А. Д. ГРИГОРЬЕВ

# ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И ТЕХНИКА СВЧ

А. Д. ГРИГОРЬЕВ

# ЭЛЕКТРОДИНАМИКА *и техника СВЧ*

Допущено
Государственным комитетом СССР
по народному образованию в качестве
учебника для студентов вузов,
обучающихся по специальности
«Электронные приборы и устройства»

Scanned & DJVUed




МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1990

ББК 32.851.1
Г83
УДК 621.38

Рецензенты: кафедра «Электронные приборы» Московского энергетического института (зав. кафедрой — доц. В. С. Буряк), д-р техн. наук Р. А. Силин

**Григорьев А. Д.**

Г83 Электродинамика и техника СВЧ: Учеб. для вузов по спец. «Электронные приборы и устройства».— М.: Высш. шк., 1990—335 с.: ил.

ISBN 5-06-000685-9

В книге изложены основы классической электродинамики, электродинамики элементов СВЧ-тракта и теории цепей СВЧ, рассмотрены основные типы устройств СВЧ. Большое внимание уделено анализу электродинамических систем электронных приборов и ускорителей заряженных частиц — многопроводных, микрополосковых, щелевых и диэлектрических линий передачи, замедляющих систем, объемных резонаторов, управляемых ферритовых фильтров и устройств на магнитостатических волнах Проанализированы методы расчета электродинамических систем с помощью ЭВМ.

**Г $\frac{2302020000\,(4309000000)-508}{001\,(01)-90}$ 182—90**

**ББК 32.851.1**
**6Ф0.31**

ISBN 5-06-000685-9

© А. Д. Григорьев, 1990

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Современный этап развития электроники СВЧ характеризуется как широким распространением гибридных и полупроводниковых интегральных схем, так и улучшением энергетических и информационных характеристик мощных электронных приборов. В значительной степени эти достижения обусловлены разработкой и применением новых, более совершенных колебательных и волноведущих систем, обеспечивающих максимальную эффективность взаимодействия потоков заряженных частиц, распространяющихся в твердом теле, плазме или вакууме, с высокочастотным электромагнитным полем. Большую роль сыграла и разработка точных, универсальных методов расчета электродинамических систем, позволяющих оптимизировать их конструкцию.

Физические законы и явления, лежащие в основе принципа действия сверхвысокочастотных электродинамических систем, их характеристики, параметры и конструкции, методы расчета и проектирования составляют предмет дисциплины «Электродинамика и техника СВЧ», которая таким образом занимает важное место в системе подготовки инженера электронной техники. Она завершает общетеоретическую подготовку студентов, обеспечивая их одновременно специальными знаниями в области СВЧ-техники.

Сочетание в одной дисциплине общих и специальных вопросов позволяет наглядно продемонстрировать, как фундаментальные положения используются на практике для анализа и проектирования различных технических устройств, в том числе с помощью ЭВМ, а также обеспечить единство изложения всех разделов дисциплины.

Настоящий учебник состоит из трех частей. В первой части излагаются основные положения классической электродинамики. Основное внимание уделяется электромагнитным волнам и особенностям их распространения в различных средах. Вторая часть содержит основы теории волноводов, резонаторов и замедляющих систем, включая численные методы их расчета и анализ простейших неоднородностей в линиях передачи. Описание электромагнитного поля в указанных элементах СВЧ-трактов производится с помощью векторов Герца, что обеспечивает единый подход к анализу всех типов волн и видов колебаний в линиях передачи и резонаторах, а также позволяет наиболее естественно перейти к описанию численных методов их расчета. В третьей части вводятся основные понятия теории СВЧ-цепей, используемые

для анализа свойств самых распространенных СВЧ-устройств — фильтров, направленных ответвителей, делителей и сумматоров, невзаимных СВЧ-устройств. Приводятся сведения о численных методах расчета и проектирования СВЧ, основанных на декомпозиционном подходе.

В основу книги положен курс лекций, читаемый автором в ЛЭТИ им. В. И. Ульянова (Ленина).

Автор выражает глубокую признательность рецензентам — коллективу кафедры «Электронные приборы» МЭИ и д-ру техн. наук Р. А. Силину за ценные замечания, направленные на улучшение качества рукописи.

Отзывы о книге просим направлять по адресу: 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., 29/14, издательство «Высшая школа».

*Автор*

# ВВЕДЕНИЕ

*Электродинамика* — наука об электромагнитном взаимодействии заряженных частиц, которое осуществляется путем обмена квантами электромагнитного поля — фотонами. Фотоны обладают свойствами как частицы, так и волны, не имеют массы покоя и распространяются со скоростью $c = 299\,792{,}5$ км/с $\approx 3 \cdot 10^8$ м/с, называемой *скоростью света в свободном пространстве*. Законы излучения и поглощения фотонов заряженными частицами изучаются в *квантовой электродинамике*.

В большинстве микроскопических явлений, однако, корпускулярные свойства фотонов практически не проявляются. При анализе таких явлений принято считать, что пространство, окружающее заряженные тела, заполнено особым видом материи — *электромагнитным полем*. Существование электромагнитного поля проявляется в том, что оно воздействует с определенной силой $\mathbf{F}$ (*силой Лоренца*) на внесенные в него заряженные тела:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]),$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ — *вектор напряженности электрического поля;* $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ — *вектор магнитной индукции;* $q$, $\mathbf{v}$ — электрический заряд и скорость тела в данной инерциальной системе отсчета; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, в которой находится заряд (точки наблюдения). Поскольку электромагнитное поле способно производить работу по перемещению заряженных тел, оно обладает энергией, массой и количеством движения. Закономерности протекания электромагнитных явлений в различных средах (без учета квантовых эффектов) составляют предмет изучения *классической электродинамики*.

Свойства электромагнитного поля существенно зависят от характера его изменения во времени. В некоторых случаях зависимость поля от времени может отсутствовать. Такое поле называется *статическим* (или *стационарным*, если его существование обусловлено протеканием неэлектромагнитных процессов) и в данной книге не рассматривается. Часто электромагнитное поле изменяется во времени по гармоническому закону

$$A(\mathbf{r}, t) = A_m(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \varphi), \qquad \text{(В.2)}$$

где $A$ — составляющая вектора напряженности или индукции поля; $A_m$ — ее *амплитуда*; $\varphi$ — *начальная фаза*; $\omega$ — *круговая частота*.

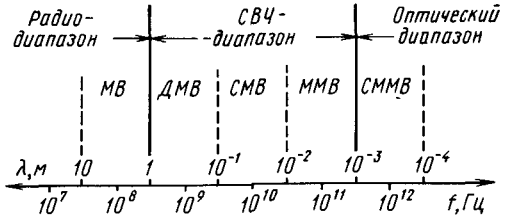



Рис. В.1. Участок спектра электромагнитных колебаний

Круговая частота

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T = 2\pi c/\lambda, \quad \text{(В.3)}$$

где $f$ — *частота изменения поля*; $T$ — *период изменения поля*; $\lambda$ — *длина волны в свободном пространстве.*

Частоты изменения электромагнитных полей лежат в очень широких пределах. Для удобства весь спектр электромагнитных колебаний разбивают на отдельные диапазоны, в каждом из которых электромагнитное поле имеет определенные особенности распространения и взаимодействия с веществом. *Диапазон сверхвысоких частот* (СВЧ), в частности, расположен в интервале частот 300 МГц — 300 ГГц ($\lambda = 1$ м — 1 мм). Он делится на следующие поддиапазоны: дециметровый (ДМВ), сантиметровый (СМВ) и миллиметровый (ММВ). Иногда к диапазону СВЧ относят метровые (МВ) и субмиллиметровые (СММВ) волны (рис. В.1).* Освоение СВЧ-диапазона началось позже, чем соседних — только в 30-х годах нашего века. Это объясняется особенностями электромагнитных колебаний СВЧ-диапазона, к важнейшим из которых относятся:

1) соизмеримость длины волны $\lambda$ и характерного размера приборов $L$, что делает малоэффективным применение обычных линий передачи и колебательных контуров;

2) соизмеримость периода колебаний $T$ и времени пролета носителей заряда в активной области прибора $\tau$. Проявляющаяся в этих условиях инерция носителей заряда нарушает нормальную работу приборов, эффективно функционирующих в радиодиапазоне;

3) малая энергия кванта электромагнитного поля, незначительная по сравнению с энергией теплового движения частиц при обычной температуре, что затрудняет использование в СВЧ-диапазоне квантовых эффектов, которые успешно применяются в оптическом диапазоне. Квантовые эффекты проявляются на СВЧ только при охлаждении рабочего вещества до температуры жидкого гелия (4,2К и ниже).

Таким образом, для усиления и преобразования электромагнитных колебаний СВЧ-диапазона необходимо было разработать специальные методы, что потребовало значительных усилий многочисленных коллективов ученых и инженеров. При этом были реализованы следующие преимущества СВЧ-диапазона:

1) большая информационная емкость каналов связи, пропор-

* Международные обозначения диапазонов частот, используемых для радиосвязи, см. в приложении 9.

циональная произведению полосы пропускания канала $\Delta f$ на отношение мощности сигнала к мощности шума $P_c/P_ш$. Для всех диапазонов отношение $\Delta f/f_0 \approx 1—10\%$, где $f_0$ — центральная частота канала. Поэтому в СВЧ-диапазоне ширина полосы пропускания в 100—10 000 раз больше, чем в радиодиапазоне, но существенно меньше, чем в оптическом. Шумы атмосферного, космического и искусственного происхождения в диапазоне частот 1—10 ГГц наименьшие, что и определяет максимальную скорость передачи информации в этом диапазоне;

2) возможность направленной передачи электромагнитной энергии, так как размеры антенн могут быть много больше длины волны колебаний;

3) прозрачность земной атмосферы для радиоволн СВЧ;

4) избирательное поглощение СВЧ-излучения веществом, особенно при низких температурах.

Отмеченные факторы обусловили широкое применение электромагнитных колебаний СВЧ в различных областях науки и техники, основными из которых являются:

1) радиолокация (первая и до сих пор наиболее важная область применения колебаний СВЧ);

2) дальняя радиорелейная и кабельная связь, обеспечивающая передачу телевизионных и телефонных сигналов на большие расстояния;

3) космическая связь, т. е. передача больших объемов информации через спутники связи (непосредственное телевизионное вещание, связь с космическими кораблями и орбитальными станциями, автоматическими космическими аппаратами);

4) радиоастрономия (прием и анализ электромагнитного излучения космических объектов);

5) экспериментальная физика (нагрев плазмы и ее диагностика, радиоспектроскопия и т. п.);

6) метрология (атомные стандарты времени и частоты);

7) технология (использование СВЧ-излучения для нагрева различных материалов с целью их сушки и полимеризации, приготовления пищи и т. п.);

8) медицина и биология (воздействие СВЧ-колебаний на биологические объекты, а также анализ их собственного электромагнитного излучения).

Основы современной теории электромагнитного поля были заложены в трудах таких ученых, как М. Фарадей, Дж. Максвелл, Г. Герц, Г. Лоренц, А. Эйнштейн.

Электродинамика сверхвысоких частот стала развиваться как самостоятельное направление с конца 30-х годов, когда появились работы, посвященные теории волноводов и резонаторов.

В последние годы наблюдается быстрое расширение областей применения электромагнитных колебаний СВЧ-диапазона в науке и технике, что стимулировало появление новых типов СВЧ-устройств, развитие методов их расчета и проектирования с помощью ЭВМ.

# ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

# ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

## ГЛАВА 1

## ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

### § 1.1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

В основе классической электродинамики лежат уравнения *Максвелла*:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}-\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\mathbf{J}; \tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0; \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=\rho; \tag{1.3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0. \tag{1.4}$$

Все величины, входящие в эти уравнения, являются функциями координат (радиуса-вектора $\mathbf{r}$) и времени $t$. Плотность электрического тока $\mathbf{J}$ и удельная плотность заряда $\rho$ характеризуют распределение источников электромагнитного поля в пространстве и времени. С этими величинами связаны «функции источников» — *электрическая индукция* (электрическое смещение) $\mathbf{D}$ и *напряженность магнитного поля* $\mathbf{H}$. Кроме того, в уравнение Максвелла входят силовые функции $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, определяющие в соответствии с выражением (В.1) силу, действующую на заряженные тела. В уравнениях (1.2), (1.4) отсутствуют магнитные токи и заряды, которые иногда искусственно вводятся в них.

Плотность тока $\mathbf{J}$, входящая в первое уравнение Максвелла, складывается из трех составляющих:

$$\mathbf{J}=\mathbf{J}_{\text{пр}}+\mathbf{J}_{\text{к}}+\mathbf{J}^{\text{ст}},$$

где $\mathbf{J}_{\text{пр}}$ — *плотность тока проводимости*, обусловленная электропроводностью среды; $\mathbf{J}_{\text{к}}=\rho\mathbf{v}$ — плотность конвекционного тока, создаваемого движением свободных заряженных частиц; $\mathbf{J}^{\text{ст}}$ —

плотность стороннего тока, обусловленного силами неэлектромагнитного происхождения.

Рассмотрим следствия из уравнений Максвелла. Применив операцию дивергенции к обеим частям (1.1), найдем

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H}=\operatorname{div}\left(\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{J}\right)=0,$$

так как дивергенция ротора любого вектора равна нулю. Изменив порядок дифференцирования по координатам и времени в правой части уравнения, с учетом (1.3) получим *уравнение непрерывности*

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{J}=0.} \qquad (1.5)$$

Для выяснения физического смысла полученного выражения проинтегрируем его по объему $V$, ограниченному замкнутой поверхностью $S$:

$$\int_V\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V+\int_V\operatorname{div}\mathbf{J}\mathrm{d}V=0.$$

Изменив порядок дифференцирования и интегрирования и использовав теорему Гаусса, найдем

$$\boxed{\partial Q/\partial t+I=0,} \qquad (1.6)$$

где $Q=\int_V\rho\mathrm{d}V$ — заряд, содержащийся в объеме $V$; $I=\oint_S\mathbf{J}\mathrm{d}\mathbf{S}$ — ток, протекающий через поверхность $S$. Если ток вытекает из объема $V(I>0)$, то $\partial Q/\partial t<0$, т. е. заряд, содержащийся в этом объеме, уменьшается. Таким образом, соотношение (1.6) выражает закон сохранения электрического заряда.

Величину $\partial\mathbf{D}/\partial t$, входящую в (1.1), Дж. Максвелл назвал плотностью тока смещения $\mathbf{J}_{см}$. Таким образом, уравнение (1.1) можно записать в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{J}_{п}, \qquad (1.7)$$

где $\mathbf{J}_{п}=\mathbf{J}_{см}+\mathbf{J}$ — *плотность полного тока*. Применив к (1.7) операцию дивергенции, получим *закон полного тока*:

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{J}_{п}=0.} \qquad (1.8)$$

Следовательно, поле полного тока не имеет источников, его линии либо замкнуты, либо начинаются в бесконечности и уходят в бесконечность. Поток вектора $\mathbf{J}$ (полный ток $I_{п}$) через любую замкнутую поверхность равен нулю. Из уравнения (1.4) следует, что аналогичными свойствами обладает поле вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$.

## § 1.2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА СРЕД

В уравнения Максвелла входят четыре величины, характеризующие электромагнитное поле. Для установления связи между ними необходимо рассмотреть явления, возникающие в материальных средах при воздействии на них электрического или магнитного поля. Не вдаваясь в микроскопическую теорию этих процессов, отметим, что под воздействием электрического поля $\mathbf{E}$ каждый элемент объема вещества $\Delta V$ приобретает *электрический момент*

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{N} q_i \mathbf{r}_i,$$

где $q_i$ — электрические заряды частиц вещества; $\mathbf{r}_i$ — их радиусы-векторы, проведенные из некоторой фиксированной точки наблюдения; $N$ — число заряженных частиц в элементе объема $\Delta V$. Пользуясь условиями электрической нейтральности вещества $\sum_{i=1}^{N} q_i = 0$, легко показать, что электрический момент не зависит от выбора точки отсчета. Действительно, при ее изменении новый радиус-вектор каждой частицы $\mathbf{r}_i'$ связан со старым соотношением $\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_0$, где $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор, проведенный из новой точки отсчета в старую. Таким образом,

$$\Delta \mathbf{P}' = \sum_{i=1}^{N} q_i \mathbf{r}_i' = \sum_{i=1}^{N} q_i \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_0 \sum_{i=1}^{N} q_i = \Delta \mathbf{P}.$$

Отношение $\Delta \mathbf{P}/\Delta V = \mathbf{P}$ — электрический момент единицы объема или *вектор поляризации вещества*. Этот вектор связан с напряженностью электрического поля выражением

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \varkappa \mathbf{E}, \tag{1.9}$$

где $\varepsilon_0 = 10^7/(4\pi c^2) \approx 8{,}86 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — *электрическая постоянная*: $\varkappa$ — электрическая восприимчивость вещества. Отметим, что, поскольку в вакууме свободные заряды отсутствуют, его электрическая восприимчивость $\varkappa = 0$.

Определим вектор электрической индукции $\mathbf{D}$ как сумму вектора поляризации $\mathbf{P}$ и вектора $\varepsilon_0 \mathbf{E}$:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (1 + \varkappa) \mathbf{E}.$$

Введя *абсолютную диэлектрическую проницаемость вещества* *

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0 (1 + \varkappa) = \varepsilon_0 \varepsilon_r,$$

где $\varepsilon_r = (1 + \varkappa)$ — относительная диэлектрическая проницаемость, запишем

---

* Далее слово «абсолютная» и индекс «*a*» опускаются.

$$\boxed{\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}.} \qquad (1.10)$$

Под воздействием магнитного поля **H** единица объема вещества приобретает *магнитный момент* (*намагниченность*)

$$\mathbf{M}=\mu_0\chi\mathbf{H}, \qquad (1.11)$$

где $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}\approx1{,}256\cdot10^{-6}$ Гн/м — *магнитная постоянная* *; $\chi$ — *магнитная восприимчивость вещества* (в вакууме $\chi=0$). Вектор магнитной индукции **B** связан с векторами **H** и **M** соотношением

$$\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}+\mathbf{M}=\mu_0(1+\chi)\mathbf{H}.$$

Введя абсолютную магнитную проницаемость $\mu_a=\mu_0\mu_r$, где $\mu_r=1+\chi$ — относительная магнитная проницаемость, получим

$$\boxed{\mathbf{B}=\mu_a\mathbf{H}.} \qquad (1.12)$$

Материальные среды обладают *электропроводностью*, т. е. в них под действием электрического поля возникает ток, называемый током проводимости. Его плотность определяется законом Ома *в дифференциальной форме*:

$$\boxed{\mathbf{J}_{\text{пр}}=\sigma\mathbf{E},} \qquad (1.13)$$

где $\sigma$ — удельная проводимость среды.

Уравнения (1.10), (1.12), (1.13) называют *материальными*. Их добавляют к уравнениям Максвелла, с тем чтобы полученная система была полной. Величины $\varepsilon_r$, $\mu_r$, $\sigma$, входящие в материальные уравнения, полностью определяют в рамках классической электродинамики электромагнитные свойства среды и называются электрофизическими параметрами.

Среды различают по значениям электрофизических параметров и характеру их зависимости от интенсивности электромагнитных процессов и координат точки наблюдения. Выделяют *линейные среды*, параметры которых не зависят от напряженностей электрического и магнитного полей, и *нелинейные* среды, в которых эта зависимость наблюдается. В достаточно сильных полях все среды (включая вакуум) становятся нелинейными, однако некоторые вещества (сегнетоэлектрики, ферромагнетики) обнаруживают нелинейность и в сравнительно слабых полях.

Большинство сред в обычных условиях линейны. Электромагнитное поле в них удовлетворяет принципу суперпозиции: поле, созданное несколькими источниками, равно сумме полей, образованных каждым источником в отдельности. Применение этого принципа часто облегчает анализ поля. В дальнейшем рассматриваются электромагнитные поля только в линейных средах.

---

* Из определений электрической и магнитной постоянных следует, что скорость света $c=(\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$.

В *диэлектриках* амплитуда плотности тока смещения при гармоническом изменении электрического поля больше амплитуды плотности тока проводимости. В *проводниках* соотношение между этими амплитудами обратно. Согласно определению плотности тока смещения, в диэлектриках выполняется условие

$$\omega\varepsilon E_m > \sigma E_m \text{ или } \omega\varepsilon/\sigma > 1.$$

Таким образом, в зависимости от частоты изменения поля одно и то же вещество может считаться диэлектриком либо проводником. Отметим, что в идеальном диэлектрике $\sigma = 0$, а в идеальном проводнике $\sigma \to \infty$.

Среду называют *однородной*, если ее параметры не зависят от координат, и *неоднородной*, если указанная зависимость имеется. Встречаются и *кусочно-однородные среды*, состоящие из нескольких областей с различными (постоянными в пределах каждой области) электрофизическими параметрами.

Во многих средах векторы **E** и **D**, **H** и **B** параллельны при любой ориентации электромагнитного поля. Характер электромагнитных процессов в таких средах не зависит от направления векторов **E** и **H**, поэтому их называют *изотропными*. В монокристаллах, наоборот, векторы **E** и **D** и (или) **H** и **B** непараллельны, причем отношение длин векторов и угол между ними зависят от ориентации **E** и **H** относительно кристаллографических осей. Такие среды называют *анизотропными*. Связь между векторами **E** и **D**, **H** и **B** для таких сред следует записать в более общем, чем выражения (1.9)—(1.12), виде:

$$\begin{aligned} D_1 &= \varepsilon_{11}E_1 + \varepsilon_{12}E_2 + \varepsilon_{13}E_3; \\ D_2 &= \varepsilon_{21}E_1 + \varepsilon_{22}E_2 + \varepsilon_{23}E_3; \\ D_3 &= \varepsilon_{31}E_1 + \varepsilon_{32}E_2 + \varepsilon_{33}E_3. \end{aligned} \qquad (1.14)$$

Индексами 1, 2, 3 здесь обозначены проекции векторов **E** и **D** на оси некоторой системы координат. Выражения (1.14) можно представить и в более компактном виде

$$\boxed{\mathbf{D} = \vec{\varepsilon}\mathbf{E},} \qquad (1.15)$$

где

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

— тензор диэлектрической проницаемости. Аналогично вводится тензор магнитной проницаемости $\vec{\mu}$ и тензор удельной проводимости $\vec{\sigma}$. Выражение (1.15) по форме совпадает с (1.10), однако необходимо помнить, что электрические свойства анизотропной среды характеризуются совокупностью девяти чисел—

элементов тензора. Отметим, что для изотропной среды также можно формально ввести тензорные параметры. Так, из параллельности векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ следует, что $\mathbf{D}_1=\varepsilon\mathbf{E}_1$, $\mathbf{D}_2=\varepsilon\mathbf{E}_2$, $\mathbf{D}_3=\varepsilon\mathbf{E}_3$. Следовательно,

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}=\begin{vmatrix}\varepsilon & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon\end{vmatrix}=\varepsilon\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\varepsilon\overleftrightarrow{\mathbf{E}},$$

где $\overleftrightarrow{\mathbf{E}}$ — единичный тензор. Поэтому в дальнейшем полагаем, если это не оговорено, что в выражения (1.9)—(1.12) входят тензорные величины; стрелки над ними опускаем.

Формулы (1.10), (1.12) предполагают, что значения векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ (или $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$) в данной точке зависят только от значений $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в той же точке и в тот же момент времени. Реально значения векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ в данной точке могут зависеть от напряженностей электрического и магнитного полей в других (соседних) точках и в другие (более ранние) моменты времени. Это явление называют пространственной и (или) временно́й дисперсией. Во многих средах на электрическую поляризацию или намагничивание среды требуется определенное время. В первом приближении можно считать, что значения векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ в них определяются значениями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в некоторый более ранний момент времени:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)=\varepsilon\mathbf{E}(\mathbf{r}, t-\Delta t_\varepsilon);$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)=\mu\mathbf{H}(\mathbf{r}, t-\Delta t_\mu), \qquad (1.16)$$

где $\Delta t_\varepsilon$, $\Delta t_\mu$ — интервалы времени, необходимые для поляризации (намагничивания) среды.

### § 1.3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

На границах раздела сред с различными электрофизическими параметрами функции $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ могут иметь разрывы. Уравнения Максвелла (1.1)—(1.4) неприменимы для отыскания поля на границе, так как разрывные функции нельзя дифференцировать. Для нахождения соотношений между составляющими векторов электромагнитного поля по обе стороны от границы раздела необходимо использовать интегральные уравнения и предельные переходы.

Рассмотрим плоскую границу раздела $S$ двух сред с параметрами $\varepsilon_1$, $\mu_1$ и $\varepsilon_2$, $\mu_2$ (рис. 1.1, *а*). Выделим в плоскости, перпендикулярной поверхности $S$, прямоугольник $S_0$ со сторонами $h$ и $l$, достаточно малыми для того, чтобы поле внутри каждой из частей прямоугольника, принадлежащих средам *1* и *2*, можно было считать постоянным. Проинтегрировав уравнение (1.1) по $S_0$, получим

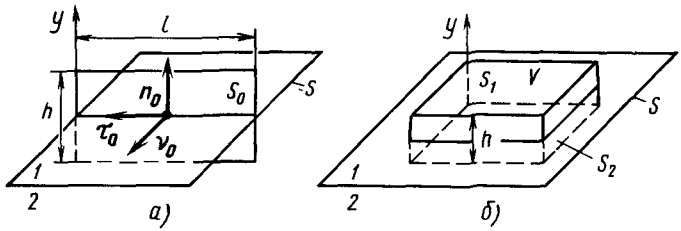



Рис. 1.1. К выводу условий на границе раздела двух сред: *а* — для касательных; *б* — для нормальных к границе составляющих электромагнитного поля

$$\mathbf{H}_1\tau_0 l - \mathbf{H}_2\tau_0 l + A_1 = l\int_0^h \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}\right)\nu_0 \mathrm{d}y,$$

где $A_1$ — интеграл по сторонам прямоугольника, длиной $h$; $\tau_0$, $\nu_0$ — орты касательной и нормали к поверхности $S_0$, лежащие в плоскости $S$, причем орт нормали $\mathbf{n}_0$ к плоскости $S$ образует с $\tau_0$ и $\nu_0$ правую тройку векторов (вектор $\mathbf{n}_0$ направлен из среды *2* в среду *1*):

$$\tau_0 = [\nu_0, \mathbf{n}_0]. \tag{1.17}$$

Пусть размер боковых сторон прямоугольника $h$ стремится к нулю. Предположив, что вблизи поверхности раздела вектор индукции $\mathbf{D}$ конечен, найдем

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)\tau_0 = \nu_0 \lim_{h\to 0}\int_0^h \mathbf{J}\mathrm{d}y,$$

так как $\lim\limits_{h\to 0} A_1 = 0$. Предел интеграла в правой части равенства характеризует ток, протекающий в бесконечно тонком слое вблизи поверхности раздела сред, его называют *поверхностным током* $I_S$. Тогда с учетом выражения (1.17) получим

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)[\nu_0, \mathbf{n}_0] = \nu_0 \mathbf{I}_S,$$

откуда

$$\boxed{[\mathbf{n}_0, (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)] = \mathbf{I}_S.} \tag{1.18}$$

Полученное равенство есть граничное условие для напряженности магнитного поля на поверхности раздела сред. Оно означает, что разность между касательными составляющими вектора $\mathbf{H}$ на границе раздела численно равна поверхностному току. Если он равен нулю, то касательная составляющая вектора $\mathbf{H}$ при переходе через границу раздела непрерывна.

Проведя аналогичные преобразования уравнения (1.2), определим

$$\boxed{[\mathbf{n}_0, (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)] = 0,} \tag{1.19}$$

т. е. касательная составляющая вектора **E** всегда непрерывна на границе раздела сред.

Рассмотрим параллелепипед с гранями $S_1$ и $S_2$, параллельными границе раздела и расположенными в первой и второй средах (рис. 1.1, *б*). Проинтегрировав уравнение (1.3) по объему параллелепипеда $V$, найдем

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) S\mathbf{n}_0 + A_2 = S\int_0^h \rho \mathrm{d}y,$$

где $S$ — площадь граней, параллельных поверхности раздела сред; $A_2$ — поток вектора через боковую поверхность параллелепипеда.

При конечном **D** $\lim\limits_{h \to 0} A_2 = 0$, следовательно,

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2)\mathbf{n}_0 = \lim_{h \to 0} \int_0^h \rho \mathrm{d}y.$$

Предел интеграла в правой части полученного выражения называют *поверхностным зарядом* $\rho_s$. Таким образом,

$$\boxed{(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2)\mathbf{n}_0 = \rho_S,} \tag{1.20}$$

или $D_{1n} - D_{2n} = \rho_S$.

Аналогично, из уравнения (1.4) получим

$$\boxed{(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)\mathbf{n}_0 = 0,} \tag{1.21}$$

или $B_{1n} = B_{2n}$.

В этих выражениях индексом $n$ обозначены нормальные к поверхности раздела компоненты векторов **D** и **B**.

### § 1.4. ЭНЕРГИЯ И МОЩНОСТЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Найдем работу, производимую электромагнитным полем при перемещении заряда $q$ на расстояние $\mathrm{d}\mathbf{l} = \mathbf{v}\mathrm{d}t$, где $\mathbf{v}$ — скорость заряда:

$$\mathrm{d}A = \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{l} = q(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}])\mathbf{v}\mathrm{d}t = q\mathbf{E}\mathbf{v}\mathrm{d}t.$$

Отсюда мощность взаимодействия поля и заряда

$$P = \mathrm{d}A/\mathrm{d}t = q\mathbf{E}\mathbf{v}.$$

Если заряд распределен в пространстве непрерывно, то в элементе объема $\mathrm{d}V$ содержится заряд $\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}V$. При этом $\mathrm{d}P = \rho\mathbf{E}\mathbf{v}\mathrm{d}V = \mathbf{J}_к\mathbf{E}\mathrm{d}V$, так как плотность тока $\mathbf{J}_к = \rho\mathbf{v}$. Мощность, выделяющаяся в единице объема (удельная мощность),

$$p_к = \mathbf{J}_к \mathbf{E}. \tag{1.22}$$

Если ток обусловлен проводимостью среды и $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{пр}$, то

$$\boxed{p_т = \mathbf{J}_{пр}\mathbf{E} = \sigma |\mathbf{E}|^2.}$$

Таким образом, $p_т$ — мощность тепловых потерь, а полученное выражение — *закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме*. В общем случае $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{пр} + \mathbf{J}_к + \mathbf{J}^{ст}$ и

$$p = p_т + p_к + \mathbf{J}^{ст}\mathbf{E} = p_т + p_к + p^{ст}. \tag{1.23}$$

Третье слагаемое характеризует мощность взаимодействия поля со сторонним током. Она может быть как положительной (сторонний ток получает энергию от поля), так и отрицательной (сторонний ток отдает энергию полю).

Выведем уравнение баланса энергии электромагнитного поля. Для этого помножим скалярно уравнение (1.1) на $\mathbf{E}$, уравнение (1.2) на $\mathbf{H}$ и вычтем второе из первого:

$$\mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} - \mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{J}\mathbf{E}.$$

Воспользовавшись векторным тождеством (П.7) и учитывая, что для изотропных сред

$$\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2}\varepsilon \frac{\partial |\mathbf{E}|^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{ED}}{2}\right);$$

$$\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{HB}}{2}\right),$$

найдем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{ED}}{2} + \frac{\mathbf{HB}}{2}\right) = -\,\mathrm{div}\,[\mathbf{E}, \mathbf{H}] - \mathbf{JE}. \tag{1.24}$$

Можно показать, что равенство справедливо и для анизотропных сред.

Проинтегрируем (1.24) по некоторому объему $V$, ограниченному замкнутой поверхностью $S$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \left(\frac{\mathbf{ED}}{2} + \frac{\mathbf{HB}}{2}\right) \mathrm{d}V + \oint\limits_S \mathbf{\Pi}\,\mathrm{d}\mathbf{S} + \int\limits_V p\,\mathrm{d}V = 0. \tag{1.25}$$

Здесь использовано выражение (1.23) и введен *вектор Пойнтинга*

$$\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]. \tag{1.26}$$

Для выяснения физического смысла отдельных членов выражения (1.25) предположим, что поверхность $S$ непроницаема для

поля (векторы **E** или **H** равны нулю на границе). Тогда второе слагаемое обращается в нуль, а третье слагаемое есть полная мощность электромагнитного поля $P$ в объеме $V$. В соответствии с законом сохранения энергии

$$P = -\partial W/\partial t,$$

где $W$ — энергия, запасенная в объеме $V$. Отсюда следует, что *энергия электромагнитного поля*

$$W = \int_V \left( \frac{\mathbf{ED}}{2} + \frac{\mathbf{HB}}{2} \right) \mathrm{d}V.$$

Величины

$$\boxed{w_E = \mathbf{ED}/2, \quad w_H = \mathbf{HB}/2} \tag{1.27}$$

есть *удельные энергии* электрического и магнитного полей.

Пусть мощность $P = 0$. Тогда изменение энергии в объеме $V$ возможно только за счет «вытекания» ее через поверхность $S$. *Количество энергии, вытекающей за единицу времени (поток* энергии) через поверхность $S$, определяется интегралом $\oint_S \mathbf{\Pi} \mathrm{d}S$. Входящий в него вектор Пойнтинга рассматривают как вектор *плотности потока энергии* (плотности мощности) электромагнитного поля. Следует отметить, что выражение (1.25) определяет только интегральный поток энергии через замкнутую поверхность. При этом векторы $\mathbf{\Pi}$ и $\mathbf{\Pi}' = \mathbf{\Pi} + \mathrm{rot}\,\mathbf{F}$, где $\mathbf{F}$ — произвольный вектор, соответствуют одному и тому же значению интеграла. Таким образом, выражение (1.25) не устанавливает однозначную связь между плотностью потока энергии и вектором $\mathbf{\Pi}$. Определение вектора Пойнтинга как вектора плотности потока энергии следует из теории относительности.

С плотностью потока энергии связана *скорость переноса энергии* $\mathbf{v}_э$, определяемая соотношением

$$\boxed{\mathbf{\Pi} = w\mathbf{v}_э,} \tag{1.28}$$

где $w = w_E + w_H$ — удельная энергия электромагнитного поля.

## § 1.5. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

В электродинамике важную роль играют гармонически изменяющиеся во времени (монохроматические) величины, для которых удобно использовать комплексную форму записи:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\left[\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \mathrm{e}^{i\omega t}\right], \tag{1.29}$$

где $\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \dot{E}_1(\mathbf{r})\mathbf{e}_1 + \dot{E}_2(\mathbf{r})\mathbf{e}_2 + \dot{E}_3(\mathbf{r})\mathbf{e}_3$ — комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля; $\dot{E}_j(\mathbf{r}) = E_{mj}(\mathbf{r}) \mathrm{e}^{i\varphi_j(\mathbf{r})}$,

$j=1, 2, 3$,—проекции вектора $\dot{\mathbf{E}}$ на оси ортогональной системы координат с ортами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Модуль (длина) вектора

$$|\dot{\mathbf{E}}|=(\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{E}}^*)^{1/2}=(\dot{E}_1\dot{E}_1^*+\dot{E}_2\dot{E}_2^*+\dot{E}_3\dot{E}_3^*)^{1/2}.$$

Подставив выражения (1.29) в уравнения Максвелла, после сокращения временного множителя $\exp(i\omega t)$ получим

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}=i\omega\dot{\mathbf{D}}+\sigma\dot{\mathbf{E}}+\dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}};\quad \operatorname{div}\dot{\mathbf{D}}=\dot{\rho};$$

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}=-i\omega\dot{\mathbf{B}};\qquad \operatorname{div}\dot{\mathbf{B}}=0.$$

Процессы поляризации и намагничивания во многих средах протекают инерционно (см. § 1.2). При гармонических колебаниях это приводит к сдвигу фазы векторов $\dot{\mathbf{D}}$ и $\dot{\mathbf{B}}$ относительно $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$. Действительно, согласно (1.16),

$$\dot{\mathbf{D}}=\varepsilon e^{-i\Delta_\varepsilon}\dot{\mathbf{E}};\quad \dot{\mathbf{B}}=\mu e^{-i\delta_\mu}\dot{\mathbf{H}}, \tag{1.30}$$

где $\Delta_\varepsilon=\omega\Delta t_\varepsilon$; $\delta_\mu=\omega\Delta t_\mu$.

Подставив выражение (1.30) в полученные уравнения и перегруппировав члены, получим уравнения Максвелла для комплексных амплитуд:

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}=i\omega\dot{\varepsilon}\dot{\mathbf{E}}+\dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}}; \tag{1.31}$$

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}=-i\omega\dot{\mu}\dot{\mathbf{H}} \tag{1.32}$$

$$\operatorname{div}\dot{\varepsilon}\dot{\mathbf{E}}=\dot{\rho}^{\text{ст}}; \tag{1.33}$$

$$\operatorname{div}\dot{\mu}\dot{\mathbf{H}}=0, \tag{1.34}$$

где

$$\dot{\varepsilon}=\varepsilon'-i\varepsilon'';\quad \varepsilon'=\varepsilon\cos\Delta_\varepsilon;\quad \varepsilon''=\sigma/\omega+\varepsilon\sin\Delta_\varepsilon; \tag{1.35}$$

$$\dot{\mu}=\mu'-i\mu'';\quad \mu'=\mu\cos\delta_\mu;\quad \mu''=\mu\sin\delta_\mu; \tag{1.36}$$

$$\dot{\rho}^{\text{ст}}=i\omega^{-1}\operatorname{div}\dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}}. \tag{1.37}$$

Уравнения (1.31)—(1.34) проще исходных выражений (1.1)—(1.4), так как из них исключены векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$, одна из четырех независимых переменных (время) и плотность тока проводимости. Кроме того, в этих уравнениях учтена инерционность процессов поляризации и намагничивания сред.

Подставив введенные величины в материальные уравнения (1.10), (1.12), запишем

$$\dot{\mathbf{D}}=\dot{\varepsilon}\dot{\mathbf{E}}=|\dot{\varepsilon}|e^{-i\delta_\varepsilon}\dot{\mathbf{E}};\quad \dot{\mathbf{B}}=\dot{\mu}\dot{\mathbf{H}}=\mu e^{-i\delta_\mu}\dot{\mathbf{H}},$$

где $\delta_\varepsilon=\operatorname{arctg}(\varepsilon''/\varepsilon')$; $\delta_\mu$—углы, на которые вектор $\dot{\mathbf{D}}$ отстает от вектора $\dot{\mathbf{E}}$, а вектор $\dot{\mathbf{B}}$—от вектора $\dot{\mathbf{H}}$. Эти углы называют *углами диэлектрических и магнитных потерь.*

## § 1.6. БАЛАНС ЭНЕРГИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

При изучении энергетических характеристик гармонических колебаний следует иметь в виду, что энергия и мощность являются квадратичными функциями полей [см., например, (1.26). (1.27)] и поэтому изменяются во времени не по гармоническому закону. На практике, как правило, представляют интерес средние за период значения квадратичных величин, которые могут быть выражены через комплексные амплитуды полей. В частности, среднее значение удельной энергии электрического поля

$$(w_E)_{\text{ср}}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}\varepsilon'\mathbf{E}_m^2\cos^2(\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\varepsilon' E_m^2=\frac{1}{4}\varepsilon'\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{E}}^*.$$

Аналогично вычисляют средние значения удельной энергии магнитного поля и потока энергии:

$$(w_H)_{\text{ср}}=\frac{1}{4}\mu'\dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{H}}^*;\quad (p_{\text{и}})_{\text{ср}}=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2}[\dot{\mathbf{E}},\dot{\mathbf{H}}^*]\right\}=\operatorname{Re}\dot{\mathbf{\Pi}}.$$

Величину $\dot{\mathbf{\Pi}}$ называют *комплексным вектором Пойнтинга.*

Средние значения энергий электрического и магнитного полей в объеме $V$

$$(W_E)_{\text{ср}}=\frac{1}{4}\int_V\varepsilon'\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{E}}^*\mathrm{d}V;\quad (W_H)_{\text{ср}}=\frac{1}{4}\int_V\mu'\dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{H}}^*\mathrm{d}V. \tag{1.38}$$

Эти выражения справедливы только в недиспергирующих средах.

Для вывода уравнения баланса энергии помножим уравнение (1.31) на $\dot{\mathbf{E}}^*$, а уравнение, комплексно-сопряженное с (1.32), на $\dot{\mathbf{H}}$. Разделим разность полученных соотношений на два и проинтегрируем по объему $V$. Учитывая тождество (П.7), получим

$$-\oint_S\dot{\mathbf{\Pi}}\,\mathrm{d}\mathbf{S}=i\omega\int_V\left(\frac{\dot{\varepsilon}\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{E}}^*}{2}-\frac{\dot{\mu}^*\dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{H}}^*}{2}\right)\mathrm{d}V+\frac{1}{2}\int_V\dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}}\dot{\mathbf{E}}^*\mathrm{d}V. \tag{1.39}$$

Выделим действительную часть этого соотношения

$$-\operatorname{Re}\oint_S\dot{\mathbf{\Pi}}\,\mathrm{d}\mathbf{S}=\omega\int_V\left(\frac{\varepsilon''\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{E}}^*}{2}+\frac{\mu''\dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{H}}^*}{2}\right)\mathrm{d}V+\operatorname{Re}\dot{P}_{\text{вз}}. \tag{1.40}$$

Выражение, стоящее слева, определяет среднее значение потока энергии через границу, т. е. *мощность излучения* $\dot{P}_{\text{и}}$. Второй

член правой части равен средней мощности взаимодействия поля со сторонним током $P_{вз}$. Если эта мощность равна нулю, то поступление энергии через границу ($P_и < 0$) должно компенсироваться рассеянием ее в объеме $V$, с тем чтобы полная энергия колебаний не изменялась (иначе колебания перестанут быть гармоническими). Следовательно, интеграл в правой части определяет *мощность поглощения* (мощность тепловых потерь) в среде, равную сумме интегралов от удельной мощности электрических и магнитных потерь $p_E$ и $p_H$:

$$P_п = \int_V (p_E + p_H)\,dV,$$

где

$$p_E = \frac{1}{2}\omega\varepsilon''\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{E}}^*;\quad p_H = \frac{1}{2}\omega\mu''\dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{H}}^*. \tag{1.41}$$

Заметим, что отрицательным значениям $\varepsilon''$ и $\mu''$ соответствует выделение энергии в среде (регенерация). Такие среды называют *активными*.

С учетом (1.38) и (1.41) найдем отношение плотности мощности потерь к удельной энергии электрического и магнитного полей:

$$(p_E)_{ср}/(w_E)_{ср} = \omega \operatorname{tg}\delta_\varepsilon;\quad (p_H)_{ср}/(w_H)_{ср} = \omega \operatorname{tg}\delta_\mu.$$

Эти отношения пропорциональны тангенсам соответствующих углов потерь, чем и объясняются названия углов.

Проанализируем мнимую часть соотношения (1.39):

$$-\operatorname{Im}\oint_S \dot{\mathbf{\Pi}}\,d\mathbf{S} - \operatorname{Im} P_{вз} = 2\omega \int_V \left(\frac{\varepsilon'\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{E}}^*}{2} - \frac{\mu'\dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{H}}^*}{2}\right) dV.$$

Интеграл справа равен разности энергий электрического и магнитного полей. Выражение, стоящее слева, определяет мнимые (реактивные) составляющие мощностей излучения и взаимодействия. Так как средние значения этих величин равны нулю, они характеризуют потоки энергии, меняющие свое направление на противоположное каждый полупериод колебаний. Если такие «пульсирующие» потоки энергии отсутствуют, т. е. если объем $V$ не обменивается энергией со сторонним током и окружающей средой, то средние значения энергии электрического и магнитного полей в этом объеме равны. При этом полная энергия электромагнитного поля в любой момент времени постоянна и равна сумме средних значений энергии электрического и магнитного полей:

$$(W)_{ср} = (W_E)_{ср} + (W_H)_{ср} = \int_V \frac{\varepsilon'\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{E}}^*}{2}\,dV = \int_V \frac{\mu'\dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{H}}^*}{2}\,dV. \tag{1.42}$$

Так как далее рассматриваются, как правило, комплексные проницаемости, точки над их обозначениями, а также скобки и индексы в обозначениях средних значений квадратичных величин не ставятся. Слова «комплексная амплитуда» опускаются, если это не вызывает неправильного толкования.

