

$$\dot{\mathbf{D}} = \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}, \qquad \dot{\mathbf{B}} = \mu_a \dot{\mathbf{H}}. \tag{17.69}$$

Здесь $\varepsilon_a(x, y, z)$ и $\mu_a(x, y, z)$ — абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости соответственно, являющиеся произвольными заданными функциями координат. Для простоты величины ε_a и μ_a являются не тензорами, а скалярами, т. е. речь будет идти о распространении волн в неоднородной изотропной среде.

Будем рассматривать гармонический волновой процесс с частотой ω, существующий в неоднородной среде без сторонних источников. Система четырех уравнений Максвелла в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}, \\ &\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu_a \dot{\mathbf{H}}, \\ &\operatorname{div} \dot{\mathbf{E}} = 0, \\ &\operatorname{div} \dot{\mathbf{B}} = 0. \end{aligned} \tag{17.70}$$

Поставим задачу получить векторное дифференциальное уравнение относительно комплексной амплитуды $\dot{\mathbf{H}}$ магнитного вектора, которое было бы эквивалентным полной системе (17.70). Начнем с того, что несколько преобразуем четвертую строку:

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{B}} = \operatorname{div}(\mu_a \dot{\mathbf{H}}) = (\operatorname{grad} \mu_a)\, \dot{\mathbf{H}} + \mu_a \operatorname{div} \dot{\mathbf{H}} = 0,$$

откуда

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{H}} = -\frac{(\operatorname{grad} \mu_a)\, \dot{\mathbf{H}}}{\mu_a}. \tag{17.71}$$

Отметим, что в магнитно неоднородной среде вектор $\operatorname{grad} \mu_a$ отличен от нуля, поэтому поле $\dot{\mathbf{H}}$ здесь не является соленоидальным.

Теперь вычислим ротор от обеих частей первого уравнения из системы (17.70):

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}=j\omega\operatorname{rot}(\varepsilon_a\dot{\mathbf{E}}). \tag{17.72}$$

Воспользуемся известными формулами векторного анализа и запишем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{H}}-\nabla^2\dot{\mathbf{H}}, \tag{17.73}$$

$$\operatorname{rot}(\varepsilon_a\dot{\mathbf{E}})=[(\operatorname{grad}\varepsilon_a)\dot{\mathbf{E}}]+\varepsilon_a\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}. \tag{17.74}$$

Поле $\dot{\mathbf{E}}$, входящее в равенство (17.74), можно выразить через поле $\dot{\mathbf{H}}$, воспользовавшись первой строкой из (17.70), а затем найти $\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}$ из второй строки. Подставляя все эти промежуточные результаты в (17.72), приходим к следующему результату:

$$\nabla^2\dot{\mathbf{H}}+\omega^2\varepsilon_a\mu_a\dot{\mathbf{H}}+\operatorname{grad}\left(\frac{1}{\mu_a}(\operatorname{grad}\mu_a)\dot{\mathbf{H}}\right)+\frac{1}{\varepsilon_a}[(\operatorname{grad}\varepsilon_a)\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}]=0. \tag{17.75}$$

Данное векторное дифференциальное уравнение второго порядка в общем случае оказывается весьма сложным. Существенного упрощения можно добиться лишь в том случае, если заранее из физической постановки задачи известно, что пространственная неоднородность среды является *плавной*. Чтобы придать этому предположению количественную формулировку, введем *характерные размеры* пространственных областей с переменными диэлектрической и магнитной проницаемостями. Обозначим эти величины как $l_э$ и $l_м$ соответственно. Будем говорить, что пространственная неоднородность среды является плавной, если оба характерных размера значительно превышают длину волны:

$$l_э/\lambda\gg 1; \qquad l_м/\lambda\gg 1. \tag{17.76}$$

К плавно-неоднородным средам часто можно отнести ионосферу Земли, в которой характерный размер неоднородностей распределения электронной концентрации имеет порядок сотен метров. Условия (17.76) будут выполняться на волнах метрового и декаметрового диапазонов. Разнообразные естественные среды, в которых распространяются волны оптического и инфракрасного диапазонов, практически всегда можно считать плавно-неоднородными.

Неравенства (17.76) дают основание отбросить в основном уравнения (17.75) несколько пренебрежимо малых слагаемых. Чтобы оценить порядки величин слагаемых, входящих в это уравнение, следует прежде всего заметить, что вычисление ротора сводится к нахождению некоторой определенной комбинации прост-

ранственных производных первого порядка. При этом роль характерного масштаба пространственного изменения любых полевых величин играет длина волны. Поэтому справедлива оценка

$$|\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}| \backsim H_m/\lambda.$$

В равной мере

$$|\nabla^2\dot{\mathbf{H}}| \backsim H_m/\lambda^2; \qquad |\omega^2\varepsilon_a\mu_a\dot{\mathbf{H}}| \backsim H_m/\lambda^2.$$

Так как

$$|\operatorname{grad}\mu_a| \backsim \mu_a/l_м; \qquad |\operatorname{grad}\varepsilon_a| \backsim \varepsilon_a/l_э,$$

то имеют место оценки

$$\left|\operatorname{grad}\left(\frac{1}{\mu_a}(\operatorname{grad}\mu_a)\dot{\mathbf{H}}\right)\right| \backsim H_m/l_м^2,$$

$$\left|\frac{1}{\varepsilon_a}[(\operatorname{grad}\varepsilon_a)\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}]\right| \backsim H_m/(l_э\lambda).$$

Отсюда, учитывая неравенства (17.76), приходим к выводу о том, что в плавно-неоднородной среде третье и четвертое слагаемые левой части уравнения (17.75) пренебрежимо малы по сравнению с первым и вторым. Поэтому данное уравнение можно упростить, записав его в виде

$$\nabla^2\dot{\mathbf{H}} + \omega^2\varepsilon_a\mu_a\dot{\mathbf{H}} = 0. \tag{17.77}$$

Полученное равенство является уравнением Гельмгольца с переменным коэффициентом, который зависит от пространственных координат. Данное уравнение является основой для построения теории распространения электромагнитных волн в материальных средах с плавными неоднородностями. Отметим попутно, что если $\varepsilon_a = \text{const}$, $\mu_a = \text{const}$, т. е. в случае однородной среды, уравнение (17.77) переходит в обычное уравнение Гельмгольца, причем такое уравнение становится уже не приближенной, а точной математической моделью изучаемых волновых явлений.

17.8. Метод геометрической оптики

В данном параграфе рассмотрены основы метода приближенного решения волнового уравнения, который применяют в том случае, когда длина волны λ пренебрежимо мала по сравнению с любыми характерными размерами неоднородностей материальной среды. При этом уравнение (17.77) считается заведомо справедливым. Термин «геометрическая оптика» обусловлен тем, что описанная ситуация типична прежде всего для оптического диапазо-

на волн. Однако этим методом удается эффективно решать многие задачи, связанные, например, с распространением радиоволн в ионосфере и тропосфере Земли, а также исследовать такие неэлектромагнитные волновые процессы, как распространение звуковых волн в Океане и движение сейсмических волн в земной коре.

Считая, что потери в среде отсутствуют, запишем скалярный аналог уравнения (17.77) следующим образом:

$$\nabla^2\dot{\psi} + \beta_0^2 n(\mathbf{r})\dot{\psi} = 0, \tag{17.78}$$

где $n(\mathbf{r}) = \sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})\mu(\mathbf{r})}$ — локальное значение коэффициента преломления неоднородной среды.

В основе метода геометрической оптики лежит интуитивное представление о том, что в пределах малой окрестности любой точки наблюдения волновой процесс представляет собой локально-плоскую волну, которая может быть описана выражением

$$\dot{\psi}(\mathbf{r}) = \exp[-j\beta_0 L(\mathbf{r})]. \tag{17.79}$$

Здесь $L(\mathbf{r})$ — не известная пока функция пространственных координат, которую называют *эйконалом* (от греч. εικών — изображение). Заметим, что эйконал имеет физическую размерность длины.

Уравнение эйконала. Чтобы найти функцию $L(x, y, z)$, подставим выражение (17.79) в уравнение (17.78), учтя при этом, что $\nabla^2\dot{\psi} = \operatorname{div}\operatorname{grad}\dot{\psi}$. По обычным правилам вычисления производной от сложной функции находим

$$\operatorname{grad}\dot{\psi} = -j\beta_0(\operatorname{grad} L)\,e^{-j\beta_0 L}. \tag{17.80}$$

Как известно из векторного анализа,

$$\operatorname{div}(\varphi\mathbf{A}) = (\operatorname{grad}\varphi)\,\mathbf{A} + \varphi\operatorname{div}\mathbf{A},$$

где скалярное поле φ и векторное поле $\mathbf{A}$ — произвольные гладкие функции координат. Воспользовавшись этой формулой, получим

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\dot{\psi} = -\beta_0^2(\operatorname{grad} L)^2 e^{-j\beta_0 L} - j\beta_0 e^{-j\beta_0 L}\operatorname{div}\operatorname{grad} L. \tag{17.81}$$

Подставляя выражение (17.81) в уравнение Гельмгольца (17.78), находим

$$-\beta_0^2(\operatorname{grad} L)^2 e^{-j\beta_0 L} - j\beta_0 e^{-j\beta_0 L}\operatorname{div}\operatorname{grad} L + \beta_0^2 n^2 e^{-j\beta_0 L} = 0, \tag{17.82}$$

Теперь учтем, что в рамках метода геометрической оптики длина волны $\lambda \to 0$ и поэтому коэффициент фазы $\beta_0 \to \infty$. Это дает возможность пренебречь вторым слагаемым в левой части равенства (17.82) по сравнению с двумя другими. После сокращения на общий множитель приходим к эквивалентному уравнению

$$(\operatorname{grad} L)^2 = n^2(\mathbf{r}), \tag{17.83}$$

или в развернутом виде

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2=n^2(x, y, z). \qquad (17.84)$$

Данное нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка называют *уравнением эйконала*. Это уравнение, допускающее разнообразные обобщения, является основным соотношением геометрической оптики пространственно неоднородной среды. Отметим следующие важные факты:

- В уравнение эйконала не входит длина волны. Поэтому метод геометрической оптики не учитывает каких-либо дифракционных эффектов и явлений интерференции волн.
- Метод геометрической оптики справедлив лишь в том случае, когда $n(\mathbf{r})>0$ во всех точках пространства. Дело в том, что уравнение Гельмгольца с отрицательным вторым слагаемым левой части принципиально не может иметь решений вида локально-плоских волн с постоянной амплитудой.

Нормальное падение волны на плоскослоистую среду. В качестве простейшего примера использования уравнения (17.84) рассмотрим задачу о волновом процессе в плоскослоистой среде без потерь, у которой показатель преломления $n(z)$ зависит лишь от декартовой координаты z. Будем считать, что волны распространяются вдоль оси z, т. е. по направлению нормали к слоям. В данном случае из (17.84) получаем

$$\mathrm{d}L/\mathrm{d}z=\pm n(z), \qquad (17.85)$$

откуда

$$L(z)=\pm\int^{z} n(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta+C, \qquad (17.86)$$

где C — произвольная постоянная интегрирования. Отсюда получаем общую формулу, описывающую геометрооптическую структуру волнового поля в плоскослоистой среде:

$$\dot{\psi}(z)=A_1\exp\left[-j\beta_0\int^{z} n(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta+C_1\right]+A_2\exp\left[j\beta_0\int^{z} n(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta+C_2\right],$$

где A_1 и A_2 — некоторые амплитудные коэффициенты. Первое слагаемое правой части описывает прямую волну, распространяющуюся в сторону увеличения координаты z, а второе соответствует обратной волне.

Особой является ситуация, когда в некоторой точке z_0 выполняется равенство $n(z_0)=0$. Пусть, например, при $z<z_0$ показатель преломления n положителен, а при $z>z_0$ отрицателен. В самой

точке z_0 и в ее малой окрестности метод геометрической оптики теряет силу, однако ясно, что правее точки z_0 волновой процесс будет отсутствовать. Поскольку в среде нет потерь, падающая волна целиком отражается назад. Рассмотренную здесь точку принято называть *точкой поворота*.

Отметим, что существуют математические методы, позволяющие уточнить картину волнового поля вблизи точки поворота [10]. Анализ показывает, что поле проникает за точку поворота на глубину порядка одной длины волны, затухая вдоль координаты z по экспоненциальному закону.