### § 1.7. ЛЕММА ЛОРЕНЦА И ТЕОРЕМА ВЗАИМНОСТИ

Рассмотрим два важных следствия из уравнений Максвелла для комплексных амплитуд. Предположим, что электромагнитное поле в некотором объеме $V$ возбуждается двумя независимыми сторонними токами, имеющими комплексные амплитуды плотности тока $\dot{\mathbf{J}}_1^{\text{ст}}$ и $\dot{\mathbf{J}}_2^{\text{ст}}$ и одинаковую частоту $\omega$. Предполагая, что среда, заполняющая объем $V$, линейная, представим электромагнитное поле в этом объеме в виде суперпозиции полей $\dot{\mathbf{E}}_1$, $\dot{\mathbf{H}}_1$ и $\dot{\mathbf{E}}_2$, $\dot{\mathbf{H}}_2$, возбужденных сторонними токами $\dot{\mathbf{J}}_1^{\text{ст}}$ и $\dot{\mathbf{J}}_2^{\text{ст}}$. Каждое из этих полей соответствует уравнениям Максвелла на частоте $\omega$:

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_1 = i\omega\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_1 + \dot{\mathbf{J}}_1^{\text{ст}}; \tag{1.43}$$

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_1 = -i\omega\mu\dot{\mathbf{H}}_1; \tag{1.44}$$

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_2 = i\omega\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_2 + \dot{\mathbf{J}}_2^{\text{ст}}; \tag{1.45}$$

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_2 = -i\omega\mu\dot{\mathbf{H}}_2. \tag{1.46}$$

Помножим скалярно слева уравнение (1.43) на $\mathbf{E}_2$, уравнение (1.46) на $\mathbf{H}_1$ и вычтем второе уравнение из первого. В результате получим

$$\dot{\mathbf{E}}_2 \operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_1 - \dot{\mathbf{H}}_1 \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_2 = i\omega\dot{\mathbf{E}}_2\varepsilon\mathbf{E}_1 + i\omega\dot{\mathbf{H}}_1\mu\dot{\mathbf{H}}_2 + \dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{J}}_1^{\text{ст}}. \tag{1.47}$$

Проделаем аналогичную операцию с уравнениями (1.45) и (1.44):

$$\dot{\mathbf{E}}_1 \operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_2 - \dot{\mathbf{H}}_2 \operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_1 = i\omega\dot{\mathbf{E}}_1\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_2 + i\omega\dot{\mathbf{H}}_2\mu\dot{\mathbf{H}}_1 + \dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{J}}_2^{\text{ст}}. \tag{1.48}$$

Предположим, что среда, заполняющая объем $V$, характеризуется симметричными тензорами диэлектрической и магнитной проницаемости (этому условию удовлетворяют, в частности, изотропные среды, для которых $\varepsilon$ и $\mu$ — скалярные величины). В этом случае $\dot{\mathbf{E}}_2\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_1 = \dot{\mathbf{E}}_1\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_2$; $\dot{\mathbf{H}}_2\mu\dot{\mathbf{H}}_1 = \dot{\mathbf{H}}_1\mu\dot{\mathbf{H}}_2$. Преобразуем левую часть полученных равенств, используя векторное тождество (П.7), после чего вычтем соотношение (1.48) из (1.47). В результате получим

$$\operatorname{div}\{[\dot{\mathbf{H}}_1, \dot{\mathbf{E}}_2] - [\dot{\mathbf{H}}_2, \dot{\mathbf{E}}_1]\} = \dot{\mathbf{J}}_1^{\text{ст}}\dot{\mathbf{E}}_2 - \dot{\mathbf{J}}_2^{\text{ст}}\dot{\mathbf{E}}_1.$$

Поменяв местами сомножители в векторных произведениях, окончательно найдем

$$\operatorname{div}\{[\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_2] - [\dot{\mathbf{E}}_2, \dot{\mathbf{H}}_1]\} = \dot{\mathbf{J}}_1^{\text{ст}}\dot{\mathbf{E}}_2 - \dot{\mathbf{J}}_2^{\text{ст}}\dot{\mathbf{E}}_1. \tag{1.49}$$




Рис. 1.2. К формулировке теоремы взаимности

Соотношение (1.49) называют *леммой Лоренца* в дифференциальной форме. Проинтегрировав его по объему $V$, получим лемму Лоренца в интегральной форме:

$$\oint_S \{[\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_2] - [\dot{\mathbf{E}}_2, \dot{\mathbf{H}}_1]\}\, d\mathbf{S} = \int_V (\dot{\mathbf{J}}_1^{ст}\dot{\mathbf{E}}_2 - \dot{\mathbf{J}}_2^{ст}\dot{\mathbf{E}}_1)\, dV. \quad (1.50)$$

Это соотношение позволяет находить поле, созданное током плотностью $\dot{\mathbf{J}}_2^{ст}$, если известно поле, возбужденное током плотностью $\dot{\mathbf{J}}_1^{ст}$.

Рассмотрим электромагнитное поле, возбуждаемое в неограниченном пространстве сторонними токами плотностями $\dot{\mathbf{J}}_1^{ст}$ и $\dot{\mathbf{J}}_2^{ст}$, существующими в непересекающихся объемах $V_1$ и $V_2$ (рис. 1.2). Так как в бесконечности электромагнитное поле достаточно быстро убывает (см. § 1.8), поверхностный интеграл обращается в нуль. Следовательно,

$$\int_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_1^{ст}\dot{\mathbf{E}}_2\, dV = \int_{V_2} \dot{\mathbf{J}}_2^{ст}\dot{\mathbf{E}}_1\, dV. \quad (1.51)$$

Полученное равенство есть математическая формулировка *теоремы взаимности*. Проиллюстрируем физический смысл этой теоремы, поменяв местами сторонние токи $\dot{\mathbf{J}}_1^{ст}$ и $\dot{\mathbf{J}}_2^{ст}$. Для этого положим $\dot{\mathbf{J}}_2^{ст} = \dot{\mathbf{J}}_1^{ст}$, $V_2 = V_1$. Из теоремы взаимности следует, что в этом случае $\dot{\mathbf{E}}_2 = \dot{\mathbf{E}}_1$, т. е. сторонний ток плотностью $\dot{\mathbf{J}}_1^{ст}$ возбуждал в объеме $V_2$ такое же электрическое поле, какое он возбуждает в объеме $V_1$, будучи помещен в объем $V_2$. Этот вывод имеет важное значение для теории антенн. Он позволяет утверждать, в частности, что если в радиолинии, содержащей передающую и приемную антенны, приемную антенну сделать передающей, а передающую — приемной, параметры радиолинии не изменятся. Напомним, что теорема взаимности справедлива только в средах, имеющих симметричные тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости (в частности, в изотропных средах). Такие среды называют *взаимными*.

## § 1.8. ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ ИХ РЕШЕНИЯ

Методы анализа уравнений Максвелла и свойства полученных решений существенно зависят от формы области, в которой определяется электромагнитное поле, электрофизических свойств заполняющей ее среды, распределения в ней возбуждающего тока и граничных условий. С учетом его различают внутренние и внешние электродинамические задачи.

Если объем $V$, в котором определяется электромагнитное поле, ограничен замкнутой поверхностью $S$, то краевая задача

называется *внутренней*. Она, в свою очередь, может быть задачей о вынужденных колебаниях, если плотность стороннего тока в объеме $V$ и (или) поток энергии через поверхность $S$ не равны нулю, и задачей о *свободных колебаниях* в противном случае.

*Внешняя краевая задача* электродинамики заключается в решении уравнений Максвелла для неограниченного пространства при наличии заданных источников поля и (возможно) областей, внутри которых поле отсутствует, а на поверхности определены некоторые граничные условия.

Рассмотрим условия существования и единственности решения внутренней задачи электродинамики для объема $V$, заполненного линейной средой. Предположим, что существуют два решения уравнений Максвелла $\dot{\mathbf{E}}_1$, $\dot{\mathbf{H}}_1$ и $\dot{\mathbf{E}}_2$, $\dot{\mathbf{H}}_2$, соответствующие одному и тому же распределению плотности стороннего тока $\dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}}$. Записав уравнения Максвелла сначала для первого решения, а затем для второго и вычтя вторую систему уравнений из первой, найдем, что разность решений $\dot{\mathbf{E}}_0=\dot{\mathbf{E}}_1-\dot{\mathbf{E}}_2$, $\dot{\mathbf{H}}_0=\dot{\mathbf{H}}_1-\dot{\mathbf{H}}_2$ удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_0=i\omega\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_0;\quad \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_0=-i\omega\mu\dot{\mathbf{H}}_0;$$

$$\operatorname{div}\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_0=0;\quad \operatorname{div}\mu\dot{\mathbf{H}}_0=0.$$

Соотношение (1.40) для полей $\dot{\mathbf{E}}_0$, $\dot{\mathbf{H}}_0$ приобретает вид

$$-\operatorname{Re}\oint_S\frac{1}{2}[\dot{\mathbf{E}}_0,\dot{\mathbf{H}}_0^*]\,dS=\frac{\omega}{2}\int_V(\varepsilon''\dot{\mathbf{E}}_0\dot{\mathbf{E}}_0^*+\mu''\dot{\mathbf{H}}_0\dot{\mathbf{H}}_0^*)\,dV.$$

Если объем $V$ заполнен поглощающей или регенеративной средой ($\varepsilon''\neq 0$, $\mu''\neq 0$), то интеграл в правой части равенства обращается в нуль только в том случае, когда $\dot{\mathbf{E}}_0=\dot{\mathbf{H}}_0=0$, т. е. когда два решения уравнений Максвелла совпадают во всем объеме $V$. При этом должен обращаться в нуль и интеграл в левой части, что происходит при $\dot{\mathbf{E}}_{0\tau}=0$ или $\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}=0$ на всей поверхности $S$ или $\dot{\mathbf{E}}_{0\tau}=0$ на части поверхности $S_1$; на оставшейся части $\mathbf{S}_2$ $\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}=0$, т. е. на поверхности $S$ должны быть заданы значения касательных составляющих электрического или магнитного полей. Таким образом доказана следующая теорема: *решение внутренней задачи электродинамики о вынужденных колебаниях существует и единственно*, если

а) *среда, заполняющая объем $V$, является поглощающей или регенеративной* [$\varepsilon''\neq 0$ и (или) $\mu''\neq 0$]; б) *на поверхности $S$ задана касательная составляющая электрического* $\dot{\mathbf{E}}_\tau$ *или магнитного* $\dot{\mathbf{H}}_\tau$ *полей, либо на части поверхности $S$ задана составляющая поля* $\dot{\mathbf{E}}_\tau$, *а на оставшейся части составляющая поля* $\dot{\mathbf{H}}_\tau$.

Рассмотрев задачу о свободных колебаниях, из равенства (1.40) находим, что нетривиальные (не обращающиеся тождественно

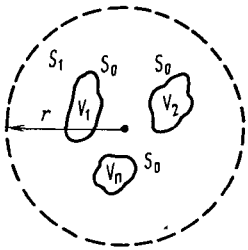



Рис. 1.3. К формулировке внешней задачи электродинамики

в нуль) решения могут существовать только в том случае, когда $\varepsilon''=\mu''=0$, т. е. в объеме $V$ не происходит превращения электромагнитной энергии в другие ее виды. Можно показать, что в этом случае решения уравнений Максвелла не являются единственными.

Рассмотрим внешнюю задачу электродинамики, которая состоит в нахождении электромагнитного поля, возбуждаемого заданными источниками во всем пространстве, за исключением областей $V_1$, $V_2$ ..., на поверхности которых $S_0$ заданы некоторые граничные условия. Окружим области $V_1$, $V_2$ ... и область существования стороннего тока $\dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}}$ сферой $S_1$ большого радиуса $r$ и будем искать решение уравнений Максвелла внутри этой сферы (рис. 1.3). Так как задача свелась к внутренней задаче электродинамики, для единственности решения необходимо, чтобы внутри $S_1$ $\varepsilon''\neq 0$, $\mu''\neq 0$ и

$$\int\limits_{S_0}[\dot{\mathbf{E}}_{0\tau}, \dot{\mathbf{H}}^{*}_{0\tau}]\,d\mathbf{S}+\int\limits_{S_1}[\dot{\mathbf{E}}_{0\tau}, \dot{\mathbf{H}}^{*}_{0\tau}]\,d\mathbf{S}=0.$$

Ввиду произвольности положения сферы $S_1$ нужно, чтобы каждый из этих интегралов равнялся нулю. Из равенства нулю первого интеграла следует, что на поверхности областей $V_1$, $V_2$, ... должны быть заданы касательные составляющие электрического или магнитного поля. Устремив радиус сферы $S_1$ к бесконечности, из равенства нулю второго интеграла получим

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{S_1}[\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}^{*}]\,d\mathbf{S}=0, \tag{1.52}$$

т. е. $|\dot{\mathbf{E}}|$ и $|\dot{\mathbf{H}}|$ должны убывать на бесконечности быстрее, чем $r^{-1}$. Таким образом, *решение внешней задачи электродинамики существует и единственно, если*: а) *среда, заполняющая пространство, является поглощающей* (*активная среда не может заполнять все пространство*); б) *на поверхности областей, вне которых определено поле, заданы касательные составляющие* $\dot{\mathbf{E}}_\tau$ или $\dot{\mathbf{H}}_\tau$; в) *электромагнитное поле на бесконечности удовлетворяет условию* (1.52).

Можно показать, что условие (1.52) эквивалентно *условиям излучения Зоммерфельда*:

$$\lim_{r\to\infty}\left[r\left(\frac{\partial\dot{\mathbf{E}}}{\partial r}-ik\dot{\mathbf{E}}\right)\right]=0;\quad \lim_{r\to\infty}\left[r\left(\frac{\partial\dot{\mathbf{H}}}{\partial r}-ik\dot{\mathbf{H}}\right)\right]=0,$$

где $k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$.

**Контрольные вопросы**

1. Запишите уравнения Максвелла в интегральной форме.
2. Перечислите основные следствия из уравнений Максвелла.
3. Какие электрофизические параметры характеризуют материальные среды? Перечислите основные типы сред. В чем проявляются явления временно́й и пространственной дисперсии?
4. Какие соотношения связывают векторы электромагнитного поля на границе раздела двух сред?
5. Напишите уравнения баланса энергии электромагнитного поля. Поясните физический смысл вектора Пойнтинга.
6. В чем преимущества комплексной формы записи уравнений Максвелла?
7. Напишите уравнение баланса энергии для гармонических колебаний. Почему в нем отсутствуют члены, содержащие производные по времени?
8. Дайте формулировку и поясните физический смысл леммы Лоренца.
9. Приведите формулировку и поясните физический смысл теоремы взаимности.
10. Перечислите основные типы задач электродинамики и условия единственности их решения.

## ГЛАВА 2

# ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

### § 2.1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ПЛОСКИХ ОДНОРОДНЫХ ВОЛН

Рассмотрим однородную изотропную среду без потерь ($\varepsilon''=\mu''=0$), в которой отсутствуют сторонние токи. Пусть электромагнитное поле в этой среде зависит только от координаты $z$ декартовой системы координат. Запишем для этого случая первые два уравнения Максвелла:

$$-\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z}=i\omega\varepsilon\dot{E}_x; \quad (2.1) \qquad -\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z}=-i\omega\mu\dot{H}_x; \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z}=i\omega\varepsilon\dot{E}_y; \quad (2.2) \qquad \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z}=-i\omega\mu\dot{H}_y; \quad (2.5)$$

$$0=i\omega\varepsilon\dot{E}_z; \quad (2.3) \qquad 0=-i\omega\mu\dot{H}_z. \quad (2.6)$$

Из выражений (2.3) и (2.6) следует, что продольные составляющие поля $\dot{E}_z$ и $\dot{H}_z$ равны нулю, т. е. электромагнитное поле имеет только поперечные компоненты.

Оставшиеся уравнения делятся на две группы, одна из которых содержит $\dot{E}_x$ и $\dot{H}_y$, а другая — $\dot{E}_y$ и $\dot{H}_x$. Таким образом, эти две системы уравнений можно решать независимо друг от друга. Продифференцировав, например, (2.5) по $z$, с учетом (2.1) получим

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2}+k^2\dot{E}_x=0. \quad (2.7)$$

Параметр

$$\boxed{k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}=\omega n_{\text{ср}}/c=2\pi n_{\text{ср}}/\lambda} \quad (2.8)$$

называют *волновым числом*, а $n_{\text{ср}}=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$ — *показателем преломления* (*оптической плотностью*) среды. В отсутствие потерь $k$ и $n_{\text{ср}}$ — действительные величины. Введя скорость света $u=c/n_{\text{ср}}$ и длину волны $\lambda_u=\lambda/n_{\text{ср}}$ в данной среде, запишем

$$k=\omega/u=2\pi/\lambda_u. \quad (2.9)$$

Решение уравнения (2.7) имеет вид

$$\dot{E}_x=\dot{A}e^{-ikz}+\dot{B}e^{ikz}, \quad (2.10)$$

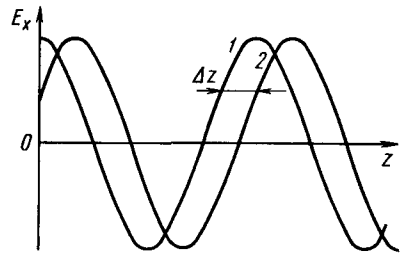



Рис. 2.1. Зависимость напряженности электрического поля плоской волны от координаты в фиксированные моменты времени $t_1$ (кривая *1*) и $t_1+\Delta t$ (кривая *2*)

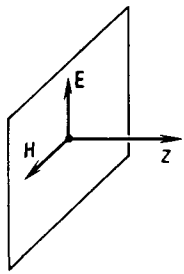



Рис. 2.2. Взаимная ориентация векторов поля плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси $z$

где $\dot{A}$, $\dot{B}$ — произвольные постоянные. Подставив это решение в (2.5), найдем напряженность магнитного поля:

$$\dot{H}_y = Z_0^{-1}\left(\dot{A}e^{-ikz} - \dot{B}e^{ikz}\right),$$

где $Z_0 = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ — *характеристическое сопротивление среды.* Для вакуума $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \approx 120\pi \approx 377$ Ом.

Положив $\dot{B}=0$ и перейдя от комплексных амплитуд к мгновенным значениям напряженности поля, получим

$$E_x(z, t) = A_m \cos(\omega t - kz + \varphi_A);$$

$$H_y(z, t) = Z_0^{-1} A_m \cos(\omega t - kz + \varphi_A).$$

Зависимость $E_x$ от координаты $z$ в фиксированные моменты времени $t_1$ и $t_1+\Delta t$ изображена на рис. 2.1. Как видно, с течением времени электромагнитное поле перемещается вдоль оси $z$ в сторону ее положительных значений, т. е. полученное решение описывает бегущую волну, причем $A_m$ — ее амплитуда, а аргумент косинуса $\varphi = \omega t - k_z + \varphi_A$ — фаза. Геометрическое место точек, в которых электромагнитное поле имеет одинаковую фазу, называют *фронтом волны.* Из полученного решения следует, что в данном случае фронт волны представляет собой плоскость $z=\text{const}$. Во всех точках фронта амплитуда волны одинакова и равна $A_m$, т. е. найденное решение описывает *плоскую однородную волну.*

Найдем скорость перемещения фронта волны, для чего зафиксируем фазу поля: $\omega t - kz + \varphi_A = \text{const}$. Продифференцировав это равенство по времени, получим $\omega - k\frac{dz}{dt} = 0$, откуда *фазовая скорость*

$$v_\Phi = dz/dt = \omega/k = 1/\sqrt{\varepsilon\mu} = c/n_{ср} = u. \qquad (2.11)$$

Для плоской однородной волны фазовая скорость совпадает со скоростью света в данной среде.

Очевидно, что считая в (2.10) $\dot{A}=0$, получим волну, распространяющуюся с той же скоростью в сторону отрицательных значений оси $z$. Такую волну называют *отраженной*, а рассмотренную ранее — *падающей*.

Проанализируем более подробно электромагнитное поле падающей волны. Векторы **E** и **H** (рис. 2.2) образуют правую тройку с ортом оси $z$ и изменяются в одинаковой фазе. Вычислив вектор плотности потока энергии, переносимого волной

$$\mathbf{\Pi}=0{,}5\,\mathrm{Re}\left[\dot{\mathbf{E}},\,\dot{\mathbf{H}}^{*}\right]=0{,}5\,|\dot{A}|^{2}Z_{0}^{-1}\mathbf{e}_{z},$$

находим, что он направлен вдоль оси $z$. Плотность энергии поля определяется выражением

$$w=0{,}25\left(\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_{x}\dot{\mathbf{E}}_{x}^{*}+\mu\dot{\mathbf{H}}_{y}\dot{\mathbf{H}}_{y}^{*}\right)=0{,}5\varepsilon\,|\dot{A}|^{2},$$

справедливым при отсутствии потерь (см. § 1.6). Полученные формулы позволяют найти скорость переноса энергии

$$\mathbf{v}_{э}=\mathbf{\Pi}/w=\frac{1}{\varepsilon Z_{0}}\mathbf{e}_{z}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\mathbf{e}_{z}=u\mathbf{e}_{z},$$

которая в данном случае равна по значению и направлению фазовой скорости.

Процесс распространения монохроматической волны полностью определяется двумя введенными скоростями. Реальные сигналы, однако, содержат много гармонических составляющих с различными частотами. Рассмотрим простейший сигнал, содержащий всего две составляющих с одинаковыми амплитудами $\dot{A}_1=\dot{A}_2=\dot{E}_0$ и разными частотами $\omega_1$, $\omega_2$ и волновыми числами $k_1$, $k_2$. Пусть

$$\Delta\omega=(\omega_2-\omega_1)/2\ll\omega_0;\quad \Delta k=(k_2-k_1)/2\ll k_0,$$

где $\omega_0=(\omega_2+\omega_1)/2$; $k_0=(k_1+k_2)/2$. Мгновенные значения поля напряженности сигнала определяются выражением

$$E_x(z,\,t)=\mathrm{Re}\left\{\dot{E}_0\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_2 t-k_2 z)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 t-k_1 z)}\right]\right\}=\mathrm{Re}\left[\dot{E}_0\cos(\Delta\omega t-\Delta k z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0 t-k_0 z)}\right].$$

Как видно, амплитуда сигнала меняется по косинусоидальному закону (рис. 2.3). Скорость его распространения найдем, зафиксировав некоторую точку на огибающей: $\Delta\omega t-\Delta k z=\mathrm{const}$. Выполнив дифференцирование по времени и перейдя к пределу при $\Delta\omega\to 0$, определим *групповую скорость волны*

$$\boxed{v_{гр}=\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k.} \qquad (2.12)$$

Ее можно рассматривать как скорость распространения огибающей сигнала, если зависимость фазовой скорости от частоты

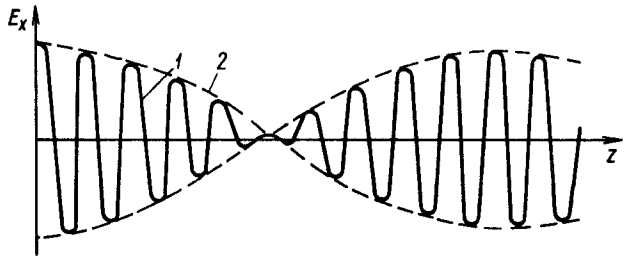



Рис. 2.3. Форма двухчастотного сигнала:
*1* — высокочастотное заполнение; *2* — огибающая

достаточно мала. В противном случае частотные составляющие сигнала имеют различные скорости, что приводит к искажению формы огибающей. Проследить за перемещением какой-либо точки на этой огибающей невозможно, т. е. понятие «скорость распространения сигнала» теряет смысл.

Можно показать, что в отсутствие потерь групповая скорость совпадает со скоростью переноса энергии. Это утверждение справедливо и в том случае, когда потери малы и слабо зависят от частоты. Однако, если потери велики, скорость $v_{гр}$ отличается от $v_э$ и может иногда превышать скорость света. При этом понятие групповой скорости теряет физический смысл.

Найдем групповую скорость плоской однородной волны. С учетом (2.8) и (2.12)

$$v_{гр}=\left(\frac{dk}{d\omega}\right)^{-1}=\left[\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega n_{ср}}{c}\right)\right]^{-1}=\left[\frac{n_{ср}}{c}+\frac{\omega}{c}\frac{dn_{ср}}{d\omega}\right]^{-1}.$$

Если показатель преломления не зависит от частоты, $v_{гр}=v_ф=u$.

Оптическая плотность всех материальных сред в той или иной степени зависит от частоты, т. е. зависит от частоты и фазовая скорость волны. Это явление называется *дисперсией*. Оно наблюдается и при распространении волн в неоднородных средах, даже если их показатель преломления от частоты не зависит (см. гл. 5).

Определим связь между фазовой и групповой скоростями. Для этого значение $\omega$ из (2.11) подставим в (2.12):

$$v_{гр}=d(v_ф k)/dk=v_ф+k\,dv_ф/dk.$$

Воспользовавшись соотношением (2.9), запишем

$$\boxed{v_{гр}=v_ф-\lambda_u\frac{dv_ф}{d\lambda_u}.} \qquad (2.13)$$

Полученное соотношение называют *формулой Рэлея*. Из него следует, что фазовая и групповая скорости могут быть различны

не только по значению, но и по знаку. Если направления этих скоростей одинаковы, то дисперсию считают *положительной*, а если противоположны, то *отрицательной*. Кроме того, в зависимости от знака производной фазовой скорости различают *нормальную* ($dv_ф/d\lambda_u > 0$) и *аномальную* ($dv_ф/d\lambda_u < 0$) дисперсии. Из выражения (2.13) следует, что отрицательная аномальная дисперсия невозможна. Более подробно свойства дисперсных волн рассматриваются в гл. 5 и 10.

## § 2.2. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВОЛН

Уравнения (2.2), (2.4) имеют решение, аналогичное (2.10):

$$\dot{E}_y = \dot{C}e^{-ikz} + \dot{D}e^{ikz}; \quad \dot{H}_x = -Z_0^{-1}(\dot{C}e^{-ikz} - \dot{D}e^{ikz}).$$

В общем случае электромагнитное поле падающей волны содержит обе поперечных составляющих:

$$\dot{\mathbf{E}}_п = (\dot{A}\mathbf{e}_x + \dot{C}\mathbf{e}_y)e^{-ikz};$$

$$\dot{\mathbf{H}}_п = Z_0^{-1}(-\dot{C}\mathbf{e}_x + \dot{A}\mathbf{e}_y)e^{-ikz}.$$

Вычислив скалярное и векторное произведения этих величин, нетрудно убедиться, что при произвольных $\dot{A}$ и $\dot{C}$ векторы напряженности электрического и магнитного полей образуют с направлением распространения правую тройку взаимно перпендикулярных векторов:

$$\dot{\mathbf{E}}_п = \dot{\mathbf{E}}_0 e^{-ikz}; \quad \dot{\mathbf{H}}_п = Z_0^{-1}[\mathbf{e}_z, \dot{\mathbf{E}}_0]e^{-ikz}, \tag{2.14}$$

где $\dot{\mathbf{E}}_0 = \dot{A}\mathbf{e}_x + \dot{C}\mathbf{e}_y$.

Направление каждого из этих векторов может изменяться в пространстве и времени в зависимости от соотношения комплексных амплитуд $\dot{A}$ и $\dot{C}$. Действительно, записав выражение для мгновенного значения напряженности электрического поля

$$\mathbf{E}(z, t) = A_m \mathbf{e}_x \cos(\omega t - kz + \varphi_A) + C_m \mathbf{e}_y \cos(\omega t - kz + \varphi_C),$$

длину вектора $\mathbf{E}$ и угол, который он образует с осью $x$, найдем из формул

$$E(z, t) = [A_m^2 \cos^2(\omega t - kz + \varphi_A) + C_m^2 \cos^2(\omega t - kz + \varphi_C)]^{1/2}; \tag{2.15}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = C_m \cos(\omega t - kz + \varphi_C)/[A_m \cos(\omega t - kz + \varphi_A)], \tag{2.16}$$

т. е. обе эти величины есть функции времени $t$ и координаты $z$. Зависимость угла $\alpha$ от $z$ и $t$ определяет *поляризацию* волны.

Пусть, например, $\varphi_A = \varphi_C$. Тогда из записанных выражений следует, что

$$E(z, t) = \sqrt{A_m^2 + C_m^2}\cos(\omega t - kz + \varphi_A);$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}(C_m/A_m),$$

т. е. направление вектора **E** остается в пространстве неизменным, а длина его меняется по косинусоидальному закону (рис. 2.4). Такая волна называется *линейно поляризованной*.

Положив $C_m = A_m$, $\varphi_C = \varphi_A - \pi/2$, согласно (2.15), (2.16), получим

$$E(z, t) = A_m;$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\cos(\omega t - kz + \varphi_A - \pi/2)}{\cos(\omega t - kz + \varphi_A)} = \omega t - kz + \varphi_A,$$

т. е. длина вектора **E** остается постоянной, а угол, образуемый им с осью абсцисс,

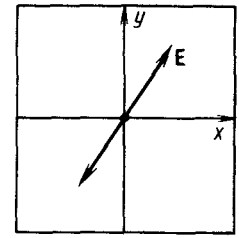



Рис. 2.4. Ориентация векторов напряженности электрического поля волны с линейной поляризацией

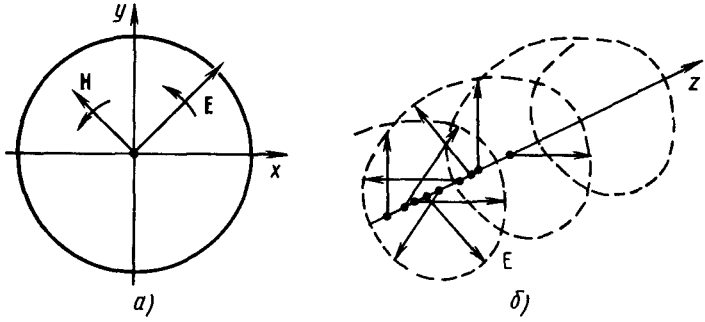



Рис. 2.5. Ориентация вектора напряженности электрического поля волны с левой круговой поляризацией

линейно зависит от координаты и времени. Конец вектора **E** описывает в плоскости $z = \text{const}$ окружность, вращаясь с угловой скоростью $\omega$ против часовой стрелки, если смотреть навстречу движению волны (рис. 2.5, *а*). В момент времени $t$ геометрическим местом конца вектора **E** является винтовая линия (спираль) с шагом $\lambda_u = 2\pi/k$ (рис. 2.5, *б*). При увеличении координаты $z$ вектор **E** поворачивается по часовой стрелке. Такая волна имеет *левую круговую поляризацию*. Если $\varphi_C = \varphi_A + \pi/2$, то направление вращения вектора **E** изменяется на противоположное (волна с *правой круговой поляризацией*). Волну с линейной поляризацией можно представить как суперпозицию двух волн с круговой поляризацией, имеющих одинаковые амплитуды и противоположные направления вращения (рис. 2.6).

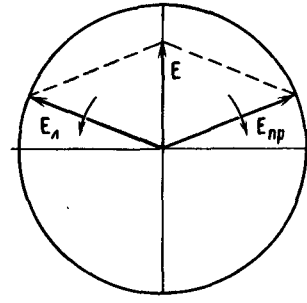



Рис. 2.6. Разложение линейно поляризованной волны на две волны с круговой поляризацией

В общем случае амплитуда и направление вектора **E** не остаются постоянными. Волну такого типа называют *эллиптически поляризованной*. Ее можно представить как суперпозицию волн с линейной и круговой поляризацией. В заключение заметим, что направление вектора **H** меняется в пространстве и во времени так же, как и направление вектора **E**, поскольку пространственный угол между ними всегда составляет 90°, а фазовые углы равны.

## § 2.3. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

До сих пор рассматривались свойства падающей волны. Однако нетрудно убедиться, что при изменении направления оси $z$ падающая волна превращается в отраженную, а отраженная — в падающую [см., например, выражение (2.10)]. Таким образом, физические свойства этих волн идентичны. Пусть электромагнитное поле представляет собой суперпозицию падающей и отраженной волн с одинаковыми амплитудами, т. е. $\dot{A} = \dot{B}$. Тогда выражения для напряженностей электромагнитного поля принимают вид

$$\dot{E}_x = \dot{A}\left(e^{-ikz} + e^{ikz}\right) = 2\dot{A}\cos kz;$$

$$\dot{H}_y = Z_0^{-1}\dot{A}\left(e^{-ikz} - e^{ikz}\right) = -2iZ_0^{-1}\dot{A}\sin kz,$$

а для мгновенных значений имеют место равенства

$$E_x(z, t) = 2A_m \cos kz \cos(\omega t + \varphi_A);$$

$$H_y(z, t) = 2A_m Z_0^{-1} \sin kz \sin(\omega t + \varphi_A).$$

Так как амплитуда, по определению, — положительное число, перепишем полученные выражения в следующем виде:

$$E_x(z, t) = 2A_m |\cos kz| \cos(\omega t + \varphi_A + \pi\delta);$$

$$H_y(z, t) = 2A_m Z_0^{-1} |\sin kz| \times$$
$$\times \cos(\omega t + \varphi_A - \pi/2 + \pi\delta),$$

где

$$\delta = \begin{cases} 0, & \cos kz \geqslant 0, \\ 1, & \cos kz < 0. \end{cases}$$

Следовательно, зависимость амплитуды колебаний от координаты определяется функциями $|\cos kz|$ и $|\sin kz|$, а фаза меняется скачком на 180° в точках, где

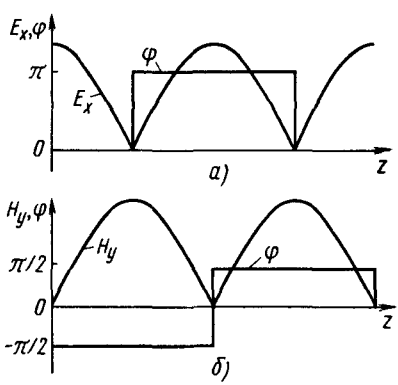



Рис. 2.7. Распределение амплитуды и фазы напряженности электрического (*а*) и магнитного (*б*) полей стоячей волны по координате $z$

амплитуда колебаний равна нулю (рис. 2.7). Сдвиг фазы между напряженностями электрического и магнитного полей в любой точке равен 90°. Поэтому средняя плотность потока энергии

$$p=\frac{1}{2}\operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}^*]=\frac{1}{2}\operatorname{Re}(4i\dot{A}\dot{A}^* Z_0^{-1}\cos kz \sin kz\, \mathbf{e}_z)=0.$$

Так как узлы и пучности поля не меняют своего положения на оси $z$, описанные волны называют *стоячими*.

## § 2.4. ВОЛНЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ НАПРАВЛЕНИЕМ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

До сих пор предполагалось, что ось $z$ декартовой системы координат совпадает с направлением распространения волны. Однако если положение этой системы координат фиксировано в пространстве, то волна может распространяться по отношению к ней в произвольном направлении. В этом случае удобно пользоваться понятием *луча*, который определяется как линия, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с вектором скорости переноса энергии. В однородной изотропной среде луч представляет собой прямую линию, совпадающую по направлению с вектором фазовой скорости $\mathbf{v}_\Phi$.

Введем прямоугольную систему координат $\xi$, $\eta$, $\zeta$ так, чтобы направление распространения волны (луч) совпало с осью $\zeta$ (рис. 2.8). Электромагнитное поле волны в этой системе координат описывается выражениями, следующими из (2.14):

$$\dot{\mathbf{E}}=\dot{\mathbf{E}}_0 e^{-ik\zeta};\quad \dot{\mathbf{H}}=Z_0^{-1}[\mathbf{e}_\zeta, \dot{\mathbf{E}}_0]e^{-ik\zeta}. \tag{2.17}$$

Пусть направление оси $\zeta$ в системе координат $x$, $y$, $z$ определяется углами $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$:

$$\mathbf{e}_\zeta=\mathbf{e}_x\cos\gamma_1+\mathbf{e}_y\cos\gamma_2+\mathbf{e}_z\cos\gamma_3.$$

Введем волновой вектор $\mathbf{k}$, направление которого совпадает с направлением луча, а длина равна волновому числу:

$$\mathbf{k}=k\mathbf{e}_\zeta=k_x\mathbf{e}_x+k_y\mathbf{e}_y+k_z\mathbf{e}_z, \tag{2.18}$$

где $k_x=k\cos\gamma_1$; $k_y=k\cos\gamma_2$; $k_z=k\cos\gamma_3$ — проекции волнового вектора на оси координат $x$, $y$, $z$. Очевидно, что волновой вектор перпендикулярен волновому фронту.

Используя (2.18), преобразуем показатель экспоненты в (2.17):

$$k_\zeta=kx\cos\gamma_1+ky\cos\gamma_2+kz\cos\gamma_3=\mathbf{kr},$$

где $\mathbf{r}=x\mathbf{e}_x+y\mathbf{e}_y+z\mathbf{e}_z$ — радиус-вектор.

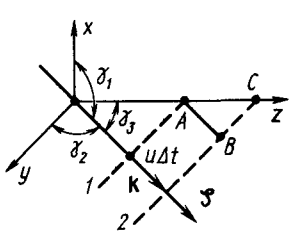



Рис. 2.8. К выводу уравнения плоской электромагнитной волны, распространяющейся в произвольном направлении:
*1, 2* — положения фронта волны в моменты времени $t$ и $t+\Delta t$

Таким образом, электромагнитное поле плоской однородной волны, распространяющейся в произвольном направлении $\mathbf{e}_\zeta$, определяется выражениями

$$\boxed{\dot{\mathbf{E}}=\dot{\mathbf{E}}_0 e^{-ikr};\ \dot{\mathbf{H}}=Z_0^{-1}[\mathbf{e}_\zeta, \dot{\mathbf{E}}_0]e^{-ikr},} \qquad (2.19)$$

где $\mathbf{e}_\zeta \mathbf{E}_0 = 0$.

Найдем скорость перемещения волнового фронта (фазовую скорость) вдоль осей $x$, $y$, $z$. Так как

$$\dot{\mathbf{E}}=\dot{\mathbf{E}}_0 e^{-i(k_x x+k_y y+k_z z)},$$

$$v_{\phi x}=\omega/k_x=u/\cos\gamma_1;\ v_{\phi y}=\omega/k_y=u/\cos\gamma_2;\ v_{\phi z}=\omega/k_z=u/\cos\gamma_3.$$

Этот же результат получим при рассмотрении треугольника $ABC$ на рис. 2.8:

$$v_{\phi z}=AC/\Delta t=AB/(\Delta t\cos\gamma_3)=u/\cos\gamma_3.$$

Таким образом, скорость перемещения волнового фронта вдоль осей координат всегда больше или равна фазовой скорости волны вдоль ее направления распространения, в частности она может превышать скорость света в вакууме. Это не противоречит теории относительности, так как с перемещением волнового фронта не связана передача энергии или информации. Скорость переноса энергии вдоль осей координат определяется проекциями вектора $\mathbf{v}_э$:

$$v_{эx}=v_э\cos\gamma_1;\ v_{эy}=v_э\cos\gamma_2;$$

$$v_{эz}=v_э\cos\gamma_3$$

и никогда не превышает скорость света.

Следовательно, скорости перемещения волнового фронта и переноса энергии вдоль данного направления не совпадают и зависят от угла, образуемого волновым вектором с данным направлением. Заметим, что в изотропной среде без потерь $v_{\phi\zeta}v_{э\zeta}=v_\phi v_э=u^2$ — величина, постоянная для любого направления $\zeta$.

## § 2.5. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся перпендикулярно границе раздела двух сред (нормальное падение волны). Ось $z$ системы координат расположим вдоль направления распространения.

Предположим, что при падении волны на границу раздела двух сред она частично проходит во вторую среду, а частично отражается. Поэтому электромагнитное поле в первой среде можно представить в виде суперпозиции падающей и отраженной волн. Полагая, что вектор $\dot{\mathbf{E}}$ падающей волны направлен вдоль оси $x$ (что не уменьшает общности), запишем

$$\dot{\mathbf{E}}_1 = \dot{E}_{\text{п}x}\mathbf{e}_x e^{-ik_1 z} + (\dot{E}_{\text{о}x}\mathbf{e}_x + \dot{E}_{\text{о}y}\mathbf{e}_y) e^{ik_1 z};$$

$$\dot{\mathbf{H}}_1 = \dot{Z}_{01}^{-1}\dot{E}_{\text{п}x}\mathbf{e}_y e^{-ik_1 z} + Z_{01}^{-1}(-\dot{E}_{\text{о}x}\mathbf{e}_y + \dot{E}_{\text{о}y}\mathbf{e}_x) e^{ik_1 z}.$$

Поле во второй среде имеет вид бегущей от границы раздела (*преломленной*) волны:

$$\dot{\mathbf{E}}_2 = (\dot{E}_{\text{пр}x}\mathbf{e}_x + \dot{E}_{\text{пр}y}\mathbf{e}_y) e^{-ik_2 z};$$

$$\dot{\mathbf{H}}_2 = Z_{02}^{-1}(-\dot{E}_{\text{пр}x}\mathbf{e}_y + \dot{E}_{\text{пр}y}\mathbf{e}_x) e^{-ik_2 z}.$$

В этих выражениях $k_{1,2} = \omega\sqrt{\varepsilon_{1,2}\mu_{1,2}}$ $Z_{01,2} = \sqrt{\mu_{1,2}/\varepsilon_{1,2}}$. При отсутствии поверхностного тока касательные составляющие векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ на поверхности раздела должны быть непрерывны, т. е. $\dot{E}_{\text{п}x} + \dot{E}_{\text{о}x} = \dot{E}_{\text{пр}x}$; $Z_{01}^{-1}(\dot{E}_{\text{п}x} - \dot{E}_{\text{о}x}) = -Z_{02}^{-1}\dot{E}_{\text{пр}x}$; $\dot{E}_{\text{о}y} = \dot{E}_{\text{пр}y}$; $Z_{01}^{-1}\dot{E}_{\text{о}y} = Z_{02}^{-1}\dot{E}_{\text{пр}y}$. Из третьего и четвертого уравнений следует, что $\dot{E}_{\text{о}y} = \dot{E}_{\text{пр}y} = 0$, т. е. направления поляризации падающей, отраженной и преломленной волн совпадают. Решая первые два уравнения, получим

$$\Gamma = \frac{\dot{E}_{\text{о}x}}{\dot{E}_{\text{п}x}} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}; \quad T = \frac{\dot{E}_{\text{пр}x}}{\dot{E}_{\text{п}x}} = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}}. \tag{2.20}$$

Величины $\Gamma$ и $T$ называют *коэффициентами отражения и преломления волны*. Из формулы (2.20) следует, что при $Z_{02} = Z_{01}$ коэффициент отражения равен нулю, а коэффициент преломления — единице, что соответствует полному переходу энергии из одной среды в другую. В этом случае среды называют *согласованными*.