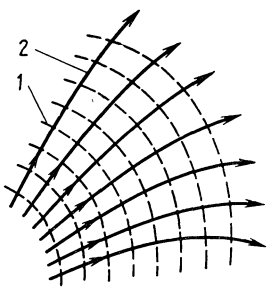


Рис. 17.15. Лучевая картина поля:
1 — волновые фронты; *2* — лучи

Уравнение лучей. Чтобы описать волновой процесс в приближении геометрической оптики, достаточно располагать семейством поверхностей постоянных фаз

$$L(x, y, z) = \text{const}, \tag{17.87}$$

которое образовано решениями уравнения эйконала (17.84). При этом можно задаться какой-либо начальной поверхностью вида (17.87), а затем, интегрируя уравнение эйконала, построить другие поверхности.

На практике предпочитают вместо совокупности эквифазных поверхностей строить *лучевую картину* поля, более традиционную и наглядную. Как известно из физики, лучи образуют семейство линий, ортогональных к волновым фронтам (рис. 17.15). Вектор, касательный к лучу в некоторой точке пространства, указывает направление перемещения волнового фронта локально-плоской волны. Отсюда следует, что касательная к лучу ориентирована вдоль вектора $\operatorname{grad} L$, указывающего направление наибыстрейшего изменения эйконала в пространстве.

Рассмотрим какой-нибудь конкретный луч. Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор выбранной точки на луче, а $s(\mathbf{r})$ — длина кривой, отсчитываемая вдоль луча в одном из двух возможных направлений. Исходя из уравнения эйконала, запишем единичный вектор $\mathbf{i}_s$ (лучевой орт) в некоторой произвольной точке:

$$\mathbf{i}_s = \frac{1}{n} \operatorname{grad} L. \tag{17.88}$$

В прямоугольной декартовой системе координат этот единичный вектор имеет направляющие косинусы dx/ds, dy/ds и dz/ds, т. е. имеет место разложение вида

$$\mathbf{i}_s = \frac{dx}{ds}\,\mathbf{i}_x + \frac{dy}{ds}\,\mathbf{i}_y + \frac{dz}{ds}\,\mathbf{i}_z. \tag{17.89}$$

Приравняв правые части формул (17.88) и (17.89), приходим к дифференциальному уравнению лучей

$$n\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\operatorname{grad}L, \tag{17.90}$$

которое эквивалентно системе трех скалярных дифференциальных уравнений

$$n\frac{dx}{ds}=\frac{\partial L}{\partial x},\quad n\frac{dy}{ds}=\frac{\partial L}{\partial y},\quad n\frac{dz}{ds}=\frac{\partial L}{\partial z}. \tag{17.91}$$

Некоторое неудобство уравнений (17.90) и (17.91) состоит в том, что их правые части содержат эйконал L, который приходится находить каким-нибудь независимым способом. Однако эти уравнения можно преобразовать таким образом, чтобы в правые части входило только пространственное распределение показателя преломления $n(\mathbf{r})$, известное заранее. Действительно, производная от любой функции φ пространственных координат вдоль локального направления некоторой кривой $s(\mathbf{r})$ есть скалярное произведение орта $\mathbf{i}_s$ и вектора $\operatorname{grad}\varphi$:

$$\frac{d\varphi}{ds}=\mathbf{i}_s\operatorname{grad}\varphi=\frac{d\mathbf{r}}{ds}\operatorname{grad}\varphi. \tag{17.92}$$

Дифференцируя обе части уравнения (17.90) по переменной s, применяя равенство (17.92), а также используя уравнение эйконала (17.84), получаем

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)=\frac{d}{ds}(\operatorname{grad}L)=\frac{d\mathbf{r}}{ds}\operatorname{grad}|\operatorname{grad}L|=$$

$$=\frac{1}{n}\operatorname{grad}L\cdot\operatorname{grad}|\operatorname{grad}L|=\frac{1}{2n}\operatorname{grad}(\operatorname{grad}L)^2=\frac{1}{2n}\operatorname{grad}n^2=\operatorname{grad}n. \tag{17.93}$$

Итак, получено уравнение лучей

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)=\operatorname{grad}n, \tag{17.94}$$

которое эквивалентно системе трех дифференциальных уравнений в координатной записи:

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{dx}{ds}\right)=\frac{\partial n}{\partial x},\quad \frac{d}{ds}\left(n\frac{dy}{ds}\right)=\frac{\partial n}{\partial y},\quad \frac{d}{ds}\left(n\frac{dz}{ds}\right)=\frac{\partial n}{\partial z}. \tag{17.95}$$

Уравнения (17.94) или (17.95) дают возможность решить основную задачу геометрической оптики — построить лучевые траектории. Для этого необходимо прежде всего задаться *точкой*

входа луча (x_0, y_0, z_0) и начальным направлением лучевого вектора, т. е. тремя производными (dx/ds, dy/ds, dz/ds), которые представляют собой направляющие косинусы лучевого вектора в исходной точке. Строя шаг за шагом интегральную кривую уравнения (17.94), приходим в *точку выхода луча*, имеющую некоторые координаты (x_1, y_1, z_1).

Таким образом, создав в одной точке пространства плоскую волну с заданным направлением лучевого вектора, мы получаем в другой точке пространства также плоскую волну, у которой направление распространения будет, вообще говоря, уже другим. Построив лишь один луч, мы не получаем никаких сведений об амплитудах волн на входе и выходе.

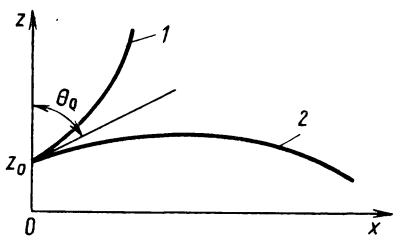


Рис. 17.16. Наклонные лучи в плоско-слоистой среде:
1 — при $n(z)>n(z_0)$; *2* — при $n(z)<n(z_0)$

Простейший случай — распространение плоских волн в однородной среде, для которой $n=\text{const}$ и поэтому $\operatorname{grad} n=0$. Из (17.94) следует, что здесь

$$d^2\mathbf{r}/ds^2=0,$$

откуда $\mathbf{r}=s\mathbf{a}+\mathbf{b}$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — некоторые постоянные векторы. Таким образом, в однородной среде лучи представляют собой прямые линии; луч направлен вдоль вектора $\mathbf{r}=\mathbf{a}$ и проходит через точку с радиусом-вектором $\mathbf{r}=\mathbf{b}$.

Наклонные лучи в плоскослоистой среде. Простейшая математическая модель распространения достаточно коротких электромагнитных волн в неоднородной атмосфере Земли в рамках метода геометрической оптики сводится к решению уравнений лучей (17.95) при условии, что показатель преломления среды n зависит только от вертикальной координаты z. Будем считать, что распространение происходит в плоскости XOZ, причем x — расстояние, отделяющее точку наблюдения от источника волн, которое измеряется вдоль горизонтальной поверхности (рис. 17.16). При этом $dy/ds=0$ и первое уравнение из системы (17.95) приобретает вид

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{dx}{ds}\right)=0. \qquad (17.96)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dx}{ds}=\frac{A}{n}, \qquad (17.97)$$

где A — некоторая постоянная величина, которую можно определить исходя из того, что производная dx/ds является направляющим косинусом лучевого вектора по отношению к оси x. Если источник волн расположен в точке с координатами $x=0$, $z=z_0$ и луч в точке входа образует угол θ_0 с осью z, то, очевидно,

$$A/n(z_0)=\sin\theta_0.$$

Чтобы получить уравнение траектории луча в явном виде, следует учесть, что второй из направляющих косинусов

$$\frac{dz}{ds}=\pm\sqrt{1-(dx/ds)^2}=\pm\sqrt{1-(A/n)^2}. \tag{17.98}$$

Здесь положительный знак отвечает восходящей, а отрицательный — нисходящей ветви луча. Объединяя выражения (17.97) и (17.98), получаем требуемое дифференциальное уравнение

$$\frac{dz}{dx}=\pm\sqrt{(n/A)^2-1}, \tag{17.99}$$

которое интегрируется непосредственно:

$$x(z)=\int_{z_0}^{z}\frac{d\zeta}{\sqrt{[n(\zeta)/A]^2-1}}. \tag{17.100}$$

При вычислениях по этой формуле следует в необходимых случаях изменять знак перед корнем, переходя с восходящей на нисходящую ветвь луча.

Так как формула (17.97) справедлива при любых значениях z, то имеет место равенство

$$n(z_0)\sin\theta_0=n(z)\sin\theta. \tag{17.101}$$

Если показатель преломления с ростом координаты z увеличивается, т. е. $n(z)>n(z_0)$, то в соответствии с (17.101) угол $\theta<\theta_0$ и, значит, луч искривляется вверх, стремясь стать более вертикальным. Наоборот, если $n(z)<n(z_0)$, то $\theta>\theta_0$ и луч искривляется вниз. В физике искривление траектории луча из-за изменения показателя преломления называют *рефракцией*. Общее правило таково: *луч рефрагирует в ту сторону, где оптическая плотность среды выше.*

Если показатель преломления с ростом высоты уменьшается, то возможна ситуация, когда $\theta=\pi/2$, т. е. происходит поворот луча, эквивалентный отражению волны от идеально проводящей плоскости. Точка поворота располагается на высоте $z_п$, которая удовлетворяет равенству

$$n(z_п)=n(z_0)\sin\theta_0. \tag{17.102}$$

Если значение θ_0 близко к $\pi/2$, т. е. луч входит в неоднородную среду почти горизонтально, достаточно весьма небольшого уменьшения показателя преломления с высотой, чтобы произошел поворот луча.

Описанные здесь явления играют существенную роль в распространении радиоволн вблизи поверхности Земли, о чем шла речь в гл. 14.

Лучевое распространение волн в волоконных оптических линиях передачи. Одной из наиболее перспективных линий передачи электромагнитных сигналов в настоящее время, по-видимому, является *волоконный световод*, представляющий собой тонкую (диаметром несколько микрометров) нить из особо чистого кварца или искусственого полимера. Погонные потери света в такой линии не превышают нескольких децибел на километр. Несущая частота в оптическом диапазоне исключительно высока, что позволяет иметь очень широкую полосу пропускания и обеспечивать за счет этого скорость передачи информации в сотни и даже тысячи Мбит/с.

Среди разнообразных волоконных световодов известны так называемые *градиентные волокна,* у которых показатель преломления $n(r)$ максимален на оси и плавно уменьшается к периферии. Рассмотрим упрощенную лучевую трактовку явлений в таком волокне. Будем основываться на уравнении лучей вида (17.94), которое запишем *в параксиальном приближении*, согласно которому лучи распространяются почти параллельно оси z, и поэтому дифференциал ds можно приближенно заменить на dz:

$$\frac{d^2r}{dz^2}=\frac{1}{n}\frac{dn}{dr}. \qquad (17.103)$$

Речь будет идти только о *меридиональных лучах*, которые лежат в плоскостях, содержащих ось z.

Зададимся так называемым параболическим профилем показателя преломления (рис. 17.17, *а*):

$$n(r)=\begin{cases} n_0[1-b(r/a)^2] \text{ при } r<a, \\ n_0(1-b) \text{ при } r\geqslant a, \end{cases} \qquad (17.104)$$

где a — радиус сердцевины волокна; n_0 — показатель преломления при $r=0$, т. е. на оси световода; b — параметр, характеризующий скорость убывания показателя преломления вдоль радиальной координаты.

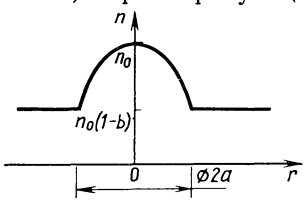
Если считать, что относительное изменение показателя преломления от центра к периферии волокна невелико, то

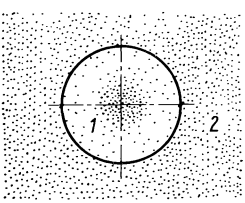
$$\frac{1}{n}\frac{dn}{dr}\approx-\frac{2b}{a^2}r,$$

откуда вытекает дифференциальное уравнение, описывающее траекторию меридионального луча:

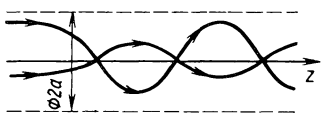
$$\frac{d^2r}{dz^2}+\frac{2b}{a^2}r=0, \qquad (17.105)$$

Если r_0 и r_0' — начальные условия для этого уравнения, задаваемые при $z=0$, характеризующие начальный радиус в точке входа и начальный угол наклона луча, то решение уравнения (17.105) имеет следующий вид:

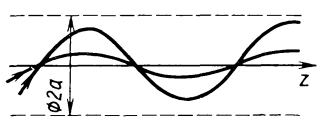




а)



б)



в)

Рис. 17.17. Градиентный волоконный световод:
а — конструкция световода (*1* — оптическое волокно; *2* — однородная среда); *б*, *в* — траектории лучей при разных начальных условиях

$$r=r_0\cos qz+(r_0'/q)\sin qz, \qquad (17.106)$$

где $q=\sqrt{2b}/a$.