Рассмотрим наклонное падение волны на границу раздела двух сред. Направление распространения падающей волны определим лучом $AO$ (рис. 2.9). Плоскость, в которой лежат луч и нормаль к границе раздела $\mathbf{n}_0$, проведенная в точке ее пересечения с лучом, назовем плоскостью падения и совместим ее с плоскостью $xOz$ декартовой системы координат. Поле падающей волны в этом случае не зависит от координаты $y$. Из непрерывности касательных составляющих векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ на границе раздела следует, что зависимости полей трех волн от координат $y$ и $z$ одинаковы. Поэтому лучи отраженной и преломленной волн $OB$ и $OC$ (рис. 2.9) также лежат в плоскости падения, а проекции их волновых векторов на ось $z$ равны: $k_{\text{п}z} = k_{\text{о}z} = k_{\text{пр}z}$. Отсюда

$$k_1 \cos\gamma_{\text{п}} = k_1 \cos\gamma_{\text{о}} = k_2 \cos\gamma_{\text{пр}},$$

где $\gamma_{\text{п}}$, $\gamma_{\text{о}}$, $\gamma_{\text{пр}}$ — углы, образуемые соответствующими лучами с осью $z$. Введя *углы падения* $\varphi = \pi/2 - \gamma_{\text{п}}$, *отражения* $\psi = \pi/2 - \gamma_{\text{о}}$ и *преломления* $\theta = \pi/2 - \gamma_{\text{пр}}$, найдем

$$\boxed{\psi = \varphi; \quad \sin\theta/\sin\varphi = k_1/k_2 = n_{\text{ср}1}/n_{\text{ср}2}} \tag{2.21}$$

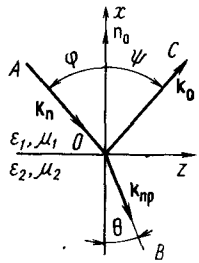



Рис. 2.9. Наклонное падение электромагнитной волны на границу раздела сред

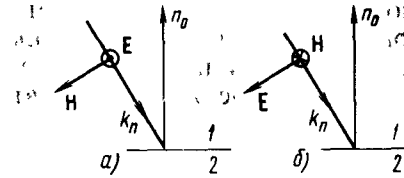



Рис. 2.10. Типы поляризации волн, падающих на границу раздела сред

где $n_{ср1}=\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r1}}$; $n_{ср2}=\sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r2}}$ — показатели преломления первой и второй сред. Выражения (2.21) известны как *законы Снеллиуса.*

Для нахождения коэффициентов отражения и преломления целесообразно рассмотреть два взаимно перпендикулярных направления поляризации падающей волны. В первом случае (рис. 2.10, *а*) вектор **E** направлен перпендикулярно плоскости падения (параллельно поверхности раздела). Такую поляризацию назовем *перпендикулярной.* Во втором случае (рис. 2.10, *б*) вектор **E** лежит в плоскости падения, такую поляризацию считают *параллельной.* В общем случае электромагнитное поле падающей волны можно представить как суперпозицию волн с параллельной и перпендикулярной поляризацией.

Используя условия (1.18)—(1.21) для векторов **Ė** и **Ḣ** на поверхности раздела сред, можно получить следующие выражения для коэффициентов отражения и преломления:

$$\Gamma_{\perp}=\frac{Z_{02}\cos\varphi-Z_{01}\cos\theta}{Z_{02}\cos\varphi+Z_{01}\cos\theta};\quad T_{\perp}=\frac{2Z_{02}\cos\varphi}{Z_{02}\cos\varphi+Z_{01}\cos\theta} \tag{2.22}$$

(перпендикулярная поляризация);

$$\Gamma_{\parallel}=\frac{Z_{02}\cos\theta-Z_{01}\cos\varphi}{Z_{02}\cos\theta+Z_{01}\cos\varphi};\quad T_{\parallel}=\frac{2Z_{02}\cos\varphi}{Z_{02}\cos\theta+Z_{01}\cos\varphi} \tag{2.23}$$

(параллельная поляризация).

Выражения (2.22) и (2.23) называют *формулами Френеля.* Из них следует, что при определенном угле падения коэффициент отражения обращается в нуль. Это условие определяет *угол полного прохождения* (*угол Брюстера* $\varphi_{Б}$). Подставив формулы (2.22), (2.23) в (2.21), получим

$$\sin^2\varphi_{Б\perp}=\frac{\varepsilon_2/\varepsilon_1-\mu_2/\mu_1}{\mu_1/\mu_2-\mu_2/\mu_1};\quad \sin^2\varphi_{Б\parallel}=\frac{\mu_2/\mu_1-\varepsilon_2/\varepsilon_1}{\varepsilon_1/\varepsilon_2-\varepsilon_2/\varepsilon_1}. \tag{2.24}$$

Из (2.24) следует, что для немагнитных диэлектриков ($\mu_1=\mu_2=\mu_0$) при перпендикулярной поляризации полное прохождение не наблюдается при любых углах падения, в то время как для

параллельной поляризации полное прохождение возможно при угле падения $\varphi_{Б\parallel} = \operatorname{arctg}\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$. Если под этим углом на поверхность раздела падает волна, имеющая составляющие с параллельной и перпендикулярной поляризациями, то отраженная волна содержит только вторую составляющую, так как первая полностью проходит через границу раздела сред. Таким образом, отраженная волна оказывается плоскополяризованной.

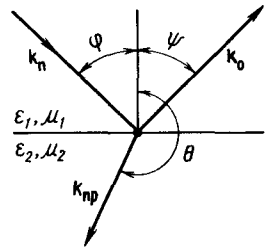


Рис. 2.11. Преломление волн на границе раздела сред с положительной и отрицательной дисперсией

Интересные особенности имеют процессы отражения и преломления волны при ее падении на поверхность среды с отрицательной дисперсией. В этом случае распространению энергии от поверхности раздела соответствует набегание на нее волнового фронта преломленной волны. В результате угол преломления оказывается тупым (рис. 2.11). Отличаются от обычных и числовые значения коэффициентов отражения и преломления.

## § 2.6. ПОЛНОЕ ВНУТРЕННЕЕ ОТРАЖЕНИЕ

Из формул (2.21) следует, что если электромагнитная волна переходит из оптически более плотной среды в менее плотную, то при определенном угле падения

$$\boxed{\varphi_0 = \arcsin\left(n_{ср2}/n_{ср1}\right)} \qquad (2.25)$$

преломленный луч направлен вдоль границы раздела ($\theta = 90°$). При дальнейшем увеличении угла падения преломленный луч исчезает, так как равенству (2.21) не удовлетворяет ни один действительный угол преломления ($\sin\theta = (n_{ср1}/n_{ср2})\sin\varphi > 1$). Описанное явление называют *полным внутренним отражением*, а угол $\varphi_0$ — *углом полного внутреннего отражения*.

Рассмотрим структуру поля в первой и второй средах при полном внутреннем отражении. Поле в первой среде представляет собой суперпозицию падающей и отраженной волн:

$$\dot{\mathbf{E}}_1 = \dot{\mathbf{E}}_п e^{-\imath(-k_1 x\cos\varphi + k_1 z\sin\varphi)} + \dot{\mathbf{E}}_о e^{-\imath(k_1 x\cos\varphi + k_1 z\sin\varphi)}.$$

Так как отражение полное, амплитуда отраженной волны равна амплитуде падающей с точностью до фазового множителя: $\dot{E}_о = \dot{E}_п e^{\imath\xi}$. Отсюда

$$\dot{\mathbf{E}}_1 = \dot{\mathbf{E}}_п\left[e^{\imath(k_1 x\cos\varphi - \xi/2)} + e^{-\imath(k_1 x\cos\varphi - \xi/2)}\right] e^{-\imath(k_1 z\sin\varphi - \xi/2)} =$$

$$= 2\dot{\mathbf{E}}_п\cos\left(k_1 x\cos\varphi - \xi/2\right) e^{-\imath(k_1 z\sin\varphi - \xi/2)}.$$

Следовательно, в первой среде результирующее поле распространяется вдоль оси $z$ с фазовой скоростью

$$v_{\phi z}=\frac{\omega}{k_{1z}}=\frac{\omega}{\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\sin\varphi}=\frac{c}{n_{cp1}\sin\varphi}.$$

В направлении оси $x$ поле представляет собой стоячую волну, максимумы и минимумы которой расположены на расстоянии $\lambda_x$, определяемом из условия $k_1\lambda_x\cos\varphi=2\pi$. Следовательно,

$$\lambda_x=2\pi/(k_1\cos\varphi)=\lambda/(n_{cp1}\cos\varphi).$$

Формально электрическое поле во второй среде представим как преломленную волну:

$$\dot{\mathbf{E}}_2=\dot{\mathbf{E}}_{пр}e^{-i(-k_{2x}\cos\theta+k_{2z}\sin\theta)}. \tag{2.26}$$

Согласно (2.21),

$$\sin\theta=\frac{n_{cp1}}{n_{cp2}}\sin\varphi;\quad \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{n_{cp1}}{n_{cp2}}\right)^2\sin^2\varphi}.$$

При полном отражении подкоренное выражение отрицательно, поэтому $\cos\theta$ — мнимая величина:

$$\cos\theta=\pm i\sqrt{\left(\frac{n_{cp1}}{n_{cp2}}\right)^2\sin^2\varphi-1}=\pm i\alpha.$$

Подставив значения $\sin\theta$ и $\cos\theta$ в (2.26), получим

$$\dot{\mathbf{E}}_2=\mathbf{E}_{пр}e^{\mp\alpha k_2 x}e^{-ik_1 z\sin\varphi}. \tag{2.27}$$

Так как при удалении от поверхности раздела двух сред (при $x\to-\infty$) поле не может неограниченно возрастать, в показателе экспоненты необходимо выбрать знак плюс. Следовательно, во второй среде поле экспоненциально убывает по мере удаления от границы раздела сред. Скорость этого убывания возрастает при увеличении угла падения $\varphi$ и отношения показателей преломления сред $n_{cp1}/n_{cp2}$.

Таким образом, поле во второй среде представляет собой плоскую неоднородную волну, распространяющуюся вдоль оси $z$. Так как оно сосредоточено вблизи поверхности раздела, такую волну называют *поверхностной*. Отметим, что, поскольку при полном отражении $k_1\sin\varphi>k_2$, скорость волны во второй среде $v_{\phi z}$ меньше скорости света в этой среде $u_2=\omega/k_2$. Поэтому такие волны называют еще *медленными* в отличие от быстрых, фазовая скорость которых больше или равна скорости света в данной среде.

## § 2.7. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПОГЛОЩАЮЩИХ СРЕДАХ

При распространении волн в реальных средах происходит частичное рассеяние их электромагнитной энергии, т. е. переход ее в другие формы. В таких средах мнимые части диэлектрической и (или) магнитной проницаемостей отличны от нуля. Волновое число

$$k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}=\omega\sqrt{(\varepsilon'-i\varepsilon'')(\mu'-i\mu'')} \tag{2.28}$$

и характеристическое сопротивление

$$Z_0=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\sqrt{\frac{\mu'-i\mu''}{\varepsilon'-i\varepsilon''}} \tag{2.29}$$

принимают комплексные значения.

Рассмотрим распространение волны в несовершенном диэлектрике ($\varepsilon''\ll\varepsilon'$; $\mu''\ll\mu'$). Разложив выражения (2.28) и (2.29) в степенные ряды и отбросив члены второго и более высоких порядков малости, получим

$$k=\omega\sqrt{\varepsilon'\mu'}\left[1-0{,}5i\left(\operatorname{tg}\delta_\varepsilon+\operatorname{tg}\delta_\mu\right)\right];$$

$$Z_0=\sqrt{\mu'/\varepsilon'}\left[1+0{,}5i\left(\operatorname{tg}\delta_\varepsilon-\operatorname{tg}\delta_\mu\right)\right].$$

Подставив эти выражения в (2.14), найдем

$$\dot{\mathbf{E}}_\text{п}=\dot{\mathbf{E}}_0 e^{-k''z}e^{-ik'z};$$

$$\dot{\mathbf{H}}_\text{п}=\dot{\mathbf{H}}_0 e^{-k''z}e^{-ik'z},$$

где $\dot{\mathbf{H}}_0=[\mathbf{e}_z,\ \dot{\mathbf{E}}_0]/Z_0$,

$$k'=\omega\sqrt{\varepsilon'\mu'};\quad k''=0{,}5k'\operatorname{tg}\delta;\quad \operatorname{tg}\delta=\operatorname{tg}\delta_\varepsilon+\operatorname{tg}\delta_\mu. \tag{2.30}$$

Напомним, что в отсутствие потерь характеристическое сопротивление среды действительно (сдвиг фазы между векторами $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ равен нулю). При наличии потерь этот сдвиг отличен от нуля, однако при равенстве электрических и магнитных потерь ($\delta_\varepsilon=\delta_\mu$) он отсутствует.

Амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей экспоненциально убывают по мере распространения со скоростью, определяемой мнимой частью волнового числа. Так как переносимая волной мощность пропорциональна квадрату амплитуды напряженности поля, скорость ее убывания определяется величиной $2k''=k'\operatorname{tg}\delta$. Проанализируем распространение электромагнитной волны в неферромагнитном металле, для которого $\varepsilon=\varepsilon_0-i\sigma/\omega$, $\mu=\mu_0$, причем в диапазоне СВЧ $\sigma/\omega\gg\varepsilon_0$. Металл, таким образом, представляет собой очень плотную оптическую среду, модуль показателя преломления которой $|n_\text{м}|=|\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}|=|\sqrt{(1-i\sigma/\omega\varepsilon_0)}|\approx\sqrt{\sigma/\omega\varepsilon_0}\gg1$. Поэтому из (2.21) следует, что на границе раздела вакуум (воздух)—металл угол преломления $\theta=\arcsin\left(\frac{n_{\text{ср}1}}{|n_\text{м}|}\sin\varphi\right)=\arcsin\left(\sqrt{\frac{\omega\varepsilon_0}{\sigma}}\sin\varphi\right)$ независимо от угла падения $\varphi$ близок нулю, т. е. электромагнитные волны всегда распространяются в металле по нормали к его поверхности.

Волновое число, характеризующее распространение электромагнитной волны в металле,

$$k_\text{м}=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0(1-i\sigma/\omega\varepsilon_0)}\approx$$

$$\approx\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{-i\sigma/\omega\varepsilon_0}=\sqrt{\omega\mu_0\sigma/2}(1-i) \tag{2.31}$$

— комплексная величина, причем действительная и мнимая ее части равны.

Характеристическое сопротивление металла

$$Z_{0м}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\approx\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}}(1+i)=\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{\sigma}}e^{i\pi/4} \tag{2.32}$$

по модулю близко к нулю, а сдвиг фаз между векторами $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ составляет 45°. Таким образом, электромагнитное поле плоской волны в металле определяется выражениями

$$\dot{\mathbf{E}}=\dot{\mathbf{E}}_0e^{-k'z}e^{-ik z};$$

$$\dot{\mathbf{H}}=Z_{0м}^{-1}[\mathbf{e}_z,\dot{\mathbf{E}}_0]e^{-k''z}e^{-ik'z}, \tag{2.33}$$

причем вектор $\dot{\mathbf{E}}_0$ параллелен поверхности раздела.

Электрическое поле возбуждает в металле ток проводимости плотностью

$$\dot{\mathbf{J}}=\sigma\dot{\mathbf{E}}=\sigma\dot{\mathbf{E}}_0e^{-k''z}e^{-ik'z}. \tag{2.34}$$

Скорость затухания тока и поля по мере распространения волны вглубь металла зависит от мнимой части волнового числа. Расстояние, на котором их амплитуды уменьшаются в e раз, называют *глубиной проникновения (толщиной скин-слоя)*:

$$\boxed{\delta=1/k'=\sqrt{2/(\omega\mu_0\sigma)}.} \tag{2.35}$$

Для меди ($\sigma=5{,}72\cdot10^{-7}$ См/м) на частоте 10 ГГц $\delta=0{,}66$ мкм. На расстоянии 5 мкм от поверхности амплитуда поля уменьшается уже в 2000 раз. Таким образом, электромагнитное поле проникает в металл на очень небольшую глубину. Это явление называют *поверхностным эффектом (скин-эффектом)*.

Рассмотрим граничные условия для векторов электромагнитного поля на поверхности раздела металл — диэлектрик. Касательные составляющие электромагнитного и магнитного полей на этой поверхности непрерывны: $\dot{\mathbf{E}}_{1\tau}=\dot{\mathbf{E}}_{2\tau}$; $\mathbf{H}_{1\tau}=\mathbf{H}_{2\tau}$. Для плоской волны в металле, распространяющейся перпендикулярно его поверхности, справедливы соотношения (2.33). Так как любое поле в диэлектрике можно представить в виде суперпозиции плоских волн, а угол преломления таких волн близок нулю, для произвольного поля в диэлектрике имеет место равенство

$$\boxed{\dot{\mathbf{E}}_{1\tau}=Z_s[\dot{\mathbf{H}}_{1\tau},\mathbf{n}_0],} \tag{2.36}$$

где $\mathbf{n}_0$ — орт нормали, направленный в металл: $Z_s=R_s-iX_s=(1-i)\times$ $\times\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}}=\frac{1-i}{\delta\sigma}$ — поверхностное сопротивление. Равенство (2.36) называют *граничным условием Леонтовича*. Как показывает анализ, оно справедливо, если радиус кривизны поверхности раздела $R\gg\delta$.

На границе раздела металл — диэлектрик протекает поверхностный ток

$$\dot{I}_s = \int_0^\infty |J| \, dz = \delta\sigma E_{1\tau} = E_{1\tau}/(R_s + iX_s). \qquad (2.37)$$

Для идеального проводника $\sigma \to \infty$, $\delta \to 0$, $Z_{0м} \to 0$. Следовательно, в идеальный проводник поле не проникает ($\mathbf{E}_2 = \mathbf{H}_2 = 0$). На его поверхности выполняются граничные условия

$$\boxed{\dot{\mathbf{E}}_{1\tau} = 0; \ [\mathbf{n}_0, \dot{\mathbf{H}}_{1\tau}] = \dot{\mathbf{I}}_s.} \qquad (2.38)$$

Чтобы оценить степень приближения, получаемого при замене граничных условий (2.36) на (2.38), вычислим коэффициент отражения от поверхности раздела медь — вакуум на частоте $f = 10$ ГГц по формуле (2.20). Для вакуума $Z_{01} = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 377$ Ом, для меди $Z_{02} = \sqrt{\omega\mu_0/2\sigma}(1 - i) = 0{,}0263(1 - i)$ Ом. Тогда

$$\Gamma = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \approx -0{,}99986.$$

Модуль коэффициента отражения с высокой степенью точности (порядка 0,015%) можно считать равным единице, т. е. совпадающим с соответствующим значением для идеально проводящей поверхности.

В заключение определим плотность потока энергии, направленного вглубь металла:

$$p_s = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}}_{1\tau}, \dot{\mathbf{H}}^*_{1\tau}].$$

Так как эта энергия преобразуется в теплоту, поверхностная плотность мощности тепловых потерь, согласно (2.32) и (2.33),

$$p_s = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}} |\dot{\mathbf{E}}_0|^2 = \frac{1}{2R_s} |\dot{\mathbf{E}}_0|^2 = \frac{1}{2} R_s |\dot{\mathbf{H}}_0|^2. \qquad (2.39)$$

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение скоростей, характеризующих распространение волн, и поясните их физический смысл.
2. Что такое дисперсия волн? При каких условиях она наблюдается? Перечислите возможные типы дисперсии.
3. Как связаны между собой векторы **E** и **H** в однородной плоской электромагнитной волне?
4. Назовите типы поляризации электромагнитной волны. Как определяется направление круговой поляризации?
5. Укажите закон изменения амплитуды и фазы поля в стоячей электромагнитной волне. Чему равна передаваемая стоячей волной мощность?
6. Сформулируйте основные законы отражения и преломления электромагнитных волн при нормальном падении. Что такое согласованные среды?
7. Что такое угол Брюстера и при каких условиях он существует?
8. Опишите явление полного внутреннего отражения. Какова структура поля по обе стороны от границы раздела? Что такое медленные волны?
9. Как зависит скорость затухания электромагнитной волны в несовершенном диэлектрике от частоты? Считаем, что параметры диэлектрика от частоты не зависят.
10. Опишите свойства металла как среды, в которой распространяются электромагнитные волны СВЧ-диапазона. Дайте определение понятия «глубина проникновения».

## ГЛАВА 3

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ГИРОТРОПНЫХ СРЕДАХ

### § 3.1. АНИЗОТРОПНЫЕ СРЕДЫ. ГИРОТРОПИЯ

Распространение электромагнитных волн в анизотропных средах имеет целый ряд особенностей. Анизотропны большинство кристаллов, многие поликристаллические вещества и жидкости становятся анизотропными под воздействием давления, статических электрического и магнитного полей. Анизотропными свойствами обладает намагниченная плазма. В устройствах СВЧ применяют намагниченные ферриты, которые также обладают анизотропией.

*Ферритами* называют химические соединения оксида железа с оксидами других, так называемых характеризующих металлов. Подробнее химический состав, строение и свойства ферритов описываются в гл. 18. Особенностью этих материалов является сочетание ферромагнитных свойств с низкой электропроводностью, благодаря которой электромагнитные волны при определенных условиях могут распространяться в ферритах с достаточно малым затуханием.

Магнитные свойства ферритов определяются наличием в их кристаллической решетке «магнитных атомов» — атомов или ионов, обладающих магнитным моментом $\mathbf{m}$. Такой момент создается нескомпенсированными спиновыми магнитными моментами электронов атома (орбитальные моменты электронов «заморожены» в кристаллической решетке и дают незначительный вклад в суммарный магнитный момент атома).

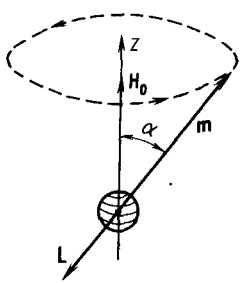



Рис. 3.1. Движение вектора магнитного момента атома в постоянном магнитном поле

Рассмотрим магнитный атом, помещенный в постоянное магнитное поле $\mathbf{H}_0$. Пусть магнитный момент атома $\mathbf{m}$ составляет с вектором $\mathbf{H}_0$ некоторый угол $\alpha$ (рис. 3.1). На атом со стороны магнитного поля действует момент силы

$$\mathbf{T} = [\mathbf{m}, \mathbf{H}_0].$$

Спиновый магнитный момент атома связан с его механическим моментом **L** известным из квантовой механики соотношением $m = -2\pi\gamma\mathbf{L}$, где $\gamma = \mu_0 e/(2\pi m) = 3{,}52 \cdot 10^4$ м/Кл — *гиромагнитная постоянная*. Движение вектора **L** под действием момента **T** определяется уравнением

$$d\mathbf{L}/dt = \mathbf{T}.$$

Подставив в него выражения для **L** и **T**, найдем

$$d\mathbf{m}/dt = -2\pi\gamma[\mathbf{m}, \mathbf{H}_0].$$

Записав подобные уравнения для каждого магнитного атома в единичном объеме феррита и просуммировав их, получим уравнение движения вектора намагниченности феррита **M**:

$$d\mathbf{M}/dt = -2\pi\gamma[\mathbf{M}, \mathbf{H}_0] \qquad (3.1)$$

или в проекциях на координатные оси

$$dM_x/dt = -2\pi\gamma M_y H_0; \quad dM_y/dt = 2\pi\gamma M_x H_0; \quad dM_z/dt = 0.$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$M_x = M \sin\alpha e^{i\omega_H t}; \quad M_y = M \sin\alpha e^{i(\omega_H t - \pi/2)};$$

$$M_z = M \cos\alpha.$$

Таким образом, конец вектора **M** вращается по окружности (прецессирует) с круговой частотой

$$\boxed{\omega_H = 2\pi\gamma H_0,} \qquad (3.2)$$

называемой *круговой частотой ферромагнитного резонанса*. Если смотреть по направлению магнитного поля $\mathbf{H}_0$, то вращение вектора **M** происходит по часовой стрелке.

Уравнение (3.1) не учитывает взаимодействие магнитных атомов друг с другом и кристаллической решеткой (спин-спиновое и спин-решеточное взаимодействие), поэтому угол прецессии $\alpha$ остается постоянным. С учетом этого взаимодействия угол прецессии постепенно уменьшается, и за время $\tau_0 = (10^{-7} - 10^{-9})$ с (время релаксации) магнитные моменты всех атомов устанавливаются по направлению магнитного поля $\mathbf{H}_0$, т. е. феррит намагничивается.

Предположим, что в феррите наряду с постоянным действует переменное магнитное поле $\mathbf{H}_\sim = \dot{\mathbf{H}} e^{i\omega t}$, причем $H \ll H_0$. Так как это поле воздействует на магнитные моменты атомов, намагниченность также имеет постоянную и переменную составляющие: $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \dot{\mathbf{M}} e^{i\omega t}$. В отсутствие переменного магнитного поля направление вектора $\mathbf{M}_0$ совпадает с направлением вектора $\mathbf{H}_0$. Введя прямоугольную систему координат, ось $z$ которой совпадает с указанными направлениями, запишем уравнение движения

переменной составляющей вектора намагниченности в проекциях на координатные оси:

$$i\omega\dot{M}_x = -2\pi\gamma(\dot{M}_y H_0 - \dot{H}_y M_0);$$

$$i\omega\dot{M}_y = -2\pi\gamma(\dot{H}_x M_0 - \dot{M}_x H_0);$$

$$i\omega\dot{M}_z = 0.$$

Введя обозначение $\omega_M = 2\pi\gamma M_0/\mu_0 = (e/m)M_0$, получим

$$\dot{M}_x = -\mu_0 \frac{\omega_M \omega_H}{\omega^2 - \omega_H^2}\dot{H}_x - i\mu_0 \frac{\omega\omega_M}{\omega^2 - \omega_H^2}\dot{H}_y;$$

$$\dot{M}_y = i\mu_0 \frac{\omega\omega_M}{\omega^2 - \omega_H^2}\dot{H}_x = -\mu_0 \frac{\omega_M \omega_H}{\omega^2 - \omega_H^2}\dot{H}_y;$$

$$\dot{M}_z = 0.$$

Таким образом, тензор магнитной восприимчивости феррита, намагниченного вдоль оси $z$,

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_c & -i\chi_a & 0 \\ i\chi_a & \chi_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

где $\chi_c = -\frac{\omega_M \omega_H}{\omega^2 - \omega_H^2}$; $\chi_a = \frac{\omega\omega_M}{\omega^2 - \omega_H^2}$. Магнитная проницаемость феррита также является тензором:

$$\mu = \mu_0(\mathbf{E} + \chi) = \begin{bmatrix} \mu_c & -i\mu_a & 0 \\ i\mu_a & \mu_c & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

где

$$\mu_c = \mu_0\left(1 - \frac{\omega_M \omega_H}{\omega^2 - \omega_H^2}\right); \quad \mu_a = \mu_0 \frac{\omega\omega_M}{\omega^2 - \omega_H^2}; \tag{3.5}$$

$$\mu_z = \mu_0.$$

Выражения (3.5) не учитывают магнитных потерь в феррите. Анализ показывает, что эти потери можно учесть, введя комплексную круговую частоту

$$\dot{\omega}_H = \omega'_H + i\omega''_H, \tag{3.6}$$

где $\omega'_H = 2\pi\gamma H_0$; $\omega''_H = \tau_0^{-1}$. При этом компоненты тензора магнитной проницаемости также становятся комплексными: $\mu_c = \mu'_c - i\mu''_c$; $\mu_a = \mu'_a - i\mu''_a$; $\mu_z = \mu_0 - i\mu''_z$.

Зависимость действительных и мнимых частей этих величин от напряженности подмагничивающего поля на фиксированной частоте показана на рис. 3.2. При $H_0 = H_c = \omega_H/(2\pi\gamma)$ $\mu'_c$ и $\mu'_a$ сильно зависят от $H_0$, а $\mu''_c$ и $\mu''_a$ максимальны, т. е. наблюдается резонансное поглощение энергии электромагнитного поля фер-

ритом. Это явление называют *ферромагнитным резонансом* (ФМР). Резонансные свойства феррита принято характеризовать шириной линии ферромагнитного резонанса $2\Delta H$, определяемой по уровню $\mu''=0{,}5\mu''_{max}$. Из выражений (3.5) и (3.6) следует, что

$$2\Delta H=1/(\pi\gamma\tau_0). \qquad (3.7)$$

Добротность феррита $Q$ определяется относительной шириной линии ФМР:

$$Q=H_0/(2\Delta H).$$

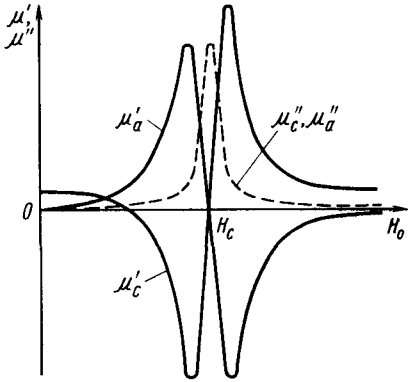



Рис. 3.2. Зависимость действительных (сплошные кривые) и мнимых (пунктирные кривые) частей тензора магнитной проницаемости феррита от напряженности постоянного магнитного поля ($\omega_M \ll \omega$)

Следует отметить, что в ферритовых образцах конечных размеров внутреннее магнитное поле отличается от внешнего поля $H_{вн}$, в которое помещен образец. Поэтому частота ферромагнитного резонанса зависит от формы образца и его ориентации относительно внешнего магнитного поля. Для определения внутреннего поля в образце необходимо решить соответствующую задачу магнитостатики.

Проделав аналогичный изложенному анализ движения заряженных частиц в намагниченной плазме, найдем, что тензор ее диэлектрической проницаемости имеет вид, аналогичный виду тензора магнитной проницаемости феррита:

$$\varepsilon=\begin{bmatrix}\varepsilon_c & -i\varepsilon_a & 0\\ i\varepsilon_a & \varepsilon_c & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_0\end{bmatrix}. \qquad (3.8)$$

Компоненты тензора определяются выражениями (3.5) с заменой $\mu$ на $\varepsilon$, а $\omega_M$ вычисляется по формуле $\omega_M=\left[N_e^2/(\varepsilon_0 m)\right]^{1/2}$, где $N_e$ — концентрация электронов. Среды, имеющие антисимметричный тензор диэлектрической или магнитной проницаемости вида (3.4), (3.8), называются *гиротропными*.

## § 3.2. ПРОДОЛЬНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ГИРОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим электромагнитное поле в намагниченном до насыщения вдоль оси $z$ феррите, которое не зависит от «поперечных» координат $x$, $y$. Первые два уравнения Максвелла в этом случае принимают вид

$$-\partial\dot{H}_y/\partial z = i\omega\varepsilon\dot{H}_x; \quad (3.9) \qquad -\partial\dot{E}_y/\partial z = -i\omega\mu_c\dot{H}_x - \omega\mu_a\dot{H}_y \quad (3.12)$$

$$\partial\dot{H}_x/\partial z = i\omega\varepsilon\dot{E}_y; \quad (3.10) \qquad \partial\dot{E}_x/\partial z = \omega\mu_a\dot{H}_x - i\omega\mu_c\dot{H}_y; \quad (3.13)$$

$$0 = i\omega\varepsilon\dot{E}_z; \quad (3.11) \qquad 0 = i\omega\mu_0\dot{H}_z. \quad (3.14)$$

Из выражений (3.11) и (3.14) следует, что электромагнитное поле поперечно, его продольные составляющие $\dot{E}_z$ и $\dot{H}_z$ равны нулю.

Предположим, что в направлении оси $z$ распространяется плоская электромагнитная волна. Тогда поперечные составляющие векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ можно записать следующим образом:

$$\dot{E}_x = \dot{E}_{0x}e^{-ikz}; \quad \dot{E}_y = \dot{E}_{0y}e^{-ikz};$$
$$\dot{H}_x = \dot{H}_{0x}e^{-ikz}; \quad \dot{H}_y = \dot{H}_{0y}e^{-ikz}, \quad (3.15)$$

где $k$ — неизвестное волновое число. Подставив эти выражения в (3.9) и (3.10), получим

$$\dot{E}_{0x} = Z_0\dot{H}_{0y}; \quad \dot{E}_{0y} = -Z_0\dot{H}_{0x}, \quad (3.16)$$

где $Z_0 = k/(\omega\varepsilon)$. Используя полученные соотношения, из (3.12) и (3.13) найдем

$$-ikZ_0\dot{H}_{0x} = -i\omega(\mu_c\dot{H}_{0x} - i\mu_a\dot{H}_{0y});$$
$$-ikZ_0\dot{H}_{0y} = -i\omega(i\mu_a\dot{H}_{0x} + \mu_c\dot{H}_{0y}),$$

или

$$(k^2 - \omega^2\varepsilon\mu_c)\dot{H}_{0x} + i\omega^2\varepsilon\mu_a\dot{H}_{0y} = 0; \quad (3.17)$$

$$-i\omega^2\varepsilon\mu_a\dot{H}_{0x} + (k^2 - \omega^2\varepsilon\mu_c)\dot{H}_{0y} = 0. \quad (3.18)$$

Эта система линейных уравнений имеет ненулевое решение в том случае, когда ее определитель равен нулю:

$$(k^2 - \omega^2\varepsilon\mu_c)^2 - (\omega^2\varepsilon\mu_a)^2 = 0,$$

откуда

$$k_{1,2} = \omega\sqrt{\varepsilon(\mu_c \pm \mu_a)}; \quad (3.19)$$

$$Z_{0\,1,2} = \sqrt{(\mu_c \pm \mu_a)/\varepsilon}. \quad (3.20)$$

Таким образом, в продольно-намагниченном феррите могут распространяться две волны с различными волновыми числами и характеристическими сопротивлениями.

Для более подробного изучения свойств этих волн подставим (3.19) в (3.18) и (3.16):

$$\dot{H}_{0y}^{(1)} = i\dot{H}_{0x}^{(1)}; \quad \dot{E}_{0x}^{(1)} = -i\dot{E}_{0y}^{(1)};$$
$$\dot{H}_{0y}^{(2)} = -i\dot{H}_{0x}; \quad \dot{E}_{0x}^{(2)} = i\dot{E}_{0y}^{(2)}. \quad (3.21)$$

Полученные равенства указывают, что магнитные поля обеих волн поляризованы по кругу с левым направлением вращения вектора $\mathbf{H}$ у первой волны и правым — у второй. Из формулы

(3.15) следует, что такой же тип поляризации имеет и электрическое поле обеих волн. Скорости распространения лево- и правополяризованных волн определяются выражением

$$v_{\phi 1,2}=\frac{\omega}{k_{1,2}}=\frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon(\mu_c\pm\mu_a)}}. \qquad (3.22)$$

Из выражений (3.16), (3.19) и (3.20) следует, что право- и левополяризованные волны распространяются в феррите как в изотропной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon$ и скалярной магнитной проницаемостью $\mu_{1,2}=\mu_c\pm\mu_a$. Подставив в эту формулу значения $\mu_c$ и $\mu_a$, из (3.5) найдем

$$\mu_1=\mu_0\left(1+\frac{\omega_M}{\omega+\omega_H}\right);\ \mu_2=\mu_0\left(1-\frac{\omega_M}{\omega-\omega_H}\right).$$

При $\omega=\omega_H$ скалярная магнитная проницаемость для правополяризованной волны обращается в бесконечность, а фазовая скорость — в нуль (без учета потерь), т. е. распространение волны прекращается. Описанное явление называют *продольным ферромагнитным резонансом*. Оно наблюдается только для электромагнитных волн с правой круговой поляризацией.

Волну с линейной поляризацией можно представить как суперпозицию двух волн с круговой поляризацией, имеющих разные направления вращения и одинаковые амплитуды: $\dot{H}_{0x}^{(1)}=\dot{H}_{0x}^{(2)}=\dot{H}_{0x}$; $\dot{H}_{0y}^{(1)}=-\dot{H}_{0y}^{(2)}=\dot{H}_{0y}$.

Поле линейно поляризованной волны найдем, сложив амплитуды двух волн. Согласно (3.21),

$$\begin{aligned}\dot{H}_x&=\dot{H}_{0x}^{(1)}+\dot{H}_{0x}^{(2)}=\dot{H}_{0x}\left(e^{-\imath k_1 z}+e^{-\imath k_2 z}\right)=\\&=\dot{H}_{0x}e^{-\imath kz}\left(e^{-\imath\Delta kz}+e^{\imath\Delta kz}\right)=\\&=2\dot{H}_{0x}\cos(\Delta kz)e^{-\imath kz};\end{aligned} \qquad (3.23)$$

$$\begin{aligned}\dot{H}_y&=\dot{H}_{0y}^{(1)}+\dot{H}_{0y}^{(2)}=\dot{H}_{0y}\left(e^{-\imath k_1 z}-e^{-\imath k_2 z}\right)=\\&=\dot{H}_{0y}e^{-\imath kz}\left(e^{\imath\Delta kz}-e^{-\imath\Delta kz}\right)=\\&=2\imath\dot{H}_{0y}\sin(\Delta kz)e^{-\imath kz};\end{aligned} \qquad (3.24)$$

где $k=(k_1+k_2)/2$; $\Delta k=(k_1-k_2)/2$.

Таким образом, линейно поляризованная волна распространяется со скоростью $v_\phi=\omega/k$, соответствующей среднему значению волновых чисел право- и левополяризованных волн. Угол $\psi$, образуемый плоскостью поляризации волны с осью $x$, определяется выражением

$$\psi=\operatorname{arctg}(H_y/H_x)=\operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(\Delta kz)]=\Delta kz.$$

Следовательно, по мере распространения волны ее плоскость поляризации вращается. Это вращение происходит по часовой

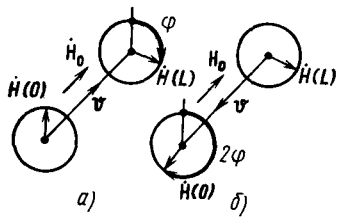



Рис. 3.3. Вращение плоскости поляризации волны в продольно-намагниченном феррите

стрелке, если смотреть по направлению подмагничивающего поля (рис. 3,3, *а*). Если изменить направление подмагничивающего поля $\mathbf{H}_0$ на противоположное, что соответствует замене $k_1$ на $k_2$ и $k_2$ на $k_1$, зависимость угла $\psi$ от координаты также изменится, так как поменяется знак $\Delta k$. Таким образом, направление вращения плоскости поляризации различно для волн, распространяющихся вдоль подмагничивающего поля и навстречу ему. В результате плоскость поляризации волны, прошедшей путь $L$ туда и обратно, не возвращается в первоначальное положение, а поворачивается относительно него на угол $2\varphi = 2\Delta k L$ (рис. 3,3, *б*). В этом проявляются невзаимные свойства продольно-намагниченного феррита.

Электрическое поле рассматриваемой волны имеет эллиптическую поляризацию, так как характеристические сопротивления двух волн с круговой поляризацией различны и $E_{mx}^{(1)} \neq E_{mx}^{(2)}$. Большая ось эллипса, который описывает вектор **E**, вращается при распространении волны таким же образом, как и плоскость поляризации магнитного поля. Очевидно также, что волна с линейной поляризацией электрического поля $\left(E_{mx}^{(1)} = E_{mx}^{(2)}\right)$ имеет эллиптическую поляризацию магнитного поля.

Описанное явление называют *эффектом Фарадея*, а величину $R = \Delta k = \omega\sqrt{\varepsilon}\left(\sqrt{\mu_c + \mu_a} - \sqrt{\mu_c - \mu_a}\right)$, определяющую скорость вращения плоскости поляризации,—*постоянной Фарадея*. Этот эффект проявляется и в намагниченной плазме.

## § 3.3. ПОПЕРЕЧНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ГИРОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим однородную плоскую волну, распространяющуюся в феррите перпендикулярно направлению подмагничивающего поля (оси $z$), например, вдоль оси $x$. В этом случае зависимость поля от координат $y$ и $z$ отсутствует, а зависимость от координаты $x$ определяется множителем $e^{-ikx}$. Таким образом, первые два уравнения Максвелла принимают вид

$$0 = i\omega\varepsilon\dot{E}_{0x}; \qquad (3.25)$$

$$ik\dot{H}_{0z} = i\omega\varepsilon\dot{E}_{0y}; \qquad (3.26)$$

$$-ik\dot{H}_{0y} = i\omega\varepsilon\dot{E}_{0z}; \qquad (3.27)$$

$$0 = -i\omega\left(\mu_c\dot{H}_{0x} - i\mu_a\dot{H}_{0y}\right); \qquad (3.28)$$

$$ik\dot{E}_{0z} = -i\omega\left(i\mu_a\dot{H}_{0x} + \mu_c\dot{H}_{0y}\right); \qquad (3.29)$$

$$-ik\dot{E}_{0y} = -i\omega\mu_0\dot{H}_{0z}. \qquad (3.30)$$

Из выражения (3.25) следует, что электрическое поле поперечное — вектор **E** лежит в плоскости фронта волны. Остальные уравнения распадаются на две независимые группы, одна из которых содержит $E_{0y}$ и $H_{0z}$, а другая — остальные компоненты электромагнитного поля. Решив уравнения первой группы (3.26) и (3.30), найдем

$$k_1=\omega\sqrt{\varepsilon\mu_0};\ \dot{E}_{0y}^{(1)}=-Z_{01}\dot{H}_{0z}^{(1)};\ Z_{01}=\sqrt{\mu_0/\varepsilon}, \tag{3.31}$$

т. е. электромагнитное поле первой волны поперечное и она распространяется в феррите как в изотропном диэлектрике с магнитной проницаемостью, равной $\mu_0$. Такую волну называют *обыкновенной*.

Перепишем уравнения второй группы:

$$-k_2\dot{H}_{0y}^{(2)}=\omega\varepsilon\dot{E}_{0z}^{(2)}; \tag{3.32}$$

$$\mu_c\dot{H}_{0x}^{(2)}=i\mu_a\dot{H}_{0y}^{(2)}; \tag{3.33}$$

$$k_2\dot{E}_{0z}^{(2)}=-i\omega\mu_a\dot{H}_{0x}^{(2)}-\omega\mu_c\dot{H}_{0y}^{(2)}. \tag{3.34}$$

Подставив в последнее уравнение значения $\dot{E}_{0z}^{(2)}$ и $\dot{H}_{0x}^{(2)}$ из первых двух, получим

$$\left[k_2^2-\omega^2\varepsilon\left(\mu_c^2-\mu_a^2\right)/\mu_c\right]\dot{H}_{0y}^{(2)}=0.$$

Приравнивая нулю выражение в скобках, найдем волновое число второй волны и ее фазовую скорость:

$$k_2=\omega\sqrt{\varepsilon\left(\mu_c^2-\mu_a^2\right)/\mu_c}, \tag{3.35}$$

$$v_{\phi 2}=\frac{\omega}{k_2}=\sqrt{\frac{\mu_c}{\varepsilon\left(\mu_c^2-\mu_a^2\right)}}. \tag{3.36}$$

Из уравнения (3.32) следует, что поперечные компоненты электромагнитного поля этой волны связаны соотношением

$$\dot{E}_{0z}^{(2)}=-Z_{02}\dot{H}_{0y}^{(2)},$$

где $Z_{02}=k_2/(\omega\varepsilon)=\sqrt{\dfrac{\mu_c^2-\mu_a^2}{\varepsilon\mu_c}}$. Если электрическое поле волны

линейно поляризовано (в данном случае в плоскости $yOz$), то магнитное поле имеет, как следует из (3.33), эллиптическую поляризацию в плоскости распространения $xOy$, так как вектор $\dot{\mathbf{H}}^{(2)}$ имеет как поперечную, так и продольную составляющую.

Из выражения (3.35) следует, что при $\mu_c = 0$ фазовая скорость второй волны стремится к нулю, т. е. ее распространение в отсутствие потерь оказывается невозможным. Согласно (3.5), этому соответствует частота $\omega_{H2} = \sqrt{\omega_H(\omega_H + \omega_M)}$, называемая *круговой частотой поперечного ферромагнитного резонанса.* За свои необычные свойства вторая волна получила название необыкновенной. Векторы напряженностей электромагнитного поля обыкновенной и необыкновенной волн показаны на рис. 3.4.

Рассмотрим нормальное падение линейно поляризованной волны на поперечно-намагниченную пластину толщиной $d$. Если вектор $\mathbf{E}$ падающей волны составляет с напряженностью подмагничивающего поля $\mathbf{H}_0$ угол $\varphi$, то параллельная ему составляющая этого вектора $E_z = E\cos\varphi$ возбуждает в феррите необыкновенную волну, а перпендикулярная $\mathbf{H}_0$ составляющая $E_y = E\sin\varphi$ — обыкновенную. Распространяясь в пластине с разными скоростями, эти волны, дойдя до края пластины, возбуждают в окружающей среде две линейно поляризованные во взаимно перпендикулярных направлениях волны. За счет разности скоростей волн в пластине возбужденные ими в окружающей среде волны оказываются сдвинутыми по фазе. Складываясь, они образуют волну эллиптической поляризации. Гиротропная пластина, таким образом, позволяет преобразовать линейно поляризованную волну в волну эллиптической поляризации. Это явление называют *эффектом Коттон — Мутона.*

Если амплитуды линейно поляризованных волн, вышедших из пластины, окажутся равными, а их фазы — сдвинутыми на 90°, результирующая волна будет иметь круговую поляризацию. Выполнение этих условий можно обеспечить, подбирая угол поворота вектора $\dot{\mathbf{E}}$ входной волны относительно подмагничивающего поля $\mathbf{H}_0$ и толщину пластины $d$.