Видно, что траектории лучей представляют собой знакопеременные гармонические функции продольной координаты. Если при всех значениях r_0 производные $r_0'=0$, т. е. лучи входят в волокно параллельно оси, то независимо от r_0 лучи пересекают ось световода в одних и тех же точках (рис. 17.17, *б*). Таким же свойством будут обладать лучи, входящие в волокно при $r_0=0$ под разными начальными углами (рис. 17.17, *в*). Говорят, что при сделанных предположениях в волокне отсутствует так называемая *межмодовая дисперсия,* т. е. различие времен распространения сигналов

под разными углами (термин «мода» здесь трактуется несколько по-иному, нежели в теории обычных волноводов и резонаторов).

Фактически картина явлений гораздо сложнее из-за того, что вдоль световода могут распространяться не только меридиональные, но и косые (винтовые) лучи, для которых межмодовая дисперсия неизбежна. Разница времен запаздывания сигналов, распространяющихся по разным путям, может составлять несколько наносекунд на километр, что существенно ограничивает пропускную способность волоконно-оптической линии связи. Подробные сведения о характеристиках современных световодов читатель может найти в литературе, например [6].

17.9. Теорема эквивалентности

Заканчивая главу, посвященную методам решения дифракционных задач, рассмотрим широко распространенный прием, позволяющий регулярным образом ставить краевые задачи для уравнений Максвелла.

Предположим, что имеется произвольный объем V с гладкой замкнутой поверхностью S. Внутри объема некоторым образом распределены возбуждающие источники, характеризуемые объемными плотностями сторонних электрических $\dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.э}}$ и магнитных $\dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.м}}$ токов. Кроме того, будем считать, что на поверхности S заданы касательные составляющие векторов искомого поля, возникающего как под действием источников внутри объема, так и в результате наличия тех или иных внешних источников.

Докажем, что на основании этих данных можно однозначно вычислить векторы электромагнитного поля во всех внутренних точках указанной пространственной области. Для этого рассмотрим в объеме V две системы векторов. Одна из них, обозначаемая как $\{\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}\}$, отображает искомое поле. Другая, $\{\dot{\mathbf{E}}_{\text{в}}, \dot{\mathbf{H}}_{\text{в}}\}$, представляет собой совокупность векторов *вспомогательного поля*, которое создается воображаемым элементарным электрическим излучателем, размещенным внутри V в произвольно выбранной точке наблюдения P. Будем считать, что ось излучателя ориентирована вдоль некоторого единичного вектора $\mathbf{i}_l$. Для простоты записи предположим, что амплитуда тока в излучателе $I_{\text{э}}$ и его длина l таковы, что $I_{\text{э}} l = 1$. Тогда соответствующая плотность тока имеет комплексную амплитуду $\dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.э}} = \mathbf{i}_l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, где $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор точки P относительно произвольно выбираемой точки начала координат.

Обратимся к лемме Лоренца в форме (2.39), полагая, что индекс 1 относится к искомому полю и порождающим его токам, а индекс 2 — к вспомогательному полю. На основании фильтрующего свойства дельта-функции имеем

$$\mathbf{i}_l\dot{\mathbf{E}}(P)=\int\limits_V(\dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.э}}\dot{\mathbf{E}}_{\text{в}}-\dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.м}}\dot{\mathbf{H}}_{\text{в}})\,dV+\int\limits_S\{[\dot{\mathbf{E}}_{\text{в}}\dot{\mathbf{H}}]-[\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}_{\text{в}}]\}\,d\mathbf{S}. \qquad (17.107)$$

Теперь учтем, что $d\mathbf{S}=\mathbf{i}_n dS$, где $\mathbf{i}_n$ — единичный вектор внешней нормали на поверхности S. Воспользовавшись известным правилом перестановки членов в векторно-скалярном произведении, перепишем (17.107) следующим образом:

$$\mathbf{i}_l\dot{\mathbf{E}}(P)=\int\limits_V(\dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.э}}\dot{\mathbf{E}}_{\text{в}}-\dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.м}}\dot{\mathbf{H}}_{\text{в}})\,dV+\int\limits_S\{[\dot{\mathbf{H}}\mathbf{i}_n]\dot{\mathbf{E}}_{\text{в}}-[\mathbf{i}_n\dot{\mathbf{E}}]\dot{\mathbf{H}}_{\text{в}}\}\,dS.$$

Далее введем формально плотности эквивалентных поверхностных электрических и магнитных токов на S [ср. с (6.3)]:

$$\dot{\mathbf{J}}_{\text{пов.э}}=[\dot{\mathbf{H}}\mathbf{i}_n],\qquad \dot{\mathbf{J}}_{\text{пов.м}}=[\mathbf{i}_n\dot{\mathbf{E}}]. \qquad (17.108)$$

В этом случае формула (17.107) принимает окончательный вид

$$\mathbf{i}_l\dot{\mathbf{E}}(P)=\int\limits_V(\dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.э}}\dot{\mathbf{E}}_{\text{в}}-\dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.м}}\dot{\mathbf{H}}_{\text{в}})\,dV+\int\limits_S(\dot{\mathbf{J}}_{\text{пов.э}}\dot{\mathbf{E}}_{\text{в}}-\dot{\mathbf{J}}_{\text{пов.м}}\dot{\mathbf{H}}_{\text{в}})\,dS. \qquad (17.109)$$

Найдя указанным способом поле $\dot{\mathbf{E}}(P)$, можно вычислить магнитный вектор $\dot{\mathbf{H}}(P)$, непосредственно воспользовавшись вторым уравнением Максвелла.

Формула (17.109) выражает принцип, получивший название *теоремы эквивалентности*. Полученный результат приобретает особенно простой вид в том случае, когда источники внутри V отсутствуют:

$$\mathbf{i}_l\dot{\mathbf{E}}(P)=\int\limits_S(\dot{\mathbf{J}}_{\text{пов.э}}\dot{\mathbf{E}}_{\text{в}}-\dot{\mathbf{J}}_{\text{пов.м}}\dot{\mathbf{H}}_{\text{в}})\,dS. \qquad (17.110)$$

Согласно данному выражению, действие источников поля, находящихся вне V, эквивалентно некоторому распределению поверхностных электрических и магнитных токов на S.

Равенство (17.110) часто используют для расчета апертурных антенн, задавая в том или ином виде распределение эквивалентных поверхностных токов на раскрыве. При этом обычно руководствуются интуитивными соображениями, как это принято в методе физической оптики. Заметим, что в рамках такого подхода не удается радикально снизить сложность решения поставленной задачи, поскольку так или иначе приходится находить векторы вспомогательного электромагнитного поля.

ЗАДАЧИ

17.1. Элементарный электрический излучатель расположен на высоте d над бесконечной идеально проводящей плоскостью. Ось излучателя ориентирована по нормали к плоскости. Найдите диаграмму направленности данной излучающей системы, т. е. функцию, описывающую зависимость напряженности электрического поля от полярного угла θ на расстояниях, достаточно больших по сравнению с длиной волны.

Указание: воспользуйтесь граничным условием на поверхности идеального проводника.

17.2. Каково должно быть расстояние d (см. условие предыдущей задачи) для того, чтобы под углом $\theta=60°$ излучение полностью отсутствовало?

17.3. Покажите, что при малой высоте расположения излучателя над идеально проводящей плоскостью, т. е. при $\beta d \ll 1$, максимум излучения будет иметь место под углом $\theta=45°$.

17.4. Найдите диаграмму направленности излучателя, представляющего собой отрезок прямолинейного проводника длиной $2l$, в котором существует переменный гармонический ток с известной частотой ω. Амплитуда и фаза тока одинаковы во всех точках проводника. Вычислите ширину основного лепестка диаграммы направленности при следующих параметрах: $f=250$ МГц, $l=0.8$ м. Границами основного лепестка считайте те точки, в которых функция, описывающая диаграмму направленности, первый раз обращается в нуль.

17.5. Решите задачу 17.4 при условии, что вдоль излучающего проводника распространяется бегущая волна тока вида $I(z)=I_0 \exp(-jkz)$ с известным значением модуля волнового вектора k. Под каким углом к оси будет наблюдаться максимум излучения, если волна тока распространяется вдоль проводника с фазовой скоростью $v_ф=1.7c$?

17.6. Решите задачу о дифракции Фраунгофера при падении плоской линейно поляризованной электромагнитной волны на бесконечный идеально проводящий экран с круглым отверстием радиуса a. Волна падает на экран по направлению нормали, длина волны λ_0 считается известной.

Указание: введите цилиндрическую систему координат с осью z, проходящей через центр отверстия вдоль нормали к экрану.

17.7. Апертура антенны СВЧ-диапазона имеет форму круга диаметром 1.2 м. Источник с частотой 9 ГГц создает на апертуре эквифазное распределение электромагнитного поля. Оцените расстояние, вплоть до которого ближнее поле антенны имеет вид «лучевой трубки».

Глава восемнадцатая

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Материал предшествующих глав убеждает в том, что получить точное решение электродинамической задачи возможно лишь в том случае, когда исходная физическая проблема радикально упрощена за счет целого ряда идеализаций. Это касается прежде всего выбора предельно простых геометрических форм тех пространственных областей, в которых существует электромагнитное поле. Приходится также пренебрегать неоднородностями материальных сред, не учитывать конечной проводимости стенок и т. д.

На сегодняшний день единственный способ получить интересные в прикладном отношении данные об электродинамических системах заключается в использовании численных методов анализа, реализуемых на быстродействующих компьютерах. В последние годы вычислительные методы решения электродинамических задач прочно заняли одно из ведущих мест в арсенале разработчиков СВЧ-устройств. Есть все основания ожидать, что тенденция расширения сферы их применения сохранится и в обозримом будущем.

Вообще говоря, численные методы можно использовать для решения любой задачи, если мы располагаем соответствующей математической моделью. Так, компьютер может потребоваться и для расчета полей в волноводе со сложной формой сечения, и для решения дисперсионных уравнений замедляющих структур, и для поиска лучевых траекторий в пространственно неоднородной среде, например в ионосфере Земли. Ясно, что численные подходы к столь разнородным проблемам будут совершенно различными. Из-за ограниченного объема книги сосредоточим внимание лишь на тех специфических для электродинамики задачах, которые связаны с численным решением уравнений Максвелла в замкнутых системах с идеально проводящими стенками. Более того, чтобы сделать изложение конкретным и содержательным, ограничимся анализом лишь одной системы — прямоугольного металлического волновода с неоднородным диэлектрическим заполнением. Конечно, при этом не удастся представить развернутую картину современных методов вычислительной электродинамики. Однако, совершив этот предварительный экскурс, заинтересованный читатель сможет работать самостоятельно, используя многочисленные литературные источники, например [20, 21].

Последний параграф главы, стоящий несколько особняком, посвящен использованию интегральных уравнений для численного решения электродинамических задач. Так как в стандартном вузовском курсе математики интегральным уравнениям уделено очень скромное место, здесь приводятся некоторые математические сведения для первоначального ознакомления с предметом.

18.1. Прямоугольный волновод с неоднородным заполнением

Основным объектом, рассматриваемым в данной главе, является прямоугольный металлический волновод (рис. 18.1), который отличается от аналогичной линии передачи, изучавшейся в гл. 8, тем, что относительная диэлектрическая проницаемость заполняющей среды $\varepsilon(x)$ является произвольной функцией поперечной координаты x. Если сторонние источники внутри волновода отсутствуют, то электромагнитный процесс внутри волновода должен подчиняться однородной системе уравнений Максвелла

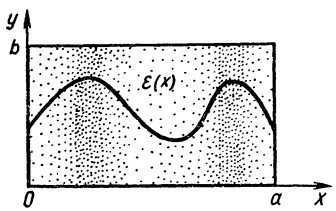


Рис. 18.1. Поперечное сечение прямоугольного волновода с неоднородным диэлектрическим заполнением

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} &= j\omega\varepsilon_0\varepsilon(x)\dot{\mathbf{E}}, \\ \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} &= -j\omega\mu_0\dot{\mathbf{H}}, \\ \operatorname{div}\dot{\mathbf{E}} &= 0, \\ \operatorname{div}\dot{\mathbf{H}} &= 0. \end{aligned} \qquad (18.1)$$

Среди всевозможных мод, которые могут существовать внутри такого волновода, будем интересоваться типом волны, напоминающим в основных чертах моду H_{10} в прямоугольном волноводе с однородным заполнением. Будем считать, что электрический вектор поля имеет лишь проекцию на ось y с комплексной амплитудой $\dot{E}_y(x, z)$, которая к тому же не зависит от y. Таким образом, для интересующего нас поля

$$\dot{E}_y(x, z) = E_y(x)\exp(-jhz), \qquad (18.2)$$

причем как продольное волновое число h, так и функция $E_y(x)$ заранее не известны.

Чтобы получить дифференциальное уравнение относительно $E_y(x)$, вычислим ротор от обеих частей второй строки из (18.1), а затем воспользуемся первой строкой:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} = j\omega\mu_0\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} = \omega^2\varepsilon_0\mu_0\varepsilon(x)\dot{\mathbf{E}} = \beta_0^2\varepsilon(x)\dot{\mathbf{E}},$$

где β_0 — коэффициент фазы плоской волны в вакууме. Отсюда, приняв во внимание третью строку из (18.1), получаем дифференциальное уравнение

$$\nabla^2\dot{\mathbf{E}} + \beta_0^2\varepsilon(x)\dot{\mathbf{E}} = 0, \qquad (18.3)$$

которое в интересующем нас случае приобретает вид

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial z^2}+\beta_0^2 \varepsilon(x) \dot{E}_y=0. \tag{18.4}$$

Подставив сюда функцию $\dot{E}_y$ в форме (18.2), приходим к дифференциальному уравнению относительно действительной функции $E_y(x)$

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_y}{\mathrm{d}x^2}+[\beta_0^2 \varepsilon(x)-h^2] E_y=0, \tag{18.5}$$

которое следует дополнить очевидными граничными условиями

$$E_y(0)=E_y(a)=0. \tag{18.6}$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что полученная здесь краевая задача (в математике ее часто называют задачей Штурма — Лиувилля) имеет нетривиальные, т. е. не равные нулю тождественно, решения лишь в том случае, когда параметр h принадлежит счетному множеству $\{h_1, h_2, \ldots\}$ так называемых собственных значений. Как правило, каждому такому значению отвечает одно решение $E_y(x)$, называемое собственной функцией данной краевой задачи. Если же таких функций несколько, то имеет место вырождение.

С понятиями собственных значений и собственных функций мы познакомились ранее в гл. 8 и 9, изучая колебания в прямоугольных и круглых волноводах. При этом удалось довести анализ до конца, поскольку известны аналитические решения соответствующих дифференциальных уравнений. Применительно к краевой задаче (18.5) — (18.6) сделать это в общем случае не представляется возможным, так как не существует метода получения общего решения уравнения вида (18.5) при любой функции $\varepsilon(x)$. Именно поэтому здесь на первый план выступают приближенные численные подходы.

Заметим попутно, что уравнение (18.5) по характеру полностью совпадает с одномерным уравнением Шрёдингера, которое в квантовой механике описывает движение электрона в потенциальной яме с заранее заданным распределением потенциала, роль которого играет функция $\varepsilon(x)$.

18.2. Метод сеток

Среди разнообразных численных способов решения дифференциальных уравнений одно из ведущих мест занимают так называемые прямые методы, в основе которых лежит идея сведения дифференциального уравнения к системе алгебраических уравнений.

Сюда относятся, в частности, широко распространенный и хорошо изученный *метод сеток*. Сущность этого приема заключается в дискретизации дифференциального уравнения, т. е. в замене всех искомых и заданных гладких функций счетными совокупностями дискретных отсчетов, взятых с некоторым достаточно малым шагом, а также в переходе от дифференциальных операторов к их разностным аналогам.

Изучим метод сеток на примере краевой задачи (18.5) — (18.6). Для простоты записи будем обозначать неизвестную функцию $E_y(x)$ символом $u(x)$. Разобьем отрезок $[0, a]$ на N равных частей; длина каждой такой части Δ служит *шагом* такой одномерной сетки. Концы интервалов дискретизации $x_0=0$, $x_1=\Delta$, $x_2=2\Delta$, ..., $x_N=N\Delta=a$ образуют множество *узлов сетки*, в которых определяются значения искомой функции u_0, u_1, ..., u_N и заданной относительной диэлектрической проницаемости ε_0, ε_1, ..., ε_N.

Воспользуемся разностным аналогом первой производной

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{u(x+\Delta)-u(x)}{\Delta} = \frac{u_{n+1}-u_n}{\Delta},$$

где n — текущий номер узла сетки, из которого следует приближенное разностное выражение оператора второй производной

$$\frac{d^2u}{dx^2} \approx \frac{1}{\Delta}\left[\frac{u(x+\Delta)-u(x)}{\Delta} - \frac{u(x)-u(x-\Delta)}{\Delta}\right] =$$

$$= \frac{u(x+\Delta)+u(x-\Delta)-2u(x)}{\Delta^2} = \frac{u_{n+1}+u_{n-1}-2u_n}{\Delta^2}.$$

Принимая во внимание, что в силу краевых условий (18.6) $u_0=u_N=0$, преобразуем дифференциальное уравнение (18.5) в систему из $N-1$ однородных алгебраических уравнений относительно значений искомой функции в узлах сетки:

$$\begin{aligned}
&\frac{u_2-2u_1}{\Delta^2} + (\beta_0^2\varepsilon_1 - h^2)u_1 = 0,\\
&\frac{u_3+u_1-2u_2}{\Delta^2} + (\beta_0^2\varepsilon_2 - h^2)u_2 = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{u_{N-1}-2u_{N-1}}{\Delta^2} + (\beta_0^2\varepsilon_{N-1} - h^2)u_{N-1} = 0.
\end{aligned} \qquad (18.7)$$

Данная система уравнений будет совместной в том и только в том случае, если ее определитель равен нулю. Отсюда приходим к алгебраическому уравнению относительно неизвестной величины h, корни которого (h_1, h_2, ...) служат приближенными собственными

значениями для различных мод, которые могут существовать в прямоугольном волноводе с неоднородным диэлектрическим заполнением. Понятно, что с уменьшением шага сетки Δ число анализируемых мод увеличивается.

Как пример, иллюстрирующий описанный подход, рассмотрим краевую задачу, соответствующую прямоугольному волноводу с однородным заполнением:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+g^2u=0, \qquad u(0)=u(a)=0. \tag{18.8}$$

Разобьем отрезок $[0, a]$ на четыре равные части, положив $\Delta=a/4$. Тогда в соответствии с (18.7) будем иметь систему линейных уравнений

$$\frac{u_2-2u_1}{\Delta^2}+g^2u_1=0,$$

$$\frac{u_3+u_1-2u_2}{\Delta^2}+g^2u_2=0,$$

$$\frac{u_2-2u_3}{\Delta^2}+g^2u_3=0,$$

или

$$\begin{aligned}&(\Delta^2g^2-2)\,u_1+u_2=0,\\ &u_1+(\Delta^2g^2-2)\,u_2+u_3=0.\\ &u_2+(\Delta^2g^2-2)\,u_3=0.\end{aligned} \tag{18.9}$$

Условие разрешимости системы имеет вид

$$D=(\Delta^2g^2-2)\begin{vmatrix}\Delta^2g^2-2 & 1\\ 1 & \Delta^2g^2-2\end{vmatrix}-(\Delta^2g^2-2)=0. \tag{18.10}$$

Один из положительных корней данного уравнения определяется равенством $\Delta^2g^2-2=0$, откуда $g=\sqrt{2}/\Delta=4\sqrt{2}/a\approx 5.66/a$. Это число служит грубым приближением к точному собственному значению $g=\pi/a$, которое отвечает моде H_{01} (см. гл. 8). Другой положительный корень должен удовлетворять уравнению $(\Delta^2g^2-2)^2-2=0$, откуда

$$g=\sqrt{2+\sqrt{2}}\,/\,\Delta=4\sqrt{2+\sqrt{2}}\,/\,a\approx 7.39/a.$$

Соответствующее точное значение $g=2\pi/a$ отвечает моде H_{20}.

Можно заметить, что погрешности определения собственных значений довольно значительны. Это связано с очень грубым разбиением отрезка $[0, a]$, на котором ищутся функции. Если перейти к существенно более мелкому шагу Δ, то расчеты станут гораздо точнее, однако для реализации метода обязательно потребуется компьютер.

Методу сеток свойственна высокая универсальность. Так, с его помощью можно решить двумерное уравнение Лапласа $\nabla^2 u = 0$ при однородных краевых условиях, согласно которым на контуре Γ, ограничивающем замкнутую область Ω, искомая функция u принимает известные значения. Вычислительная схема должна быть организована следующим образом. На плоскости XOY изображается достаточно мелкая квадратная сетка с шагом Δ (рис. 18.2). Из отдельных сторон квадратов строится контур Γ_Δ, аппроксимирующий исходный гладкий контур Γ. Дискретная функция, приближенно заменяющая решение, определяется на счетном множестве Ω_Δ узлов сетки, которые лежат внутри Ω.

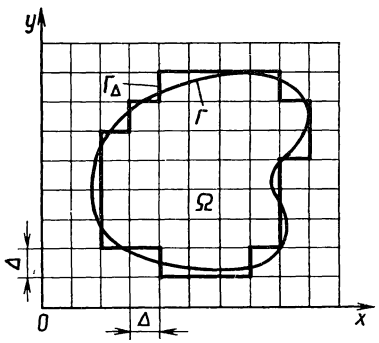


Рис. 18.2. Сеточная аппроксимация двумерной области

Выразим вторые производные, входящие в оператор Лапласа, через конечные разности:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+\Delta, y) + u(x-\Delta, y) - 2u(x, y)}{\Delta^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u(x, y+\Delta) + u(x, y-\Delta) - 2u(x, y)}{\Delta^2}. \qquad (18.11)$$

Тогда в окрестности любой внутренней точки P уравнение Лапласа сведется к алгебраическому равенству

$$u(x+\Delta, y) + u(x, y+\Delta) + u(x-\Delta, y) + u(x, y-\Delta) - 4u(x, y) = 0. \qquad (18.12)$$

Если все точки, соседние с P, являются внутренними, то уравнение (18.12) будет однородным. Если же некоторые из этих точек принадлежат граничному множеству Γ_Δ, то в (18.12) появится заданная правая часть. Таким образом, метод сеток сводит решение уравнения в частных производных к гораздо более простой (по крайней мере в принципиальном отношении) задаче — отысканию

многомерного вектора, который служит корнем большой системы линейных алгебраических уравнений.

Несмотря на очевидные достоинства, метод сеток имеет и недостатки, главный из которых — огромный объем вычислений, существенно сказывающийся при решении сложных электродинамических задач, особенно в трехмерной постановке.

18.3. Метод Бубнова — Галеркина

В 1913—1915 гг. русские ученые И. Г. Бубнов и Б. Г. Галеркин, специалисты в области теории упругости, предложили оригинальный прямой способ решения задач математической физики, названный в последующем их именами. Метод Бубнова — Галеркина в наши дни занимает одно из центральных мест в вычислительной электродинамике.

Сущность метода. Предположим, что имеется краевая задача, представленная в общей операторной форме

$$Lu - f(P) = 0. \tag{18.13}$$

Здесь $u(P)$ — искомая функция пространственных координат, $f(P)$ — заданная функция точки P, определяющая наличие внешних источников, L — линейный дифференциальный оператор. Множество точек P принадлежит некоторой замкнутой области Ω, на границе Γ которой решение $u(P)$ удовлетворяет заданным краевым условиям.

Предположим, что в области Ω построена некоторая, вообще говоря бесконечная, система функций $\{\varphi_i\} = \varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_n(P), \ldots$, каждая из которых на Γ удовлетворяет тем же условиям, что и искомое решение $u(P)$, например обращается на Γ в нуль. Функции из системы $\{\varphi_i\}$ полагаются линейно независимыми, т. е. равенство

$$\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \ldots + \alpha_n\varphi_n + \ldots = 0$$

возможно лишь в том случае, когда все числовые коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ одновременно равны нулю. Принято говорить, что $\{\varphi_i\}$ представляет собой систему *координатных функций*.

Будем искать приближенное решение краевой задачи (18.13) в виде конечного отрезка ряда из функций, принадлежащих $\{\varphi_i\}$, с некоторыми не известными заранее постоянными коэффициентами

$$u_N = \sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k. \tag{18.14}$$

Если бы при этом было получено точное решение задачи, обращающее в нуль левую часть равенства (18.13), то, очевидно, для любой координатной функции выполнялось бы соотношение ортогональности вида

$$((Lu-f),\ \varphi_i)=\int_{\Omega}(Lu-f)\,\varphi_i(P)\,d\Omega=0.$$

Однако функция u_N из (18.14) в общем случае не является точным решением, поэтому при ее подстановке в (18.13) возникает так называемая *невязка*

$$\mathfrak{N}(P)=L\left(\sum_{k=1}^{N}a_k\varphi_k\right)-f.$$

В основе метода Бубнова — Галеркина лежит следующее положение: множество коэффициентов $\{a_i\}$, входящих в формулу (18.14), следует выбирать так, чтобы невязка оказалась ортогональной ко всем координатным функциям φ_1, φ_2, ..., φ_N, т. е. скалярное произведение $(v,\ \varphi_m)=0$ при $m=1,\ 2,\ ...,\ N$. Отсюда вытекает система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_N$:

$$\sum_{k=1}^{N}a_k(L\varphi_k,\ \varphi_m)=(f,\ \varphi_m),$$

$$m=1,\ 2,...,\ N. \qquad (18.15)$$

При выводе этой формулы использовано свойство линейности оператора L, в соответствии с которым действие оператора на сумму функций равно сумме действий на отдельные слагаемые.