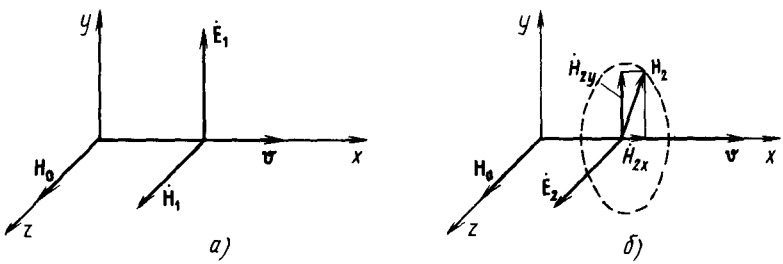



Рис. 3.4. Векторы электромагнитного поля обыкновенной (*а*) и необыкновенной (*б*) волн

**Контрольные вопросы**

1. Дайте определение анизотропной среды и приведите примеры таких сред.
2. Запишите уравнение движения вектора намагниченности феррита и дайте геометрическую интерпретацию этого движения.
3. Выведите выражения для тензоров магнитной восприимчивости и магнитной проницаемости намагниченного феррита. Какие приближения использовались при выводе этих выражений? Дайте определение гиротропной среды.
4. Опишите особенности продольного распространения плоских волн в намагниченном феррите. Какими факторами определяется скорость распространения волн с круговой поляризацией?
5. Опишите явление продольного ферромагнитного резонанса и эффект Фарадея. Дайте определение постоянной Фарадея.
6. Укажите особенности распространения плоских волн в поперечно-намагниченном феррите. Дайте определения обыкновенной и необыкновенной волн.
7. Опишите свойства обыкновенной и необыкновенной волн в поперечно-намагниченном феррите. Дайте определение поперечного ферромагнитного резонанса.
8. Опишите эффект Коттон — Мутона.

## ГЛАВА 4

# ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

### § 4.1. ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ И ВЕКТОРЫ ГЕРЦА

Плоские волны, которые рассматривались в предыдущих главах, возбуждаются бесконечно удаленным источником электромагнитного поля. Реально поле зависит от всех трех координат, что существенно затрудняет анализ. Для его упрощения следует сократить число неизвестных функций и их размерность в уравнениях Максвелла. Это можно сделать, например, исключив из уравнений (1.31), (1.32) вектор $\dot{\mathbf{E}}$ или вектор $\dot{\mathbf{H}}$:

$$\operatorname{rot}\mu^{-1}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}-\omega^2\varepsilon\dot{\mathbf{E}}=-i\omega\dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}}; \tag{4.1}$$

$$\operatorname{rot}\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}-\omega^2\mu\dot{\mathbf{H}}=\operatorname{rot}(\varepsilon^{-1}\dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}}). \tag{4.2}$$

Решив, например, первое из этих уравнений, найдем $\mathbf{E}$. После этого вектор $\mathbf{H}$ вычислим, пользуясь уравнением (1.32). Полученное решение необходимо проверить на соответствие уравнениям (1.33) и (1.34).

Другой путь, особенно эффективный при анализе поля в изотропных средах, состоит во введении вспомогательных функций — потенциалов электромагнитного поля. Согласно уравнению (1.34),

$$\boxed{\dot{\mathbf{H}}=\mu^{-1}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{A}}^e,} \tag{4.3}$$

так как дивергенция ротора любого вектора равна нулю. Подставив (4.3) в (1.32), получим

$$\operatorname{rot}(\dot{\mathbf{E}}+i\omega\dot{\mathbf{A}}^e)=0,$$

откуда

$$\boxed{\dot{\mathbf{E}}=-i\omega\dot{\mathbf{A}}^e-\operatorname{grad}\dot{\varphi}^e,} \tag{4.4}$$

так как ротор градиента любого скаляра равен нулю. Таким образом, векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ определены с помощью вспомогательных величин $\dot{\mathbf{A}}^e$ и $\varphi^e$, которые называют *векторным* и *скалярным потенциалами*.

Подставим выражения (4.3) и (4.4) в уравнение (1.31):

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{A}}^e-\omega^2\varepsilon\mu\dot{\mathbf{A}}^e+i\omega\varepsilon\mu\operatorname{grad}\dot{\varphi}^e=\mu\dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}}.$$

Используя векторное тождество (П.11), преобразуем полученное соотношение

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}}^e-\nabla^2\dot{\mathbf{A}}^e-\omega^2\varepsilon\mu\dot{\mathbf{A}}^e+i\omega\varepsilon\mu\operatorname{grad}\dot{\varphi}^e=\mu\dot{\mathbf{J}}^{ст}.$$

Определим дивергенцию вектора $\dot{\mathbf{A}}^e$ из соотношения

$$\operatorname{div}\dot{A}^e+i\omega\varepsilon\mu\dot{\varphi}^e=0, \tag{4.5}$$

которое называют *условием калибровки Лоренца*. Выражения (4.3) и (4.5) позволяют однозначно связать вектор $\dot{\mathbf{A}}^e$ с напряженностями электромагнитного поля. Согласно (4.5), уравнение, которому удовлетворяет векторный потенциал $\dot{\mathbf{A}}^e$, имеет вид

$$\nabla^2\dot{\mathbf{A}}^e+k^2\dot{\mathbf{A}}^e=-\mu\dot{\mathbf{J}}^{ст}. \tag{4.6}$$

Подставив соотношения (4.4) и (4.5) в уравнение (1.33), получим уравнение для скалярного потенциала $\dot{\varphi}^e$:

$$\nabla^2\dot{\varphi}^e+k^2\dot{\varphi}^e=-\dot{\rho}^{ст}/\dot{\varepsilon}. \tag{4.7}$$

Таким образом, для расчета электромагнитного поля достаточно решить одно векторное и одно скалярное уравнение. Электромагнитное поле затем определяется с помощью выражений (4.3) и (4.4). Найденные решения необходимо проверить на соответствие условию калибровки (4.5)

Иногда вместо условия (4.5) используют калибровку Кулона $\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}}^e=0$, которая позволяет разделить вихревое и потенциальное электрические поля. Представим выражение (4.4) в виде $\dot{\mathbf{E}}=\dot{\mathbf{E}}^в+\dot{\mathbf{E}}^п$, где $\dot{\mathbf{E}}^в=-i\omega\dot{\mathbf{A}}^e$, $\dot{E}^п=-\operatorname{grad}\dot{\varphi}^e$. Из условия калибровки следует, что $\operatorname{div}\dot{\mathbf{E}}^в=0$, т. е. это поле не имеет источников и является вихревым. Поскольку $\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}^п=-\operatorname{rot}\operatorname{grad}\dot{\varphi}^e=0$, поле $\dot{\mathbf{E}}^п$ потенциально. Отметим, что при калибровке Лоренца $\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}}^e\neq0$, поэтому поле $\dot{\mathbf{E}}^в$ имеет как вихревую, так и потенциальную составляющие.

При калибровке уравнения Кулона для $\dot{\mathbf{A}}^e$ и $\dot{\varphi}^e$ в отличие от калибровки Лоренца оказываются связанными. Проделав необходимые вычисления, вместо (4.6) и (4.7) получим

$$\nabla^2\dot{\mathbf{A}}^e+k^2\dot{\mathbf{A}}^e=-\mu(\dot{\mathbf{J}}^{ст}+\dot{\mathbf{J}}^п_{см});$$

$$\nabla^2\dot{\varphi}^e=-\dot{\rho}^{ст}/\varepsilon,$$

где $\dot{\mathbf{J}}^п_{см}=i\omega\varepsilon\dot{\mathbf{E}}^п=-i\omega\varepsilon\operatorname{grad}\dot{\varphi}^e$ — плотность тока смещения, обусловленная потенциальным электрическим полем.

Для дальнейшего уменьшения числа неизвестных функций с помощью соотношений

$$\dot{\mathbf{A}}^e=i\omega\varepsilon\mu\dot{\Gamma}^e;\quad\dot{\varphi}^e=-\operatorname{div}\dot{\Gamma}^e \tag{4.8}$$

введем *электрический вектор Герца* $\dot{\mathbf{\Gamma}}^e$. Подставив выражения (4.8) в (4.5), убедимся, что условие калибровки Лоренца выполняется. Согласно (4.6) и (4.8), вектор Герца удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2\dot{\Gamma}^e+k^2\dot{\Gamma}^e=i/(\omega\varepsilon)\dot{\mathbf{J}}^{ст}. \tag{4.9}$$

После решения этого уравнения векторы напряженности электромагнитного поля вычисляют с помощью соотношений, получаемых из (4.3) и (4.4);

$$\dot{\mathbf{E}} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{\Gamma}}^e + k^2\dot{\mathbf{\Gamma}}^e; \tag{4.10}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = i\omega\varepsilon \operatorname{rot}\dot{\mathbf{\Gamma}}^e. \tag{4.11}$$

Таким образом, вычисление векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ электромагнитного поля сводится к решению системы трех дифференциальных уравнений в частных производных (4.9) относительно трех неизвестных функций — проекций вектора Герца на оси координат.

Используя (4.9), преобразуем соотношение (4.10):

$$\dot{\mathbf{E}} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{\Gamma}}^e + i/(\omega\varepsilon)\dot{\mathbf{J}}^{ст}. \tag{4.12}$$

Нетрудно видеть, что векторы $\dot{\mathbf{\Gamma}}^e$ и $\dot{\mathbf{\Gamma}}_1^e = \dot{\mathbf{\Gamma}}^e + \operatorname{grad}\dot{F}^e$, где $\dot{F}^e$ — некоторая скалярная функция, описывают одно и то же поле, так как $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\dot{F}^e = 0$. Вектор Герца, таким образом, найден с точностью до градиента некоторой функции. Это его свойство называют *градиентной инвариантностью.*

Отметим, что из выражений (4.10), (4.11) следует, что вектор $\dot{\mathbf{H}}$ всегда перпендикулярен вектору Герца, в то время как вектор $\dot{\mathbf{E}}$ может иметь как поперечные, так и продольные составляющие. Поэтому электромагнитное поле, описываемое электрическим вектором Герца, называют *полем электрического или E-типа.*

Наряду с электрическим иногда удобно использовать *магнитный вектор Герца* $\dot{\mathbf{\Gamma}}^m$, который вводится аналогично электрическому. Из соотношений (1.31) и (1.33) следует, что $\operatorname{div}\left[\varepsilon\dot{\mathbf{E}} + (i\omega)^{-1}\dot{\mathbf{J}}^{ст}\right] = 0$, откуда

$$\varepsilon\dot{\mathbf{E}} + (i\omega)^{-1}\dot{\mathbf{J}}^{ст} = -\operatorname{rot}\dot{\mathbf{A}}^m,$$

где $\dot{\mathbf{A}}^m$ — *векторный потенциал магнитного типа.* Следовательно,

$$\dot{\mathbf{E}} = -\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{A}}^m - (i\omega\varepsilon)^{-1}\dot{\mathbf{J}}^{ст}. \tag{4.13}$$

Подставив выражение (4.13) в (1.31), получим $\operatorname{rot}\left(\dot{\mathbf{H}} + i\omega\dot{\mathbf{A}}^m\right) = 0$, что позволяет ввести *скалярный магнитный потенциал*

$$\dot{\mathbf{H}} + i\omega\dot{\mathbf{A}}^m = -\operatorname{grad}\dot{\varphi}^m$$

или

$$\dot{\mathbf{H}} = -i\omega\dot{\mathbf{A}}^m - \operatorname{grad}\dot{\varphi}^m. \tag{4.14}$$

Из полученных соотношений и уравнений (1.32), (1.34) следует, что

$$\nabla^2\dot{\mathbf{A}}^m + k^2\dot{\mathbf{A}}^m = (i\omega)^{-1}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{J}}^{ст}; \tag{4.15}$$

$$\nabla^2\dot{\varphi}^m + k^2\dot{\varphi}^m = 0. \tag{4.16}$$

Эти выражения справедливы при выполнении условия калибровки

$$\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}}^m + i\omega\varepsilon\mu\dot{\varphi}^m = 0. \tag{4.17}$$

Введя магнитный вектор Герца *(вектор Фитцжеральда)* $\dot{\mathbf{\Gamma}}^m$, с помощью соотношений

$$\dot{\mathbf{A}}^m = i\omega\varepsilon\mu\dot{\mathbf{\Gamma}}^m;\quad \dot{\varphi}^m = -\operatorname{div}\dot{\mathbf{\Gamma}}^m, \tag{4.18}$$

найдем

$$\nabla^2\dot{\mathbf{\Gamma}}^m + k^2\dot{\mathbf{\Gamma}}^m = k^{-2}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{J}}^{ст}; \tag{4.19}$$

$$\dot{\mathbf{E}} = -i\omega\mu\operatorname{rot}\dot{\mathbf{\Gamma}}^m - (i\omega\varepsilon)^{-1}\dot{\mathbf{J}}^{ст}; \tag{4.20}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{\Gamma}}^m + k^2\dot{\mathbf{\Gamma}}^m. \tag{4.21}$$

Таким образом, в отсутствие сторонних токов вектор **E** перпендикулярен вектору $\mathbf{\Gamma}^m$, а вектор **H** может иметь как поперечную, так и продольную составляющие. Электромагнитное поле, описываемое магнитным вектором Герца, называют *полем магнитного или H-типа.*

Нетрудно видеть, что магнитный вектор Герца, так же как и электрический, обладает свойством градиентной инвариантности: векторы $\dot{\mathbf{\Gamma}}^m$ и $\dot{\mathbf{\Gamma}}_1^m = \mathbf{\Gamma}^m + \operatorname{grad}\dot{F}^m$ описывают одно и то же поле.

В заключение отметим важное свойство уравнений Максвелла, электродинамических потенциалов и векторов Герца: в отсутствие сторонних токов (а следовательно, и зарядов) замена в любых формулах всех электрических величин $(\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{A}}^e, \dot{\varphi}^e, \dot{\mathbf{\Gamma}}^e)$ на магнитные $(\dot{H}, \dot{A}^m, \dot{\varphi}^m, \dot{\mathbf{\Gamma}}^m)$ с одновременной заменой $\varepsilon$ на $-\mu$ не нарушает их справедливости. Это свойство называют *перестановочной двойственностью.* Оно позволяет, найдя одно решение уравнений Максвелла, получить другое, линейно независимое, произведя указанную замену величин.

## § 4.2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ

Из § 4.1 следует, что для вычисления векторов поля излучения заданного источника необходимо решить уравнение (4.9) или (4.19), а затем определить напряженности электромагнитного поля с помощью соотношений (4.10), (4.11) или (4.20), (4.21). Использование электрического вектора Герца предпочтительнее, так как в уравнение (4.9) входит плотность тока, а не ее пространственные производные, как в (4.19). Это позволяет применить для решения уравнения (4.9) скалярную функцию Грина уравнения Гельмгольца:

$$G(P, Q) = \frac{e^{-ikr_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}}, \tag{4.22}$$

которая описывает поле точечного источника. Здесь $r_{PQ}$ — расстояние между точкой $P$, где расположен источник,

и точкой наблюдения $Q$. Так как направления векторов плотности тока $\dot{\mathbf{J}}$ и вектора Герца $\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^e$ в соответствии с (4.9) совпадают, решение этого уравнения для «точечного» тока $\dot{\mathbf{J}}_\text{т}=\delta(r_Q-r_P)\mathbf{e}_J$, где $\delta(r_Q-r_P)$ — трехмерная дельта-функция Дирака; $\mathbf{e}_J$ — орт направления вектора плотности тока, имеет вид

$$\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^e(Q)=\frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}G(P,Q)\mathbf{e}_J.$$

Используя принцип суперпозиции, получим решение уравнения (4.9) для произвольного распределения плотности тока, проведя интегрирование по области $V_P$, занятой сторонним током:

$$\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^e(Q)=\frac{\mathrm{i}}{4\pi\omega\varepsilon}\int\limits_{V_P}G(P,Q)\dot{\mathbf{J}}^\text{ст}(P)\,\mathrm{d}V_P. \tag{4.23}$$

Индекс $P$ у элемента объема указывает, что интегрирование ведется по «координатам источника».

Продифференцировав полученное решение по координатам точки наблюдения, определим векторы электромагнитного поля:

$$\dot{\mathbf{E}}(Q)=(\operatorname{grad}\operatorname{div}_Q+k^2)\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^e(Q);$$

$$\dot{\mathbf{H}}(Q)=\mathrm{i}\omega\varepsilon\operatorname{rot}_Q\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^e(Q).$$

Подставим в эти формулы решение (4.23) и поменяем порядок интегрирования и дифференцирования, так как эти операции проводятся по независимым координатам:

$$\dot{\mathbf{E}}(Q)=\frac{\mathrm{i}}{4\pi\omega\varepsilon}\int\limits_{V_P}\dot{\mathbf{J}}^\text{ст}(P)\left[(\operatorname{grad}\operatorname{div}_Q+k^2)G(P,Q)\mathbf{e}_J(P)\right]\mathrm{d}V_P; \tag{4.24}$$

$$\dot{\mathbf{H}}(Q)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{V_P}\dot{\mathbf{J}}^\text{ст}(P)\left[\operatorname{rot}_Q G(P,Q)\mathbf{e}_J(P)\right]\mathrm{d}V_P, \tag{4.25}$$

где $\mathbf{e}_J(P)$ — орт направления вектора плотности тока в точке $P$. Так как функция Грина имеет вид (4.22), в результате дифференцирования в выражениях (4.24), (4.25) появятся члены, содержащие $r_{PQ}^{-1}$, $r_{PQ}^{-2}$, $r_{PQ}^{-3}$.

Если сторонний ток сосредоточен в объеме $V$ конечных размеров, то внутри и вблизи него необходимо учитывать все указанные члены. Электромагнитное поле в этой области, называемой *ближней зоной излучения*, имеет сложный характер. На достаточно больших расстояниях от объема $V$, однако, членами, содержащими $r_{PQ}^{-2}$ и $r_{PQ}^{-3}$, можно пренебречь. В этой области, называемой *дальней зоной излучения*, амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей убывают обратно пропорционально первой степени расстояния до источника (при отсутствии потерь).

Для того чтобы подробнее рассмотреть структуру поля излучения в дальней зоне, воспользуемся сферической системой

координат $r$, $\varphi$, $\theta$ с центром в точке $O$, лежащей внутри объема $V_P$ (рис. 4.1). Если $r_Q \gg r_P$ и $r_P \ll \lambda$, то в первом приближении можно считать, что $r_{PQ} = r_P + r_Q \approx r_Q$, т. е. функция Грина не зависит от координат точки $P$ и ее в выражении (4.23) можно вынести из-под знака интеграла, заменив $r_{PQ}$ на $r_P$. Проведя интегрирование, получим

$$\dot{\Gamma}^e(Q) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{e^{-ikr_Q}}{r_Q} \dot{\mathbf{P}}^{ст},$$

где

$$\dot{\mathbf{P}}^{ст} = \frac{1}{\omega} \int_{V_P} \dot{\mathbf{J}}^{ст}(P)\, dV \qquad (4.26)$$

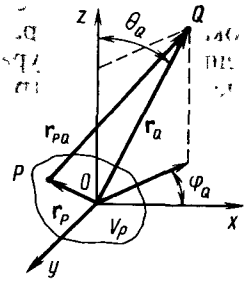



Рис. 4.1. К анализу поля излучения источника, сосредоточенного в объеме $V_P$

— усредненный по $V_P$ электрический момент источника. Таким образом, вектор Герца в этом случае зависит только от координаты $r$ сферической системы координат (индекс $Q$ опускаем).

Воспользуемся формулами (4.24), (4.25), учитывая, что в точке наблюдения $\dot{\mathbf{J}}^{ст} = 0$ и, следовательно, $\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{\Gamma}}^e + k^2\dot{\mathbf{\Gamma}}^e = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{\Gamma}}^e$. Согласно (П.3),

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{k^2}{4\pi\varepsilon} \frac{e^{-ikr}}{r} (\dot{P}_\varphi^{ст}\mathbf{e}_\varphi + \dot{P}_\theta^{ст}\mathbf{e}_\theta); \qquad (4.27)$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{\omega k}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} (\dot{P}_\theta^{ст}\mathbf{e}_\varphi + \dot{P}_\varphi^{ст}\mathbf{e}_\theta). \qquad (4.28)$$

Анализ полученных выражений позволяет сделать следующие выводы:

1) от источника (объема $V_P$) распространяется бегущая волна. Ее фронт представляет собой сферу, а фазовая скорость $v_\Phi = \omega/k = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ совпадает со скоростью света в данной среде. Такие волны называют *сферическими*;

2) векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ в каждой точке волнового фронта перпендикулярны направлению распространения волны и друг другу, так как их скалярное произведение

$$(\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}) = \frac{\omega k^3 e^{-2ikr}}{16\pi^2\varepsilon r^2} (-\dot{P}_\varphi^{ст}\dot{P}_\theta^{ст} + \dot{P}_\theta^{ст}\dot{P}_\varphi^{ст}) = 0.$$

Отношение длин этих векторов (амплитуд полей) в любой точке волнового фронта постоянно и равно характеристическому сопротивлению свободного пространства:

$$\dot{E}/\dot{H} = k/(\omega\varepsilon) = \sqrt{\mu/\varepsilon} = Z_0.$$

Направление и амплитуда векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ на сфере радиуса $r$ зависят от ориентации усредненного по объему источника

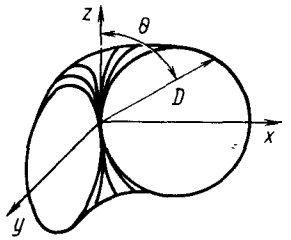


Рис. 4.2. Диаграмма направленности диполя Герца

стороннего тока и являются функциями «поперечных» координат φ и θ. Таким образом, сферическая волна, создаваемая источником, не является однородной.

В качестве примера рассмотрим поле излучения *диполя Герца* — отрезка прямолинейного тонкого провода длиной $l \ll \lambda$, по которому течет ток $I$ постоянной амплитуды. На концах проводника при этом образуются заряды $+q$ и $-q$, меняющиеся во времени по гармоническому закону с амплитудой $\dot{Q} = (\mathrm{i}/\omega)\dot{I}$. Пусть ось $z$ системы координат совпадает с направлением провода: $\mathbf{e}_J = \mathbf{e}_z$. Подставив это выражение в (4.26) и перейдя к пределу при $V_P \to 0$, получим

$$\dot{\mathbf{P}}^{\mathrm{ст}} = \frac{1}{\omega}\dot{I} l \mathbf{e}_z = \dot{Q} l \mathbf{e}_z.$$

В соответствии с (4.27), (4.28)

$$\dot{E}_\theta = \frac{\omega Z_0 k}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r}\dot{P}^{\mathrm{ст}}\sin\theta = \frac{\mathrm{i}Z_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r}\frac{l}{2\lambda_u}\dot{I}\sin\theta;$$

$$\dot{H}_\varphi = \frac{\omega k}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r}\dot{P}^{\mathrm{ст}}\sin\theta = \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r}\frac{l}{2\lambda_u}\dot{I}\sin\theta.$$

Зависимость $D(r, \varphi, \theta) = |E(r, \varphi, \theta)|/E_{\max}$ или $|H(r, \varphi, \theta)|/H_{\max}$, где $E_{\max}$, $H_{\max}$ — максимальные значения поперечных составляющих напряженностей поля $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ на сфере радиусом $r$, построенную в сферических координатах, называют *диаграммой направленности*. Для диполя Герца эта диаграмма имеет вид тора (рис. 4.2).

Полную мощность излучения диполя Герца найдем, вычислив поток вектора Пойнтинга через сферу с произвольным радиусом $r$:

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\oint_S [\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}^*]\,\mathrm{d}\mathbf{S} = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\oint_S \dot{E}_\theta \dot{H}_\varphi^* \,\mathrm{d}S =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2\lambda_u}\right)^2 Z_0 |\dot{I}|^2 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{l}{2\lambda_u}\right)^2 Z_0 |\dot{I}|^2.$$

Следовательно, мощность излучения в среде без потерь в согласии с законом сохранения энергии не зависит от радиуса сферы.

Отношение удвоенной мощности излучения к квадрату тока называют *сопротивлением излучения*: $R_u = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{l}{2\lambda_u}\right)^2 Z_0$. Мощность и сопротивление излучения растут по мере увеличения длины диполя. (Напомним, что полученное выражение справедливо при $l \ll \lambda_u$.)

## Контрольные вопросы

1. Покажите целесообразность введения электродинамических потенциалов и дайте их определения. Сформулируйте условия калибровки Лоренца и Кулона и поясните их физический смысл. Запишите уравнения для потенциалов электромагнитного поля.
2. Дайте определение векторов Герца и опишите их связь с электромагнитным полем. Запишите уравнения для векторов Герца.
3. Поясните свойство градиентной инвариантности векторов Герца и сформулируйте принцип перестановочной двойственности.
4. Запишите общее решение уравнения для электрического вектора Герца с помощью функции Грина уравнения Гельмгольца. Дайте определение и поясните физический смысл функции Грина.
5. Опишите общие свойства поля излучения системы токов. Дайте определение ближней и дальней зон излучения.
6. Приведите выражения для электромагнитного поля излучения в дальней зоне. Дайте определение сферической волны.
7. Опишите поле излучения диполя Герца. Дайте определение сопротивления излучения. Какими факторами характеризуется его значение?

# ЧАСТЬ ВТОРАЯ
# ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ЭЛЕМЕНТОВ И УСТРОЙСТВ СВЧ

## ГЛАВА 5
## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ

### § 5.1. КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧИ

*Направляющей системой* или *линией передачи* (ЛП) электромагнитной энергии называют совокупность тел, осуществляющих передачу (канализацию) электромагнитной энергии в определенном направлении без излучения в окружающее пространство. Линии передачи различаются конфигурацией и материалом тел, из которых они образованы.

*Регулярными* считают ЛП, свойства которых вдоль направления распространения неизменны или меняются по периодическому закону. В первом случае регулярную ЛП называют *продольно-однородной*, во втором — *периодической*. Если свойства ЛП вдоль направления распространения меняются по произвольному закону, ее считают *нерегулярной* (продольно-неоднородной). В настоящей книге рассматриваются в основном регулярные ЛП.

Если электромагнитное поле ЛП неограничено в поперечном направлении, то ее называют *открытой*. В *закрытых* ЛП электромагнитное поле существует только внутри замкнутой металлической оболочки.

В соответствии с материалом тел, образующих ЛП, их делят на *металлические*, *диэлектрические* и *металлодиэлектрические*.

Свойства линий передачи существенно зависят от связности их поперечного сечения. Если любой контур, расположенный в этом сечении, можно стянуть в точку, не пересекая границу раздела диэлектрик — металл, то ЛП называют *односвязной*. В противном случае ЛП *многосвязна*, причем степень связности соответствует числу различных типов контуров, которые можно выделить в ее поперечном сечении.

На рис. 5.1, *а* изображен прямоугольный волновод — закрытая односвязная металлическая ЛП. Коаксиальный волновод (рис. 5.1, *б*) — пример закрытой металлической двусвязной ЛП, круглый диэлектрический волновод (рис. 5.1, *в*) — пример откры-

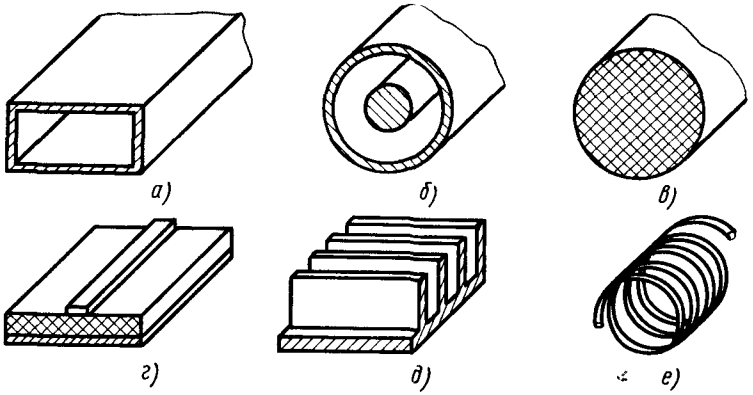



Рис. 5.1. Основные типы линий передачи

той диэлектрической односвязной ЛП, микрополосковая линия передачи (МПЛ), изображенная на рис. 5.1, *г*,— пример открытой двусвязной металлодиэлектрической ЛП. Все перечисленные виды ЛП продольно-однородны. Периодическими системами являются гребенчатая (рис. 5.1, *д*) и спиральная (рис. 5.1, *е*) ЛП.

## § 5.2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН МЕЖДУ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся между двумя параллельными идеально проводящими плоскостями $P$ и $Q$, многократно отражаясь от них под углом $\varphi$ (рис. 5.2). Предположим, что волна линейно поляризована так, что вектор $\mathbf{E}$ параллелен плоскостям $P$ и $Q$. В точке $C$ происходит интерференция волны, падающей на нижнюю плоскость в точке $O$ и отраженной от нее. Фронты этих волн $AC$ и $BC$ показаны на рис. 5.2 пунктиром. Так как суммарное электрическое поле этих волн в точке $C$ должно быть равно нулю, сдвиг фазы волны на пути $AOB$ кратен $\pi$:

$$\pi(2m-1)=2kl-\pi,\quad m=1,\ 2,\ ...,$$

где $l$ — длина отрезка $AO$. Фазовый угол $\pi$ в правой части учитывает тот факт, что коэффициент отражения от идеально проводящей поверхности равен минус единице, т. е. фаза волны при отражении меняется на 180°. Приведя подобные члены, получим $l=\pi m/k=m\lambda_u/2$.

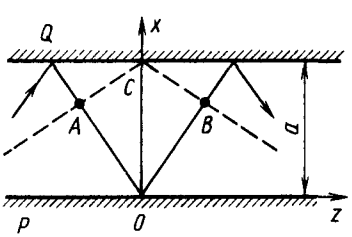



Рис. 5.2. Распространение электромагнитной волны между двумя идеально проводящими плоскостями

Из треугольника $AOC$ следует, что $l=a\cos\varphi$, откуда

$$\cos\varphi=m\lambda_u/(2a). \tag{5.1}$$

Таким образом, угол отражения связан с длиной волны, а следовательно, и с частотой плоской электромагнитной волны. На высоких частотах ($m\lambda_u \ll a$) угол отражения $\varphi\approx\pi/2$, и волна распространяется почти прямолинейно. По мере увеличения длины волны угол $\varphi$ уменьшается и при $\lambda=2an_{\text{ср}}/m$ становится равным нулю. На более низких частотах правая часть (5.1) становится больше единицы, т. е. не существует такого значения угла $\varphi$, при котором выполняются граничные условия для обеих плоскостей.

Электромагнитное поле между плоскостями представляет собой суперпозицию падающих и отраженных волн:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}&=\dot{E}_0\left[e^{ikx\cos\varphi}-e^{-ikx\cos\varphi}\right]e^{-ikz\sin\varphi}\mathbf{e}_y=\\&=2i\dot{E}_0\mathbf{e}_y\sin(kx\cos\varphi)\,e^{-ikz\sin\varphi}=\\&=2i\dot{E}_0\mathbf{e}_y\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)e^{-ikz\sin\varphi};\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{H}}&=Z_0^{-1}E_0\left[(\mathbf{e}_x\sin\varphi+\mathbf{e}_z\cos\varphi)\,e^{ikx\cos\varphi}-\right.\\&\left.-(\mathbf{e}_x\sin\varphi-\mathbf{e}_z\cos\varphi)\,e^{-ikx\cos\varphi}\right]e^{-ikz\sin\varphi}=\\&=2Z_0^{-1}E_0\left(i\mathbf{e}_x\sin\varphi\sin\frac{m\pi}{a}x+\mathbf{e}_z\cos\varphi\cos\frac{m\pi}{a}x\right)e^{-ikz\sin\varphi}.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Следовательно, эта суперпозиция имеет вид плоской волны, распространяющейся вдоль оси $z$ с фазовой скоростью

$$v_\phi=\frac{\omega}{k\sin\varphi}=\frac{u}{\sin\varphi}=\frac{u}{\sqrt{1-\left(\dfrac{m\lambda}{2an_{\text{ср}}}\right)^2}}, \tag{5.4}$$

которая больше скорости света в данной среде $u$. В частности, в вакууме $v_\phi>c$. Так как в «первичной» волне энергия переносится по направлению луча со скоростью $u$, ее перенос вдоль оси $z$ происходит со скоростью

$$v_э=u\sin\varphi=u\sqrt{1-\left(\frac{m\lambda}{2an_{\text{ср}}}\right)^2}. \tag{5.5}$$

Эта скорость всегда меньше скорости $u$. Отметим, что произведение $v_\phi v_э=u^2$.

Из формул (5.4) и (5.5) следует, что при $\lambda=\lambda_c=2an_{\text{ср}}/m$ фазовая скорость обращается в бесконечность, а скорость переноса энергии — в нуль, т. е. распространение волны вдоль оси $z$ прекращается. Поэтому данное значение длины волны называют *критическим*. Соответственно вводят *критические частоты*

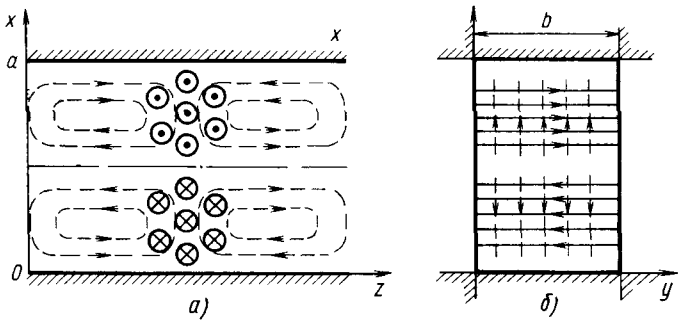



Рис. 5.3. Эпюры силовых линий электромагнитного поля волны, распространяющегося между двумя идеально проводящими плоскостями (*а*) и в прямоугольном волноводе (*б*):
———— линии вектора **E**, — — — — линии вектора **H**

$f_c = c/\lambda_c$ и $\omega_c = 2\pi c/\lambda_c$. На критической частоте электромагнитная волна движется от одной плоскости к другой, последовательно отражаясь от них, причем фронт волны параллелен этим плоскостям.

Из выражений (5.2) и (5.3) следует, что электромагнитное поле в направлении оси $x$ имеет вид стоячей волны, причем вторая идеально проводящая плоскость расположена в узлах электрического поля ($a = m\lambda/2n_{ср}$), не нарушая условий его существования. Электрическое поле имеет только одну составляющую $\dot{E}_y$ (поперечное поле). Вектор напряженности магнитного поля **H** имеет как поперечную $\dot{H}_x$, так и продольную $\dot{H}_z$ составляющие, причем поперечные составляющие $\dot{E}_y$ и $\dot{H}_x$ совпадают по фазе, а продольная $\dot{H}_z$ сдвинута по отношению к ним на 90°. По мере увеличения частоты амплитуда продольной составляющей магнитного поля стремится к нулю, т. е. волна приближается к чисто поперечной. При приближении частоты к критической амплитуда поперечной составляющей магнитного поля стремится к нулю.

На рис. 5.3, *а* изображены силовые линии векторов **E** и **H** для $m = 2$. Линии магнитного поля образуют замкнутые плоские кривые, а линии вектора **E** — прямые, перпендикулярные плоскости чертежа. Если ввести еще две идеально проводящие плоскости $y = \text{const}$, расположенные на расстоянии $b$ друг от друга (рис. 5.3, *б*), то условия распространения волны не нарушатся, так как новые плоскости перпендикулярны вектору **E** и касательная составляющая напряженности электрического поля на них равна нулю. Четыре пересекающиеся идеально-проводящие плоскости образуют прямоугольный волновод (см. рис. 5.1, *а*). Рассмотренное поле представляет собой один из возможных типов полей (типов волн) в прямоугольном волноводе. Как следует из изложенного, это поле можно рассматривать как

суперпозицию плоских электромагнитных волн *(парциальных волн)*, распространяющихся под углом к стенкам волновода. Такой метод анализа называют концепцией парциальных волн. Она позволяет наглядно представить процесс распространения волн в волноводе и получить правильные количественные результаты. В то же время описанным методом неудобно, а иногда и невозможно пользоваться в том случае, когда волновод имеет сложную форму поверхности или заполнен неоднородной и (или) анизотропной средой. При этом необходимо использовать более общую теорию, которая изложена далее.

## § 5.3. СКАЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

Волны, распространяющиеся в ЛП в отсутствие сторонних токов, называют *свободными* или *собственными*. Электромагнитное поле этих волн может быть описано с помощью электрического или магнитного вектора Герца, удовлетворяющих одному и тому же уравнению

$$\nabla^2 \dot{\Gamma}^{e,m} + k^2 \dot{\Gamma}^{e,m} = 0. \tag{5.6}$$

Введем обобщенно-цилиндрическую систему координат $x_1$, $x_2$, $z$, ось $z$ которой совпадает с направлением распространения волны в ЛП. Используем для описания поля электрический вектор Герца $\dot{\Gamma}^e$. Учитывая его градиентную инвариантность (см. § 4.1), введем

$$\dot{\tilde{\Gamma}}^e = \dot{\Gamma}^e - \operatorname{grad} \dot{F}^e. \tag{5.7}$$

Векторы $\dot{\Gamma}^e$ и $\dot{\tilde{\Gamma}}^e$ описывают одно и то же электромагнитное поле. Выберем функцию $\dot{F}^e$ так, чтобы одна из проекций вектора $\dot{\tilde{\Gamma}}^e$, например, на ось $x_1$, обращалась в нуль:

$$\dot{\tilde{\Gamma}}^e_1 = \dot{\Gamma}^e_1 - \frac{1}{h_1} \frac{\partial \dot{F}^e}{\partial x_1} = 0. \tag{5.8}$$

Подставив выражение (5.7) в (5.6), найдем, что вектор $\dot{\tilde{\Gamma}}^e$ удовлетворяет уравнению (5.6) в том случае, когда функция $F^e$ является одним из решений уравнения

$$\nabla^2 \dot{F}^e + k^2 \dot{F}^e = 0. \tag{5.9}$$

Известно, что в обобщенно-цилиндрической системе координат всегда можно подобрать функцию $\dot{F}^e$, одновременно удовлетворяющую соотношениям (5.8) и (5.9). Таким образом, любое электромагнитное поле свободных волн может быть описано с помощью двух скалярных функций — проекций вектора $\dot{\tilde{\Gamma}}^e$ на две координатные оси.

Изложенное справедливо и для магнитного вектора Герца $\dot{\Gamma}^m$. Введя функцию $\dot{F}^m$, удовлетворяющую уравнениям

$$\dot{\Gamma}_1^m - \frac{1}{h_1}\frac{\partial \dot{F}^m}{\partial x_1} = 0; \quad \nabla^2 \dot{F}^m + k^2 \dot{F}^m = 0, \tag{5.10}$$

определим поле в ЛП с помощью двух проекций магнитного вектора Герца на оси координат. Существует, однако, еще один способ описания электромагнитного поля. Из выражений (4.11) и (4.20) следует, что векторы Герца связаны между собой соотношением

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{\Gamma}}^e = -i\omega\mu \dot{\mathbf{\Gamma}}^m. \tag{5.11}$$

Выбрав функции $\dot{F}^e$ и $\dot{F}^m$ так, чтобы $\dot{\Gamma}_1^e = \dot{\Gamma}_1^m = 0$, из (5.11) получим

$$\frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial (h_2 \dot{\Gamma}_2^e)}{\partial x_1} = -i\omega\mu \Gamma_z^m.$$

Таким образом, вместо функции $\dot{\Gamma}_2^e$ можно ввести $\dot{\Gamma}_z^m$ и описывать электромагнитное поле с помощью двух скалярных функций — проекций электрического и магнитного векторов Герца на направление распространения волн. Так как в обобщенно-цилиндрической системе координат $\nabla^2 \dot{\mathbf{\Gamma}} = \nabla^2 \dot{\mathbf{\Gamma}}_\perp + \nabla^2 \dot{\Gamma}_z \mathbf{e}_z$, функции $\dot{\Gamma}_z^e$ и $\dot{\Gamma}_z^m$ удовлетворяют однородному скалярному уравнению Гельмгольца

$$\boxed{\nabla^2 \dot{\Gamma}_z + k^2 \dot{\Gamma}_z = 0.} \tag{5.12}$$

Напомним, что электрический вектор Герца $\dot{\mathbf{\Gamma}}^e = \dot{\Gamma}_z^e \mathbf{e}_z$ определяет электромагнитное Е-поле $(\dot{E}_z \neq 0, \ \dot{H}_z = 0)$, а магнитный вектор Герца $\dot{\mathbf{\Gamma}}^m = \dot{\Gamma}_z^m \mathbf{e}_z$ — Н-поле $(\dot{E}_z = 0, \ \dot{H}_z \neq 0)$*. Следовательно, в общем случае электромагнитное поле ЛП представляется суперпозицией Е- и Н-полей (волн).

## § 5.4. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Используем для решения уравнения (5.12) метод разделения переменных Фурье. Представим функцию $\dot{\Gamma}_z$ в виде произведения двух функций:

$$\dot{\Gamma}_z(x_1, x_2, z) = \psi(x_1, x_2)\zeta(z), \tag{5.13}$$

одна из которых зависит только от поперечных координат $x_1$, $x_2$, а другая — только от продольной координаты $z$. Подставив уравнение (5.13) в (5.12), после несложных преобразований найдем

$$\frac{1}{\psi}\nabla_\perp^2 \psi + \frac{1}{\zeta}\zeta'' = -k^2, \tag{5.14}$$

* Иногда эти поля обозначают *TE* и *TM*.

где оператор Гамильтона $\nabla_\perp$ влияет только на поперечные координаты $x_1$, $x_2$, а штрихами обозначено дифференцирование по $z$. В первый член левой части полученного уравнения входят функции, зависящие только от $x_1$ и $x_2$, а во второй — только от $z$. Так как правая часть от координат не зависит, каждое из слагаемых левой части также не зависит от координат. Обозначив $\psi^{-1}\nabla_\perp^2\psi=-k_c^2$, $\zeta^{-1}\zeta''=-k_z^2$, из выражения (5.14) получим два уравнения:

$$\boxed{\nabla_\perp^2\psi+k_c^2\psi=0;} \tag{5.15}$$

$$\boxed{\zeta''+k_z^2\zeta=0,} \tag{5.16}$$

причем

$$\boxed{k_c^2+k_z^2=k^2.} \tag{5.17}$$

Соотношение (5.17) называют *характеристическим уравнением* ЛП, а входящие в него величины $k_c$ и $k_z$ — *поперечным* и *продольным волновым числом*. Число $k_z$ называют также *постоянной распространения*, а $k_c$ — *критическим волновым числом*. Функцию $\psi$ называют *мембранной функцией*, поскольку она удовлетворяет *уравнению мембраны* (двумерному уравнению Гельмгольца) (5.15).

Общее решение дифференциального уравнения (5.16) имеет вид

$$\zeta(z)=\dot{A}_1e^{-ik_zz}+\dot{A}_2e^{ik_zz}, \tag{5.18}$$

что позволяет написать следующее выражение для мгновенных значений вектора Герца:

$$\dot{\Gamma}_z(\mathbf{r},t)=\mathrm{Re}\left[\dot{A}_1\psi(x_1,x_2)e^{i(\omega t-k_zz)}+\dot{A}_2\psi(x_1,x_2)e^{i(\omega t+k_zz)}\right]. \tag{5.19}$$

Таким образом, электромагнитное поле в ЛП есть суперпозиция падающей и отраженной плоских неоднородных волн, имеющих одинаковое распределение электромагнитного поля в поперечном сечении линии и одинаковые (с точностью до знака) постоянные распространения $k_z$. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением падающей волны.

Из характеристического уравнения (5.17) следует, что поскольку при наличии потерь $k$ — комплексное число, постоянная распространения $k_z$ также комплексна:

$$k_z=\beta-i\alpha. \tag{5.20}$$

Подставив выражение (5.20) в (5.19), получим (полагая $A_2=0$)

$$\Gamma_{z\,\text{пад}}=\left[\mathrm{Re}(A_1\psi)\right]e^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z+\varphi). \tag{5.21}$$

Следовательно, в ЛП распространяется затухающая волна, скорость изменения амплитуды которой определяется мнимой частью, а фазы — действительной частью постоянной распространения. Поэтому величину $\alpha$ называют *постоянной затухания*, а $\beta$ — *постоянной фазы (фазовой постоянной)* волны.