На интуитивном уровне ясно, что при наилучшем выборе коэффициентов из (18.14) невязка должна быть предельно «не похожей» на все использованные координатные функции. Именно так можно трактовать смысл понятия ортогональности двух функций [2].

Метод Бубнова — Галеркина в равной мере применим и к краевой задаче на собственные значения

$$Lu-\lambda^2u=0. \qquad (18.16)$$

Повторяя предыдущие рассуждения, приходим к системе линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{N}a_k[(L\varphi_k,\ \varphi_m)-\lambda^2(\varphi_k,\ \varphi_m)]=0,$$

$$m=1,\ 2,...,\ N, \qquad (18.17)$$

которая будет разрешимой относительно коэффициентов a_1, a_2, ..., a_N, если определитель, составленный из выражений в квадратных скобках, равен нулю. Отсюда получаем алгебраическое уравнение для нахождения собственных значений λ_1, λ_2, ..., λ_N, рассматриваемой краевой задачи.

Адекватность метода Бубнова — Галеркина была с успехом проверена на многих частных задачах из разных областей физики и техники. Тем не менее математически доказать сходимость сумм вида (18.14) к истинному решению довольно сложно [23]. Поэтому данный вопрос здесь не рассматривается.

Простейший пример. Чтобы получить представление о высокой эффективности метода Бубнова — Галеркина, обратимся вновь к краевой задаче (18.8), которая позволяет находить допустимые пространственные распределения электрического вектора в прямоугольном металлическом волноводе с однородным заполнением. Согласно принятым обозначениям, здесь $L=-\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$, $\lambda=g$. Поставим цель получить приближенное собственное значение для основной (низшей) моды в такой системе. Ограничимся случаем, когда координатная система состоит из единственной функции $\varphi_1(x)=x(x-a)=x^2-ax$, удовлетворяющей краевым условиям при $x=0$ и $x=a$. Важно подчеркнуть, что такая квадратичная функция заведомо «похожа» на истинную собственную функцию вида $\sin(\pi x/a)$, получаемую в результате строгого решения задачи.

Легко проверить, что при таком выборе координатной функции невязка $v(x)=2+g^2(x^2-ax)$. Требование ортогональности $v(x)$ и $\varphi_1(x)$ означает, что

$$\int_0^a [2+g^2(x^2-ax)](x^2-ax)\,\mathrm{d}x=0,$$

откуда

$$g^2=-\frac{2\int_0^a (x^2-ax)\,\mathrm{d}x}{\int_0^a (x^4-2ax^3+a^2x^2)\,\mathrm{d}x}=\frac{2}{a^2}\,\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{10}{a^2}.$$

Значит, наименьшее собственное значение в данном случае составит $g\approx 3.162/a$, что лишь на 0.658% превышает истинную величину $g=\pi/a$. Учет координатных функций более высокого порядка ведет к дальнейшему улучшению точности расчета.

Волновод с линейным законом изменения диэлектрической проницаемости. В качестве еще одного примера использования метода Бубнова — Галеркина рассмотрим задачу о прямоугольном металлическом волноводе, заполненном неоднородной диэлектрической

средой, у которой $\varepsilon(x)=q+wx$, т. е. относительная диэлектрическая проницаемость линейно изменяется вдоль координаты x, начиная от значения q при $x=0$ и кончая $q+wa$ при $x=a$. Проблема сводится к решению краевой задачи [см. формулу (18.5)]

$$\frac{d^2u}{dx^2}+[\beta_0^2(q+wx)-h^2]u=0, \qquad u(0)=u(a)=0. \tag{18.18}$$

Зададимся целью найти дисперсионную характеристику такого волновода с неоднородным заполнением, т. е. свяжем собственные значения h (продольные волновые числа) с коэффициентом фазы β_0 плоской волны в свободном пространстве, имеющей ту же частоту.

Удобно воспользоваться системой координатных функций

$$\varphi_1=\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right), \quad \varphi_2=\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right),\ldots,$$

которая соответствует последовательности мод H-типа в однородно заполненном волноводе с теми же размерами. Первое приближение к искомому решению будет состоять лишь из единственной координатной функции: $u_1(x)=\sin(\pi x/a)$. Подставив это выражение в дифференциальное уравнение в (18.18), получим невязку

$$v(x)=\left[\beta_0^2(q+wx)-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2-h^2\right]\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right),$$

которая в соответствии с принципом метода Бубнова — Галеркина должна быть ортогональной к координатной функции φ_1:

$$\int_0^a\left[\beta_0^2(q+wx)-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2-h^2\right]\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx=0.$$

Отсюда находим выражение для квадрата продольного волнового числа основной моды в первом приближении:

$$h^2=\frac{\int_0^a\left[\beta_0^2(q+wx)-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\right]\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx}{\int_0^a\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx}= \tag{18.19}$$

$$=\left[\beta_0^2q-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\right]+\beta_0^2w\,\frac{\int_0^a x\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx}{\int_0^a\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx}=\beta_0^2\left(q+\frac{wa}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2.$$

При вычислениях был использован табличный интеграл

$$\int x \sin^2 x \, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x.$$

Формула (18.19) допускает простую и ясную интерпретацию. Действительно, если бы волновод был заполнен однородным диэлектриком с относительной проницаемостью $\varepsilon = q$, то основная мода H_{10} имела бы квадрат продольного волнового числа $h^2 = \beta_0^2 q - (\pi/a)^2$. Неоднородный диэлектрик в соответствии с выражением (18.19) эквивалентен некоторой *однородной* диэлектрической среде с эффективным значением диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{эф} = q + (wa/2)$, которая имеет место в центре широкой стенки волновода.

Отметим в заключение, что успех применения метода Бубнова — Галеркина к сложным волноводным задачам зависит не только от быстродействия и объема памяти компьютера, но и от правильности выбора системы координатных функций, которые должны по возможности полно учитывать априорные сведения об анализируемых электромагнитных полях.

18.4. Метод интегральных уравнений

Все изучавшиеся нами до сих пор задачи прикладной электродинамики опирались тем или иным образом на дифференциальные уравнения, прежде всего на уравнения Максвелла в дифференциальной форме. Будучи безупречными в логическом отношении, такие уравнения могут оказаться весьма сложными, как только дело доходит до реализации численного алгоритма. Дело в том, что дифференциальное уравнение устанавливает локальную связь между значениями искомой функции в бесконечно близких точках пространства (или времени). Решая такое уравнение численно, мы шаг за шагом движемся в некоторой области и получаем тот или иной результат, который называем приближенным решением. При этом возникают два существенных обстоятельства. Во-первых, решение должно удовлетворять некоторым дополнительным условиям в граничных точках. Во-вторых, при пошаговой реализации алгоритма неизбежно накапливаются ошибки, например за счет ограниченной разрядности чисел, обрабатываемых компьютером. В результате найденное «решение» может недопустимо отклониться от истинного результата, причем такая интуитивно оправданная мера, как сокращение шага дискретизации, не только не исправляет, а, наоборот, ухудшает ситуацию.

Радикальным способом, дающим возможность строить эффективные численные алгоритмы для электродинамических задач, ав-

томатически учитывая граничные условия, является переход от дифференциальных к интегральным уравнениям. В настоящее время метод интегральных уравнений стал одним из ведущих приемов численного исследования инженерных и научных проблем технической электродинамики. В рамках нашего изложения мы сосредоточим основное внимание на принципиальных вопросах и продемонстрируем вывод интегральных уравнений на конкретных примерах. Практическая реализация алгоритмов численного решения интегральных уравнений относится к области вычислительной математики и подробно описана в литературе [20, 40].

Классификация интегральных уравнений. Интегральными принято называть такие уравнения, в которых функция, являющаяся искомым решением, входит под знак интеграла. Если это решение фигурирует в первой степени, то соответствующее интегральное уравнение называют *линейным*. Многие практически значимые задачи сводятся именно к линейным интегральным уравнениям.

Для наглядности ограничимся случаем, когда решение $\varphi(x)$ является функцией одной переменной x, размерность и физический смысл которой могут быть любыми.

Интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода называют уравнение вида

$$\int_a^b K(x, y)\varphi(y)\,dy = f(x), \tag{18.20}$$

где y — формальная переменная интегрирования; $f(x)$ — известная функция; $K(x, y)$ — так называемое *ядро* уравнения.

Существуют также интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)\,dy = f(x), \tag{18.21}$$

в которые входит числовой параметр λ.

Если в (18.21) положить $f(x) = 0$, то получаем *однородное* интегральное уравнение, у которого заведомо есть тривиальное решение $\varphi(x) = 0$. Тем не менее возможны исключительные, так называемые *собственные значения* параметра λ, при которых данное уравнение допускает нетривиальные решения, называемые *собственными функциями* интегрального уравнения Фредгольма.

Особый класс представляют интегральные уравнения Вольтерра, у которых в отличие от уравнений Фредгольма верхний предел интегрирования оказывается переменной величиной. Соответствующие формы уравнений Вольтерра 1-го и 2-го рода получаются из равенств (18.20) и (18.21) заменой постоянной величины b на переменную x.

Сведение интегрального уравнения к алгебраическому. Возьмем для определенности уравнение (18.21) и приближенно заменим входящий в него интеграл конечной суммой, как это принято при численном интегрировании:

$$\varphi(x)-\lambda\sum_{k=1}^{n}\alpha_k K(x,\ x_k)\varphi(x_k)=f(x). \tag{18.22}$$

Здесь x_k — совокупность заранее отмеченных внутренних точек на отрезке $[a,\ b]$; α_k — постоянные числа, выбор которых диктуется примененной квадратурной формулой (прямоугольников, трапеций и т. п.). Если теперь в (18.22) последовательно подставлять $x=x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, то получаем следующую систему из n линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\varphi(x_i)$:

$$\varphi(x_i)-\lambda\sum_{k=1}^{n}\alpha_k K(x_i,\ x_k)\varphi(x_k)=f(x_k), \tag{18.23}$$

где $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Решив эту систему стандартным методом, мы получаем некоторую совокупность точек, которые могут служить узлами аппроксимации для получения гладкого решения на отрезке $[a,\ b]$.

Если же исходное интегральное уравнение однородное и правые части в системе (18.23) равны нулю, то нетривиальное решение возможно лишь при нулевом определителе системы. Отсюда естественным образом приходим к алгебраическому уравнению n-й степени относительно собственных значений.

Уравнение Поклингтона. Как пример использования метода интегральных уравнений рассмотрим классическую задачу о распределении тока вдоль тонкой проволочной антенны, возбуждаемой заданным внешним источником. Будем считать, что такая антенна представляет собой идеально проводящий круговой цилиндр радиуса a и длины l, причем $a\ll l$ и $a\ll\lambda$, в то время как отношение l/λ может быть любым. Здесь λ — длина волны возбуждающего гармонического источника. Пусть центральная точка антенны размещена в начале прямоугольной декартовой системы координат $(x,\ y,\ z)$, а ось антенны параллельна оси z (см. рис. 13.3).

Предположим, что возбуждающий генератор включен в разрыв проводника, как это условно показано на рис. 13.1. Если δ — толщина зазора между двумя частями антенны, а $\dot{U}$ — комплексная амплитуда напряжения источника, то очевидно, что z-я проекция электрического вектора в области зазора $\dot{E}_z=\dot{U}/\delta$, в то время как на идеально проводящей поверхности антенны эта проекция будет равна нулю.

Сделаем одно упрощающее предположение: будем мысленно

считать, что ток в антенне существует не на поверхности цилиндра радиуса a, а лишь строго на оси z в пределах отрезка $[-l/2, l/2]$, т. е. представляет собой отрезок бесконечно тонкой нити. Такой приближенный подход вполне оправдан, так как диаметр антенны существенно меньше длины волны. В соответствии с формулой (13.28) упомянутый ток с комплексной амплитудой $\dot{I}(z)$ будет создавать в вакууме электромагнитное поле, электрический векторный потенциал которого имеет единственную отличную от нуля проекцию

$$\dot{A}_{\text{э}z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \dot{I}(z_0) \frac{e^{-j\beta|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} dz_0. \qquad (18.24)$$

Отсюда с помощью первого уравнения из системы (13.12) можно определить распределение в пространстве комплексной амплитуды электрического вектора:

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0\mu_0} (\text{grad div } \dot{\mathbf{A}}_{\text{э}} + \beta^2 \dot{\mathbf{A}}_{\text{э}}). \qquad (18.25)$$

Если теперь с помощью этой формулы вычислить напряженность электрического поля на цилиндрической поверхности антенны, то она должна оказаться в точности такой, как это диктуется граничными условиями, речь о которых шла выше. Таким образом, задача становится самосогласованной — возникающий ток должен распределяться по антенне так, чтобы граничные условия на ее поверхности удовлетворялись автоматически.