Решение (5.18) аналогично по форме выражению (2.10), что позволяет воспользоваться для вычисления фазовой и групповой скоростей уравнениями (2.11), (2.12), заменив в них $k$ на $\beta$:

$$\boxed{v_\phi=\omega/\beta;} \quad (5.22) \qquad \boxed{v_{гр}=d\omega/d\beta.} \quad (5.23)$$

Найдем $k_z$ из (5.17) при $\alpha=0$ и подставим его в (5.22):

$$v_\phi=\omega(k^2-k_c^2)^{-1/2}=u\left[1-(k_c/k)^2\right]^{-1/2}. \quad (5.24)$$

Для вычисления групповой скорости выразим с помощью (2.8) $\omega$ через $k$, подставив результат в (5.23):

$$v_{гр}=\frac{d}{d\beta}\left(\frac{ck}{n_{ср}}\right)=\frac{c}{n_{ср}}\frac{dk}{d\beta}-\frac{ck}{n_{ср}^2}\frac{dn_{ср}}{d\beta}=u\left(1-\frac{k}{n_{ср}}\frac{dn_{ср}}{dk}\right)\frac{dk}{d\beta}.$$

Учитывая, что с первыми дифференциалами можно обращаться как с дробями, используя (5.17), найдем

$$\frac{dk}{d\beta}=\left[\frac{d}{dk}(k^2-k_c^2)^{1/2}\right]^{-1}=\frac{u}{v_\phi}\frac{1}{1-(k_c/k)(dk_c/dk)}.$$

Отсюда

$$\boxed{v_{гр}=\frac{u^2}{v_\phi}\frac{1-\dfrac{k}{n_{ср}}\dfrac{dn_{ср}}{dk}}{1-\dfrac{k_c}{k}\dfrac{dk_c}{dk}}.} \quad (5.25)$$

Таким образом, равенство $v_\phi v_{гр}=u^2$ справедливо только в том случае, когда $n_{ср}$ и $k_c$ — константы.

Из выражений (5.24) и (5.25) следует, что дисперсия в линии передачи наблюдается в тех случаях, когда скорость света в среде $u$ (т. е. показатель преломления $n_{ср}$) зависит от частоты и (или) волна неоднородна ($\psi\neq$const и, согласно (5.15), $k_c\neq0$). Неоднородность волны возникает при искажении ее поля телами, образующими линию передачи. Если, однако, функция $\psi$ принадлежит к классу гармонических, $k_c=0$ и дисперсия при $n_{ср}=$const отсутствует.

Часто бывает удобно оперировать с *замедлениями* фазовой и групповой скоростей:

$$n_\phi=u/v_\phi=\beta/k; \quad (5.26)$$

$$n_{гр}=u/v_{гр}=d\beta/dk. \quad (5.27)$$

Подставив эти выражения в формулу Рэлея (2.13), получим

$$n_{гр}=n_\phi-\lambda_u dn_\phi/d\lambda_u. \quad (5.28)$$

Введем понятия *длины волны* в ЛП, критической длины волны и критической частоты:

$$\lambda_g=2\pi v_\phi/\omega=2\pi/\beta; \quad (5.29)$$

$$\lambda_c=2\pi n_{ср}/k_c;\ \ \omega_c=ck_c/n_{ср};\ \ f_c=\omega_c/(2\pi). \quad (5.30)$$

Используя эти выражения, нетрудно получить соотношение между длинами волн в ЛП и заполняющей ее среде:

$$\lambda_g = \frac{\lambda_u}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_c)^2}}. \qquad (5.31)$$

## § 5.5. ДИСПЕРСИЯ В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ. ЯВЛЕНИЕ ОТСЕЧКИ

Как следует из выражения (5.24), дисперсия в ЛП наблюдается, если показатель преломления заполняющей ее среды зависит от частоты и (или) критическое волновое число отлично от нуля. В СВЧ-диапазоне оптическая плотность большинства диэлектриков от частоты практически не зависит, поэтому дисперсия обусловлена, как правило, второй причиной. В дальнейшем показатель преломления среды будем полагать постоянным.

Из уравнения (5.15) следует, что $k_c \neq 0$, если функция $\psi$ не постоянна, т. е. если волна в ЛП неоднородна. Эта неоднородность распределения поля в поперечном сечении ЛП возникает вследствие поперечной неоднородности образующей ее среды. Данное условие необходимо, но недостаточно: существуют бездисперсные неоднородные волны, функция $\psi$ которых удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla_\perp^2 \psi = 0$. Отметим, что в линии без потерь $k_c^2$ — действительная величина, которая может быть постоянной, либо зависеть от частоты.

Замедления фазовой и групповой скоростей определяют по дисперсионным характеристикам $k = f(\beta)$ или $n_\phi = f(\lambda)$. Как следует из (5.22), (5.23), на графиках первого вида *(диаграммах Бриллуэна)* отношения $v_\phi/u$ и $v_{гр}/u$ равны соответственно тангенсам углов наклона секущей $\varkappa$ и касательной $\nu$ к дисперсионной кривой в точке с заданной частотой (волновым числом) $k_0$ (рис. 5.4, *а*). На характеристике второго вида значение $n_\phi$ определяется ординатой точки кривой, соответствующей заданному значению $\lambda = \lambda_0$. Для определения $n_{гр}$ заметим, что (5.28) можно рассматривать как уравнение касательной к дисперсионной кривой в точке

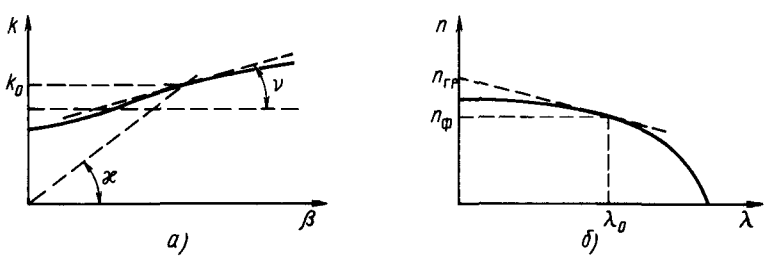



Рис. 5.4. Дисперсионные характеристики ЛП

$\lambda_0$. Точка пересечения этой касательной с осью ординат позволяет найти искомое значение замедления групповой скорости (рис. 5.4, *б*), так как при $\lambda=0$ $n_{гр}=n_{ф}$.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Положим $k_c=0$. Из формул (5.28) и (5.29) следует, что $v_{ф}=v_{г}=u$, т. е. фазовая скорость равна групповой и равна скорости света в среде, заполняющей ЛП. Дисперсия в данном случае отсутствует.

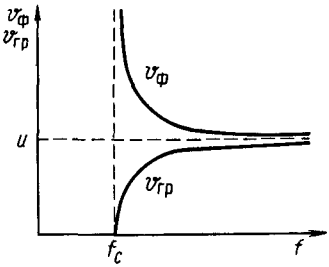



Рис. 5.5. Зависимости фазовой и групповой скоростей от частоты при $k_c^2=\text{const}>0$

2. Пусть $k_0^2=\text{const}>0$. Так как $dk_c/dk=0$,

$$v_{ф}=\frac{u}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}}=\frac{u}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_c)^2}}; \tag{5.32}$$

$$v_{гр}=u\sqrt{1-(f_c/f)^2}=u\sqrt{1-(\lambda/\lambda_c)^2};$$

$$v_{ф}v_{гр}=u^2. \tag{5.33}$$

Зависимости фазовой и групповой скоростей от частоты, определяемые этими формулами, показаны на рис. 5.5. Как видно, на высоких частотах $v_{ф}$ и $v_{гр}$ близки к скорости света в среде, заполняющей ЛП. При уменьшении частоты фазовая скорость волны в линии увеличивается, а групповая — уменьшается, стремясь соответственно к бесконечности и нулю по мере приближения частоты к критической.

Если частота меньше критической $(k<k_c)$, то постоянная распространения становится мнимой:

$$k_z=\beta-i\alpha=\sqrt{k^2-k_c^2}=\pm ik_c\sqrt{1-(k/k_c)^2}. \tag{5.34}$$

Подставив это значение в (5.19), при $A_2=0$ найдем

$$\Gamma_z=\text{Re}\left(A_1\psi e^{i\omega t}e^{\pm\alpha z}\right), \tag{5.35}$$

т. е. в ЛП существуют не волны, а колебания, фаза которых остается постоянной, а амплитуда экспоненциально убывает при увеличении координаты $z$ (так как поле не может неограниченно возрастать на бесконечности, в показателе экспоненты выбираем нижний знак). Таким образом, при $f<f_c(\lambda>\lambda_c)$ электромагнитные волны в ЛП распространяться не могут. Это явление называют *отсечкой*. Режим работы линии при $f<f_c$ называют *запредельным*. Как следует из (5.34), при $f\ll f_c$ постоянная затухания колебаний в линии передачи близка к $k_c$ и практически не зависит от частоты, что используется при конструировании калиброванных аттенюаторов СВЧ. Отметим, что эти выводы соответствуют результатам, полученным методом парциальных волн в § 5.1.

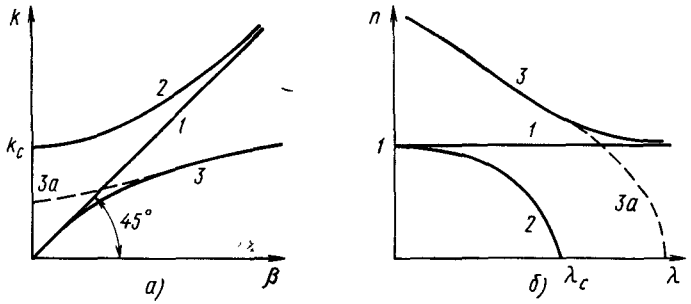



Рис. 5.6. Дисперсионные характеристики ЛП с различными значениями $k_c$:
*а* — в координатах $k$, β; *б* — в координатах $n$, λ

3. Положим $k_c^2<0$. В этом случае критическое волновое число — мнимая величина: $k_c=i\tau$, где $\tau=\sqrt{|k_c^2|}$. Выражения (5.24) и (5.25) принимают вид

$$v_\phi=\frac{u}{\sqrt{1+\tau^2/k^2}};$$

$$v_{гр}=\frac{u\sqrt{1+\tau^2/k^2}}{1+\frac{\tau}{k}\frac{d\tau}{dk}}. \qquad (5.36)$$

Так как групповая скорость не может быть больше скорости света, критическое волновое число должно быть достаточно быстро возрастающей функцией частоты $\left[d\tau/dk>(\tau/k)^{-1}\times\right.$ $\left.\times\left(\sqrt{1+\tau^2/k^2}-1\right)\right]$. При этом $v_\phi v_{гр}\neq u$.

Фазовая скорость волны в рассматриваемом случае меньше скорости света в среде, заполняющей ЛП, что характерно для медленных волн. Пусть, например, критическое волновое число τ изменяется пропорционально частоте: $\tau=ak$. Тогда из (5.36) найдем $v_\phi=v_{гр}=u/\sqrt{1+a^2}$, т. е. медленные волны распространяются без дисперсии.

Цифрами 1, 2, 3 на рис. 5.6 обозначены дисперсионные характеристики, соответствующие рассмотренным примерам. Заметим, что в ЛП с медленными волнами может наблюдаться явление отсечки (кривая 3*а*). При этом по мере увеличения частоты быстрая волна превращается в медленную.

### Контрольные вопросы

1. Чем объясняется зависимость угла отражения плоской однородной волны, распространяющейся между двумя параллельными идеально проводящими плоскостями, от частоты?

2. Что такое критическое волновое число, критическая длина волны, критическая частота?
3. Охарактеризуйте зависимость амплитуды результирующей волны, распространяющейся между двумя параллельными идеально проводящими плоскостями, от продольной и поперечной координат.
4. В чем преимущества и недостатки концепции парциальных волн?
5. Почему и в каких случаях электромагнитное поле в линии передачи можно представить как суперпозицию полей E- и H-типов?
6. При каких условиях справедливо равенство $v_ф v_{гр} = u^2$?
7. Что такое дисперсия в ЛП? Сформулируйте условие отсутствия дисперсии.
8. Сформулируйте условия существования быстрых и медленных волн в ЛП. Может ли при изменении частоты быстрая волна стать медленной и наоборот?
9. В каких координатах строятся дисперсионные характеристики? Как определить по ним фазовую и групповую скорости?

## ГЛАВА 6

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ СВОБОДНЫХ ВОЛН В ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

### § 6.1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

В предыдущей главе задача отыскания решений уравнений Максвелла в линии передачи была сведена к решению уравнения Гельмгольца для продольных составляющих электрического и магнитного векторов Герца. Если решения этих уравнений найдены, то электромагнитное поле, например, волн E-типа определяется с помощью соотношений (4.10), (4.11). Положив в них $\dot{\Gamma}^e = \psi\zeta\mathbf{e}_z$, получим

$$\dot{\mathbf{E}} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^e + k^2\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^e = \operatorname{grad}(\psi\zeta') + k^2\psi\zeta\mathbf{e}_z = \zeta'\nabla_\perp\psi + \zeta''\psi\mathbf{e}_z + k^2\psi\zeta\mathbf{e}_z;$$

$$\dot{\mathbf{H}} = i\omega\varepsilon\zeta[\nabla_\perp, \zeta\psi\mathbf{e}_z],$$

где штрихи обозначают дифференцирование по координате $z$.

Учитывая (5.16) и (5.17), окончательно найдем

$$\dot{\mathbf{E}} = \zeta'\nabla_\perp\psi + k_c^2\psi\zeta\mathbf{e}_z; \tag{6.1}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = i\omega\varepsilon\zeta[\nabla_\perp, \psi\mathbf{e}_z]. \tag{6.2}$$

Выражения для электромагнитного поля волны H-типа получим, воспользовавшись принципом перестановочной двойственности:

$$\dot{\mathbf{E}} = -i\omega\mu\zeta[\nabla_\perp, \psi\mathbf{e}_z]; \tag{6.3}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \zeta'\nabla_\perp\psi + k_c^2\psi\zeta\mathbf{e}_z. \tag{6.4}$$

Из полученных соотношений следует, что при $k_c = 0$ электромагнитное поле в линии передачи имеет только поперечные составляющие. В этом случае считают, что в линии передачи распространяются поперечные, или T-волны *. Отметим, что условие отсутствия продольных составляющих поля волны совпадает с условием ее бездисперсного распространения. Это

* Иногда их называют TEM-волнами.

обстоятельство отражает глубокую связь между строением электромагнитного поля волны и характером ее распространения в линии передачи.

Выражения (6.1) — (6.4) позволяют пояснить физический смысл мембранной функции $\psi$. В случае Е- или Н-волн она пропорциональна продольной составляющей напряженности электрического или магнитного поля. Напряженность электрического поля Т-волны, как следует из (6.1), пропорциональна градиенту функции $\psi$, удовлетворяющей двумерному уравнению Лапласа, которое получается из (5.15) при $k_c = 0$. Следовательно, для Т-волн функция $\psi$ играет роль скалярного потенциала электрического поля, определенного в плоскости поперечного сечения линии передачи.

Заметим, что продольные и поперечные составляющие электромагнитного поля бегущей волны в линии передачи без потерь ($\zeta' = i\beta\zeta$), как следует из (6.1) — (6.4), сдвинуты по фазе на 90°. Это означает, что электрическое поле Е-волн и магнитное поле Н-волн имеют эллиптическую, а магнитное поле Е-волн и электрическое поле Н-волн — линейную поляризацию.

В однородной плоской электромагнитной волне поперечные составляющие векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ связаны между собой соотношениями (2.14). Найдем связь между этими величинами в линии передачи, для чего вычислим векторное произведение $[\mathbf{H}, \mathbf{e}_z]$ для волн Е-типа. Согласно выражению (6.2),

$$[\dot{\mathbf{H}}, \mathbf{e}_z] = i\omega\varepsilon\zeta\,[[\nabla_\perp, \psi\mathbf{e}_z], \mathbf{e}_z] = -i\omega\varepsilon\zeta\,[\nabla_\perp(\mathbf{e}_z, \psi\mathbf{e}_z) - \psi\mathbf{e}_z(\nabla_\perp, \mathbf{e}_z)] =$$

$$= -i\omega\varepsilon\zeta\nabla_\perp\psi,$$

так как символический вектор $\nabla_\perp$ лежит в плоскости поперечного сечения линии передачи и скалярное произведение $(\nabla_\perp \mathbf{e}_z) = 0$.

Сравнив полученное выражение с (6.1), получим

$$[\dot{\mathbf{H}}_\perp, \mathbf{e}_z] = -i\omega\varepsilon\,(\zeta/\zeta')\,\dot{\mathbf{E}}_\perp.$$

Для Н-волн найдем аналогичное соотношение, используя принцип перестановочной двойственности:

$$[\dot{\mathbf{E}}_\perp, \mathbf{e}_z] = i\omega\mu\,(\zeta/\zeta')\,\dot{\mathbf{H}}_\perp.$$

Таким образом, в любой точке поперечного сечения линии передачи векторы $\dot{\mathbf{E}}_\perp$ и $\dot{\mathbf{H}}_\perp$ перпендикулярны, а отношение их длин не зависит от поперечных координат. Для падающей волны $\zeta' = -ik_z\zeta$. Тогда полученное выражение приобретают следующий вид:

$$\boxed{\dot{\mathbf{E}}_\perp = Z_c^{em}[\dot{\mathbf{H}}_\perp, \mathbf{e}_z],} \qquad (6.5)$$

где

$$Z_c^e = \frac{k_z}{\omega\varepsilon} = Z_0\frac{k_z}{k} \qquad (6.6)$$

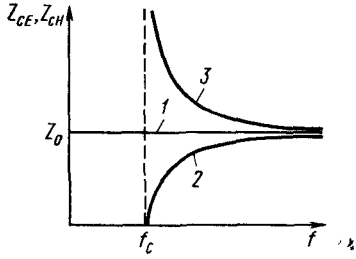



Рис. 6.1. Зависимость характеристического сопротивления ЛП от частоты:
*1* — для Т-волны; *2* — для Е-волны; *3* — для Н-волны

для Е-волн и

$$Z_c^m = \frac{\omega\mu}{k_z} = Z_0 \frac{k}{k_z} \qquad (6.7)$$

для Н-волн. Как видно, в падающей волне поперечные составляющие векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ составляют правую тройку с ортом оси $z$. В отраженной волне $\zeta'' = ik_z\zeta$ и указанные векторы образуют левую тройку.

Величину $Z_c$ называют характеристическим сопротивлением ЛП. Из выражений (6.6) и (6.7) следует, что характеристическое сопротивление ЛП для Е- и Н-волн зависит от частоты, причем эта зависимость различна. Для Т-волны $k_z = k$ и ее характеристическое сопротивление от частоты не зависит. На рис. 6.1 показана зависимость указанных сопротивлений от частоты для $k_c^2 = \text{const}$ и $\alpha = 0$. При $k > k_c$ характеристическое сопротивление активно, т. е. поперечные составляющие электрического и магнитного полей имеют одинаковые фазы. На частотах ниже критической ($k < k_c$) характеристическое сопротивление реактивно, т. е. указанные составляющие сдвинуты по фазе на 90°. При наличии потерь ($\alpha \neq 0$) характеристическое сопротивление комплексно на всех частотах.

Запишем выражения для электромагнитного поля (6.1)—(6.4) в проекциях на оси координат $x_1$, $x_2$, $z$. Учитывая, что для падающей волны $\zeta' = -ik_z\zeta$, для поля Е-волн найдем

$$\dot{E}_1 = -\frac{ik_z}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}; \qquad (6.8)$$

$$\dot{E}_2 = -\frac{ik_z}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}; \qquad (6.9)$$

$$\dot{E}_z = k_c^2\psi; \qquad (6.10)$$

$$\dot{H}_1 = \frac{i\omega\varepsilon}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}; \qquad (6.11)$$

$$\dot{H}_2 = -\frac{i\omega\varepsilon}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}; \qquad (6.12)$$

$$\dot{H}_z = 0. \qquad (6.13)$$

С помощью принципа перестановочной двойственности для Н-волн получим

$$\dot{E}_1 = -\frac{i\omega\mu}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}; \qquad (6.14)$$

$$\dot{E}_2 = \frac{i\omega\mu}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}; \qquad (6.15)$$

$$\dot{E}_z = 0; \qquad (6.16)$$

$$\dot{H}_1 = -\frac{ik_z}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}; \qquad (6.17)$$

$$\dot{H}_2 = -\frac{ik_z}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}; \qquad (6.18)$$

$$\dot{H}_z = k_c^2\psi. \qquad (6.19)$$

Множитель $\zeta = e^{-ik_z z}$ в этих выражениях опущен.

Приведенные формулы позволяют анализировать зависимости различных составляющих электромагнитного поля от координат.

Более наглядно, однако, изображение электромагнитного поля в линии передачи в виде эпюр силовых линий векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$. Для построения этих линий необходимо решить систему дифференциальных уравнений

$$\frac{h_1 \mathrm{d}x_1}{A_1} = \frac{h_2 \mathrm{d}x_2}{A_2} = \frac{dz}{A_z}, \tag{6.20}$$

где $A_1$, $A_2$, $A_z$ — проекции векторов $\dot{\mathbf{E}}$ или $\dot{\mathbf{H}}$ на оси координат, определяемые выражениями (6.8)—(6.19).

Уравнения (6.20) описывают пространственные кривые (линии двоякой кривизны). Однако, так как вектор $\dot{\mathbf{E}}$ Н-волны и вектор $\dot{\mathbf{H}}$ Е-волны лежат в плоскости поперечного сечения линии передачи, силовые линии этих векторов — плоские кривые. Запишем уравнение этих кривых в конечном виде, подставив, например, вместо $A_1$ и $A_2$ $\dot{E}_1$ и $\dot{E}_2$ из (6.14), (6.15) в первое уравнение (6.20):

$$\frac{h_1 \mathrm{d}x_1}{-\dfrac{\mathrm{i}\omega\mu}{h_2}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}} = \frac{h_2 \mathrm{d}x_2}{\dfrac{\mathrm{i}\omega\mu}{h_1}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}}.$$

Преобразуем полученное соотношение:

$$\mathrm{i}\omega\mu\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\right) = 0.$$

Выражение в скобках есть полный дифференциал функции $\psi$. Из равенства его нулю следует, что уравнение силовой линии имеет вид

$$\boxed{\psi = \mathrm{const},} \tag{6.21}$$

т. е. силовые линии вектора $\dot{\mathbf{E}}$ есть линии уровня функции $\psi$. Это утверждение справедливо и для силовых линий вектора $\dot{\mathbf{H}}$ Е-волны.

Вывод уравнений силовых линий векторов $\mathbf{E}$ для Е-волн и $\mathbf{H}$ для Н-волн приведен в Приложении 3.

### § 6.2. ПЕРЕДАВАЕМАЯ МОЩНОСТЬ

Поток энергии в направляющей системе определяется потоком вектора Пойнтинга через ее поперечное сечение $S$:

$$P = 0{,}5\ \mathrm{Re} \int_S [\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}^*]\mathbf{e}_z \mathrm{d}S. \tag{6.22}$$

В общем случае напряженности электрического и магнитного полей имеют как поперечные, так и продольные составляющие: $\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_\perp + \dot{E}_z\mathbf{e}_z$; $\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}_\perp + \dot{H}_z\mathbf{e}_z$. Подставив эти выражения в (6.22) и произведя перемножение, получим

$$P=0{,}5\,\mathrm{Re}\{\int\limits_S[\dot{\mathbf{E}}_\perp,\dot{\mathbf{H}}_\perp^*]\mathbf{e}_z\,dS+\int\limits_S\dot{H}_z^*[\dot{\mathbf{E}}_\perp\mathbf{e}_z]\mathbf{e}_z\,dS+\int\limits_S\dot{E}_z[\mathbf{e}_z,\dot{\mathbf{H}}_\perp^*]\mathbf{e}_z\,dS+$$

$$+\int\limits_S\dot{E}_z\dot{H}_z^*[\mathbf{e}_z,\mathbf{e}_z]\mathbf{e}_z\,dS\}.$$

Последние три интеграла равны нулю, так как в векторно-скалярных произведениях по крайней мере два вектора имеют одинаковое направление. Таким образом,

$$P=0{,}5\,\mathrm{Re}\int\limits_S[\dot{\mathbf{E}}_\perp,\dot{\mathbf{H}}_\perp^*]\mathbf{e}_z\,dS, \tag{6.23}$$

т. е. передаваемая мощность определяется только поперечными составляющими электромагнитного поля. Так как вклад в энергию, запасенную в единице длины линии передачи $W_1$, вносят все составляющие электромагнитного поля, скорость переноса энергии $v_э=P/W_1$ у волн, имеющих продольные составляющие поля (и, следовательно, обладающих дисперсией), всегда меньше, чем у поперечных волн.

Подставив в (6.23) соотношение (6.5), вычислим

$$P=0{,}5\,(\mathrm{Re}\,Z_c)\,e^{-2\alpha z}\int\limits_S|\dot{\mathbf{H}}_\perp|^2dS=\frac{e^{-2\alpha z}}{2\,\mathrm{Re}\,Z_c}\int\limits_S|\dot{\mathbf{E}}_\perp|^2dS. \tag{6.24}$$

Согласно (6.1) и (6.4), для Е-волн

$$P=0{,}5\,Z_c^{-1}e^{-2\alpha z}\,\mathrm{Re}\,(kk_z^*)\int\limits_S|\nabla_\perp\psi|^2\,dS, \tag{6.25}$$

для Н-волн

$$P=0{,}5\,Z_c e^{-2\alpha z}\,\mathrm{Re}\,(kk_z^*)\int\limits_S|\nabla_\perp\psi|^2\,dS. \tag{6.26}$$

При наличии потерь передаваемая мощность уменьшается по мере распространения волны по экспоненциальному закону. Скорость уменьшения мощности принято характеризовать затуханием

$$L=10\lg(P_1/P_2),$$

где $P_1$, $P_2$ — потоки энергии в сечениях линии передачи, отстоящих друг от друга на единицу длины. В соответствии с (6.24)

$$L=10\lg e^{2\alpha}=8{,}68\alpha,$$

где $L$ — в дБ/м.

### § 6.3. УСЛОВИЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД

Для решения уравнения (5.15) необходимо определить граничные условия, которым должна удовлетворять функция $\psi$ на поверхностях раздела сред, образующих линию передачи. Если

обе среды диэлектрические, касательные составляющие векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ на границе их раздела $S$ должны быть непрерывны (см. § 1.3): $\dot{\mathbf{E}}_{1\tau}=\dot{\mathbf{E}}_{2\tau}$; $\dot{\mathbf{H}}_{1\tau}=\dot{\mathbf{H}}_{2\tau}$. Умножив эти векторные равенства скалярно сначала на орт оси $z$, а затем на орт касательной к контуру поперечного сечения $L$, ортогональный $\mathbf{e}_z$ (рис. 6.2), получим

$$\dot{E}_{1z}=\dot{E}_{2z};\quad \dot{H}_{1z}=\dot{H}_{2z}; \tag{6.27}$$

$$\dot{E}_{1l}=\dot{E}_{2l};\quad \dot{H}_{1l}=\dot{H}_{2l}. \tag{6.28}$$

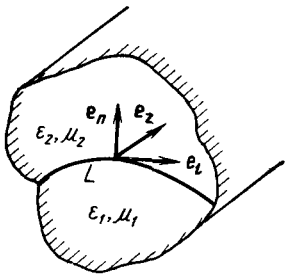



Рис. 6.2. Линия передачи с поперечно-неоднородным заполнением

В общем случае электромагнитное поле ЛП представляет собой суперпозицию Е- и Н-волн:

$$\dot{\mathbf{E}}=\zeta'\nabla_\perp\psi^e+k_c^2\psi^e\zeta\mathbf{e}_z-\mathrm{i}\omega\mu\zeta[\nabla_\perp,\psi^m\mathbf{e}_z]; \tag{6.29}$$

$$\dot{\mathbf{H}}=\mathrm{i}\omega\varepsilon\zeta[\nabla_\perp,\psi^e\mathbf{e}_z]+\zeta'\nabla_\perp\psi^m+k_c^2\psi^m\zeta\mathbf{e}_z. \tag{6.30}$$

Для падающей волны $\zeta'=-\mathrm{i}k_z\zeta$. С учетом этого равенства и выражений (6.29), (6.30) условия (6.27), (6.28) принимают вид

$$k_{c1}^2\psi_1^e=k_{c2}^2\psi_2^e; \tag{6.31}$$

$$k_{c1}^2\psi_1^m=k_{c2}^2\psi_2^m; \tag{6.32}$$

$$k_z\frac{\partial\psi_1^e}{\partial l}+\omega\mu_1\frac{\partial\psi_1^m}{\partial n}=k_z\frac{\partial\psi_2^e}{\partial l}+\omega\mu_2\frac{\partial\psi_2^m}{\partial n}; \tag{6.33}$$

$$\omega\varepsilon_1\frac{\partial\psi_1^e}{\partial n}-k_z\frac{\partial\psi_1^m}{\partial l}=\omega\varepsilon_2\frac{\partial\psi_2^e}{\partial n}-k_z\frac{\partial\psi_2^m}{\partial l}, \tag{6.34}$$

где $\partial\psi/\partial n$ — производная функции $\psi$ по нормали к поверхности раздела. При выводе этих соотношений использованы следующие векторные тождества:

$$(\mathbf{e}_l,\nabla_\perp\psi)=\partial\psi/\partial l;\ (\mathbf{e}_l[\nabla_\perp,\psi\mathbf{e}_z])=(\nabla_\perp\psi[\mathbf{e}_l,\mathbf{e}_z])+(\psi\mathbf{e}_z[\nabla_\perp,\mathbf{e}_l])=(\nabla_\perp\psi,\mathbf{e}_n)=\partial\psi/\partial n.$$

Анализ полученных выражений показывает, что в общем случае Е- и Н-волны в линии передачи не разделяются, т. е. в ней распространяются смешанные (гибридные) волны. Их обозначают символами ЕН или НЕ в зависимости от преобладания продольной составляющей электрического или магнитного поля.

Однако, если $\partial\psi/\partial l=0$ (функции $\psi^e$, $\psi^m$ принимают постоянные значения на контуре поверхности раздела), граничные условия (6.33) и (6.34) для Е- и Н-волн разделяются:

$$\varepsilon_1\frac{\partial\psi_1^e}{\partial n}=\varepsilon_2\frac{\partial\psi_2^e}{\partial n}; \tag{6.35}$$

$$\mu_1\frac{\partial\psi_1^m}{\partial n}=\mu_2\frac{\partial\psi_2^m}{\partial n}. \tag{6.36}$$

Это означает, что в данном случае E- и H-волны могут распространяться в линии передачи независимо друг от друга, а уравнения (5.15) можно решать отдельно для функций $\psi^e$ и $\psi^m$.

На поверхности раздела диэлектрик — идеальный проводник касательная составляющая вектора напряженности электрического поля равна нулю, т. е. $E_z=0$ и $E_l=0$. Тогда из (6.31) и (6.33) получим

$$k_c^2\psi^e=0; \quad . \quad (6.37) \qquad k_z\frac{\partial\psi^e}{\partial l}+\omega\mu\frac{\partial\psi^m}{\partial n}=0. \quad (6.38)$$

Из первого условия следует, что при $k_c\neq 0$ функция $\psi^e$ обращается в нуль на контуре $L$ металлической поверхности:

$$\boxed{\psi^e=0.} \quad (6.39)$$

Это граничное условие соответствует E-волнам, которые могут существовать в металлической линии передачи независимо от других типов волн. Из (6.39) следует, что $\partial\psi^e/\partial l=0$, и условие (6.38) приобретает вид

$$\boxed{\partial\psi^m/\partial n=0.} \quad (6.40)$$

Таким образом, H-волны также могут распространяться в металлических линиях передачи независимо от других типов волн.

Волны типа T можно рассматривать как частный случай E-волн при $k_c=0$. Условие (6.37) при этом удовлетворяется автоматически. Подставив в оставшееся условие (6.38) равенство (6.40), найдем

$$\boxed{\frac{\partial\psi^e}{\partial l}=0 \text{ или } \psi^e=\text{const.}} \quad (6.41)$$

Выражение (6.41) есть граничное условие для T-волн в металлической линии передачи. Из него следует, что в металлических линиях передачи E-, H- и T-волны могут существовать независимо друг от друга (если считать металл идеально проводящим).

Отметим, что для поля T-типа мембранное уравнение (5.15) сводится к уравнению Лапласа, т. е. функция $\psi$ в данном случае принадлежит к классу гармонических функций. Теорема о гармонических функциях утверждает, что если эта функция принимает постоянное значение на границе расчетной области $S$, как это следует из (6.41), то она постоянна и всюду в области $S$. Согласно (6.8)—(6.13), электромагнитное поле, описываемое такой функцией, тождественно равно нулю, т. е. существование T-волн в данном случае невозможно. В многосвязных линиях передачи на каждой из направляющих цилиндрических поверхностей функция $\psi$ может принимать постоянные значения $\psi_1$, $\psi_2$, ..., отличные друг от друга. В этом случае внутри области

$S$ она не является постоянной и определяет ненулевое электромагнитное поле. Следовательно, поперечные электромагнитные волны могут распространяться только в многосвязных линиях передачи.

## § 6.4. ЗАТУХАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

Распространение электромагнитной волны в ЛП сопровождается рассеянием части ее энергии в среде, заполняющей линию передачи, и на поверхности входящих в ее конструкцию металлических проводников. Вследствие этого амплитуда волны по мере распространения уменьшается, т. е. волна затухает. При расчете электромагнитного поля в ЛП необходимо учитывать, что диэлектрическая и (или) магнитная проницаемость заполняющей ее среды — комплексные величины, а на металлических поверхностях электромагнитное поле удовлетворяет граничному условию Леонтовича (2.36). Подставив в него выражения (6.29) и (6.30) и спроецировав полученное векторное уравнение на ось $z$ и направление касательной к направляющей $\mathbf{e}_l$, получим два скалярных уравнения

$$k_c^2 \psi^e = -ikZ_s Z_c^{-1} \frac{\partial \psi^e}{\partial n} - ik_z Z_s \frac{\partial \psi^m}{\partial l};$$

$$k_c^2 Z_s \psi^m = ikZ_c \frac{\partial \psi^m}{\partial n} - ik_z \frac{\partial \psi^e}{\partial l},$$

из которых следует, что при $Z_s \neq 0$ в ЛП распространяются гибридные волны. Однако если поверхностное сопротивление $Z_s$ мало, то можно пренебречь «примесью» волн другого типа. В этом приближении граничные условия для Е- и Н-волн разделяются:

$$\frac{ik}{k_c^2} \frac{Z_s}{Z_0} \frac{\partial \psi^e}{\partial n} + \psi^e = 0; \quad \frac{\partial \psi^m}{\partial n} + \frac{ik_c^2}{k} \frac{Z_s}{Z_0} \psi^m = 0.$$

Так как коэффициенты, связывающие в граничных условиях искомую функцию с ее нормальной производной, комплексные, значения критических волновых чисел, получаемые в результате решения уравнения (5.15) с учетом этих условий также комплексны: $k_c = k_c' + ik_c''$. При наличии затухания в среде, заполняющей линию передачи, комплексно и волновое число $k = k' - ik''$. Таким образом, постоянная распространения

$$k_z = \beta - i\alpha = \left[k'^2 - k_c'^2 - k''^2 + k_c''^2 - 2i(k'k'' + k_c'k_c'')\right]^{1/2}.$$

В случае малых потерь ($k'' \ll k'$, $k_c'' \ll k_c'$) в этом выражении величинами второго порядка малости пренебрегаем.
Предполагая, что $k'^2 - k_c'^2 \gg 2(k'k'' + k_c'k_c'')$, т. е. длина волны не слишком близка к критической, преобразуем найденное выражение следующим образом:

$$k_z=\sqrt{k'^2-k_c'^2}\left(1-\mathrm{i}\,\frac{k'k''+k_c'k_c''}{k'^2-k_c'^2}\right).$$

Отсюда

$$\beta=\sqrt{k'^2-k_c'^2}; \tag{6.42}$$

$$\alpha=\alpha_д+\alpha_м, \tag{6.43}$$

где

$$\alpha_д=\frac{k'k''}{\beta}=\frac{1}{2}\,\frac{k'\operatorname{tg}\delta}{\sqrt{1-(k_c'/k')^2}}; \tag{6.44}$$

$$\alpha_м=\frac{k_c'k_c''}{\beta}=\frac{k_c''}{\sqrt{(k'/k_c')^2-1}} \tag{6.45}$$

— постоянные затухания, обусловленные потерями в диэлектрике и металле. В данном приближении потери в металле и диэлектрике аддитивны и их можно вычислить независимо.

При $\beta\to 0$ постоянные $\alpha_д$ и $\alpha_м$ стремятся к бесконечности. Однако следует отметить, что при малых $\beta$ становится неприменимым приближение, для которого получены соотношения (6.42)— (6.45). На высоких частотах $\beta\approx k'$ и выражение для $\alpha_д$ упрощается: $\alpha_д=0{,}5k'\operatorname{tg}\delta$, что совпадает с формулой (2.30) для плоской электромагнитной волны.

Для расчета $\alpha_м$ необходимо решить уравнение (5.15) с комплексными граничными условиями (2.38). Несколько примеров решения этой сложной задачи для простейших случаев приведены в монографии [2]. Более простой метод вычисления $\alpha_м$ основан на том, что для металлов с высокой электропроводностью толщина скин-слоя на СВЧ составляет доли микрометра, а модуль коэффициента отражения практически равен единице (см. § 2.7). Это позволяет предполагать, что структура поля в реальной линии совпадает со структурой поля в линии, имеющей идеально проводящие поверхности.

Из (6.24) следует, что изменение мощности, проходящей через поперечное сечение ЛП на длине $\mathrm{d}l$, $\mathrm{d}P=-2\alpha P\,\mathrm{d}l$. Это изменение равно по абсолютному значению и противоположно по знаку мощности потерь: $\mathrm{d}P=-P_{пм}\,\mathrm{d}l$, где $P_{пм}$ — мощность потерь в металле на единицу длины линии (потери в диэлектрике не учитываем). Сопоставив эти выражения, найдем

$$\alpha_м=P_{пм}/(2P). \tag{6.46}$$

Согласно (2.39),

$$P_{пм}=0{,}5R_s\oint_L|\dot{\mathbf{H}}_\tau|^2\,\mathrm{d}l,$$

где интегрирование производится по контурам поперечного сечения металлических тел, образующих ЛП. Так как

$$P=0{,}5\operatorname{Re}Z_c^{em}\int_S|\dot{\mathbf{H}}_\perp|^2\,\mathrm{d}S,$$

подставив значения $P_{пм}$ и $P$ в (6.46), найдем

$$\alpha_м = \frac{R_s}{2\,\mathrm{Re}\,Z_c} \frac{\int\limits_L |\dot{\mathbf{H}}_\tau|^2 \mathrm{d}l}{\int\limits_S |\dot{\mathbf{H}}_\perp|^2 \mathrm{d}S}, \tag{6.47}$$

где $\mathbf{H}_\tau$, $\mathbf{H}_\perp$ — составляющие напряженности магнитного поля в идеально проводящей линии передачи.

Описанный метод расчета называется *энергетическим*. Он справедлив при условии, что поля в реальной и идеально проводящей ЛП совпадают, что, в свою очередь, справедливо при $\alpha_м \ll \beta$.

С учетом выражений (6.1)—(6.4) выразим $\mathbf{H}_\tau$ и $\mathbf{H}_\perp$ через функцию $\psi$:

для поля Е- и Т-типа

$$\dot{\mathbf{H}}_\tau = \mathrm{i}\omega\dot{\varepsilon}\frac{\partial\psi}{\partial n};\quad \dot{\mathbf{H}}_\perp = \mathrm{i}\omega\dot{\varepsilon}\left[\nabla_\perp, \psi\mathbf{e}_z\right];$$

$$\alpha_м = \frac{R_s}{2Z_0}\frac{k}{\beta}\frac{\int\limits_L |\partial\psi/\partial n|^2 \mathrm{d}l}{\int\limits_S |\nabla_\perp\psi|^2 \mathrm{d}S}; \tag{6.48}$$

для поля Н-типа

$$|\mathbf{H}_\tau|^2 = |H_l|^2 + |H_z|^2 = \left|-\mathrm{i}k_z\frac{\partial\psi}{\partial l}\right|^2 + |k_c^2\psi|^2;$$

$$|\mathbf{H}_\perp|^2 = |-\mathrm{i}k_z\nabla_\perp\psi|^2;$$

$$\alpha_м = \frac{R_s}{2Z_0}\frac{\beta}{k}\left[\frac{\int\limits_L |\partial\psi/\partial l|^2 \mathrm{d}l}{\int\limits_S |\nabla_\perp\psi|^2 \mathrm{d}S} + \frac{k_c^4}{\beta^2}\frac{\int\limits_L |\psi|^2 \mathrm{d}l}{\int\limits_S |\nabla_\perp\psi|^2 \mathrm{d}S}\right]. \tag{6.49}$$

Из полученных выражений следует, что по мере приближения частоты к критической постоянная затухания всех типов волн неограниченно растет. При этом нарушается условие справедливости энергетического метода ($\alpha \ll \beta$), т. е. на частотах, очень близких к критической, записанные выражения теряют смысл.

С увеличением частоты ($k \to \infty$, $\beta \to k$) постоянная затухания Е- и Т-волн увеличивается пропорционально росту $R_s$, т. е. пропорционально $\sqrt{\omega}$. Для Н-волн при $k_c = \mathrm{const}$ первое слагаемое в (6.49), обусловленное поперечным магнитным полем (продольными токами в стенках линии передачи), также растет пропорционально $\sqrt{\omega}$, а второе слагаемое, обусловленное продольной

составляющей магнитного поля (поперечными токами в стенках), изменяется пропорционально отношению $R_s/\beta^2$, т. е. уменьшается пропорционально $\omega^{-3/2}$. Это объясняется тем, что с увеличением частоты структура поля волны приближается к поперечной, и отношение $H_z/H_\perp$ быстро убывает. Если на металлических поверхностях линии передачи функция $\psi$ постоянна ($\partial\psi/\partial l=0$), то поперечные токи в стенках отсутствуют и затухание Н-волны с фиксированным $k_c$ по мере роста частоты неограниченно уменьшается.

### § 6.5. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ ВОЛН В ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

Электромагнитное поле свободных волн в линии передачи описывается функцией $\psi$, удовлетворяющей однородному уравнению Гельмгольца (5.15). Запишем это уравнение в следующем виде:

$$\mathscr{L}\psi=\Lambda\psi, \tag{6.50}$$

где $\mathscr{L}=-\nabla_\perp^2$; $\Lambda=k_c^2$. Решениями этого уравнения являются такие функции, результат воздействия на которые дифференциального оператора $\mathscr{L}$ сводится к их умножению на некоторое число $\Lambda$. Ненулевые решения уравнения (6.50) возможны только при определенных значениях параметра $\Lambda$, называемых *собственными значениями оператора* $\mathscr{L}$. Каждому собственному значению соответствуют одно или несколько решений, называемых *собственными функциями оператора* $\mathscr{L}$. В последнем случае собственное значение считается *вырожденным*, причем кратность вырождения равна числу линейно независимых собственных функций, принадлежащих этому значению. Некоторые свойства операторов, их собственных функций и значений приведены в Приложении 2.

Совокупность всех собственных значений оператора называется его *спектром*. Доказано, что спектр оператора $\mathscr{L}=-\nabla_\perp^2$ с граничными условиями (6.39), (6.40) дискретный и содержит бесконечное счетное множество действительных собственных значений. В граничные условия (6.31)—(6.34) входит частота, поэтому собственные значения и функции оператора $\mathscr{L}$ в общем случае зависят от частоты как от параметра.