Примем во внимание, что расстояние между бесконечно малым элементом тока, который находится в точке с координатой z_0, и произвольной точкой наблюдения на поверхности цилиндра, у которой координата равна z, вычисляется так:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| = R = \sqrt{a^2 + (z-z_0)^2}. \qquad (18.26)$$

Далее, так как электрический векторный потенциал имеет лишь единственную отличную от нуля составляющую, ориентированную вдоль оси z, то для вычисления z-й проекции электрического вектора на цилиндрической поверхности антенны формулу (18.25) следует представить так:

$$\dot{E}_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0\mu_0} \left(\frac{d}{dz^2} + \beta^2\right) \dot{A}_{\text{э}z}. \qquad (18.27)$$

Подставляя сюда выражение (18.24), находим, что

$$j4\pi\omega\varepsilon_0 \dot{E}_z = \int_{-l/2}^{l/2} \dot{I}(z_0) \left(\frac{d^2}{dz^2} + \beta^2\right) \frac{e^{-j\beta R}}{R} dz_0, \qquad (18.28)$$

где дифференцирование под знаком интеграла проводится по координате z, отвечающей точке наблюдения на поверхности антенны.

Получено интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода относительно неизвестного распределения тока вдоль антенны. Впервые оно было выведено еще в 1897 г. английским физиком Поклингтоном и носит с тех пор его имя.

Решить уравнение Поклингтона аналитически не удается, так что приходится прибегнуть к численному анализу. Для этого отрезок $[-l/2, l/2]$ мысленно разбивают на N равных частей и считают, что в пределах каждой части соответствующий ток из набора I_1, I_2, ..., I_N неизменен. Далее по описанной выше методике получают и решают систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных токов.

Найдя распределение тока вдоль антенны, удается проанализировать такие важные технические характеристики, как диаграмма направленности антенны и ее комплексное входное сопротивление.

Уравнение (18.28) без труда обобщается на случай, когда происходит не возбуждение проволочной антенны сосредоточенным источником, а рассеяние падающей плоской волны прямолинейным отрезком проводника. Для этого достаточно потребовать, чтобы функция $\dot{E}_z$ из левой части уравнения в сумме с соответствующей проекцией падающего поля обращалась в нуль.

В 30-х и 40-х годах интегральное уравнение Поклингтона было подробно исследовано многими учеными, среди которых можно особо назвать Э. Халлена (Швеция) и Р. Кинга (США). Некоторые результаты расчетов распределения тока вдоль тонких антенн содержатся в [15].

Интегральное уравнение для задачи рассеяния. Попытаемся применить метод интегральных уравнений к строгому решению задачи о дифракции гармонической электромагнитной волны на хорошо проводящем теле (рассеивателе) произвольной формы. С такой проблемой приходится часто сталкиваться при расчете рассеяния радиоволн радиолокационными целями.

Как известно, электромагнитная волна, падая на проводящее тело, создает на его поверхности электрический ток. Этот ток, в свою очередь, выступает источником вторичного (рассеянного) поля, которое складывается в пространстве с первичным полем. Распределение токов на поверхности рассеивателя заранее не известно, однако можно утверждать, что в любом случае касательная составляющая результирующего электрического вектора, равного сумме электрических векторов первичного и вторичного полей, должна быть равна нулю в каждой точке поверхности. Именно это соображение служит основой для вывода интегрального

уравнения относительно поверхностной плотности тока.

Ранее в гл. 13 было показано, что электрический векторный потенциал поля в вакууме, возбуждаемого системой сторонних электрических токов с плотностью $\dot{\mathbf{J}}_{ст}$, подчиняется неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2\dot{\mathbf{A}}_э + \beta^2\dot{\mathbf{A}}_э = -\mu_0\dot{\mathbf{J}}_{ст}. \qquad (18.29)$$

При этом следует заметить, что ток в правой части этого уравнения совсем не обязан быть именно сторонним током, а может наводиться в проводящем теле самим электромагнитным процессом, т. е. быть «собственным» током.

Будем считать, что имеется падающее (первичное) поле, описываемое векторными функциями $\dot{\mathbf{E}}_{пад}$, $\dot{\mathbf{H}}_{пад}$, и, кроме того, рассеянное (вторичное) поле с векторами $\dot{\mathbf{E}}_{рас}$, $\dot{\mathbf{H}}_{рас}$.

Мы знаем, что частное решение векторного уравнения (18.29) находится простым интегрированием, если предварительно определена функция Грина $\dot{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ соответствующего скалярного уравнения. Решение вида (13.28) содержит интеграл по объему V, занятому токами. Если рассеивающее тело является идеальным проводником, то вместо объемной плотности токов следует оперировать плотностью поверхностного электрического тока $\dot{\mathbf{J}}_{пов.э}$, так что электрический векторный потенциал рассеянного поля в любой точке пространства с радиусом-вектором $\mathbf{r}$ вычисляется по формуле

$$\dot{\mathbf{A}}_{рас.э}(\mathbf{r}) = \int_S \dot{\mathbf{J}}_{пов.э}(\mathbf{r}_0)\,\dot{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\,dS, \qquad (18.30)$$

где, как и ранее, $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор точки на поверхности рассеивателя, в которой сосредоточен элемент наведенного тока.

Данный потенциал нужен нам не сам по себе, а как средство выразить через него магнитный вектор рассеянного поля:

$$\dot{\mathbf{H}}_{рас} = \frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{A}}_{рас.э} = \frac{1}{\mu_0}\int_S \operatorname{rot}\left(\dot{\mathbf{J}}_{пов.э}(\mathbf{r}_0)\,\dot{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\right) dS. \qquad (18.31)$$

Теперь воспользуемся известной формулой векторного анализа, приведенной в Приложении Б, согласно которой ротор от произведения векторной функции на скалярную вычисляют так:

$$\operatorname{rot}\left(\dot{\mathbf{J}}_{пов.э}(\mathbf{r}_0)\,\dot{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\right) = \dot{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\operatorname{rot}\dot{\mathbf{A}}_{пов.э}(\mathbf{r}_0) -$$
$$-\left[\dot{\mathbf{J}}_{пов.э}(\mathbf{r}_0)\operatorname{grad}\dot{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\right]. \qquad (18.32)$$

Заметим при этом, что операции rot и grad, входящие в (18.32), должны находиться путем дифференцирования соответствующих

аргументов по координатам точки наблюдения. В то же самое время функция $\dot{\mathbf{J}}_{\text{пов. э}}$ зависит лишь от положения точки с радиусом-вектором $\mathbf{r}_0$, в которой располагается вторичный источник поля. По этой причине имеем $\operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_{\text{пов. э}}(\mathbf{r}_0) = 0$, и поэтому в соответствии с (18.31)

$$\dot{\mathbf{H}}_{\text{рас}} = -\frac{1}{\mu_0} \int_S [\dot{\mathbf{J}}_{\text{пов.э}}(\mathbf{r}_0) \operatorname{grad} \dot{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] \, dS. \tag{18.33}$$

Теперь прибавим к обеим частям полученного равенства векторное поле $\dot{\mathbf{H}}_{\text{пад}}$, которое считается заданным. В левой части при этом будет фигурировать суммарное магнитное поле $\dot{\mathbf{H}}_{\Sigma} = \dot{\mathbf{H}}_{\text{пад}} + \dot{\mathbf{H}}_{\text{рас}}$, которое на идеально проводящей поверхности рассеивателя однозначно связано с плотностью поверхностного электрического тока формулой (6.3):

$$\dot{\mathbf{J}}_{\text{пов.э}} = [\mathbf{i}_n \dot{\mathbf{H}}_{\Sigma}],$$

где $\mathbf{i}_n$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности. Таким образом, выполнив векторное перемножение обеих частей преобразованного равенства на $\mathbf{i}_n$, получаем окончательно

$$\dot{\mathbf{J}}_{\text{пов.э}} = [\mathbf{i}_n \dot{\mathbf{H}}_{\text{рас}}] - \frac{1}{\mu_0} \int_S \mathbf{i}_n [\dot{\mathbf{J}}_{\text{пов.э}}(\mathbf{r}_0) \operatorname{grad} \dot{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] \, dS. \tag{18.34}$$

Данное равенство является искомым интегральным уравнением относительно плотности электрического тока, наведенного на поверхности рассеивателя падающей электромагнитной волной. В отличие от уравнения Поклингтона оно является интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода, причем уже не одномерным, а двумерным. Если его решение тем или иным способом получено, мы без принципиальных затруднений простым интегрированием и элементарными дифференциальными операциями находим рассеянное электромагнитное поле во всех точках пространства.

Полезно отметить, что в соответствии с (18.34) связь между магнитным вектором падающего поля и плотностью наведенного тока оказывается в общем случае нелокальной. Тем не менее, если длина волны падающего излучения значительно меньше радиусов кривизны рассеивающей поверхности, из-за быстро осциллирующего характера функции $\dot{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ в подынтегральном выражении происходит частичная компенсация влияния достаточно удаленных участков токонесущей поверхности. Как следствие, связь между поверхностным током и магнитным вектором падающего поля становится приближенно локальной. Именно это обстоятельство дает возможность использовать принцип физической оптики при исследовании явлений дифракции электромагнитных волн на проводящих телах, достаточно больших по сравнению с длиной волны.

Реализация численного алгоритма решения интегрального уравнения (18.34) может оказаться весьма трудоемкой. Это связано прежде всего с высоким порядком той системы линейных алгебраических уравнений, которая приближенно заменяет исходное интегральное уравнение. Реально удается проводить расчеты лишь для тел с размерами не более нескольких длин волн. Существенного упрощения можно достичь в тех случаях, когда рассеивающий объект представляет собой тело вращения [38].

Интегральное уравнение В. А. Фока. Интересной и важной в прикладном отношении является задача о так называемой *береговой рефракции* радиоволн. Это явление состоит в том, что радиоволны, распространяясь в воздухе над морской поверхностью, несколько изменяют направление своего движения, встречая на пути береговую линию суши. Хотя в абсолютных цифрах эффект береговой рефракции невелик, он может оказаться существенным при проектировании точных радионавигационных систем.

В 40-х годах акад. В. А. Фок детально исследовал это явление в самой общей постановке. Согласно Фоку, задача о береговой рефракции сводится к изучению распространения электромагнитных волн в однородном полупространстве, заполненном воздухом и ограниченном бесконечной плоскостью (подстилающей средой), электродинамические параметры которой являются функциями координат. Оказалось, что адекватной математической моделью данной задачи служит некоторое интегральное уравнение. Вывод этого уравнения, повторяющий в основных чертах оригинальную работу [37], представлен ниже.

Будем считать, что имеется декартова система координат (x, y, z), ориентированная таким образом, что ось z направлена в среду *1* (воздух), а плоскость XOY служит границей раздела между воздухом и хорошо проводящей средой *2*. Параметры этой среды — относительная диэлектрическая проницаемость ε и удельная проводимость σ — являются произвольными функциями поперечных координат x, y.

Будем изучать случай, когда электрический вектор распространяющейся волны поляризован практически вертикально, т. е. основную роль играют проекции $\dot{E}_{z1}$ и $\dot{E}_{z2}$ в средах *1* и *2* соответственно, в то время как две остальные проекции этого вектора существенно малы.

Если на рабочей частоте среда *2* может считаться хорошо проводящей, то в плоскости XOY векторы полей должны подчиняться приближенным граничным условиям Леонтовича. Однако в данном случае удобнее сформулировать граничные условия таким образом, чтобы в них непосредственно входили нормальные проекции $\dot{E}_{z1}$ и $\dot{E}_{z2}$. Первое из этих условий должно отражать физически

ясное требование непрерывности нормальной составляющей полного тока $\mathbf{J}=j\tilde{\omega}\varepsilon_a\mathbf{E}$ на границе. Отсюда, как легко видеть,

$$\dot{E}_{z1}=\left(\varepsilon-j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right)\dot{E}_{z2} \text{ при } z=0. \tag{18.35}$$

Далее, на границе раздела малые касательные проекции $\dot{E}_{x1}$ и $\dot{E}_{x2}$, $\dot{E}_{y1}$ и $\dot{E}_{y2}$ должны быть непрерывны и, кроме того, в обеих средах должно выполняться уравнение Максвелла $\operatorname{div}\dot{\mathbf{E}}=0$. Поэтому

$$\frac{\partial\dot{E}_{z1}}{\partial z}=\frac{\partial\dot{E}_{z2}}{\partial z} \text{ при } z=0. \tag{18.36}$$

Условия (18.35) и (18.36) можно объединить, воспользовавшись тем, что волны в среде *2* движутся практически по нормали к границе раздела, т. е. в отрицательном направлении оси z (см. гл. 6). В соответствии с этим

$$\dot{E}_{z2}=(\dot{E}_{z2})_{z=0}\exp(\gamma_2 z),$$

где $\gamma_2=\alpha_2+j\beta_2$ — комплексный коэффициент распространения плоской волны заданной частоты в хорошо проводящей среде. Отсюда следует, что

$$\left(\frac{\partial\dot{E}_{z2}}{\partial z}\right)_{z=0}=\gamma_2(\dot{E}_{z2})_{z=0}.$$

На основании этого, воспользовавшись равенствами (18.35) и (18.36), приходим к граничному условию относительно нормальной проекции электрического вектора:

$$\left(\frac{\partial\dot{E}_{z1}}{\partial z}\right)_{z=0}=\frac{\gamma_2}{\omega-j\sigma/(\omega\varepsilon_0)}(\dot{E}_{z1})_{z=0}. \tag{18.37}$$

Теперь рассмотрим волновой процесс в среде *1*, который описывается решением неоднородного уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2\dot{E}_{z1}+\beta_1^2\dot{E}_{z1}=-4\pi f(x, y, z), \tag{18.38}$$

где β_1 — коэффициент фазы плоских волн в воздухе; f — некоторая известная функция координат, определяющая интенсивность источников; коэффициент 4π использован для удобства.

Уравнение (18.38) является линейным, и, по принципу суперпозиции, его решение есть сумма двух составляющих. Одна из них есть «первичное» поле, которое возникает в пространстве под действием источника f в предположении, что граница раздела отсутствует и все пространство равномерно заполнено воздухом. Другая составляющая — «вторичное» поле, наводимое лишь теми токами, которые протекают в среде *2*.

Очевидно, что выражение для первичного поля в некоторой точке наблюдения P записывается как интеграл от плотности сторонних источников, умноженных на функцию Грина скалярного уравнения Гельмгольца:

$$\dot{E}^0_{z1}(P)=\int_V f\frac{e^{-j\beta R}}{R}\,dV,$$

где интегрирование проводится по объему V, в котором сосредоточены источники.

Чтобы найти вторичное поле, следует воспользоваться формулой Кирхгофа, полученной в § 17.4:

$$\dot{E}_{z1}(P)=-\frac{1}{4\pi}\int_S\left[\frac{e^{-j\beta_1 r}}{r}\frac{\partial\dot{E}_{z1}}{\partial n}-\dot{E}_{z1}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-j\beta_1 r}}{r}\right)\right]dS. \qquad (18.39)$$

Интегрирование здесь проводится по границе области, ограниченной плоскостью XOY и полусферой, которая располагается при $z>0$ и имеет радиус, стремящийся к бесконечности. Очевидно, что в пределе интеграл по полусфере обратится в нуль, так что под S в (18.39) следует подразумевать лишь указанную полуплоскость.

Далее учтем, что на граничной плоскости следует полагать $\partial/\partial n=-\partial/\partial z$, поскольку ось z направлена *внутрь* области *1*. Тогда, воспользовавшись равенствами (18.37) и (18.39), получаем интегральное уравнение рассматриваемой задачи

$$\dot{E}_{z1}=\dot{E}^0_{z1}+\frac{1}{4\pi}\int_S\dot{E}_{z1}\left[\frac{\gamma_2}{\varepsilon-j\sigma/(\omega\varepsilon_0)}\frac{e^{-j\beta_1 r}}{r}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{-j\beta_1 r}}{r}\right)\right]dS, \qquad (18.40)$$

которое по своей структуре близко к уравнению (18.34).

ЗАДАЧИ

18.1. Используя метод сеток, найдите наименьшее собственное значение для краевой задачи (18.8) при разбиении отрезка $[0, a]$ на три и на пять частей. Сравните полученные результаты с точным значением.

18.2. Составьте разностный аналог уравнения Лапласа $\nabla^2 u=0$ для трехмерной пространственной области с декартовой системой координат. Шаг сетки Δ по всем трем осям выберите одинаковым.

18.3. Применив метод Бубнова — Галеркина, получите приближенное собственное значение для основной моды краевой задачи (18.8). Используйте единственную координатную функцию «треугольной формы»

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}2x/a & \text{при } 0\leqslant x<a/2,\\ 2[1-(x/a)] & \text{при } a/2\leqslant x\leqslant a.\end{cases}$$

Теперь, когда читатель готов перевернуть последнюю страницу книги, можно подвести итог и попытаться ответить на вопрос: чем же занимается научная дисциплина, именуемая в учебных планах радиотехнических факультетов наших вузов как «Электродинамика и распространение радиоволн»? Автор надеется, что внимательный читатель ответит примерно так: эта наука занята систематическим анализом и разработкой математических моделей волновых процессов в интересах радиотехники и радиоэлектроники. Основой таких моделей служит система уравнений Максвелла. В математическом плане все сводится к решению этой внешне простой и в то же время исключительно богатой по физическому содержанию системы при различном выборе возбуждающих источников, при разных начальных и граничных условиях. Можно лишь поражаться, сколь велико разнообразие следствий, вытекающих из небольшого числа исходных предпосылок.

Подчеркнем, что на протяжении всей книги мы имели дело исключительно с классической нерелятивистской электродинамикой. Физики, произнося такие слова, имеют в виду частную версию теории электромагнетизма, которая отличается прежде всего тем, что ее основные понятия — напряженности полей, заряды и токи — не выводятся из чего-либо, а постулируются. Кроме того, методы этой науки справедливы лишь в условиях, когда скорости движущихся тел существенно меньше скорости света.

Первая успешная попытка преодолеть формальный характер основных законов и выйти за рамки максвелловского описания электромагнитного поля была предпринята в самом начале XX в. Планк, а вслед за ним Эйнштейн показали, что электромагнитные волны на самом деле представляют собой потоки частиц особого рода — *фотонов*; энергия каждого фотона $W=hf$, где $h=6.62\times\times10^{-34}$ Дж/Гц — постоянная Планка, f — частота, Гц. Концепция фотона легла в основу мощной ветви современной физики — квантовой электродинамики. Но почему же в нашем курсе о фотонах не было сказано ни слова? Да потому, что в радиодиапазоне их энергии исключительно малы. Если даже положить, что $f=$ $=100$ ГГц$=10^{11}$ Гц (а это, по меркам радиоинженеров, очень высокая частота), то $W=6.62\cdot10^{-23}$ Дж. Чтобы создать поток мощности, скажем, 1 мкВт/м^2, нужно через площадку в 1 м^2 ежесекундно «пропускать» примерно 10^{17} фотонов. Несмотря на полную

хаотичность, фотонный поток столь плотен, что в эксперименте мы всегда наблюдаем классическую волновую картину без сколь-либо ощутимых флуктуаций.

Из-за исключительно высокой скорости распространения электромагнитных волн мы в подавляющем большинстве практических ситуаций не сталкиваемся с необходимостью учитывать релятивистские поправки, предписываемые теорией относительности. Дело в том, что скорости большинства материальных объектов на несколько порядков меньше скорости света. Иное дело — расчет, скажем, ускорителей элементарных частиц, но в этой области и методы анализа, естественно, свои.

Наконец, мы ни разу не приоткрыли завесу некоторой таинственности, которая скрывает внутреннее устройство заряженных частиц, прежде всего электрона. Жаль, конечно, но с этим придется смириться — такими вопросами занимается авангардная область науки — физика элементарных частиц. Там у специалистов масса трудностей, и ждать скорого разрешения всех противоречий не приходится.

Затратив много времени и сил на изучение нашего далеко не простого курса, мы, во-первых, приобрели ценный капитал (скорее психологического характера) — получили прочную интеллектуальную уверенность в том, что все электромагнитные процессы, представляющие интерес для радиотехники, происходят именно так, как это следует из теории Максвелла. Второе приобретение не менее существенно — мы овладели основами того «языка», которым пользуются и в рамках которого мыслят специалисты, занимающиеся волновыми процессами.

Конечно, далеко не все студенты, сдавшие экзамен по этому курсу, в дальнейшем станут работать над электродинамической проблематикой (это вполне естественно, иначе возникла бы нехватка инженеров по системам связи или по схемотехнике). И все же всем будущим радиоинженерам полезно овладеть основами теории волновых процессов. В наши дни принципы этой теории проникли в те области радиотехники, где ранее безраздельно господствовала методология традиционной теории цепей. За примерами не надо ходить далеко — современная акустоэлектроника, основанная на использовании звуковых волн в твердом теле, позволила создать весьма совершенные частотные фильтры и даже законченные функциональные блоки для обработки сложных сигналов. Влияние методов волновой теории прослеживается даже в такой, казалось бы, далекой от электродинамики и техники СВЧ-области, как конструирование матричных сигнальных процессоров, которые, по-видимому, станут важнейшей для радиотехники разновидностью сверхбольших интегральных схем.

Приложние А
Выражения основных операций векторного анализа в различных координатных системах

1. Прямоугольные декартовы координаты

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x}\,\mathbf{i}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\,\mathbf{i}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\,\mathbf{i}_z,$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{i}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{i}_z$$

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

2. Цилиндрические координаты

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial r}\,\mathbf{i}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial U}{\partial \varphi}\,\mathbf{i}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\,\mathbf{i}_z,$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{i}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\mathbf{i}_\varphi +$$

$$+ \left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\mathbf{i}_z,$$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

3. Сферические координаты

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial r}\,\mathbf{i}_r + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial U}{\partial \varphi}\,\mathbf{i}_\varphi + \frac{1}{r}\,\frac{\partial U}{\partial \theta}\,\mathbf{i}_\theta,$$

$$\text{div } A = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\,(r^2 A_r)\right] + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} +$$

$$+ \frac{1}{r\,\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\,(\sin\theta A_\theta)\right],$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left[\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \, A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \right] \mathbf{i}_r +$$

$$+ \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{i}_\varphi + \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \right] \mathbf{i}_\theta,$$

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} +$$

$$+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial U}{\partial \theta}.$$

Приложение Б
Некоторые полезные векторные тождества

$\text{div rot } \mathbf{A} = 0,$

$\text{rot grad } U = 0,$

$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A},$

$\text{grad } (UV) = U \text{ grad } V - V \text{grad } U,$

$\text{div } (U\mathbf{A}) = U \text{ div } \mathbf{A} + \mathbf{A} \text{ grad } U,$

$\text{rot } (U\mathbf{A}) = U \text{ rot } \mathbf{A} - [\mathbf{A} \text{ grad } \boldsymbol{U}],$

$\text{div } [\mathbf{AB}] = \mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{B}.$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. **Анго А.** Математика для электро- и радиоинженеров: Пер. с франц. / Под ред. **К. С. Шифрина.** — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1965.
2. **Баскаков С. И.** Радиотехнические цепи и сигналы. — М.: Высшая школа, 1988.
3. **Баскаков С. И.** Радиотехнические цепи с распределенными параметрами. — М.: Высшая школа, 1980.
4. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики: Пер. с англ. / Под ред. **Г. П. Мотулевич.** — М.: Наука, 1970.
5. **Вайнштейн Л. А.** Электромагнитные волны. — М.: Радио и связь, 1988.
6. **Гауэр Дж.** Оптические линии связи: Пер. с англ. / Под ред. **А. И. Ларкина.** — М.: Радио и связь, 1989.
7. **Грудинская Г. П.** Распространение радиоволн. — М.: Высшая школа, 1975.
8. **Калинин А. И.** Распространение радиоволн на трассах наземных и космических радиолиний. — М.: Связь, 1979.
9. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров: Пер. с англ. / Под ред. **И. Г. Арамановича.** — М.: Наука, 1970 и последующ. изд.
10. **Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.** Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980.
11. **Марков Г. Т., Петров Б. М., Грудинская Г. П.** Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Советское радио, 1979.
12. **Микаэлян А. Л.** Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах. — М.: Госэнергоиздат, 1963.
13. **Никольский В. В., Никольская Т. И.** Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Наука, 1989.
14. **Савельев И. В.** Курс общей физики. Т. 2. — 2-е изд. перераб. — М.: Наука, 1982.
15. **Сазонов Д. М.** Антенны и устройства СВЧ. — М.: Высшая школа, 1988.
16. Сборник задач по курсу «Электродинамика и распространение радиоволн» / Под ред. **С. И. Баскакова.** — М.: Высшая школа, 1981.
17. **Федоров Н. Н.** Основы электродинамики. — М.: Высшая школа, 1980.
18. Энергетические характеристики космических радиолиний / Под ред. **О. А. Зенкевича.** — М.: Советское радио, 1972.
19. **Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.** Специальные функции. Формулы, графики, таблицы: Пер с нем. / Под ред. **Л. И. Седова.** — М.: Наука, 1977.