Собственная функция, соответствующая наименьшему собственному значению $\Lambda_1$ оператора $\mathscr{L}$, определяет *основной тип волны* в данной линии передачи. Он обладает наибольшей критической длиной волны $\lambda_{c1}=2\pi/\sqrt{\Lambda_1}$ (наименьшей критической частотой $f_c$). Все остальные собственные функции определяют *высшие типы волн*, имеющие критические частоты $f_{c2}$, $f_{c3}$, ..., не ниже критической частоты основного типа волны.

Очевидно, что на частотах $f<f_{c1}$ распространение волн в линии передачи невозможно. В диапазоне частот $f_{c1}<f<f_{c2}$ в линии

может распространяться только один, основной тип волны. Такой режим работы ЛП называют *одномодовым*, а интервал $(f_{c1}, f_{c2})$ — *рабочим диапазоном частот* линии передачи. На практике ширину этого диапазона выбирают несколько меньше теоретической — от 1,25 $f_{c1}$ до 0,95 $f_{c2}$, так как вблизи критической частоты $f_{c1}$ увеличивается затухание основного типа волны, а вблизи $f_{c2}$ возникает опасность возбуждения высших типов волн.

По мере роста частоты число типов волн, которые могут распространяться в линии передачи, увеличивается. Число типов волн $\Delta N$, критические частоты которых лежат в интервале $\Delta\omega$, определяется асимптотической *формулой Куранта*, тем более точной, чем больше $\omega$:

$$\Delta N = \frac{S}{\pi c^2}\omega\Delta\omega, \tag{6.51}$$

где $S$ — площадь поперечного сечения линии передачи. Отношение $\Delta N/\Delta\omega$ называется плотностью спектра собственных волн. Как следует из выражения (6.51), плотность спектра собственных волн в ЛП растет пропорционально первой степени частоты.

Так как оператор Лапласа с граничными условиями (6.39) или (6.40) является самосопряженным (см. Приложение 2), его собственные функции ортогональны:

$$\boxed{\int_S \psi_m \psi_n^* \mathrm{d}S = 0, \quad m \neq n.} \tag{6.52}$$

Из этого равенства следует ортогональность электромагнитных полей различных типов свободных волн в линиях передачи. Для доказательства рассмотрим, например, Е-волны. Вычислим интеграл

$$I = \int_S \dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{E}}_n^* \mathrm{d}S = \zeta_m' \zeta_n'^* \int_S \nabla_\perp \psi_m \nabla_\perp \psi_n^* \mathrm{d}S.$$

Воспользовавшись формулой Грина (П.15), получим

$$I_1 = \zeta_m' \zeta_n'^* \left[ \int_S \psi_m \nabla_\perp^2 \psi_n^* \mathrm{d}S + \oint_L \psi_m \frac{\partial \psi_n^*}{\partial n} \mathrm{d}l \right] = \zeta_m' \zeta_n'^* k_{cn}^2 \int_S \psi_m \psi_n^* \mathrm{d}S = 0, \quad m \neq n. \tag{6.53}$$

Такое же равенство справедливо и для магнитного поля. Действительно,

$$I_2 = \int_S \dot{\mathbf{H}}_m \dot{\mathbf{H}}_n^* \mathrm{d}S = \omega^2 \varepsilon^2 \int_S (\mathrm{rot}_\perp \psi_m \mathbf{e}_z)(\mathrm{rot}_\perp \psi_n^* \mathbf{e}_z) \mathrm{d}S.$$

Согласно векторному тождеству (П.7),

$$I_2 = \omega^2 \varepsilon^2 \left\{ \int_S \psi_m \mathbf{e}_z [\nabla_\perp, [\nabla_\perp, \psi_n^* \mathbf{e}_z]] \mathrm{d}S + \oint_L \psi_m [\nabla_\perp, \psi_n^* \mathbf{e}_z] \mathrm{d}\mathbf{l} \right\}.$$

Преобразуем подынтегральные выражения:

$$\psi_m[\nabla_\perp, [\nabla_\perp, \psi_n^*\mathbf{e}_z]]\mathbf{e}_z = \psi_m\{\nabla_\perp(\nabla_\perp, \psi_n^*\mathbf{e}_z) - \psi_n^*\mathbf{e}_z(\nabla_\perp, \nabla_\perp)\}\mathbf{e}_z =$$

$$= \psi_m\left\{\nabla_\perp\frac{\partial\psi_n^*}{\partial z} - \nabla_\perp^2\psi_n^*\mathbf{e}_z\right\}\mathbf{e}_z = \psi_m\nabla_\perp^2\psi_n^* = -k_{cn}^{*2}\psi_m\psi_n^*,$$

так как первое слагаемое в фигурных скобках равно нулю (функция $\psi$ не зависит от $z$).

$$\oint_L \psi_m[\nabla_\perp, \psi_n^*\mathbf{e}_z]\,\mathrm{d}\mathbf{l} = \oint_L \psi_m\nabla_\perp[\psi_n^*\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_l]\,\mathrm{d}l = \oint_L \psi_m\frac{\partial\psi_n^*}{\partial n}\,\mathrm{d}l = 0.$$

Таким образом,

$$\int_S \dot{\mathbf{H}}_m\dot{\mathbf{H}}_n^*\,\mathrm{d}S = -\omega^2\varepsilon^2k_{cn}^{*2}\int_S \psi_m\psi_n^*\,\mathrm{d}S = 0, \quad m \neq n. \tag{6.54}$$

Наконец, найдем

$$\int_S [\dot{\mathbf{E}}_m, \dot{\mathbf{H}}_n^*]\mathbf{e}_z\,\mathrm{d}S = \mathrm{i}\omega\varepsilon\zeta_m'\zeta_n\int_S [\nabla_\perp\psi_m[\nabla_\perp, \psi_n^*\mathbf{e}_z]]\mathbf{e}_z\,\mathrm{d}S = \mathrm{i}\omega\varepsilon\zeta_m'\zeta_n^*\int_S \{\nabla_\perp(\nabla_\perp\psi_m, \psi_n^*\mathbf{e}_z) -$$

$$-\psi_n^*\mathbf{e}_z(\nabla_\perp\psi_m, \nabla_\perp)\}\mathbf{e}_z\,\mathrm{d}S.$$

Первое слагаемое в фигурных скобках равно нулю, так как содержит скалярное произведение двух взаимно перпендикулярных векторов — $\mathrm{grad}_\perp\psi_m$ и $\psi_n^*\mathbf{e}_z$. Следовательно,

$$\int_S [\dot{\mathbf{E}}_m, \dot{\mathbf{H}}_n^*]\mathbf{e}_z\,\mathrm{d}S = -\mathrm{i}\omega\varepsilon\zeta_m'\zeta_n^* \times$$

$$\times\int_S \psi_n^*\nabla_\perp^2\psi_m\,\mathrm{d}S = \mathrm{i}\omega\varepsilon\zeta_m'\zeta_n^*k_{cm}^2\int_S \psi_m\psi_n^*\,\mathrm{d}S = 0, \quad m \neq n. \tag{6.55}$$

Последнее равенство означает, в частности, что электромагнитные волны различных типов распространяются в ЛП независимо друг от друга, и суммарная мощность, переносимая всеми волнами, равна сумме мощностей, переносимых каждой волной.

Пусть в ЛП распространяется $N$ различных типов E-волн. Тогда поле в ней представляет собой суперпозицию полей этих волн: $\dot{\mathbf{E}} = \sum_{m=1}^{N}\dot{\mathbf{E}}_m$; $\dot{\mathbf{H}} = \sum_{n=1}^{N}\dot{\mathbf{H}}_n$. Поток энергии равен действительной части потока вектора Пойнтинга:

$$P = 0{,}5\,\mathrm{Re}\int_S [\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}^*]\mathbf{e}_z\,\mathrm{d}S = 0{,}5\,\mathrm{Re}\int_S\left[\sum_{m=1}^{N}\dot{\mathbf{E}}_m, \sum_{n=1}^{N}\dot{\mathbf{H}}_n^*\right]\mathbf{e}_z\,\mathrm{d}S = 0{,}5\,\mathrm{Re}\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\int_S [\dot{\mathbf{E}}_m\dot{\mathbf{H}}_n^*]\mathbf{e}_z\,\mathrm{d}S.$$

Подставив в это выражение (6.55), получим

$$P = \sum_{m=1}^{N} P_m,$$

где $P_m = 0{,}5\,\mathrm{Re}\int_S [\dot{\mathbf{E}}_m, \dot{\mathbf{H}}_n^*]\mathbf{e}_z\,\mathrm{d}S$ — мощность, переносимая волной с номером $m$. Величину

$$N_m = \int_S [\dot{\mathbf{E}}_m, \dot{\mathbf{H}}_m^*]\,\mathbf{e}_z \mathrm{d}S = -\mathrm{i}\omega\varepsilon\zeta'_m\zeta_m^* \int_S \psi_m^* \nabla_\perp^2 \psi_m \mathrm{d}S,$$

пропорциональную мощности $P_m$, называют *нормой* собственной волны. Используя формулу Грина (П.15), найдем

$$N_m = \omega\varepsilon k_{zm} \mathrm{e}^{-2\alpha_m z} \int_S |\nabla_\perp \psi_m|^2 \mathrm{d}S. \tag{6.56}$$

Можно убедиться, что соотношения ортогональности (6.53)—(6.55) справедливы для Н-волн, а также и в том случае, когда одна из волн принадлежит к волнам Е-типа, а другая—к волнам Н-типа. Из последнего утверждения следует справедливость соотношений (6.53)—(6.55) и для гибридных волн в ЛП.

Для открытых линий передачи соотношения ортогональности выполняются, если в качестве боковой поверхности $S_6$ выбрать поверхность, настолько удаленную от тел, образующих линию, что на ней можно считать $\psi = 0$ и $\partial\psi/\partial n = 0$, т. е. внутри поверхности $S_6$ должно быть заключено практически все поле. Такую поверхность всегда можно построить, так как поле собственных неизлучающихся волн в открытой ЛП достаточно быстро убывает в поперечном направлении.

Если в ЛП наряду с волнами, распространяющимися в положительном направлении оси $z$ (падающими), имеются волны, распространяющиеся в обратном направлении (отраженные), то соотношение ортогональности (6.55) необходимо обобщить. Обозначим волны, распространяющиеся в отрицательном направлении оси $z$, отрицательными индексами. Так как распределение поля падающих и отраженных волн в поперечном сечении одинаково [см. формулу (5.19)], $\psi_{-m} = \psi_m$, $k_{c,-m} = k_{cm}$, $k_{z,-m} = -k_{zm}$. Используя эти соотношения, вычислим

$$I_3 = \int_S \{[\dot{\mathbf{E}}_m, \dot{\mathbf{H}}_n] - [\dot{\mathbf{E}}_n, \dot{\mathbf{H}}_m]\}\,\mathbf{e}_z \mathrm{d}S.$$

Воспользовавшись (6.55), получим

$$I_3 = -\mathrm{i}\omega\varepsilon\zeta'_m\zeta_n k_{cn}^2 \int_S \psi_n\psi_m \mathrm{d}S + \mathrm{i}\omega\varepsilon\zeta'_n\zeta_m k_{cm}^2 \int_S \psi_m\psi_n \mathrm{d}S = \mathrm{i}\omega\varepsilon\left(k_{zn}k_{cm}^2 - k_{zm}k_{cn}^2\right)\zeta_m\zeta_n \int_S \psi_n\psi_m \mathrm{d}S.$$

Если $|m| \neq |n|$, то интеграл в правой части равен нулю и $I_3 = 0$. Если $n = m$, то выражение в круглых скобках равно нулю и $I_3$ также равно нулю. При $n = -m$

$$I_3 = 2\omega\varepsilon k_{zm} \int_S |\nabla\psi_m|^2 \mathrm{d}S = N_{em} \neq 0. \tag{6.57}$$

Таким образом,

$$\int_S \{[\dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{H}}_n] - [\dot{\mathbf{E}}_n, \dot{\mathbf{H}}_m]\}\, \mathbf{e}_z \mathrm{d}S = \begin{cases} 0, & n \neq -m, \\ N_{em}, & n = -m. \end{cases} \tag{6.58}$$

Соотношение (6.58) есть обобщенное условие ортогональности волн в ЛП. Проделав аналогичные выкладки, его нетрудно получить и для Н-волн, а также для гибридных волн.

Величину $N_{em}$ называют обобщенной нормой волны. Сравнивая (6.55) и (6.57), видим, что в ЛП без потерь для распространяющихся типов волн ($k_{zm} = \beta_m$)

$$N_{em} = 2N_m.$$

Для нераспространяющихся типов волн ($k_{zm} = -\mathrm{i}\alpha_m$)

$$N_{em} = 2\mathrm{i}\,|N_m|\,\mathrm{e}^{2\alpha_m z} = 2\mathrm{i}\omega\varepsilon\alpha_m \int_S |\nabla_\perp \psi_m|^2 \mathrm{d}S$$

— величина, не зависящая от координаты $z$.

Заметим, что в линии передачи с потерями обобщенная *норма $N_{em}$ в отличие от $N_m$ также не зависит от координаты $z$.*

**Контрольные вопросы**

1. Как связаны между собой напряженности электрического и магнитного полей в линии передачи?
2. Дайте определение характеристического сопротивления волны в линии передачи. Как это сопротивление зависит от частоты и длины волны?
3. Какими составляющими электромагнитного поля определяется передаваемая мощность? Как влияет на скорость переноса энергии существование продольных составляющих электромагнитного поля?
4. Дайте определение затухания в линии передачи. Как оно связано с постоянной затухания?
5. При каких условиях возможно независимое распространение Е- и Н-волн в диэлектрической, металлической и металлодиэлектрической линии передачи?
6. Сформулируйте условия существования Т-волн в линии передачи. Укажите типы линий, для которых эти условия выполняются.
7. Чем обусловлено затухание электромагнитных волн в линии передачи? На каком предположении основан энергетический метод расчета затухания и при каких условиях он применим?
8. Какими факторами определяется зависимость постоянной затухания от частоты?
9. Что такое спектр типов волн в линии передачи? Дайте определение основного типа волны.
10. Дайте определение рабочего диапазона линии передачи. Какими факторами ограничивается его ширина?
11. Как зависит плотность спектра собственных волн от частоты?
12. Какие соотношения ортогональности для собственных волн в волноводе Вы знаете? В чем физический смысл соотношений ортогональности?

## ГЛАВА 7

# ОДНОСВЯЗНЫЕ ЗАКРЫТЫЕ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

### § 7.1. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ВОЛНОВОД

*Прямоугольный волновод* представляет собой металлическую трубу прямоугольного сечения, заполненную однородным изотропным диэлектриком (см. рис. 5.1, *а*). Решение уравнения (5.15) для этого волновода удобно проводить в декартовой системе координат ($x_1=x$, $x_2=y$, $h_1=h_2=1$), которая является частным случаем обобщенно-цилиндрической. Воспользуемся методом разделения переменных, положив $\psi(x, y)=X(x)\,Y(y)$. Подставив это выражение в (5.15) и поделив на $\psi$, найдем

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}Y^2}=-k_c^2.$$

Так как правая часть этого уравнения не зависит от координат, каждое из слагаемых левой части также не должно от них зависеть:

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}=-\xi^2;\quad \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}=-\eta^2; \tag{7.1}$$

$$\xi^2+\eta^2=k_c^2. \tag{7.2}$$

Решения уравнений (7.1) имеют вид

$$X=\dot{A}_1\cos\xi x+\dot{A}_2\sin\xi x;\quad Y=\dot{B}_1\cos\eta y+\dot{B}_2\cos\eta y.$$

Таким образом, общее решение уравнения Гельмгольца (5.15) в декартовых координатах записывается следующим образом:

$$\psi(x, y)=(\dot{A}_1\cos\xi x+\dot{A}_2\sin\xi x)(\dot{B}_1\cos\eta y+\dot{B}_2\sin\eta y). \tag{7.3}$$

Для нахождения частных решений используем граничные условия (6.39), (6.40), считая стенки волновода идеально проводящими. Для Е-волны $\psi=0$ при $x=0, a$; $y=0, b$. Подставив соответствующие значения $x$ и $y$ в (7.3), получим $\dot{A}_1=0$; $\xi=m\pi/a$; $\dot{B}_1=0$, $\eta=n\pi/b$, $m, n=1, 2, 3, \ldots$ Таким образом,

$$\boxed{\psi^e(x, y)=\dot{A}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y.} \tag{7.4}$$

Подставив найденную функцию $\psi$ в выражении (6.8)—(6.13), определим электромагнитное поле Е-волны в прямоугольном волноводе:

$$E_x = -ik_z \dot{A} \frac{m}{a} \cos\frac{m\pi}{a} x \sin\frac{n\pi}{b} y; \tag{7.5}$$

$$E_y = -ik_z \dot{A} \frac{n}{b} \sin\frac{m\pi}{a} x \cos\frac{n\pi}{b} y; \tag{7.6}$$

$$E_z = k_c^2 \dot{A} \sin\frac{m\pi}{a} x \sin\frac{n\pi}{b} y; \tag{7.7}$$

$$H_x = \frac{ik}{Z_0} \dot{A} \frac{n\pi}{b} \sin\frac{m\pi}{a} \cos\frac{n\pi}{b} y; \tag{7.8}$$

$$H_y = -\frac{ik}{Z_0} \dot{A} \frac{m\pi}{a} \cos\frac{m\pi}{a} x \sin\frac{n\pi}{b} y; \tag{7.9}$$

$$H_z = 0 \tag{7.10}$$

Критические волновые числа, частоты и длины волн находим, подставив (7.2) в (5.30):

$$k_c = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}; \; f_c = (k_c c)/(2\pi n_{\text{ср}}); \qquad \lambda_c = \frac{2n_{\text{ср}}}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}. \tag{7.11}$$

Для Н-волны $\partial\psi/\partial x = 0$ при $x = 0, a$; $\partial\psi/\partial y = 0$ при $y = 0, b$. Произведя дифференцирование функции $\psi$, получим $A_2 = 0$; $\xi = m\pi/a$; $\dot{B}_2 = 0$; $\eta = n\pi/b$, $m$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,
т. е.

$$\boxed{\psi^m(x, y) = \dot{B} \cos\frac{m\pi}{a} x \cos\frac{n\pi}{b} y.} \tag{7.12}$$

Отметим, что в отличие от Е-волн один из индексов $m$, $n$ может быть равен нулю. В этом случае поле волновода не зависит от одной из координат (если оба индекса равны нулю, то $\psi = \text{const}$ и поле в волноводе равно нулю).

Электромагнитное поле Н-волн опишем с помощью выражений (6.14)—(6.19):

$$\dot{E}_x = ikZ_0 \dot{B} \frac{n\pi}{b} \cos\frac{m\pi}{a} x \sin\frac{n\pi}{b} y; \tag{7.13}$$

$$\dot{E}_y = -ikZ_0 \dot{B} \frac{m\pi}{a} \sin\frac{m\pi}{a} x \cos\frac{n\pi}{b} y; \tag{7.14}$$

$$\dot{E}_z = 0; \tag{7.15}$$

$$\dot{H}_x = ik_z \dot{B} \frac{m\pi}{a} \sin\frac{m\pi}{a} x \cos\frac{n\pi}{b} y; \tag{7.16}$$

$$\dot{H}_y = -ik_z \dot{B} \frac{n\pi}{b} \cos\frac{m\pi}{a} x \sin\frac{n\pi}{b} y; \tag{7.17}$$

$$\dot{H}_z = k_c^2 \dot{B} \cos\frac{m\pi}{a} x \cos\frac{n\pi}{b} y. \tag{7.18}$$

Напомним, что множитель $\zeta = e^{-ik_z z}$ в этих выражениях, так же как и в (7.5)—(7.10), опущен.

Критические волновые числа, частоты и длины волн также определяются по выражениям (7.11). Поэтому все типы волн в прямоугольном волноводе, за исключением $H_{m0}$ и $H_{0n}$, вырождены по крайней мере дважды.

Таким образом, электромагнитное поле данного типа волны (моды) в волноводе полностью характеризуется указанием типа поля и значений индексов $m$, $n$. Поэтому для конкретного типа волны используют обозначения $E_{mn}$ или $H_{mn}$, подставляя вместо индексов $m$, $n$ их числовые значения.

Электромагнитное поле в волноводе наглядно изображается эпюрами его силовых линий в поперечном и продольном сечениях. Построение таких эпюр целесообразно начинать с изображения поля, которое для данного типа волны не имеет продольной составляющей, так как его силовые линии представляют собой кривые, лежащие в плоскости поперечного сечения. Для Е-волн уравнение силовых линий магнитного поля имеет вид (6.21):

$$\psi = A \sin\frac{m\pi}{a} x \sin\frac{n\pi}{b} y = C. \tag{7.19}$$

Произведя замену переменных $s = m\pi x/a - \pi/2$ и $t = n\pi y/b - \pi/2$, преобразуем это уравнение к виду $\cos s \cos t = D_1$.

Для малых аргументов полученное уравнение упрощается:

$$(1 - s^2/2)(1 - t^2/2) = D_1$$

или

$$s^2 + t^2 = 2(1 - D_1).$$

Последнее выражение описывает окружность с центром в точке $s = t = 0$ или в точках с координатами $x_0 = \frac{a}{2m}(2p_0 - 1)$, $p_0 = 1, 2, ..., m$; $y_0 = \frac{b}{2n}(2q_0 - 1)$, $q_0 = 1, 2, ..., n$.

При больших значениях $s$ и $t$ (чему соответствуют меньшие значения $D_1$) окружности искажаются и при $D_1 = 0$ превращаются в квадраты. На плоскости $x$, $y$ окружностям соответствуют эллипсы, а квадратам — прямоугольники (рис. 7.1, *а*).

Построив силовые линии вектора $\dot{\mathbf{H}}$, легко изобразить проекции силовых линий вектора $\dot{\mathbf{E}}$ на плоскость поперечного сечения волновода, воспользовавшись ортогональностью векторов $\dot{\mathbf{E}}_\perp$ и $\dot{\mathbf{H}}_\perp$ [см. (6.5)].

Аналогично можно показать, что уравнение силовых линий вектора $\dot{\mathbf{E}}$ поля Н-типа имеет вид

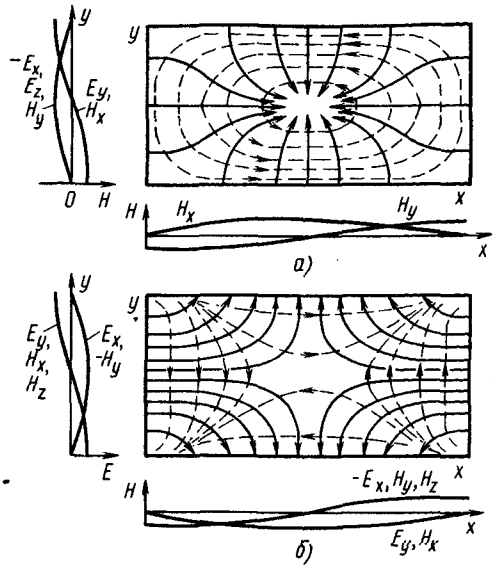



Рис. 7.1. Эпюры силовых линий электромагнитного поля в прямоугольном волноводе для волн типа $E_{11}$ (*а*) и $H_{11}$ (*б*):
———— линии вектора **E**; — — — — — — — — линии вектора **H**

$$\cos\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y=D_2.$$

Силовые линии представляют собой кривые с центрами в точках

$$x_0=\frac{a}{2m}p_0,\ p_0=0,\ 1,\ \ldots,\ m;\ y_0=\frac{b}{2n}q_0,$$
$$q_0=0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

Соответствующая эпюра поля показана на рис. 7.1, *б*. Для $m=0$ или $n=0$ эти кривые вырождаются в прямые линии $y=\text{const}$ или $x=\text{const}$.

На рис. 7.2 показан спектр собственных волн прямоугольного волновода с воздушным заполнением и отношением размеров узкой и широкой стенок 0,47. Наибольшее значение $\lambda_c=2a$ имеет волна типа $H_{10}$. Этот тип волны является основным. Следующими в порядке убывания $\lambda_c$ располагаются волны типов $H_{20}$, $H_{01}$, $H_{11}$ и $E_{11}$ и т. д. Таким образом, рабочий диапазон прямоугольного волновода расположен между частотами $f_{c1}=c/2a$ и $f_{c2}=c/a$, отношение которых равно двум, т. е. ширина рабочего диапазона составляет одну октаву.

По причинам, указанным в § 6.5, реальное отношение крайних частот рабочего диапазона составляет 1,6—1,9 (см. Приложение 4). Заметим, что при $b/a>0{,}5$ ближайшим к рабочему высшим типом волны является $H_{01}$ и рабочий диапазон волновода сужается. Поэтому у стандартных волноводов $b/a\leqslant 0{,}5$.

Таким образом, наибольший практический интерес представляет волна типа $H_{10}$. Из выражений (7.13)—(7.18) следует, что электромагнитное поле этой волны содержит только три составляющие:

$$\dot{E}_y=-\frac{ikZ_0\pi}{a}\dot{B}\sin\frac{\pi x}{a}e^{-ik_z z};\qquad(7.20)$$

$$\dot{H}_x=\frac{ik_z\pi}{a}\dot{B}\sin\frac{\pi x}{a}e^{-ik_z z};\qquad(7.21)$$

$$\dot{H}_z=\frac{\pi^2}{a^2}\dot{B}\cos\frac{\pi x}{a}e^{-ik_z z}.\qquad(7.22)$$

Эпюры силовых линий поля волны типа $H_{10}$ в прямоугольном волноводе представлены на рис. 7.3.

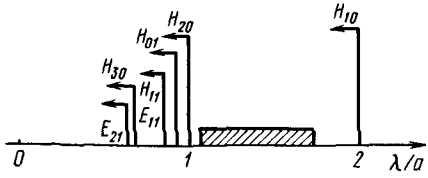



Рис. 7.2. Спектр собственных волн прямоугольного волновода (рабочий диапазон заштрихован)

Запишем уравнение силовых линий магнитного поля основной волны, воспользовавшись выражениями (П.23) и (П.25). Положив $x_1=x$, $x_2=y$, $h_1=h_2=1$, согласно (П.23) получим $y=\text{const}$, т. е. силовые линии лежат в плоскостях, параллельных широким стенкам волновода. Подставив значение функции $\psi$ в (П.25), найдем

$$k_c \operatorname{ctg} k_c x \mathrm{d}x = -\beta \operatorname{tg}(\omega t - \beta z)\,\mathrm{d}z.$$

Проведя замену переменных $s=k_c x$, $t=(\omega t-\beta z)$ и проинтегрировав полученное уравнение, получим

$$\ln \sin s + \ln \cos t = \ln C,$$

откуда

$$\sin s \cos t = C, \tag{7.23}$$

где $C$ — постоянная интегрирования.

Уравнение (7.23) аналогично уравнению (7.19). Оно описывает замкнутые кривые с координатами центра $x_0=a/2$; $z_0=\omega t/\beta=v_\phi t$. Следовательно, силовые линии перемещаются вдоль оси $z$ со скоростью, равной фазовой скорости волны $v_\phi$. Эпюра силовых линий электромагнитного поля в продольном сечении волновода для момента времени $t=0$ показана на рис. 7.3.

Как отмечалось в гл. 6, у Н-волн вектор **E** имеет линейную, а вектор **H** — эллиптическую поляризацию, которая стремится к линейной у узких стенок ($H_x=0$ при $x=0$, $a$) и на оси симметрии волновода ($H_z=0$ при $x=a/2$). В тех точках волновода, где $H_{mx}=H_{mz}$, магнитное поле имеет круговую поляризацию. Подставив в это равенство выражения (7.21) и (7.22), найдем, что круговая поляризация наблюдается в продольных сечениях волновода, определяемых уравнением

$$\frac{\beta\pi}{a} B \sin\frac{\pi x_0}{a} = \frac{\pi^2}{a^2} B \cos\frac{\pi x_0}{a}.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{tg}\frac{\pi x_0}{a} = \frac{\pi}{\beta a} = \frac{\pi}{\sqrt{(ka)^2-\pi^2}}.$$

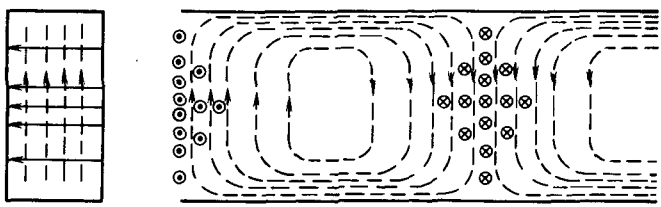


Рис. 7.3. Эпюры силовых линий электромагнитного поля волны типа $H_{10}$ в прямоугольном волноводе:
———— — линии вектора **E**; — — — — — — — линии вектора **H**

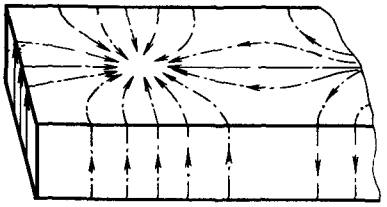


Рис. 7.4. Распределение поверхностного тока волны типа $H_{10}$ по стенкам прямоугольного волновода

Таким образом,

$$\frac{x_{кр}}{a}=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{(\lambda_c/\lambda)^2-1}}=\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{\lambda}{\lambda_c}.$$

Это уравнение позволяет найти два значения $x_{кр}$ (плоскости круговой поляризации), расположенные симметрично относительно средней плоскости $x=a/2$. При $\lambda\approx\lambda_c$ плоскости круговой поляризации расположены вблизи боковых стенок и при уменьшении длины волны (увеличении частоты) смещаются к плоскости симметрии волновода. Направления вращения вектора H в плоскостях $x=x_{01}$ и $x=x_{02}$ противоположны. Это свойство волны типа $H_{10}$ в прямоугольном волноводе используется при конструировании ферритовых устройств СВЧ.

Магнитное поле возбуждает поверхностный ток в стенках волновода, направление которого определяется граничными условиями (2.38). Распределение поверхностного тока по стенкам прямоугольного волновода показано на рис. 7.4. По узким стенкам течет поперечный ток, а по широким — как поперечный, так и продольный. Это необходимо учитывать при выборе положения щелей, прорезаемых в стенках волновода. Узкая щель не нарушает условия распространения волны, если ее не пересекают линии поверхностного тока.

Вычислим мощность, переносимую волной типа $H_{10}$, и ее постоянную затухания. Из (6.26), полагая $\alpha=0$, получим

$$P=\frac{1}{2}Z_0k\beta\int_S|\nabla_\perp\psi|^2\,dS=\frac{1}{2}Z_0k\beta|\dot{B}|^2\frac{\pi^2}{a^2}b\int_0^a\sin^2\frac{\pi x}{a}\,dx=\frac{\pi^2}{4}\frac{b}{a}\beta kZ_0|\dot{B}|^2.$$

Но из (7.20) следует, что

$$|\dot{B}|=E_{max}a/(k\pi Z_0),$$

где $E_{max}$ — максимальное значение напряженности поля в волноводе. Подставив эту формулу в выражение для мощности, найдем

$$\boxed{P=\frac{ab}{4Z_0}\sqrt{1-(f_c/f)^2}\,E_{max}^2.} \qquad (7.24)$$

Максимальная напряженность электрического поля в волноводе не может быть больше значения пробивной напряженности поля $E_{пр}$. Подставив это значение в (7.24), получим максимальное значение мощности, которую можно передать по волноводу. Оно пропорционально площади поперечного сечения линии передачи и увеличивается с ростом частоты.

Для вычисления постоянной затухания воспользуемся выражением (6.49). Его знаменатель был найден при расчете мощности, переносимой в ЛП:

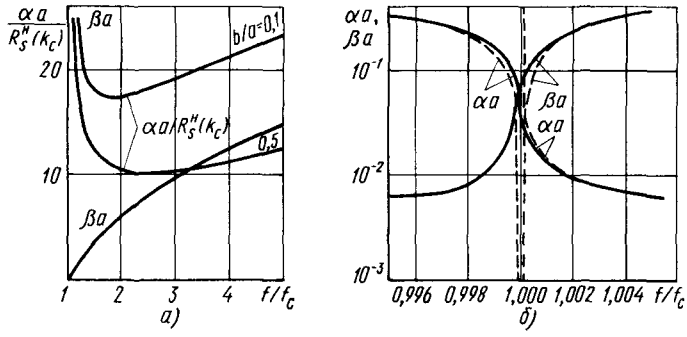



Рис. 7.5. Зависимости нормированных постоянных затухания и фазы волны типа $H_{10}$ в прямоугольном волноводе от частоты:

*а* — рассчитанные энергетическим методом; *б* — найденные методом импедансных граничных условий (сплошные кривые) и энергетическим (пунктирные кривые) методом $R_s^н = R_s/Z_0$

$$\int_S |\nabla_\perp \psi|^2 \mathrm{d}S = \pi^2 b |\dot{B}|^2/(2a).$$

**Интегралы** в числителе имеют следующие значения:

$$\int_L \left|\frac{\partial\psi}{\partial l}\right|^2 \mathrm{d}l = 2|\dot{B}|^2 \frac{\pi^2}{a^2}\int_0^a \sin^2\frac{\pi x}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{a}|\dot{B}|^2;$$

$$\int_L |\psi|^2 \mathrm{d}l = 2|\dot{B}|^2\left(\int_0^a \cos^2\frac{\pi x}{a}\,\mathrm{d}x + \int_0^b \mathrm{d}y\right) = |B|^2(a+2b).$$

**Таким** образом,

$$\alpha_м = \frac{R_s\beta}{Z_0 kb}\left[1+\frac{\pi^2}{\beta^2 a^2}\left(1+\frac{2b}{a}\right)\right] = \frac{R_s}{Z_0 b}\frac{\beta}{k}\left[\frac{k^2}{\beta^2}+\frac{2b}{a}\frac{\pi^2}{\beta^2 a^2}\right].$$

**Учитывая**, что $\pi^2/a^2 = k_c^2$, после несложных преобразований получим

$$\boxed{\alpha_м = \frac{R_s}{Z_0 b}\frac{1}{\sqrt{1-(k_c/k)^2}}\left[1+\left(\frac{k_c}{k}\right)^2\frac{2b}{a}\right].} \qquad (7.25)$$

**Зависимость** постоянной затухания от частоты, рассчитанная по этой формуле, показана на рис. 7.5, *а*.

В гл. 6 отмечено, что энергетический метод непригоден для вычисления постоянной затухания вблизи критической частоты. Анализ, основанный на решении уравнения (5.15) с граничными условиями Леонтовича [2], позволяет получить следующее приближенное выражение для постоянной распространения волны типа $H_{10}$ в прямоугольном волноводе:

$$k_z^2 = \frac{k^2 - k_c^2 - 2iZ_s^{\text{н}}\left(\dfrac{2k_c^2}{ka - iZ_s^{\text{н}}} + \dfrac{k}{b}\right)}{1 + 2iZ_s^{\text{н}}/(k_c^2 b/k - iZ_s^{\text{н}})},$$

где $Z_s^{\text{н}} = Z_s/Z_0$ — нормированное комплексное поверхностное сопротивление стенок.

Зависимости постоянных $\alpha$ и $\beta$ от частоты, вычисленные по этой формуле, а также по формулам (7.11) и (7.25) вблизи критической частоты, показаны на рис. 7.5, *б*. Как видно, в действительности постоянная $\alpha$ на критической частоте сохраняет конечное значение, а постоянная $\beta$ отлична от нуля и в закритической области. Поэтому в волноводе и при $f < f_c$ существует поток энергии вдоль оси $z$, который компенсирует тепловые потери в стенках.

## § 7.2. КРУГЛЫЙ ВОЛНОВОД

*Круглым волноводом* называется металлическая труба с поперечным сечением в виде круга. Для изучения электромагнитных волн в таком волноводе удобно использовать цилиндрическую систему координат ($x_1 = r$, $x_2 = \theta$, $h_1 = 1$, $h_2 = r$). Уравнение (5.15) в этой системе координат с учетом (П.4) принимает вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + k_c^2 \psi = 0. \tag{7.26}$$

Воспользуемся для решения этого уравнения методом Фурье. Помножим обе части уравнения на $r^2$, разделим на $\psi$ и представим $\psi$ в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от $r$, а другая — только от $\theta$: $\psi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. В результате получим

$$\frac{r}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + k_c^2 r^2 + \frac{1}{\Theta}\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2} = 0.$$

Так как первые два члена этого уравнения зависят только от $r$, а третий — только от $\theta$, их сумма не зависит от координат только в том случае, когда каждая из указанных частей уравнения постоянна:

$$\frac{r}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + k_c^2 r^2 = m^2; \quad \frac{1}{\Theta}\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2} = -m^2,$$

или

$$\Theta'' + m^2\Theta = 0; \quad r^2 R'' + rR' + (k_c^2 r^2 - m^2)R = 0. \tag{7.27}$$

Решение первого уравнения имеет вид

$$\Theta = \dot{A}_1 \cos m\theta + \dot{A}_2 \sin m\theta.$$

Так как при изменении угла $\theta$ на $2\pi p$, $p = \pm 1, \pm 2, \ldots$ (при обходе вокруг оси волновода $p$ раз) должно получаться то же самое поле, функция $\Theta$ периодична с периодом $2\pi$:

$$\Theta(\theta + 2\pi p) = \Theta(\theta).$$

Таким образом, $\Theta(m\theta+2\pi pm)=\Theta(m\theta)$. Отсюда следует, что так как $p$ — целое число, число $m$ также должно быть целым.

Уравнение (7.27) путем замены переменной $w=k_c r$ сводится к уравнению Бесселя. Решение его имеет вид

$$R=\dot{B}_1 J_m(k_c r)+\dot{B}_2 N_m(k_c r), \tag{7.28}$$

где $J_m(x)$, $N_m(x)$ — функции Бесселя первого и второго рода порядка $m$. Так как $\lim\limits_{x\to 0} N_m(x)=-\infty$, $m=0, 1, 2, \ldots$ (см. рис. П.1, *б*), то, для того чтобы напряженность поля на оси волновода не обращалась в бесконечность, постоянную интегрирования $\dot{B}_2$ необходимо положить равной нулю.

Таким образом, общее решение уравнения мембраны для круглого волновода имеет вид

$$\psi=\dot{A}J_m(k_c r)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\theta. \tag{7.29}$$

Такая запись означает наличие двух независимых решений, одно из которых характеризуется косинусоидальной, а другое — синусоидальной зависимостью функции $\psi$ от азимута при выбранном начале отсчета азимутального угла $\theta$. Поскольку оба эти решения имеют одно и то же значение $k_c$, каждый тип волны в круглом волноводе по крайней мере двукратно вырожден (за исключением азимутально-однородных типов волн, для которых $m=0$).

Запишем частные решения, соответствующие Е- и Н-волнам. В первом случае граничные условия на идеально проводящей поверхности следующие:

$$\psi(a)=\dot{A}J_m(k_c a)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\theta=0,$$

где $a$ — радиус волновода. Отсюда

$$k_c a=\nu_{mn}, \tag{7.30}$$

где $\nu_{mn}$ — $n$-й корень функции Бесселя первого рода порядка $m$. Критические длины волн и частоты определяются формулами

$$\lambda_c=\frac{2\pi a n_{\text{ср}}}{\nu_{mn}}; \quad f_c=\frac{c}{\lambda_c}.$$

Для Н поля волн при $r=a$

$$\partial\psi/\partial n=\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}r=k_c\dot{A}J'_m(k_c a)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\theta=0,$$

откуда

$$k_c a=\chi_{mn},$$

где $\chi_{mn}$ — $n$-й корень производной функции Бесселя первого рода порядка $m$. Соответственно

$$\lambda_c=2\pi a n/\chi_{mn}; \quad f_c=c/\lambda_c.$$

Значения $\nu_{mn}$ и $\chi_{mn}$ для различных индексов $m$ и $n$ приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

| $m$ | $\nu_{mn}$ при | | | $\chi_{mn}$ при | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $n=1$ | $n=2$ | $n=3$ | $n=1$ | $n=2$ | $n=3$ |
| 0 | 2,405 | 5,520 | 8,654 | 3,832 | 7,016 | 10,174 |
| 1 | 3,832 | 7,016 | 10,174 | 1,840 | 5,335 | 6,705 |
| 2 | 5,135 | 8,417 | 11,620 | 3,054 | 6,705 | 9,969 |
| 3 | 6,380 | 9,761 | 13,015 | 4,201 | 8,015 | 11,346 |

Построенный по данным этой таблицы спектр критических длин волн в круглом волноводе показан на рис. 7.6. Наибольшее значение $\lambda_c$ имеет волна типа $H_{11}$ ($\lambda_c = 3{,}415a$). Далее, в порядке убывания $\lambda_c$, следуют волны типа $E_{01}$ ($\lambda_c = 2{,}612a$), типа $H_{21}$ ($\lambda_c = 2{,}057a$), типа $E_{11}$, $H_{01}$ ($\lambda_c = 1{,}640a$) и т. д. Рабочий диапазон длин волн круглого волновода лежит, таким образом, в пределах $\lambda = 3{,}41a \div 2{,}61a$, т. е. отношение крайних частот (длин волн) равно 1,31. Это отношение значительно меньше, чем у прямоугольного волновода, что в значительной мере объясняет преимущественное использование прямоугольных волноводов для передачи СВЧ-энергии.

Электромагнитное поле различных типов волн в круглом волноводе определяется выражениями (6.8)—(6.19) и (7.29). Для Е-волн

$$
\begin{aligned}
E_r &= -ik_z \dot{A} \frac{\nu_{mn}}{a} J'_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{a}\right) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\theta;\\
E_\theta &= \pm \frac{ik_z}{r} \dot{A} m J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{a}\right) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\theta;\\
E_z &= \left(\frac{\nu_{mn}}{a}\right)^2 \dot{A} J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{a}\right) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\theta;\\
H_r &= \mp \frac{ik}{Z_0 r} \dot{A} m J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{a}\right) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\theta;\\
H_\theta &= -\frac{ik}{Z_0} \dot{A} \frac{\nu_{mn}}{a} J'_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{a}\right) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\theta;\\
H_z &= 0;
\end{aligned}
\qquad (7.31)
$$

для Н-волн

$$
\begin{aligned}
E_r &= \pm \frac{ikZ_0}{r} \dot{A} m J_m\left(\frac{\chi_{mn} r}{a}\right) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\theta;\\
E_\theta &= ikZ_0 \dot{A} \frac{\chi_{mn}}{a} J'_m\left(\frac{\chi_{mn} r}{a}\right) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\theta;\\
E_z &= 0;
\end{aligned}
$$

$$H_r = -ik_z A \frac{\chi_{mn}}{a} J'_m\left(\frac{\chi_{mn} r}{a}\right) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\theta;$$

$$H_\theta = \pm \frac{ik_z}{r} A m J_m\left(\frac{\chi_{mn} r}{a}\right) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\theta;$$

$$H_z = \left(\frac{\chi_{mn}}{a}\right)^2 A J_m\left(\frac{\chi_{mn} r}{a}\right) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\theta.$$

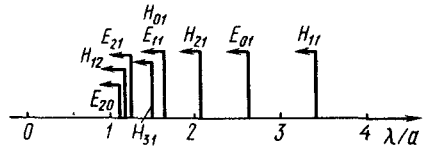



Рис. 7.6. Спектр собственных волн круглого волновода

На рис. 7.7 изображены эпюры электромагнитного поля некоторых типов волн в круглом волноводе, построенные по приведенным выше выражениям. Структура поля волны $H_{11}$ похожа на структуру поля волны типа $H_{10}$ в прямоугольном волноводе, что объясняет, почему волна типа $H_{11}$ — основной тип волны в круглом волноводе.