Дополнительная литература

20. Вычислительные методы в электродинамике: Под ред. **Р. Митры** / Пер. с англ. под ред. **Э. Л. Бурштейна.** — М.: Мир, 1977.
21. **Завадский В. Ю.** Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. — М.: Наука, 1972.
22. **Менцер Дж. Р.** Дифракция и рассеяние радиоволн: Пер. с англ. / Под ред. **Л. А. Вайнштейна.** — М.: Советское радио, 1958.
23. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970.

24. **Потехин А. И.** Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн. — М.: Советское радио, 1948.
25. **Hinken J. H.** Superconductor Electronics, Springer-Verlag, 1989.
26. **Robinson F. N. H.** Macroscopic Electromagnetism, Pergamon Press 1973.
27. **Солимар Л., Уолш Д.** Лекции по электрическим свойствам материалов: Пер. с англ. / Под ред. **С. И. Баскакова.** — М.: Мир, 1991.
28. **Schelkunoff S. A.** Electromagnetic Waves, D. Van Nostrand, N. Y., 1943.
29. **Луи де-Бройль.** Электромагнитные волны в волноводах и полых резонаторах: Пер. с франц./Под ред. **В. Т. Овчарова.** — М.: ИЛ, 1948.
30. **Стрэттон Дж. А.** Теория электромагнетизма: Пер. с англ./Под ред. **С. М. Рытова.** — М. — Л.: Гостехиздат, 1948.
31. **Кисунько Г. В.** Электродинамика полых систем. — Л.: ВКАС, 1949.
32. **Каценеленбаум Б. З.** Высокочастотная электродинамика. — М.: Наука, 1966.
33. **Гинзбург В. Л.** Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967.
34. **Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.** Теория дифракции: Пер. с нем./Под ред. **Г. Д. Малюжинца.** — М.: Мир, 1964.
35. **Марков Г. Т., Чаплин А. Ф.** Возбуждение электромагнитных волн. — М.: Энергия, 1967.
36. **Марков Г. Т., Васильев Е. Н.** Математические методы прикладной электродинамики. — М.: Советское радио, 1970.
37. **Фок В. А.** Проблемы диффракции и распространения электромагнитных волн. — М.: Советское радио, 1970.
38. **Васильев Е. Н.** Возбуждение тел вращения. — М.: Радио и связь, 1987.
39. **Сильвестр П., Феррари Р.** Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков: Пер. с англ./Под ред. **Ф. Ф. Дубровки.** — М.: Мир, 1986.
40. **Канторович Л. В., Крылов В. И.** Приближенные методы высшего анализа. — М. — Л.: ГИФМЛ, 1962.
41. **Дэвинс Д.** Энергия: Пер. с англ./Под ред. **Д. Б. Вольфберга.** — М.: Энергоатомиздат, 1985.
42. **ГОСТ 12.1.006—84.** Электромагнитные поля радиочастот. Допустимые уровни на рабочих местах и требования к проведению контроля.

Ампера закон 18
Амплитуды комплексные векторов поля 36
Антенна рупорная 359
Апертура антенны 359
Атмосфера Земли 287

Бесселя функции 187, 370
Биения 95
Блоха уравнения 332
Брюстера угол 119
Бубнова — Галеркина метод 393

Вектор волновой 68
— поляризованности 25
Векторный потенциал электрический 257
Вентиль волноводный 346
Включение объемного резонатора 248
Возбуждение волновода 174—176
— объемного резонатора 246, 249
Волна
— земная 300
— ионосферная 300
— необыкновенная 340
— обыкновенная 339
— поперечная 51
— скалярная 50
— сферическая однородная 263
— типа E 131
— типа H 133, 140
— типа T 131, 139
— цилиндрическая однородная 354
Волновод
— диафрагмированный 326
— коаксиальный 206
— круглый 182
— микрополосковый 212
— одноволновый 173
— прямоугольный 149
Волновое число 69
— — поперечное 133
— — продольное 133
Волновой пучок гауссовский 369
Волокно оптическое градиентное 382
Восприимчивость диэлектрическая 27
— магнитная 29
Время релаксации 332

Ганкеля функции 354, 371
Гаусса закон 16
Гельмгольца уравнение 56
— — неоднородное 259
Градиент пробивной потенциала 178
Грина формула 360
— функция 260
Группа узкополосная 94
Гюйгенса принцип 359

Дельта-функция трехмерная 261
Джозефсона эффект 104
Диаграмма
— направленности антенны 270
— — элементарного излучателя 271
— типов волн в волноводе 175, 197
Диполь электрический 24
Дифракция волн
— на идеально проводящем цилиндре 370
— определение 347
— Фраунгофера 364
— Френеля 366, 367
Диэлектрик неполярный 24
Длина
— волны 51
— — в волноводе 156
— — поперечная 135
— — продольная 135
— лондоновская в сверхпроводнике 100
Добротность объемного резонатора 249, 252

Закон электромагнитной индукции 21
Замирания в радиоканале 301
Заряд электрический 10
Затухание погонное
— — плоской волны 54
— — волновода 221
Значение собственное 154
Зоммерфельда условие 350

Зона
— ближняя апертурной антенны 366
— дальняя элементарного излучателя 268
— молчания 303

Излучатель элементарный
— — рамочный 280
— — щелевой 276
— — электрический 265
Индекс преломления атмосферы 290
Индукция магнитная 12
Интеграл интерференционный 352
Интегральное уравнение линейное 398
Интерференция волн 347
Ионосфера Земли 287

Кабель коаксиальный 211
Калибровка потенциалов 259
Картина лучевая поля 378
Квазиоптика 369
Квази-Т-волны 212
Кирхгофа формула 360
Коттон — Мутона эффект 341
Коэффициент
— замедления 317, 325
— направленного действия (КНД) 273
— ослабления 53
— отражения 109, 116, 171
— прохождения 109, 116
— распространения 55
— — в плазме 91
— — в хорошо проводящей среде 84
— стоячей волны (КСВ) 172
— фазы плоской волны 51
Краевая задача для уравнения Гельмгольца 152, 161
Критическая длина волны
— — — в круглом волноводе 189
— — — в прямоугольном волноводе 158, 162

Лампа бегущей волны (ЛБВ) 325
Леонтовича граничные условия 124
Лепестки диаграммы направленности 359
Линии силовые 10
Линия волноводная измерительная 170
Лондонов уравнение 99
Лоренца лемма 47
— сила 12
— условие 259
Луч, определение 378
— меридиональный 382

Магнитная постоянная 12
Магнитный излучатель элементарный 282
Магнитный момент молекулы (атома) 29
Максвелла уравнения 34, 35
Матрица передачи четырехполюсника 215
Мейсснера эффект 102
Метод
— геометрической оптики 375
— разделения переменных 152
— сеток 389
— физической оптики 355
Множитель интерференционный 306
— ослабления 299
Моды объемного резонатора 236
— вырожденные 241

Намагниченность 29
— насыщения феррита 330
Напряженность магнитного поля 12
— электрического поля 11
Невязка вычислительная 394
Неймана функции 187
Неоднородная плоская волна 121, 131
Неустойчивость поляризационная 198

Остина формула 300
Отношение гиромагнитное электрона 329
Отсечки режим в волноводе 157

Параксиальное приближение 382
Параметр дифракционный 369
Переход волноводно-коаксиальный 174
Плазма 83
— бесстолкновительная 85
— закритическая 87
Плоскость падения 113
Плотность тока проводимости 13
Площадь эффективная
— — антенны 275
— — раскрыва 297
Поверхностная волна
— — определение 122
— — типа E 310
— — типа H 318
Поверхностный импеданс 322
Пойнтинга вектор 40
— — комплексный 43
Показатель преломления 115
Поклингтона уравнение 399
Полдера тензор 336
Поле
— векторное 10

— вихревое 22
— магнитное 11
— подмагничивающее 329
— соленоидальное 18
— электрическое 11
— электромагнитное 10
Полного тока закон 18
Полное внутреннее отражение 120
Поляризация
— диэлектрика 24
— электромагнитных волн
— — — круговая 66, 67
— — — линейная 64
— — — эллиптическая 65
Постоянная времени колебательной системы 249
Потенциал электрический
— — векторный 257
— — скалярный 203, 258
Поток магнитный 22
Прецессия намагниченности 332
Принцип
— наводимых ЭДС 274
— перестановочной двойственности 46
— предельного поглощения 351
Проводимость удельная 13
Прозрачности окна в атмосфере 292
Проницаемость
— диэлектрическая
— — абсолютная 27
— — комплексная 38
— — относительная 28
— магнитная
— — абсолютная 30
— — относительная 30

Радиоволны 283
Радиочастоты (диапазоны) 284
Разделения переменных метод 152, 185
Разность потенциалов 204
Раскрыв антенны 297
Рассеяние тропосферное 306
Режим согласования антенны с нагрузкой 274
Резонатор
— объемный
— — коаксиальный 253
— — круглый 243
— — определение 232
— — прямоугольный 234
— — тороидальный 254
— открытый конфокальный 369
Рефракция
— атмосферная 291
— береговая 404
— лучей в неоднородной среде 381
Решение фундаментальное уравнения Гельмгольца 262

Сверхпроводимость 99
Световод волоконный 382
— — межмодовая дисперсия 383
Сечения волноводов стандартные 177
Сигнал узкополосный 94
Скорость
— групповая 96, 160
— фазовая 52, 134
Следы метеорные 306
Слои ионосферные 289
Смещения ток 20
Снелля закон 114
Сопротивление
— волновое 210, 213
— характеристическое волновода
— — — для E-волн 170, 191
— — — для H-волн 171
Сохранения заряда закон 15
Сочленение волноводное вращающееся 199
Среда
— анизотропная 31
— гиротропная 336
— нелинейная 30
— подстилающая 285
— хорошо проводящая (металлоподобная) 80
Стационарной фазы метод 352, 358
Структура замедляющая 310
— — гребенчатая 320
Суперпозиции принцип 35

Температура критическая сверхпроводника 99
Тензор абсолютной магнитной проницаемости 31
Теорема эквивалентности 384
Теория БКШ 104
Тип колебаний в резонаторе 236
— — — основной 240. 244
Ток
— магнитный 46
— поляризационный 31
— сторонний 32
— электрический поверхностный 76
Толщина
— поверхностного слоя 82
— электрическая слоя диэлектрика 112
Точка поворота луча 378
Тропосфера 287
Трубка лучевая 366

Угол
— диэлектрических потерь 39
— падения критический 294
Уравнение
— Гельмгольца 56
— — неоднородное 259
— движения намагниченности 329
— — — в форме Ландау — Лифшица 334
— дисперсионное замедляющей системы 315
— дифференциальное силовых линий 136
— лучей 378
— непрерывности тока 15, 16

Фарадея эффект 345
Феррит 328
Ферромагнетик 30
Фока интегральное уравнение 404
Формула
— идеальной радиосвязи 297
— интерференционная 306
Френеля интегралы 368
Функции
— координатные 393
— собственные 154
Фурье
— интеграл 93
— ряды 370, 372

Характеристика дисперсионная волновода 158

Цепь квазистационарная 231

Частота
— ленгмюровская 85
— максимально применимая (МПЧ) 302
— соударений в плазме 89
— ферромагнитного резонанса 331
Частотная дисперсия фазовой скорости 61
Число волновое 69

Штурма — Лиувилля задача 389
Шум собственный приемника 275

Щель в волноводе излучающая 169

Эйконал 376
— уравнение 377
Эквивалентности теорема 384
Электрическая постоянная 11
Электрического смещения (индукции) поле 11
Элементарный излучатель электрический 265
— — — сопротивление излучения 272

Учебное издание

Баскаков Святослав Иванович

Электродинамика и распространение радиоволн

Зав. редакцией В. И. Трефилов. Редактор С. И. Баскаков. Художественный редактор Т. М. Скворцова. Технический редактор А. К. Нестерова. Корректор Г. И. Кострикова.

ИБ № 9098

Изд. № ЭР—546. Сдано в набор 26.02.91. Подп. в печать 26.11.91. Формат 60×88^1/$_{16}$. Бум. офсетная № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Объем 25,48 усл. печ. л. 25,48 усл. кр.-отт. 23,82 уч.-изд. л. Тираж 5000 экз. Зак. № 1379.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.

Московская типография № 8 Министерства печати и информации РФ, 101898, Москва, Хохловский пер., 7.