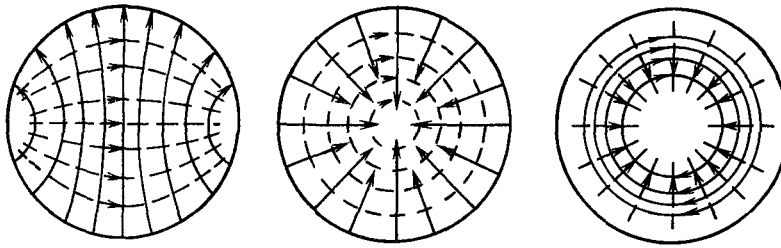



Рис. 7.7. Эпюры силовых линий электромагнитного поля в круглом волноводе для волн типа $H_{11}$ (*а*), $E_{01}$ (*б*) и $H_{01}$ (*в*):
——— линии вектора **E**; — — — — линии вектора **H**

Так как у волн типа $H_{0n}$ значение функции $\psi$ на стенке волновода постоянно ($\partial\psi/\partial\theta = \partial\psi/\partial l = 0$), их постоянные затухания уменьшаются с ростом частоты (см. § 6.4). Это свойство позволяет использовать волну типа $H_{01}$ для передачи СВЧ-сигналов на большие расстояния с малыми потерями, т. е. осуществлять дальнюю волноводную связь. Так, теоретическое значение постоянной затухания волны типа $H_{01}$ в медном волноводе диаметром 50 мм на частоте 37,5 ГГц ($\lambda = 8$ мм) составляет 0,2 дБ/км. Это означает, что на расстоянии 10 км передаваемая мощность уменьшается всего в 1,6 раза. Следует учесть, однако, что при указанных условиях в волноводе наряду с рабочим возможно распространение и множества других типов волн, обладающих значительно бо́льшим затуханием. На неоднородностях, обусловленных неизбежными отклонениями размеров волновода от номинальных, происходит преобразование энергии волны типа $H_{01}$ в энергию волн других типов, что приводит к увеличению постоянной затухания в реальном волноводе на 1—2 порядка по сравнению с теоретическим значением. Для борьбы с этим явлением необходимо сделать невозможным (подавить) распространение в волноводе всех других типов волн, кроме рабочего. С этой целью, например, изготовляют волновод в виде последовательности отдельных, изолированных друг от друга колец, покрывают внутреннюю его поверхность поглощающим покрытием и т. д. При этом используются особенности электромагнитного поля волн типа $H_{0n}$ — отсутствие продольных токов в стенках волновода и незначительная напряженность электрического поля вблизи них. Поэтому узкие кольцевые щели в стенке волновода не пересекают линий тока и не нарушают условий распространения волны $H_{01}$-типа, а потери ее энергии

в поглощающем покрытии незначительны. В то же время условия распространения волн других типов резко изменяются. В конце 70-х годов были построены и успешно эксплуатировались несколько опытных линий дальней волноводной связи протяженностью 20—30 км. В настоящее время аналогичные задачи решаются с помощью волоконно-оптических линий связи (см. § 9.4), имеющих определенные преимущества перед волноводами.

## § 7.3. ВОЛНОВОДЫ СО СЛОЖНОЙ ФОРМОЙ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Стремление расширить рабочий диапазон волновода и уменьшить дисперсию привело к созданию П- и Н-*образных волноводов* (рис. 7.8). Уменьшение расстояния между широкими стенками в центральной части волновода (в зазоре), где напряженность электрического поля волны типа $H_{10}$ максимальна, эквивалентно увеличению емкости, что приводит к уменьшению критической частоты. Электрическое поле волны типа $H_{20}$ в области выступа близко к нулю, поэтому уменьшение ее критической частоты незначительно. Зависимость критических длин основного и ближайшего высшего типов волн для различных конфигураций волновода показана на рис. 7.9. Как видно, рабочий диапазон П-образного волновода может быть в несколько раз больше,

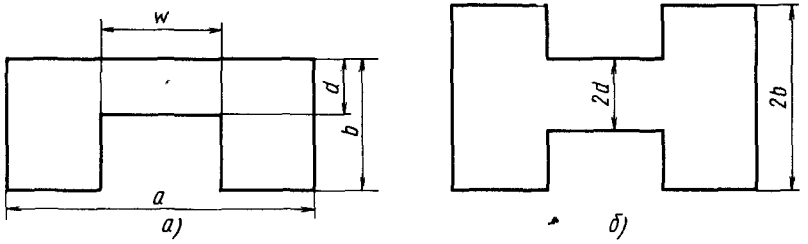



Рис. 7.8. Поперечное сечение П- (*а*) и Н-образного (*б*) волноводов

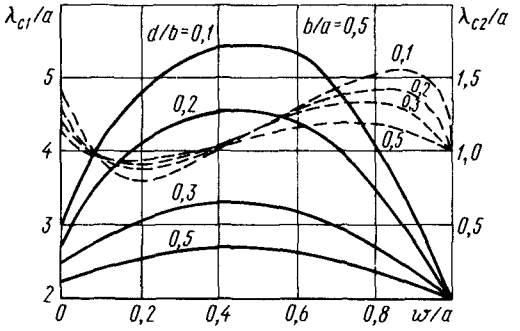



Рис. 7.9. Зависимости критических длин волн основного (сплошные кривые) и ближайшего высшего (пунктирные кривые) типов от отношения $w/a$

чем прямоугольного. Соответственно уменьшается и дисперсия. При одинаковой критической длине волны поперечные размеры П-образного волновода значительно меньше, чем прямоугольного.

Наряду с отмеченными достоинствами П-образные волноводы имеют и недостатки — меньшая максимальная передаваемая мощность и большее

затухание, чем у прямоугольных волноводов с такими же поперечными размерами. Это объясняется концентрацией электрического поля в области зазора и увеличением периметра стенок при той же площади поперечного сечения.

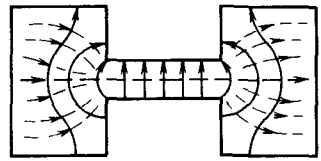


Рис. 7.10. Эпюра силовых линий электромагнитного поля волны основного типа в Н-образном волноводе:
———— линии вектора **E**;
— — — — — линии вектора **H**

Н-образный волновод можно рассматривать как два П-образных волновода, имеющих общую широкую стенку. Если ее убрать, картина поля основного типа волны в каждом из П-образных волноводов не изменится (рис. 7.10). Поэтому критическая частота и дисперсия основного типа волны в этом волноводе такие же, как и в соответствующем П-образном, однако максимальная передаваемая мощность возрастает приблизительно в два раза, а затухание уменьшается за счет исключения потерь в общей стенке.

Кроме описанных, в технике СВЧ иногда применяются волноводы и с другими формами поперечного сечения. Расчет электромагнитного поля и параметров различных типов волн в таких волноводах возможен только численными методами [3]. В частности, для передачи энергии в коротковолновой части СВЧ-диапазона желательно использовать волноводы, поперечные размеры которых велики по сравнению с длиной волны. Одномодовый режим работы волновода при этом обеспечивается путем изменения условий распространения нерабочих типов волн таким образом, чтобы они либо не могли распространяться, либо имели высокие критические частоты. Такие волноводы с разреженным спектром критических длин волн называют *сверхразмерными*. К сверхразмерным относится, например, круглый волновод с диэлектрическим покрытием стенок, работающий на волне типа $H_{01}$ и рассмотренный в § 7.2 (рис. 7.11, *а*). Аналогичными свойствами обладает квадратный волновод с диэлектрическим покрытием двух стенок (рис 7.11, *б*), которое позволяет снять вырождение волн с индексами $m$, $n$ и $n$, $m$ и тем самым разредить спектр волновода. Рабочей в нем является волна типа $H_{10}$, на критическую частоту которой сравнительно слабо влияет наличие диэлектрика.

Разрежение спектра часто достигается путем прорезания продольных щелей в оболочке волновода. Структура поля волн некоторых типов при этом сильно искажается, а их энергия излучается через щели, что подавляет распространение, в то время как искажение поля и излучение через щели для других типов волн оказываются незначительными, вследствие чего условия для их распространения сохраняются. Примером такой сверхразмерной линии передачи может служить желобковый волновод (рис. 7.11, *в*), который можно рассматривать как пря-

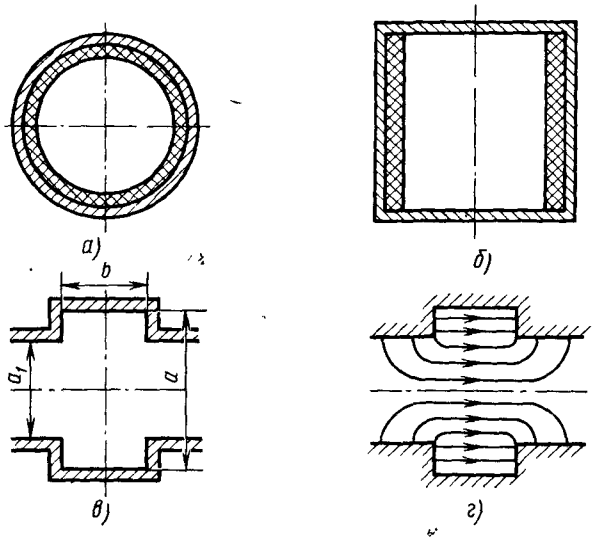



Рис. 7.11. Типы сверхразмерных волноводов (*а* — *в*); эпюра силовых линий электрического поля волны основного типа в желобковом волноводе (*г*)

моугольный с прорезанными в широких стенках щелями. На рабочей волне типа $H_{10}$ излучение энергии в щели вследствие симметрии поля (рис. 7.11, *г*) практически не происходит и эта волна распространяется с малым затуханием. Волны с антисимметричным распределением поля возбуждают в щелях Т-волну, энергия которой излучается в пространство. В результате спектр волновода разрежается. Так, например, желобковый волновод с размерами $a=7{,}6$ мм; $b=3{,}4$ мм; $a_1=4{,}8$ мм (см. рис. 7.11, *в*) имеет рабочий диапазон частот 37—150 ГГц. Для сравнения отметим, что прямоугольный волновод тех же размеров работает в диапазоне 26,5—40 ГГц (см. Приложение 4). При этом затухание в желобковом волноводе существенно меньше, чем в прямоугольном.

**Контрольные вопросы**

1. Опишите метод решения уравнения Гельмгольца для прямоугольного волновода. Приведите общее решение этого уравнения.
2. Сформулируйте граничные условия на стенках прямоугольного волновода для Е- и Н-волн, запишите соответствующие выражения для функции $\psi$.
3. Запишите выражения для критических волновых чисел, критических частот и критических длин волн различных типов в прямоугольном волноводе.
4. Выведите уравнения силовых линий напряженности электрического поля для Н-волн и напряженности магнитного поля для Е-волн в прямоугольном волноводе.
5. Опишите основные свойства электромагнитного поля основного типа волны в прямоугольном волноводе.

Укажите рабочий диапазон прямоугольного волновода.

6. Выведите выражение для постоянной затухания основного типа волны в прямоугольном волноводе.
7. Опишите метод решения уравнения Гельмгольца для круглого волновода. Приведите выражения для электромагнитного поля, критических волновых чисел, частот и длин волн в круглом волноводе.
8. Перечислите свойства основного типа волны в круглом волноводе и укажите его рабочий диапазон.
9. Укажите свойства волны типа $H_{01}$ в круглом волноводе.
10. Опишите основные свойства П- и Н-образных волноводов. Перечислите их достоинства и недостатки по сравнению с прямоугольными волноводами.
11. Что такое сверхразмерный волновод? Приведите примеры таких волноводов и перечислите их основные свойства.

## ГЛАВА 8

# МНОГОСВЯЗНЫЕ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

### § 8.1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА Т-ВОЛН

Многосвязные линии передачи состоят из нескольких изолированных друг от друга проводников. Они могут быть как закрытыми (рис. 8.1, *а*), так и открытыми (рис. 8.1, *б*, *в*). Как показано в § 6.3, в таких направляющих системах могут наряду с другими распространяться Т-волны. Поскольку критическая частота этих волн равна нулю, а дисперсия отсутствует, они представляют наибольший практический интерес. Волны других (высших) типов обычно не используются для передачи энергии. Они ограничивают рабочий диапазон многосвязных ЛП со стороны высоких частот. Основные свойства и особенности распространения Т-волн одинаковы для закрытых и открытых линий передачи. Поэтому как те, так и другие изучаются в данной главе.

Рассмотрим многосвязную ЛП, содержащую $N+1$ проводников. Электромагнитное поле Т-волн в ней связано с функциями $\psi$ и $\zeta$, введенными в гл. 5, соотношениями (6.1), (6.2), которые для рассматриваемого случая принимают вид

$$\dot{\mathbf{E}}=\zeta\nabla_{\perp}\psi;\quad \dot{\mathbf{H}}=i\omega\varepsilon\zeta[\nabla_{\perp},\psi\mathbf{e}_z], \tag{8.1}$$

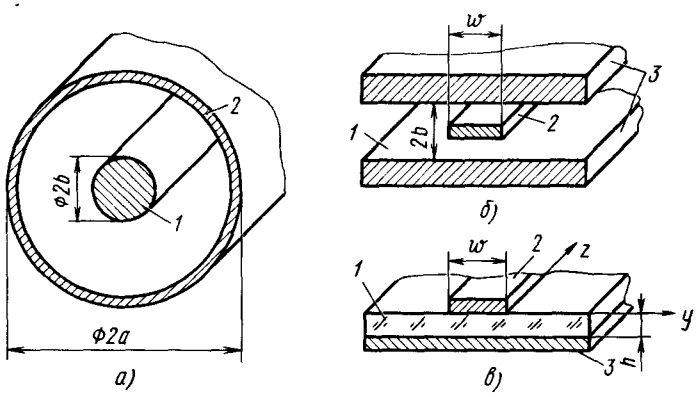



Рис. 8.1. Многосвязные линии передачи:
*а* — коаксиальная; *б* — симметричная полосковая; *в* — микрополосковая

причем функция $\psi$ удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям

$$\psi=\psi_n=\text{const} \qquad (8.2)$$

на контурах поперечного сечения проводников $l_n$, $n=1, \ldots, N$.

Из выражения (8.1) следует, что электрическое поле в поперечном сечении линии потенциально ($\text{rot}_\perp \dot{\mathbf{E}}=0$), а магнитное — соленоидально ($\text{div}_\perp \dot{\mathbf{H}}=0$). Это свойство электромагнитного поля Т-волны позволяет использовать для его расчета методы анализа двумерных статических электрических и магнитных полей.

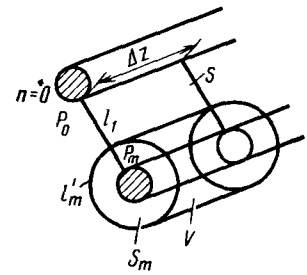



Рис. 8.2. К выводу уравнений многопроводной линии передачи

Выберем один из проводников линии в качестве опорного (экрана) и присвоим ему номер $n=0$. Напряжение между проводником и экраном

$$\dot{U}_m=-\int_{P_0}^{P_m}\dot{\mathbf{E}}\mathrm{d}\mathbf{l},$$

где интеграл берется по кривой $l_1$, расположенной в плоскости поперечного сечения линии передачи и соединяющей точку $P_0$ на экране с точкой $P_m$ на контуре поперечного сечения $m$-го проводника (рис. 8.2). Использовав (8.1), получим

$$\dot{U}_m=-\zeta'\int_{P_0}^{P_m}\nabla_\perp\psi\mathrm{d}l=-\zeta'(\psi_m-\psi_0). \qquad (8.3)$$

Напряжение не зависит от пути интегрирования и положения точек $P_0$ и $P_m$ на контурах проводников. Отсюда следует, что напряжение между проводниками $m$ и $n$ равно разности напряжений этих проводников относительно опорного, напряжение которого по определению равно нулю:

$$\dot{U}_{mn}=-\int_{P_n}^{P_m}\dot{\mathbf{E}}\mathrm{d}\mathbf{l}=-\left(\int_{P_n}^{P_0}\dot{\mathbf{E}}\mathrm{d}\mathbf{l}+\int_{P_0}^{P_m}\dot{\mathbf{E}}\mathrm{d}\mathbf{l}\right)=\dot{U}_m-\dot{U}_n.$$

Рассмотрим интеграл

$$\dot{I}_m=\oint_{l'_m}\dot{\mathbf{H}}\mathrm{d}\mathbf{l} \qquad (8.4)$$

по замкнутому контуру $l'_m$, охватывающему только проводник с номером $m$ (рис. 8.2). Для вычисления этого интеграла можно воспользоваться вторым выражением (8.1), однако проще проинтегрировать уравнение Максвелла (1.31) по плоской поверхности $S_m$, натянутой на контур $l'_m$:

$$\int_{S_m}\text{rot}\,\dot{\mathbf{H}}\mathrm{d}\mathbf{S}=\mathrm{i}\omega\varepsilon\int_{S_m}\dot{\mathbf{E}}\mathrm{d}\mathbf{S}+\int_{S_m}\dot{\mathbf{j}}^{\text{ст}}\mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Первый интеграл в правой части равен нулю, так как вектор **E** Т-волны имеет только поперечную составляющую. Применив к интегралу в левой части теорему Стокса (П.13), получим

$$\dot{I}_m = \int_{S_m} \dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}} d\mathbf{S}.$$

Следовательно, выражение (8.4) определяет ток, текущий в продольном направлении по $m$-у проводнику линии передачи.

Вычислим интеграл (8.4) по окружности, охватывающей все проводники многосвязной линии. Так как излучение энергии Т-волн в окружающее пространство не происходит (вся энергия передается вдоль линии), напряженность поля при увеличении радиуса окружности $r$ убывает быстрее, чем $r^{-1}$. Поэтому $\lim\limits_{r \to \infty} \oint_{l_3} \dot{\mathbf{H}} d\mathbf{l} = 0$, откуда

$$\sum_{n=0}^{N} \dot{I}_n = 0. \tag{8.5}$$

Таким образом, сумма токов, текущих по проводникам линии передачи, в любом ее поперечном сечении равна нулю.

Введение интегральных величин $U_m$, $I_m$, характеризующих электромагнитное поле Т-волн и однозначно с ним связанных, позволяет свести уравнения Максвелла к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитуд токов и напряжений. Чтобы осуществить этот переход, выделим в продольном сечении линии передачи поверхность $S$ длиной $\Delta z$, примыкающую к проводникам с номерами 0 и $m$ (рис. 8.2), и проинтегрируем уравнение (1.32) по этой поверхности:

$$\int_S \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} d\mathbf{S} = -i\omega \int_S \mu \dot{\mathbf{H}} d\mathbf{S}.$$

Использовав теорему Стокса и учтя, что на поверхности проводников касательная составляющая напряженности электрического поля равна нулю, получим

$$\dot{U}_m(z+\Delta z) - \dot{U}_m(z) = i\dot{\Phi}_m \Delta z, \tag{8.6}$$

где

$$\dot{\Phi}_m = \sum_{n=0}^{N} L_{mn} \dot{I}_n —$$

магнитный поток через поверхность $S$ единичной длины, который создается токами, текущими по всем проводникам линии передачи; $L_{mn}$ — *статические погонные коэффициенты взаимоиндукции проводников* $m$ и $n$; $L_{mm}$ — погонный коэффициент самоиндукции проводника $m$.

Исключим из выражения для $\Phi_m$ ток экрана, для чего воспользуемся соотношением (8.5):

$$\dot{\Phi}_m = \sum_{n=1}^{N} L'_{mn} \dot{I}_n,$$

где $L'_{mn} = L_{mn} - L_{m0}$ — коэффициенты взаимоиндукции и самоиндукции, определенные с учетом влияния экрана. Так как в многосвязной линии всегда можно выделить опорный проводник, штрих в дальнейшем опускаем, а под $L_{mn}$ будем подразумевать $L'_{mn}$. Перейдя в (8.6) к пределу, найдем

$$\frac{\mathrm{d}\dot{U}_m}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{i}\omega \sum_{n=1}^{N} L_{mn} \dot{I}_n, \quad m = 1, 2, ..., N. \tag{8.7}$$

Выделим цилиндрический объем $V$ длиной $\Delta z$, окружающий проводник $m$ (рис. 8.2), и проинтегрируем по этому объему уравнение непрерывности (1.37):

$$\mathrm{i}\omega \int_V \dot{\rho}^{\mathrm{ст}} \mathrm{d}V = -\int_V \mathrm{div}\, \dot{j}^{\mathrm{ст}} \mathrm{d}V.$$

Используя теорему Гаусса с учетом того, что ток течет только через торцевые стенки объема $V$, запишем

$$-\mathrm{i}\omega \dot{Q}_m \Delta z = \dot{I}_m(z + \Delta z) - \dot{I}_m(z), \tag{8.8}$$

где

$$\dot{Q}_m = \sum_{n=0}^{N} C_{mn}(\dot{U}_m - U_n) \tag{8.9}$$

— заряд отрезка $m$-го проводника единичной длины, наводимый всеми проводниками линии передачи; $C_{mn}$ — частичные погонные емкости между проводниками $m$ и $n$.

Положив в этом выражении $\dot{U}_n = \dot{U}_m$, $n = 1, 2, ..., N$, найдем $Q_m = C_{m0}\dot{U}_m$. Следовательно, $C_{m0}$ — погонная емкость между проводником и экраном. Считая $\dot{U}_n = 0$, $n \neq m$, из (8.9) определим $\dot{Q}_m = \sum_{n=0}^{N} C_{mn}\dot{U}_m$. Таким образом, погонная емкость $m$-го проводника по отношению ко всем остальным (собственная погонная емкость) $C_m = \sum_{m=0}^{N} C_{mn}$. Выделив из этой суммы емкость между $m$-м проводником и экраном, получим

$$C_{m0} = C_m - \sum_{n=1}^{N} C_{mn}. \tag{8.10}$$

Подставив выражения (8.9) и (8.10) в (8.8) и перейдя к пределу при $\Delta z \to 0$, найдем

$$\mathrm{d}\dot{I}_m/\mathrm{d}z = -\mathrm{i}\omega\dot{Q}_m = \mathrm{i}\omega(C_m\dot{U}_m - \sum_{n=1}^{N} C_{mn}\dot{U}_n). \tag{8.11}$$

Соотношения (8.7) и (8.11) образуют систему $2N$ уравнений, связывающих напряжения и токи Т-волн в многопроводной линии передачи. Их удобно записывать в матричном виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\dot{\mathbf{U}} = -\mathrm{i}\omega\mathbf{L}\dot{\mathbf{I}};\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\dot{\mathbf{I}} = -\mathrm{i}\omega\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}, \tag{8.12}$$

где

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_1 L_{12} \dots L_{1N} \\ L_{21} L_2 \dots L_{2N} \\ \dots\dots\dots \\ L_{N1} L_{N2} \dots L_N \end{bmatrix};\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 - C_{12} \dots - C_{1N} \\ -C_{21} C_2 \dots - C_{2N} \\ \dots\dots\dots \\ -C_{N1} - C_{N2} \dots C_N \end{bmatrix}.$$

— квадратные симметричные матрицы порядка $N$; $\mathbf{U} = [\dot{U}_1, \dots, \dot{U}_N]^T$, $\dot{\mathbf{I}} = [\dot{I}_1, \dots, \dot{I}_N]^T$ — $N$-мерные векторы — столбцы напряжений и токов. Исключая из этих соотношений поочередно $\dot{\mathbf{I}}$ и $\dot{\mathbf{U}}$, получим уравнения второго порядка:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^2}\dot{\mathbf{U}} = -\omega^2\mathbf{L}\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}};\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\dot{\mathbf{I}} = -\omega^2\mathbf{C}\mathbf{L}\dot{\mathbf{I}}.$$

Так как напряжение и ток — это две характеристики одного и того же волнового процесса, матрицы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{C}$ коммутируют: $\mathbf{LC} = \mathbf{CL}$.

Для двухпроводной линии ($N = 1$) уравнения (8.7) и (8.11) упрощаются:

$$\mathrm{d}\dot{U}/\mathrm{d}z = -\mathrm{i}\omega L_1 \dot{I};\ \mathrm{d}\dot{I}/\mathrm{d}z = -\mathrm{i}\omega C_1 \dot{U},$$

где $L_1 = L'_{11}$ — погонная индуктивность проводника линии с учетом влияния экрана; $C_1 = C_{10}$ — погонная емкость между проводником и экраном. В двухпроводной ЛП в качестве экрана можно рассматривать любой из проводников.

Полученные уравнения известны под названием *телеграфных*. Их общее решение имеет вид

$$\dot{U} = \dot{U}_{\text{пад}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma z} + \dot{U}_{\text{отр}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma z};$$

$$\dot{I} = Z_{\text{в}}^{-1} (\dot{I}_{\text{пад}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma z} - \dot{I}_{\text{отр}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma z}),$$

где $\dot{U}_{\text{пад}}$, $\dot{U}_{\text{отр}}$ — амплитуды напряжений падающей и отраженной волн; $\gamma = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ — постоянная распространения; $Z_{\text{в}} = \sqrt{L_1/C_1}$ — волновое сопротивление линии передачи. Так как Т-волна распространяется со скоростью света,

$$\gamma = k = 1/\sqrt{\varepsilon\mu},$$

где $\varepsilon$, $\mu$ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, заполняющей ЛП.

## § 8.2. НОРМАЛЬНЫЕ Т-ВОЛНЫ

Из уравнений (8.7) и (8.11) следует, что напряжение и ток в данном проводнике многопроводной линии зависят от напряжений и токов в остальных проводниках. Можно, однако, ввести такие комбинации этих величин, которые

не связаны между собой. Для этого построим модальную матрицу **M** (см. Приложение 8), столбцами которой служат общие собственные векторы коммутирующих матриц **L** и **C**. Так как матрица **C** — положительно-определенная, ее собственные векторы ортогональны и их можно нормировать так, чтобы матрица **M** была унитарной. Введем в правые части (8.12) множитель $\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}=\mathbf{E}$, что не изменит их значений и умножим эти уравнения на $\mathbf{M}^{-1}=\mathbf{M}^{*}$.

$$\frac{\mathrm{d}(\mathbf{M}^{*}\dot{\mathbf{U}})}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{i}\omega\mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{I}};\quad \frac{\mathrm{d}(\mathbf{M}^{*}\dot{\mathbf{I}})}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{i}\omega\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{U}}.$$

Обозначив $\mathbf{M}^{*}\dot{\mathbf{U}}=\dot{\mathbf{U}}^{\text{н}}$; $\mathbf{M}^{*}\dot{\mathbf{I}}=\dot{\mathbf{I}}^{\text{н}}$; $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{M}=\mathbf{D}_L$; $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M}=\mathbf{D}_C$, получим

$$\mathrm{d}\dot{\mathbf{U}}^{\text{н}}/\mathrm{d}z=-\mathrm{i}\omega\mathbf{D}_L\dot{\mathbf{I}}^{\text{н}};\quad \mathrm{d}\dot{\mathbf{I}}^{\text{н}}/\mathrm{d}z=-\mathrm{i}\omega\mathbf{D}_C\dot{\mathbf{U}}^{\text{н}}; \tag{8.13}$$

где $\mathbf{D}_L$, $\mathbf{D}_C$ — диагональные матрицы, ненулевыми элементами которых служат собственные числа $L_m^{\text{н}}$ и $C_m^{\text{н}}$ матриц **L** и **C**. Поэтому каждое из соотношений (8.13) распадается на $N$ независимых скалярных уравнений:

$$\boxed{\mathrm{d}\dot{U}_m^{\text{н}}/\mathrm{d}z=-\mathrm{i}\omega L_m^{\text{н}}\dot{I}_m^{\text{н}};\ \mathrm{d}\dot{I}_m^{\text{н}}/\mathrm{d}z=-\mathrm{i}\omega C_m^{\text{н}}\dot{U}_m^{\text{н}},\ m=1,\ \ldots,\ N.} \tag{8.14}$$

Каждая пара величин $\dot{U}_m^{\text{н}}$, $\dot{I}_m^{\text{н}}$ представляет собой линейную комбинацию напряжений и токов проводников:

$$\dot{U}_m^{\text{н}}=\sum_{n=1}^{N}M_{nm}^{*}\dot{U}_n;\quad \dot{I}_m^{\text{н}}\sum_{n=1}^{N}M_{nm}^{*}\dot{I}_n \tag{8.15}$$

и определяет *напряжение* и *ток нормальной волны*. Собственные значения $L_m^{\text{н}}$ и $C_m^{\text{н}}$ имеют смысл погонных индуктивности и емкости ЛП для этой волны. Из изложенного следует, что в $(N+1)$-проводной линии передачи существует $N$ различных типов нормальных Т-волн.

Решения уравнений (8.14) записываются в виде суперпозиции падающей и отраженной волн:

$$\begin{aligned}\dot{U}_m^{\text{н}}&=\dot{U}_{m\,\text{пад}}^{\text{н}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma_m z}+\dot{U}_{m\,\text{отр}}^{\text{н}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_m z};\\ \dot{I}_m^{\text{н}}&=Z_{\text{в}m}^{-1}(\dot{U}_{m\,\text{пад}}^{\text{н}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma_m z}-\dot{U}_{m\,\text{отр}}^{\text{н}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_m z}),\end{aligned} \tag{8.16}$$

где

$$\gamma_m=\omega\sqrt{L_m^{\text{н}}C_m^{\text{н}}},\quad Z_{\text{в}m}=\sqrt{L_m^{\text{н}}/C_m^{\text{н}}}$$

— постоянная распространения и *волновое сопротивление* $m$-й нормальной волны. Так как фазовые скорости всех Т-волн одинаковы, $\gamma_1=\gamma_2=\ldots=\gamma_N=k$, $L_m^{\text{н}}C_m^{\text{н}}=\varepsilon\mu$. Волновые сопротивления различных нормальных волн неодинаковы и в отличие от характеристического явно зависят от вида поперечного сечения линии.

У двухпроводной линии передачи **M**, **L** и **C** — скалярные величины, причем $\mathbf{M}=\mathbf{M}^{-1}$; $L_1^{\text{н}}=L_1$; $C_1^{\text{н}}=C_1$, где $L_1$, $C_1$ — погонные индуктивность и емкость одного из проводников. Система (8.14) сводится в этом случае к телеграфным уравнениям

$$\mathrm{d}\dot{U}/\mathrm{d}z=-\mathrm{i}\omega L_1\dot{I};\quad \mathrm{d}\dot{I}/\mathrm{d}z=-\mathrm{i}\omega C_1\dot{U}.$$

Рассмотрим трехпроводную линию передачи, состоящую из экрана и расположенных симметрично относительно него двух одинаковых проводников. Матрицы **L** и **C** такой линии в силу ее симметрии имеют вид

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}L_1 & L_2\\ L_2 & L_1\end{bmatrix};\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}C_1 & -C_2\\ -C_2 & C_1\end{bmatrix},$$

а их собственные числа и векторы определяются выражениями

$$L_{1,2}^{\text{н}}=L_1\mp L_2;\quad C_{1,2}^{\text{н}}=C_1\pm C_2;\quad \mathbf{M}_1=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix};\quad \mathbf{M}_2=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{M}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix};\quad \mathbf{M}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Вычислим по формулам (8.15) напряжения и токи нормальных волн:

$$\dot{U}^{\text{н}}_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{U}_1\mp\dot{U}_2);\quad \dot{I}^{\text{н}}_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{I}_1\mp I_2).$$

Если напряжения проводников линии $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$ одинаковы, то $\dot{U}^{\text{н}}_1=0$ и в ней распространяется только волна второго типа, которая называется *симметричной (четной)*. Если же напряжения противофазны ($\dot{U}_1=-\dot{U}_2$), то возбуждается только волна первого типа, называемая *антисимметричной (нечетной)*. Постоянные распространения и волновые сопротивления этих волн определяются формулами

$$\gamma_{1,2}=\omega\sqrt{(L_1\mp L_2)(C_1\pm C_2)} \tag{8.17}$$

$$Z_{\text{в}1,2}=\sqrt{\frac{L_1\mp L_2}{C_1\pm C_2}};$$

Так как $\gamma_1=\gamma_2$, из выражения (8.17) следует, что

$$Z_{\text{в}1}Z_{\text{в}2}=Z^2_{\text{в}}, \tag{8.18}$$

где $Z_{\text{в}}$ — волновое сопротивление двухпроводной линии, полученной из трехпроводной путем удаления одного из проводников.

## § 8.3. ПЕРЕДАВАЕМАЯ МОЩНОСТЬ И ЗАТУХАНИЕ

Поток энергии в линии передачи определяется формулой (6.25). Так как для Т-волн $k_z=k$, при $\alpha=0$ имеем

$$P=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\frac{k^2}{Z_0}\int_S|\nabla_\perp\psi|^2\,\mathrm{d}S,$$

где $S$ — площадь поперечного сечения линии передачи.

Преобразуем интеграл в этом выражении с помощью формулы Грина (П.15):

$$\int_S|\nabla_\perp\psi|^2\,\mathrm{d}S=\oint_l\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial n}\mathrm{d}l-\int_S\psi\nabla^2_\perp\psi^*\,\mathrm{d}S.$$

Второй член правой части равен нулю, так как функция $\psi$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Используя граничные условия (8.2) и (1.20), первый член приведем к виду

$$\oint_l\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial n}\mathrm{d}l=\sum_{n=0}^{N}\psi_n\dot{Q}^*_n/(\mathrm{i}k\varepsilon).$$

Так как функция $\psi$ определена с точностью до произвольной постоянной, положим $\psi_0=0$. Тогда из выражения (8.3) следует, что $\dot{U}_n=-ik\psi_n$. С учетом уравнения (8.11) получим

$$P=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{N}\dot{U}_n\dot{I}_n^*=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\dot{\mathbf{U}}^*\dot{\mathbf{I}}. \tag{8.19}$$

Выразим в этой формуле $\dot{\mathbf{U}}$ и $\dot{\mathbf{I}}$ через векторы напряжения и тока нормальных волн:

$$P=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[(M\dot{U}^{\mathrm{н}})^*M\dot{I}^{\mathrm{н}}\right]=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(\dot{\mathbf{U}}^{\mathrm{н}*}\mathbf{M}^*\mathbf{M}\dot{\mathbf{I}}^{\mathrm{н}})=\sum_{m=1}^{N}P_m,$$

где $P_m=0{,}5\,\mathrm{Re}\,\dot{U}_m^{\mathrm{н}*}\dot{I}_m^{\mathrm{н}}=0{,}5\,\mathrm{Re}\,\dot{U}_m^{\mathrm{н}}\dot{I}_m^{\mathrm{н}*}$ — мощность, переносимая нормальной волной. Используя (8.17), выражение для $P_m$ можно записать в виде

$$P_m=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\dot{U}_m^{\mathrm{н}}I_m^{\mathrm{н}*}\frac{1}{2Z_{\mathrm{в}m}}|\dot{U}_m^{\mathrm{н}}|^2=\frac{1}{2}Z_{\mathrm{в}m}|\dot{I}_m^{\mathrm{н}}|^2. \tag{8.20}$$

Таким образом, нормальные волны распространяются в линии передачи без потерь независимо друг от друга, а их потоки энергии складываются. Так как соотношения (8.14) и (8.20) совпадают по форме с известными из теории цепей аналогичными соотношениями для длинных линий, многопроводная линия передачи с Т-волнами эквивалентна $N$ длинным линиям с волновыми сопротивлениями $Z_{\mathrm{в}m}$.

В проведенном анализе предполагалось, что потери в линии передачи отсутствуют. Для их учета необходимо в схему эквивалентной длинной линии включить последовательное погонное сопротивление $R_m^{\mathrm{н}}$ и параллельную погонную проводимость $G_m^{\mathrm{н}}$. Уравнения (8.13) при этом принимают вид

$$\mathrm{d}\dot{U}_m^{\mathrm{н}}/\mathrm{d}z=-(i\omega L_m^{\mathrm{н}}+R_m^{\mathrm{н}})\dot{I}_m^{\mathrm{н}};$$

$$\mathrm{d}\dot{I}_m^{\mathrm{н}}/\mathrm{d}z=-(i\omega C_m^{\mathrm{н}}+G_m^{\mathrm{н}})\dot{U}_m^{\mathrm{н}},\ m=1,\ 2,\ ...,\ N.$$

Постоянная $\gamma_m$ оказывается комплексной:

$$\gamma_m=k_{zm}=\sqrt{-(i\omega L_m^{\mathrm{н}}+R_m^{\mathrm{н}})(i\omega C_m^{\mathrm{н}}+G_m^{\mathrm{н}})},$$

причем для малых потерь ($R_m^{\mathrm{н}}\ll\omega L_m^{\mathrm{н}};\ G_m^{\mathrm{н}}\ll\omega C_m^{\mathrm{н}}$)

$$\beta_m\approx\beta_{0m}\left(1-\frac{1}{2}R_m^{\mathrm{н}}G_m^{\mathrm{н}}/\beta_{0m}^2\right); \tag{8.21}$$

$$\alpha_m\approx 0{,}5(R_m^{\mathrm{н}}/Z_{\mathrm{в}m}+G_m^{\mathrm{н}}Z_{\mathrm{в}m});\ \beta_{0m}=\omega\sqrt{L_m^{\mathrm{н}}C_m^{\mathrm{н}}}. \tag{8.22}$$

Сравнивая эти соотношения с (6.43), видим, что погонное сопротивление $R_m^{\mathrm{н}}$ обусловлено потерями в металле, причем

$$\alpha_{\mathrm{м}m}=0{,}5R_m^{\mathrm{н}}/Z_{\mathrm{в}m}, \tag{8.23}$$

а погонная проводимость — потерями в диэлектрике:

$$\alpha_{дт}=0{,}5G_m^{н}Z_{вт}. \qquad (8.24)$$

На практике выражения (8.23) и (8.24) позволяют по рассчитанным электродинамическими методами или определенным экспериментально значениям $\alpha_{мт}$ и $\alpha_{дт}$ определить эквивалентные параметры $R_m^{н}$ и $G_m^{н}$.

## § 8.4. ДВУХПРОВОДНАЯ СИММЕТРИЧНАЯ ЛИНИЯ ПЕРЕДАЧИ

Одной из простейших линий передачи является *симметричная двухпроводная линия* (рис. 8.3), состоящая из двух одинаковых проводников круглого поперечного сечения, находящихся в однородном диэлектрике (обычно в воздухе). Заданное расстояние $d$ между осями проводников поддерживается с помощью периодически расположенных тонких диэлектрических распорок, не оказывающих существенного влияния на процесс распространения низших типов волн.

Эпюра силовых линий электромагнитного поля Т-волны в этой линии показана на рис. 8.3. Так как на больших расстояниях $r \gg d$ такую ЛП можно рассматривать как дипольную систему зарядов и токов на плоскости, ее электромагнитное поле быстро затухает по мере увеличения расстояния $r$ и почти полностью сконцентрировано в окружности радиусом $R \approx 5d$.

Использование метода конформных отображений позволяет вычислить параметры двухпроводной симметричной линии передачи:

$$L=\frac{\mu}{\pi}\operatorname{arch}\frac{d}{2a};\quad C=\frac{\varepsilon\pi}{\operatorname{arch}(d/2a)};$$

$$Z_{в}=\frac{Z_0}{\pi}\operatorname{arch}\frac{d}{2a}\approx\frac{Z_0}{\pi}\ln\frac{d}{a}.$$

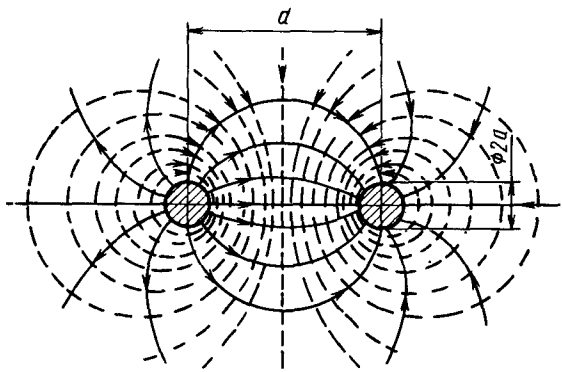



Рис. 8.3. Эпюра силовых линий электромагнитного поля Т-волны в симметричной двухпроводной ЛП:
———— — линии вектора **E**; — — — — — — линии вектора **H**

Последнее выражение имеет погрешность не более 1% при $d>10a$. Постоянная затухания за счет потерь в проводниках на высоких частотах (радиус проводника $a$ много больше глубины проникновения $\delta$)

$$\alpha_{м}=\frac{R}{Z_{в}}\frac{d}{\sqrt{d^2-4a^2}},$$

где $R=R_s/(2\pi a)$ — погонное поверхностное сопротивление уединенного провода с равномерным распределением плотности тока по периметру.

Фазовая скорость Т-волны в двухпроводной линии равна скорости света в диэлектрике и не зависит от частоты (если не учитывать влияния потерь в проводниках). Ее рабочий диапазон частот начинается от нуля и ограничивается частотой $f_{max}$, на которой начинается возбуждение высших типов волн, излучающихся в окружающее пространство. Приближенно частота $f_{max}$ может быть определена из условия $\lambda_{min}=c/f_{max}=10d$. Возможность излучения энергии в окружающее пространство ограничивает использование двухпроводных линий передачи в СВЧ-диапазоне.

### § 8.5. КОАКСИАЛЬНАЯ ЛИНИЯ ПЕРЕДАЧИ

*Коаксиальная ЛП (коаксиальный волновод)* состоит из круглого цилиндрического стержня *1*, соосного с круглой цилиндрической оболочкой *2* (см. рис. 8.1, *а*). Электромагнитные волны распространяются в пространстве между проводниками *1* и *2*, заполненном диэлектриком. Так как коаксиальный волновод — двухсвязная линия передачи, в нем наряду с Е- и Н-волнами возможно распространение Т-волны. Для анализа этих волн, учитывая аксиальную симметрию волновода, введем цилиндрическую систему координат и запишем уравнение (5.15) в виде (7.26).

Рассмотрим сначала Т-волны. Из граничных условий (6.41) следует, что в этом случае $\partial\psi/\partial\theta=0$. Так как критическое волновое число также равно нулю, а $r\neq0$, уравнение (7.26) упрощается:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=0,$$

откуда $\partial\psi/\partial r=A_1/r$; $\psi=A_1\ln r+A_2$. Постоянные интегрирования $A_1$ и $A_2$ найдем, полагая, что на контурах поперечного сечения проводников функция $\psi$ принимает постоянные значения: $\psi(a)=\psi_a$, $\psi(b)=\psi_b$. Отсюда

$$\psi=(\psi_a-\psi_b)\frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)}+\psi_a. \qquad (8.25)$$

Электромагнитное поле Т-волны определяется соотношениями (8.1), (8.2):

$$\dot{E}_r = -\frac{ik}{r}\frac{\psi_a - \psi_b}{\ln(a/b)} e^{-ikz}; \quad \dot{H}_\theta = -\frac{ik}{Z_0 r}\frac{\psi_a - \psi_b}{\ln(a/b)} e^{-ikz}. \tag{8.26}$$

Выражение (8.25) позволяет также вычислить по формулам (8.3) и (8.4) напряжение и ток в линии передачи:

$$\dot{U} = ik(\psi_a - \psi_b) e^{-ikz};$$

$$I = \int_0^{2\pi} \dot{H}_\theta r d\theta = -\frac{2\pi ik(\psi_a - \psi_b)}{Z_0 \ln(a/b)} e^{-ikz}.$$

Подставляя эти выражения в (8.26), получим

$$\dot{E}_r = -\frac{\dot{U}}{r}\frac{1}{\ln(a/b)}; \quad \dot{H}_\theta = \frac{\dot{I}}{2\pi r}. \tag{8.27}$$

Эти формулы совпадают с выражениями для статического электрического поля цилиндрического конденсатора и стационарного магнитного поля постоянного тока (рис. 8.4).

Волновое сопротивление коаксиальной линии передачи

$$Z_в = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Z_0}{2\pi}\ln\frac{a}{b} = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}}\ln\frac{a}{b}. \tag{8.28}$$

В соответствии с (8.27) максимальное значение напряженности электрического поля

$$E_{max} = \frac{|\dot{U}|}{b\ln(a/b)},$$

откуда максимально допустимое значение напряжения

$$U_{max} = E_{пр} b \ln(a/b),$$

где $E_{пр}$ — напряженность поля пробоя. Следовательно, мощность, передаваемая по коаксиальной линии, не может превышать значения

$$\boxed{P_{max} = \frac{|U_{max}|^2}{2Z_в} = \frac{\sqrt{\varepsilon_r} b^2}{120} E_{пр}^2 \ln\frac{a}{b}.} \tag{8.29}$$

При прочих равных условиях максимальная передаваемая мощность растет с увеличением диаметра наружного проводника. Для заданного радиуса наружного проводника зависимость $P_{max} = f(b/a)$ имеет максимум (рис. 8.5), который соответствует значению отношения $a/b = \sqrt{e} \approx 1{,}65$.

Потери энергии в коаксиальной линии складываются из потерь в наружном и внутреннем проводниках, а также в диэлектрике. Согласно (6.44) и (6.48),

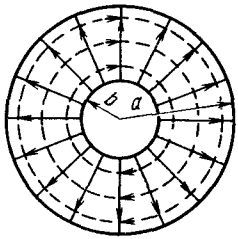



Рис. 8.4. Эпюра силовых линий электромагнитного поля Т-волны в коаксиальном волноводе:
———— линии вектора **E**;
— — — — линии вектора **H**

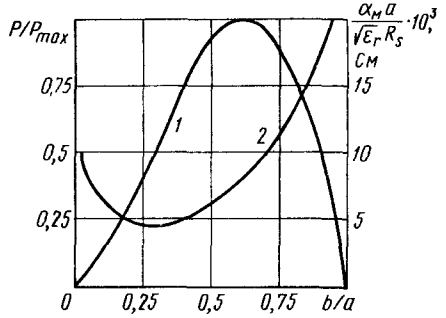



Рис. 8.5. Зависимость нормированных максимальной передаваемой мощности (кривая *1*) и постоянной затухания (кривая *2*) от отношения $b/a$

$$\alpha_д = 0{,}5k' \operatorname{tg}\delta;$$

$$\boxed{\alpha_м = \frac{1}{4\pi Z_в}\left(\frac{R_{sa}}{a} + \frac{R_{sb}}{b}\right),}$$

если наружный и внутренний проводники выполнены из материалов с поверхностными сопротивлениями $R_{sa}$ и $R_{sb}$. Зависимость $\alpha_м$ от отношения $b/a$ при $R_{sa} = R_{sb} = R_s$ и фиксированном значении радиуса наружного проводника имеет минимум при $a/b = 3{,}591$ (см. рис. 8.5), что соответствует волновому сопротивлению $Z_в = 50$ Ом для линии с относительной диэлектрической проницаемостью заполняющей среды $\varepsilon_r = 2{,}35$ (полиэтилен). Для вакуумного заполнения наименьшей постоянной затухания соответствует волновое сопротивление $Z_в = 76{,}7$ Ом, а максимальной передаваемой мощности — 30 Ом. Стандартные коаксиальные кабели имеют волновое сопротивление 50 и 75 Ом, что является компромиссным решением.

Перейдем к анализу высших типов волн в коаксиальном волноводе, для чего запишем общее решение уравнения (7.26) в следующем виде:

$$\psi = [B_1 J_m(k_c r) + B_2 N_m(k_c r)](A_1 \cos m\theta + A_2 \sin m\theta). \qquad (8.30)$$

Для E-волн $\psi = 0$ при $r = a$ и $r = b$ (см. рис. 8.1). Следовательно,

$$B_1 J_m(k_c a) + B_2 N_m(k_c a) = 0.$$

Определив из этого выражения $B_2$, подставив это значение в (8.30) и положив $r = b$, получим

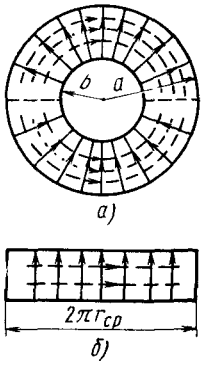



Рис. 8.6. Эпюра силовых линий электромагнитного поля волны типа $H_{11}$ в коаксиальном волноводе (*а*) и схема эквивалентного прямоугольного волновода (*б*):
——— линии вектора **E**;
— — — — линии вектора **H**

Таблица 8.1

| $m$ | $u_{m1}(\xi-1)$ | $v_{m1}(\xi+1)$ |
|---|---|---|
| 0 | 3,095 | 3,272 |
| 1 | 3,272 | 2,136 |
| 2 | 3,740 | 3,910 |
| 3 | — | 5,547 |

$$B_1\left[J_m(k_c b)-\frac{J_m(k_c a)}{N_m(k_c a)}N_m(k_c b)\right]=0.$$

Условием существования нетривиальных решений ($B_1\neq 0$) является равенство нулю выражения в квадратных скобках:

$$J_m(k_c b)N_m(\xi k_c b)-J_m(\xi k_c b)N_m(k_c b)=0, \quad (8.31)$$

где $\xi=a/b$. Для каждого $m$ это уравнение имеет бесчисленное множество корней $u_{mn}$, $n=1, 2, ...$, определяющих критические волновые числа $k_{cmn}=u_{mn}/b$ в коаксиальном волноводе. Эти числа зависят от отношения радиусов наружного и внутреннего проводников как от параметра.

Проведя аналогичные вычисления для Н-волн ($\partial\psi/\partial r=0$ при $r=a$ и $r=b$), найдем следующее уравнение для расчета критических волновых чисел:

$$J'_m(k_c b)N'_m(\xi k_c b)-J'_m(\xi k_c b)N'_m(k_c b)=0, \quad (8.32)$$

где штрихами обозначены производные функции Бесселя по аргументу. Для данного $m$ уравнение (8.32) имеет бесконечное множество корней $v_{mn}$, $n=1, 2, ...$ . Приближенные значения нескольких первых корней уравнений (8.31) и (8.32) приведены в табл. 8.1. Наиболее точны эти значения для $\xi=3$.

Наименьшим критическим волновым числом обладает волна типа $H_{11}$ (рис. 8.6, *а*). Для нее

$$\lambda_c=\frac{2\pi n_{ср}(\xi+1)b}{2{,}136}\approx\pi n(a+b), \quad (8.33)$$

т. е. критическая длина волны приближенно равна длине окружности радиусом $r_{ср}=(a+b)/2$. Этот результат объясняется тем, что поле волны типа $H_{11}$ близко к полю волны типа $H_{10}$ в изогнутом прямоугольном волноводе с размером широкой стенки $a_э\approx\pi r_{ср}$ (рис. 8.6, *б*).

Как следует из формулы (8.33), работа коаксиальной линии передачи в одномодовом режиме обеспечивается при выполнении неравенства $a<\lambda/(\pi n_{ср})-b$.

## § 8.6. РАДИАЛЬНАЯ ЛИНИЯ ПЕРЕДАЧИ

Рассмотрим волны, распространяющиеся от некоторого источника между двумя идеально проводящими плоскостями в радиальном направлении (рис. 8.7). Такая линия передачи называется *радиальной*. Среди множества типов волн, которые могут распространяться в этой линии, выделим такие, электромагнитное поле которых зависит только от радиуса $r$, т. е. считаем $\partial/\partial\theta=\partial/\partial z=0$. Эти условия выполняются, если в (5.18) положить $k_z=0$, $\xi(z)=A$, а уравнение (7.26) для функции $\psi$ записать в виде

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+k^2\psi=0,$$

так как в данном случае $k_c^2=k^2-k_z^2=k^2$.

Решение полученного уравнения запишем в виде

$$\psi=A_1H_0^{(1)}(kr)+A_2H_0^2(kr), \tag{8.34}$$

где $H_m^{(1)}(x)$, $H_m^2(x)$ — функции Ганкеля первого и второго рода порядка $m$ (см. Приложение 5). При $kr\gg1$ справедливы асимптотические представления (П.29) и (П.30). Из них следует, что первый член (8.34) определяет бегущую волну, распространяющуюся к оси линии передачи (сходящуюся волну), а второй — расходящуюся от оси бегущую волну. Электромагнитное поле этой волны опишем с помощью выражений (6.8)—(6.13):

$$\dot E_z=BH_0^{(2)}(kr);\ \dot H_\theta=-\mathrm{i}\omega\varepsilon A_2\frac{\partial H_0^{(2)}(kr)}{\partial r}=\mathrm{i}Z_0^{-1}BH_1^{(2)}(kr),$$

где $B=k^2A_2$.

Остальные составляющие поля равны нулю. При $kr\gg1$

$$\frac{\dot E_z}{\dot H_\theta}=Z_0\frac{H_0^{(2)}(kr)}{\mathrm{i}H_1^{(2)}(kr)}=Z_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kr-\pi/4)}}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kr-\pi/4-\pi/2)}}=-Z_0.$$

Следовательно, в радиальной линии распространяется однородная цилиндрическая Т-волна со скоростью света в данной среде ($k_r=k$).

Определим напряжение и ток Т-волны в радиальной линии передачи:

$$U(r)=-\int_0^d E_z(r)\,\mathrm{d}z=-B\mathrm{d}H_0^{(2)}(kr);$$

$$I(r)=-2\pi rH_\theta(r)=-2\pi\mathrm{i}rZ_0^{-1}BH_1^{(2)}(kr).$$

Волновое сопротивление радиальной линии

$$Z_\text{в}=\frac{\mathrm{d}Z_0}{2\pi r}\frac{H_0^{(2)}(kr)}{-\mathrm{i}H_1^{(2)}(kr)}.$$

Таким образом, радиальная линия нерегулярна и ее волновое сопротивление зависит от радиуса $r$. При $kr\gg1$

$$Z_\text{в}(r)=Z_0\frac{d}{2\pi r}, \tag{8.35}$$

т. е. $Z_\text{в}$ обратно пропорционально радиусу $r$.

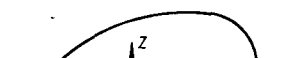



Рис. 8.7. Радиальная линия передачи

Определенный интерес представляют стоячие волны в радиальной линии. Пусть такая линия

ограничена цилиндрической идеально проводящей поверхностью $r=a$. Тогда из выражения (6.39) следует, что

$$\psi(a)=A_1H_0^{(1)}(ka)+A_2H_0^{(2)}(ka)=0.$$

Выразив с помощью этого уравнения $A_1$ через $A_2$, найдем

$$\psi(r)=B\,[H_0^{(1)}(kr)\,H_0^{(1)}(ka)-H_0^{(2)}(kr)\,H_0^{(2)}(ka)],$$

где $B=A_2/H_0^{(2)}(ka)$. Заменив функции Ганкеля функциями Бесселя (см. Приложение 5), получим

$$\psi(r)=C\,[J_0(kr)\,N_0(ka)-J_0(ka)\,N_0(kr)]. \tag{8.36}$$

Данное выражение позволяет определить электромагнитное поле стоячей волны

$$\dot{E}_z=D\,[J_0(kr)\,N_0(ka)-J_0(ka)\,N_0(kr)]. \tag{8.37}$$

$$\dot{H}_\theta=\mathrm{i}Z_0^{-1}\,D\,[J_1(kr)\,N_0(ka)-J_0(ka)\,N_1(kr)]. \tag{8.38}$$

В стоячей волне электромагнитное поле описывается функциями Бесселя, принимающими действительные значения, т. е. плавное изменение фазы, характерное для бегущих волн, отсутствует. Напряженности электрического и магнитного полей в каждой точке сдвинуты по фазе на 90°.

## § 8.7. ПОЛОСКОВЫЕ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

*Полосковыми* называются линии передачи, содержащие металлические проводники в форме тонких лент. По своей конструкции полосковые линии передачи делятся на *симметричные* и *несимметричные* (см. рис. 8.1, *б, в*). В первом случае центральный проводник *2* в виде тонкой узкой полоски расположен симметрично между двумя широкими металлическими плоскостями *3* (экранами), электрически соединенными между собой. Пространство между экранами заполнено однородным диэлектриком *1*. Основным типом волны в симметричной полосковой линии передачи (СПЛ) является Т-волна, не имеющая дисперсии. Эпюра электромагнитного поля этой волны, полученная методом конформных отображений для центральной полоски нулевой толщины, показана на рис. 8.8, *а*. На этом же рисунке показаны эпюры электромагнитного поля некоторых высших типов волн, распространение которых также возможно в данной линии передачи (рис. 8.8, *б, в*).

Волновое сопротивление $T$-волны [4]

$$Z_\text{в}=\frac{30\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}}K_1(\xi), \tag{8.39}$$

где $K_1(\xi)=K(\xi)/K(\xi')$; $K(\xi)=\int\limits_0^1[(1-t^2)(1-\xi^2t^2)]^{-0,5}\mathrm{d}t$ — полный эллиптический интеграл; $\xi=\operatorname{sch}[\pi w/(2b)]$; $\xi'=\sqrt{1-\xi^2}$.

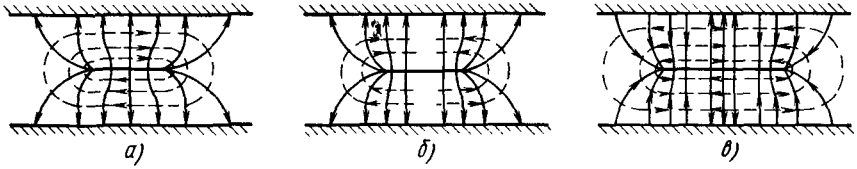



Рис. 8.8. Эпюра силовых линий электромагнитного поля волны в СПЛ: *а*—Т-волны; *б*—волны типа $H_1$; *в*—волны типа $H_2$; ———линии вектора **E**; — — — — — линии вектора **H**

Чтобы увеличить максимальную передаваемую мощность, полоску выполняют сравнительно толстой с закругленными краями. Волновое сопротивление такой линии меньше, чем СПЛ с полоской нулевой толщины.

Если центральный проводник расположен несимметрично относительно экранов или один из экранов отсутствует, полосковая линия называется *несимметричной* (НПЛ). В ней также возможно распространение Т-волны, которая и является основной.

В интегральных схемах СВЧ широко применяются полосковые линии, центральный проводник (полоска) *2* которых расположен на одной стороне диэлектрической пластины (подложки) *1*, а один из экранов *3*—на другой (см. рис. 8.1, *в*). Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_2$ пространства над полоской (обычно воздуха) меньше диэлектрической проницаемости подложки $\varepsilon_1$. Такие линии получили название *микрополосковых* (МПЛ), так как вследствие более высокой диэлектрической проницаемости подложки ее толщина и поперечные размеры полоски много меньше длины волны в свободном пространстве. Так как электромагнитное поле распространяющихся в МПЛ волн по мере удаления от полоски стремится к нулю, на поверхности раздела подложка—окружающее пространство $\partial\psi/\partial y \neq 0$. Тогда из граничных условий (6.33), (6.34) следует, что в МПЛ распространяются только гибридные волны. Анализ электромагнитного поля и параметров этих волн возможен приближенными аналитическими и численными методами.

Основным типом волны в МПЛ является так называемая квази-Т-волна, продольные составляющие электромагнитного поля которой много меньше поперечных (рис. 8.9, *а*). Для нее можно ввести понятия напряжения $\dot{U}$ между полоской и проводящим покрытием, тока полоски $\dot{I}$ и волнового сопротивления $Z_0 = \dot{U}/\dot{I}$. Анализ показывает, что критическая частота квази-Т-волны в МПЛ равна нулю, однако ее фазовая скорость и волновое сопротивление зависят от частоты, т. е. эта волна обладает дисперсией.

Фазовая скорость квази-Т-волны

$$v_\phi = c/\sqrt{\varepsilon_{эф}}, \qquad (8.40)$$

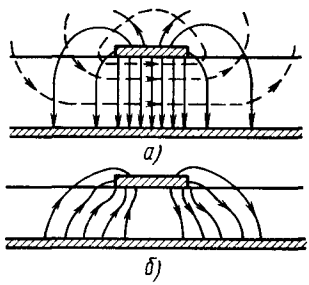



Рис. 8.9. Эпюры силовых линий электромагнитного поля волн в МПЛ:
*а* — квази-Т-волны; *б* — волны типа $HE_1$;
———— линии вектора **E**; — — — — линии вектора **H**

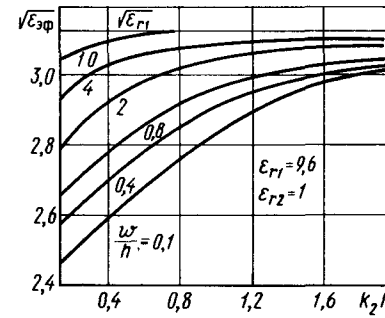



Рис. 8.10. Зависимость эффективной диэлектрической проницаемости МПЛ от нормированной частоты

где $\varepsilon_{эф}$ — эффективная диэлектрическая проницаемость линии, учитывающая то, что часть энергии электромагнитного поля МПЛ сосредоточена в подложке, а часть — в окружающей среде. На низких частотах дисперсия в МПЛ незначительна; значения $\varepsilon_{эф}$ и $Z_в$ при этом определяются приближенными формулами [4]:

$$\varepsilon_{эф} \approx \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2}(1 + 10h/w)^{-1/2};$$

$$Z_в \approx \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_{эф}}} \begin{cases} \ln(8h/w) + w^2/(32h^2), & w/h \leqslant 2; \\ 2\pi\left\{\dfrac{w}{h} + \dfrac{2}{\pi}\ln\left[17{,}08\left(\dfrac{w}{2h} + 0{,}92\right)\right]\right\}^{-1}, & w/h > 2; \end{cases}$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{r1},\ \varepsilon_{r2} = 1.$$

По мере увеличения частоты эффективная диэлектрическая проницаемость растет и на очень высоких частотах приближается к относительной диэлектрической проницаемости подложки $\varepsilon_r$ (рис. 8.10), что является следствием концентрации электрического поля квази-Т-волны под полоской. Таким образом, фазовая скорость и волновое сопротивление этой волны с ростом частоты уменьшаются. В практических расчетах дисперсию в МПЛ необходимо учитывать на частотах, больших граничной частоты:

$$f_0 \approx 0{,}956\sqrt{Z_в}\,[h^2(\varepsilon_r - 1)]^{-1/4},$$

где $h$ — толщина подложки, мм; $f_0$ — граничная частота, ГГц.

Затухание электромагнитной волны в МПЛ обусловлено рассеянием ее энергии в подложке и металлических проводниках. В линиях, выполненных на подложке из высококачественной

керамики (кварц, поликор), потерями в подложке можно пренебречь. Они играют, однако, существенную роль, если в качестве подложки используется феррит или полупроводник. В типичных МПЛ затухание составляет 1—10 дБ/м, что на порядок больше, чем в СПЛ и коаксиальной линии передачи.

Наряду с основной квази-Т-волной в МПЛ могут распространяться и волны других типов. Из них наименьшей критической частотой обладает волна типа $HE_1$ (рис. 8.9,*б*) и поверхностная волна, распространяющаяся вдоль границы раздела диэлектрик — воздух. Критические частоты этих волн ограничивают рабочий диапазон МПЛ со стороны высоких частот.

## § 8.8. ЩЕЛЕВЫЕ ПОЛОСКОВЫЕ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

*Щелевая полосковая линия передачи* (ЩПЛ) представляет собой линию, состоящую из двух проводящих полуплоскостей, нанесенных на одну сторону диэлектрической подложки и разделенных щелью шириной $w$ (рис. 8.11). Электрическое поле волны основного типа в ЩПЛ почти поперечное ($E_z \ll E_x$, $E_y$), а у магнитного поля все три составляющие сравнимы по амплитуде. Поэтому основным типом волны в ЩПЛ является Н-волна.

Вследствие того, что электрическое поле волны основного типа в ЩПЛ почти поперечно, для нее можно ввести понятие напряжения между проводящими плоскостями $\dot{U} = -\int_0^w E_x \mathrm{d}x$, где интегрирование ведется вдоль силовой линии поля. Волновое

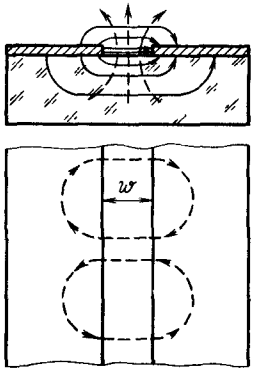



Рис. 8.11. Эпюра силовых линий электромагнитного поля волны основного типа в ЩПЛ:
———— линии вектора **E**;
— — — — линии вектора **H**

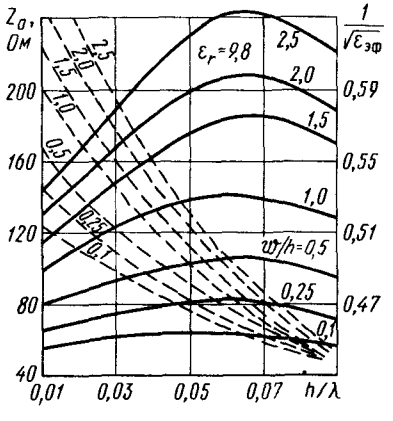



Рис. 8.12. Зависимости обратной эффективной диэлектрической проницаемости (пунктирные линии) и волнового сопротивления (сплошные линии) ЩПЛ от отношения $h/\lambda$ при различных значениях $w/h$

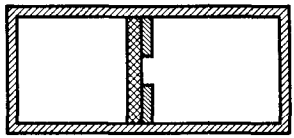


Рис. 8.13. Волноводно-щелевая линия передачи

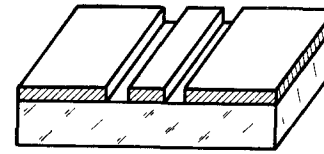


Рис. 8.14. Компланарная полосковая ЛП

сопротивление линии обычно определяют с помощью соотношения $Z_в = |\dot{U}|^2/(2P)$, где $P$ — передаваемая мощность.

Для расчета параметров ЩПЛ необходимо решить уравнение Гельмгольца для неоднородной среды. На рис. 8.12 показаны зависимости волнового сопротивления и эффективной диэлектрической проницаемости ЩПЛ от нормированной частоты (отношения $h/\lambda$), полученные путем численного решения уравнения Гельмгольца. Щелевая линия передачи имеет более сильную дисперсию, чем микрополосковая. Волновое сопротивление ЩПЛ существенно больше, чем МПЛ при одинаковых значениях $w$ и $h$. На щелевую линию передачи легче монтируются навесные дискретные элементы планарной конструкции. Кроме того, в ЩПЛ значительно меньше потери, так как ток в ее проводниках распределен по большей площади. Эти преимущества обусловливают перспективность использования ЩПЛ в схемах СВЧ.

Недостатками ЩПЛ являются сильное излучение энергии неизбежными неоднородностями, возникающими за счет погрешностей изготовления, а также трудность монтажа линии в корпусе. Поэтому в последнее время широкое распространение получила волноводно-щелевая линия передачи (fin-line), представляющая собой ЩПЛ, помещенную в прямоугольный волновод параллельно его узкой стенке (рис. 8.13). Такие линии передачи особенно перспективны в устройствах миллиметрового диапазона.

Если в проводящей поверхности прорезать несколько параллельных щелей, то получим многопроводную полосковую ЛП. Часто применяется компланарная полосковая линия передачи (КПЛ), в которой электромагнитная волна распространяется вдоль двух щелей между проводящими поверхностями и центральным полосковым проводником (рис. 8.14). В КПЛ основной является квази-Т-волна. Кроме того, в ней возможно распространение волн высших типов, характерных для ЩПЛ. Подробные сведения о всех разновидностях полосковых линий передачи приведены в [4].

**Контрольные вопросы**

1. Сформулируйте условия существования Т-волн. В каких линиях передачи они могут распространяться?
2. Поясните физический смысл понятий тока и напряжения в многопроводной линии. Дайте определения погонных параметров линии.

Что такое нормальные волны? Сколько таких типов волн может распространяться в многопроводной линии передачи?

4. Запишите телеграфные уравнения для двухпроводной линии передачи и поясните их связь с уравнениями Максвелла.
5. Дайте определение волнового сопротивления линии передачи и поясните его связь с характеристическим солротивлением волны.
6. Что такое эквивалентная длинная линия? Как учитывается в схеме эквивалентной линии наличие потерь в реальной линии передачи?
7. Опишите основные свойства симметричной двухпроводной линии передачи.
8. Опишите основные свойства коаксиальной линии передачи.
9. Укажите основные свойства симметричной полосковой линии передачи.
10. Перечислите основные свойства микрополосковой линии передачи.
11. Опишите основные свойства щелевой полосковой линии передачи.
12. Каковы основные свойства компланарной полосковой линии передачи?

## ГЛАВА 9
# ОТКРЫТЫЕ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

### § 9.1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

*Диэлектрическими волноводами* (ДВ) называют линии передачи, состоящие из двух и более диэлектрических тел (слоев) с различными показателями преломления. Иногда такие линии передачи называют многослойными. Рассмотрим, например, плоскую диэлектрическую пластину с параметрами $\varepsilon_1$, $\mu_1$, помещенную в однородный диэлектрик с параметрами $\varepsilon_2$, $\mu_2$ (рис. 9.1), причем показатель преломления пластины $n_{ср1}$ больше показателя преломления окружающего пространства $n_{ср2}$ (обычно воздуха). Предположим, что ширина пластины много больше ее толщины $2a$. Тогда с достаточной степенью точности можно считать, что электромагнитное поле волн, распространяющихся в направлении оси $z$, не зависит от координаты $y$ ($\partial/\partial y = 0$).

Используем для качественного анализа электромагнитного поля в диэлектрической пластине концепцию парциальных волн. Пусть плоская однородная волна падает на границу раздела *1* под углом $\varphi$ (рис. 9.1). Если этот угол больше угла полного внутреннего отражения $\varphi_0$, волна полностью отражается и под тем же углом падает на границу раздела *2*, где процесс отражения повторяется. Таким образом, в пластине в направлении оси $z$ распространяется быстрая волна, а в окружающей ее среде, как показано в § 2.6,— медленная. При этом выполняется условие

$$u_1 \leqslant v_\Phi \leqslant u_2, \tag{9.1}$$

где $u_1$, $u_2$ — скорости света в пластине и окружающей среде; $v_\Phi$ — фазовая скорость волны, одинаковая снаружи и внутри пластины.

На границах раздела сред *1* и *2* касательные составляющие векторов **E** и **H** должны быть непрерывны. Необходимость выполнения этих условий приводит, как и при распространении волны между двумя идеально проводящими плоскостями (см. § 5.1), к появлению зависимости угла отражения $\varphi$ от частоты. По мере снижения

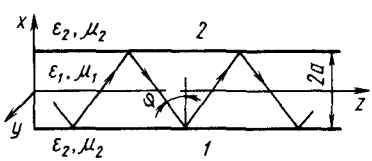



Рис. 9.1. Распространение волн в диэлектрической пластине

частоты угол $\varphi$ уменьшается. Когда он становится меньше $\varphi_0$, появляется преломленный луч и часть энергии волны из пластины излучается в окружающее пространство. Волна, распространяющаяся в пластине в направлении оси $z$, испытывает при этом затухание. Описанное явление называется *явлением отсечки*, а соответствующая равенству $\varphi=\varphi_0$ частота $f_c$ — *частотой отсечки*. Используется также понятие *критической длины волны* $\lambda_c=u_2/f_c$, которая определяется для второй среды. Как следует из изложенного, явления отсечки в диэлектрических и металлических волноводах обусловлены различными механизмами и проявляются по-разному.

Описанный механизм распространения волн справедлив и для диэлектрического волновода, представляющего собой стержень произвольного поперечного сечения, помещенный в среду с меньшим показателем преломления. Для каждой из сред справедливо характеристическое уравнение, аналогичное (5.17):

$$k_1^2=\beta^2+k_{c1}^2;\ k_2^2=\beta^2+k_{c2}^2, \tag{9.2}$$

где $k_1=\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$, . $k_2=\omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$ — волновые числа; $k_{c1}$ и $k_{c2}$ — критические (поперечные) волновые числа в стержне и окружающей среде; $\beta=\omega/v_\Phi$ — постоянная фазы, общая для обеих сред (потери не учитываем).

Из неравенства (9.1) следует, что $k_1\geqslant\beta\geqslant k_2$. Следовательно, в выражении (9.2) значение $k_{c1}^2$ должно быть положительным, а значение $k_{c2}^2$ — отрицательным, т. е. поперечное волновое число во второй среде имеет мнимое значение. Обозначим $k_{c1}=k_c$; $k_{c2}=i\tau$, где $\tau$ — действительное число. Тогда из равенств (9.2) получим

$$k_1^2-k_c^2=k_2^2+\tau^2. \tag{9.3}$$

Введем безразмерные волновые числа $\bar{k}_1=k_1a$, $\bar{k}_2=k_2a$, $\bar{k}_c=k_ca$, $\bar{\tau}=\tau a$, где $a$ — характерный поперечный размер диэлектрического стержня, а также нормированные проницаемости $\bar{\varepsilon}=\varepsilon_1/\varepsilon_2$ и $\bar{\mu}=\mu_1/\mu_2$. Учитывая, что $k_1^2=k_2^2\bar{\varepsilon}\bar{\mu}$, преобразуем (9.3) следующим образом:

$$\boxed{\bar{k}_c^2+\bar{\tau}^2=\bar{R}^2,} \tag{9.4}$$

где $\bar{R}=k_2a(\bar{\varepsilon}\bar{\mu}-1)^{1/2}$ — нормированная частота. Соотношение (9.4) устанавливает связь между поперечными волновыми числами в первой и второй средах.

Другое, независимое уравнение, связывающее эти величины, можно получить, используя граничные условия (6.31)—(6.34), которые должны выполняться на контуре поперечного сечения диэлектрического стержня. Конкретный вид этого уравнения, называемого *дисперсионным*, определяется формой поперечного сечения стержня и типом волны. Совместное решение

дисперсионного уравнения и уравнения (9.4) позволяет для заданной нормированной частоты $\bar{R}$ найти значения поперечных волновых чисел $\bar{k}_c$ и $\bar{\tau}$, а следовательно, фазовую и групповую скорости волны. Действительно, из определения фазовой скорости следует

$$v_\Phi = \frac{\omega}{\beta} = u_2 \frac{k_2}{\beta} = u_2 \frac{\bar{k}_2}{\sqrt{\bar{k}_2^2 + \bar{\tau}^2}}.$$

Подставив в эту формулу значение $\bar{k}_2$ из (9.4), получим

$$v_\Phi = u_2 \frac{\bar{R}}{\sqrt{\bar{k}_c^2 + \bar{\varepsilon}\bar{\mu}\bar{\tau}^2}} = u_2 \frac{\sqrt{\bar{k}_c^2 + \bar{\tau}^2}}{\sqrt{\bar{k}_c^2 + \bar{\varepsilon}\bar{\mu}\bar{\tau}^2}}. \qquad (9.5)$$

Так как $\bar{\varepsilon}\bar{\mu} > 1$, из полученного равенства следует, что фазовая скорость волны в диэлектрическом волноводе $v_\Phi$ не превышает скорость света в окружающей среде $u_2$. Кроме того, фазовая скорость зависит от частоты, т. е. волны в диэлектрическом волноводе обладают дисперсией.

Для нахождения групповой скорости воспользуемся соотношением

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{d\beta} = u_2 \frac{dk_2}{d\beta} = u_2 \frac{d\bar{k}_2}{d\bar{\tau}} \Big/ \frac{d\bar{\beta}}{d\bar{\tau}},$$

где $\bar{\beta} = \beta a$. Вычисление стоящих в правой части производных с учетом (9.3) и (9.4) позволяет получить следующую формулу [5]:

$$v_{гр} = \frac{u_2^2}{v_\Phi} \frac{1+\nu}{1+\bar{\varepsilon}\bar{\mu}\nu}, \qquad (9.6)$$

где $\nu = \frac{d(\bar{\tau}^2)}{d(\bar{k}_c^2)} = \frac{\bar{\tau} d\bar{\tau}}{\bar{k}_c d\bar{k}_c}$ — крутизна квадратичной дисперсионной кривой $\bar{\tau}^2 = F(\bar{k}_c^2)$, определяемой дисперсионным уравнением. При малых параметрах $\bar{\tau}(\bar{\tau}/\bar{k}_c < 0{,}1)$ для вычисления фазовой и групповой скоростей можно использовать приближенные формулы [5]:

$$v_\Phi = u_2 \left[1 - 0{,}5(\bar{\varepsilon}\bar{\mu} - 1)\bar{\tau}^2/\bar{k}_c^2\right];$$

$$v_{гр} = (u_2^2/v_\Phi)\left[1 - (\bar{\varepsilon}\bar{\mu} - 1)\nu\right].$$

## § 9.2. ПЛОСКИЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ВОЛНОВОД

Рассмотренную в начале § 9.1 диэлектрическую пластину, окруженную однородным диэлектриком, можно рассматривать как *плоский диэлектрический волновод* (ПДВ). Для вывода дисперсионного уравнения этого волновода определим функции $\psi_1$ и $\psi_2$ в каждой из сред. С этой целью введем прямоугольную систему координат, как показано на рис. 9.1, и решим уравнение Гельмгольца (5.15) в пластине, учитывая, что, по предположению, $\partial/\partial y = 0$:

$$\psi_1 = \dot{A}_1 \cos k_c x + \dot{B}_1 \sin k_c x, \tag{9.7}$$

Поскольку функция $\psi_1$ не зависит от координаты $y$, E- и H-волны в ПДВ могут распространяться независимо друг от друга (см. § 6.3). Проанализируем сначала волны типа E. Их электромагнитное поле описывается выражениями (6.1) и (6.2):

$$\dot{E}_x = -i\beta k_c(-\dot{A}_1 \sin k_c x + \dot{B}_1 \cos k_c x)e^{-i\beta z}; \tag{9.8}$$

$$\dot{E}_z = k_c^2(\dot{A}_1 \cos k_c x + \dot{B}_1 \sin k_c x)e^{-i\beta z}; \tag{9.9}$$

$$\dot{H}_y = -i\omega\varepsilon k_c(-\dot{A}_1 \sin k_c x + \dot{B}_1 \cos k_c x)e^{-i\beta z}; \tag{9.10}$$

$$\dot{E}_y = \dot{H}_x = \dot{H}_z = 0. \tag{9.11}$$

Таким образом, составляющие электромагнитного поля содержат два слагаемых, отличающихся типом симметрии относительно плоскости $x=0$. При $\dot{A}_1 = 0$ составляющие $\dot{E}_x$ и $\dot{H}_y$, определяющие поток энергии в пластине в направлении оси $z$, симметричны относительно плоскости $x=0\,[\dot{E}_x(-x) = \dot{E}_x(x)]$. Такие волны принято называть четными и приписывать им индекс $e$ (от английского слова even — четный). При $\dot{B}_1 = 0$ $\dot{E}_x$ и $\dot{H}_y$ антисимметричны относительно плоскости $x=0$ $[\dot{E}_x(-x) = -\dot{E}_x(x)]$. Такие волны принято называть *нечетными* и обозначать их индексом $o$ (от английского слова odd — нечетный). Вследствие симметрии волновода целесообразно рассматривать только верхнюю полуплоскость ($x>0$) и исследовать дисперсионное уравнение для четных и нечетных волн отдельно. В общем случае поле в волноводе можно затем найти как суперпозицию полей четных и нечетных волн.

В окружающей пластину среде ($x>a$) уравнение (5.15) приобретает вид

$$\partial^2\psi_2/\partial x^2 - \tau^2\psi_2 = 0.$$

Его общее решение содержит два слагаемых

$$\psi_2 = \dot{A}_2 e^{-\tau x} + \dot{B}_2 e^{\tau x}, \tag{9.12}$$

Так как поле не может возрастать по мере удаления от пластины, для верхней полуплоскости необходимо положить $\dot{B}_2 = 0$. Таким образом, функции $\psi_1$ и $\psi_2$ определены, что дает возможность вывести дисперсионное уравнение с помощью граничных условий (6.31), (6.35).

Для четных E-волн ($\dot{A}_1 = 0$)

$$k_c^{e^2}\dot{B}_1 \sin k_c^e a = -\tau^{e^2} A_2 e^{-\tau^e a};$$

$$\varepsilon_1 k_c^e \dot{B}_1 \cos k_c^e a = -\varepsilon_2 \tau^e \dot{A}_2 e^{-\tau^e a}.$$

Полученные соотношения есть система однородных уравнений относительно коэффициентов $\dot{B}_1$ и $\dot{A}_2$. Ненулевые решения этой системы существуют в том случае, когда ее определитель равен нулю: $\varepsilon_2 k_c^{e^2}\tau^e \sin k_c^e a e^{-\tau^e a} - \varepsilon_1 k_c^e \tau^{e^2} \cos k_c^e a e^{-\tau^e a} = 0$. Произведя

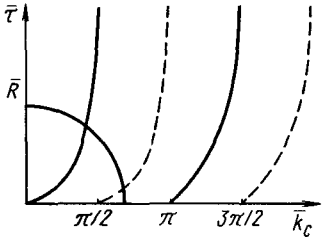



Рис. 9.2. Графическое решение дисперсионного уравнения для Е-волны в ПДВ:
———— — четные волны;
— — — — — — — — нечетные волны

сокращения и помножив левую и правую части уравнения на $a$, получим дисперсионное уравнение для четных волн:

$$\bar{\varepsilon}\bar{\tau}^e = \bar{k}_c^e \operatorname{tg} \bar{k}_c^e. \qquad (9.13)$$

Для нечетных Е-волн граничные условия (6.31) и (6.35) приобретают вид

$$k_c^{o^2} \dot{A}_1 \cos k_c^o a = -\tau^{o^2} \dot{A}_2 e^{-\tau^o a};$$

$$-\varepsilon_1 k_c^o \dot{A}_1 \sin k_c^o a = -\varepsilon_2 \tau^o \dot{A}_2 e^{-\tau^o a}.$$

Проделав аналогичные предыдущему преобразования, найдем дисперсионное уравнение:

$$\bar{\varepsilon}\bar{\tau}^o = -\bar{k}_c^o \operatorname{ctg} \bar{k}_c^o. \qquad (9.14)$$

Для Н-волн функции $\psi_1$ и $\psi_2$ имеют тот же вид, что и для Е-волн, причем при $\dot{A}_1 = 0$ получим четные, а при $\dot{B}_1 = 0$ — нечетные Н-волны. Для вывода дисперсионного уравнения используем граничные условия (6.32) и (6.36). Для четных Н-волн

$$k_c^{e^2} \dot{B}_1 \sin k_c^e a = -\tau^{e^2} \dot{A}_2 e^{-\tau^e a};$$

$$\mu_1 k_c^e B_1 \cos k_c^e a = -\mu_2 \tau^e A_2 e^{-\tau^e a},$$

откуда

$$\bar{\mu}\bar{\tau}^e = \bar{k}_c^e \operatorname{tg} \bar{k}_c^e. \qquad (9.15)$$

Для нечетных Н-волн дисперсионное уравнение приобретает вид, аналогичный (9.13):

$$\bar{\mu}\bar{\tau}^o = \bar{k}_c^o \operatorname{ctg} \bar{k}_c^o. \qquad (9.16)$$

Совместное решение одного из уравнений (9.13)—(9.16) с уравнением (9.4) позволяет проанализировать условия распространения различных типов волн в плоском диэлектрическом волноводе. На рис. 9.2 показано графическое решение уравнений (9.4) и (9.13)—(9.16). На графике с координатами $\bar{k}_c$, $\bar{\tau}$ первое уравнение описывает линию, близкую к тангенсоиде, а второе — окружность радиуса $\bar{R}$. Пересечение этих кривых определяет значения $\bar{k}_c$ и $\bar{\tau}$, соответствующие данной нормированной частоте $\bar{R}$. Число точек пересечения зависит от значения $\bar{R}$. Значения $\bar{k}_c$ и $\bar{\tau}$ в каждой из точек пересечения позволяют найти скорость волны в волноводе и распределение поля в его поперечном сечении. Таким образом, каждой точке пересечения соответствует конкретный тип волны в плоском диэлектрическом волноводе. Как и в металлических волноводах, эти типы волн принято характеризовать двумя индексами, определяющими число полуволн поля, укладывающихся на толщине и ширине пластины. Так как при анализе предполагалось отсутствие вариаций поля

вдоль оси $y$, второй индекс у всех рассматриваемых типов волн равен нулю.

На рис. 9.2 видно, что в первой точке пересечения, соответствующей четной волне, $\bar{k}_c < \pi/2$. Следовательно, зависимость $E_x(x)$ не меняет знак при $|x| \leqslant a$. Поэтому первый индекс этого типа волны равен нулю. Ее обозначают $E_{00}$. Следующая точка пересечения соответствует нечетному типу волны и для нее $\frac{\pi}{2} \leqslant \bar{k}_c \leqslant \pi$. Из формулы (9.8) следует, что кривая $E_x(x)$ один раз пересекает ось абсцисс при $|x| \leqslant a$, поэтому первый индекс данного типа волны равен единице, и т. д. Таким образом, четные индексы соответствуют четным волнам, а нечетные — нечетным.

По мере увеличения $\bar{R}$ число точек пересечения окружности с ветвями дисперсионных кривых увеличивается, причем точка, соответствующая волне типа $E_{m0}$, появляется при $\bar{R} \geqslant m\pi/2$. Так как $\bar{R}$ пропорционально частоте, с ростом последней в диэлектрическом волноводе может распространяться все большее число типов волн. Равенство $\bar{R} = m\pi/2$ определяет критические частоту и длину волны типа $E_{m0}$.

Согласно определению нормированной частоты, из записанного равенства получим

$$f_c = \frac{u_2 m}{4a\sqrt{\bar{\varepsilon}\bar{\mu} - 1}}; \quad \lambda_c = \frac{4a\sqrt{\bar{\varepsilon}\bar{\mu} - 1}}{m}. \tag{9.17}$$

Заметим, что критическая частота волны $E_{00}$ в плоском диэлектрическом волноводе в соответствии с рис. 9.2 и формулой (9.17) равна нулю, т. е. она не имеет отсечки. Этот вывод находится в противоречии с утверждением, сделанным в начале § 9.1 на основе концепции парциальных волн, о существовании отсечки у любых типов волн. Следует отметить, однако, что концепция парциальных волн основана на использовании геометрической оптики, в частности понятия луча. Этим понятием можно пользоваться, когда характерные размеры объектов много больше длины волны. В рассматриваемом случае, однако, толщина пластины составляет менее половины пространственного периода изменения поля вдоль оси $x\,(\bar{k}_c < \pi/2)$, поэтому применение методов геометрической оптики приводит к неверным результатам. Для типов волн с большим числом вариаций поля вдоль оси $x$ концепция парциальных волн позволяет получить удовлетворительные качественные и даже количественные результаты.

Исследуем зависимость фазовой скорости волн в ПДВ от частоты. На критической частоте $\bar{\tau} = 0$ (рис. 9.2), и, как следует из формулы (9.5), фазовая скорость равна скорости света в окружающей среде $u_2$. По мере увеличения частоты значение $\bar{\tau}$ для данного типа волны растет и фазовая скорость волны

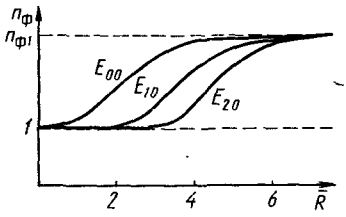



Рис. 9.3. Зависимость замедления фазовой скорости от нормированной частоты в ПДВ

в волноводе уменьшается. На очень высоких частотах $\bar{\tau} \gg \bar{k}_c$, и в формуле (9.5) последней величиной можно пренебречь. При этом фазовая скорость волны стремится к значению $v_{ф\infty} = u_2/\sqrt{\bar{\varepsilon}\bar{\mu}} = u_1$, т. е. к скорости света в пластине. Расчетные зависимости замедления фазовой скорости первых трех типов Е-волн от нормированной частоты в ПДВ показаны на рис. 9.3. Наибольшая дисперсия наблюдается в средней части частотного диапазона. По мере увеличения нормированной диэлектрической проницаемости пластины $\bar{\varepsilon}$ фазовая скорость волны на данной частоте уменьшается, а дисперсия в волноводе увеличивается.

Распределение поля в поперечном сечении волновода определяется значениями поперечных волновых чисел $\bar{k}_c$ и $\bar{\tau}$. На критической частоте $\bar{\tau}=0$ и поле по мере удаления от пластины не убывает. При увеличении частоты значение $\bar{\tau}$ возрастает и электромагнитное поле «прижимается» к пластине. Расчетные графики распределения поперечной составляющей напряженности электрического поля по оси $x$ для трех первых типов Е-волн на двух частотах показаны на рис. 9.4, *а*, *б*. При увеличении $\bar{\varepsilon}$ для данной частоты $f$ нормированная частота $\bar{R}$ увеличивается, а дисперсионные кривые на рис. 9.2 «прижимаются» к оси абсцисс. Как показывает численный анализ, в результате значение $\bar{\tau}$ увеличивается и поле все больше концентрируется у поверхности пластины.

Анализ распространения Н-волн производится аналогично описанному ранее. При решении дисперсионных уравнений (9.15) и (9.16) следует учитывать, что относительная магнитная проницаемость большинства диэлектриков близка к единице и поэтому $\bar{\mu} < \bar{\varepsilon}$. Следовательно, дисперсионные кривые для Н-волн лежат

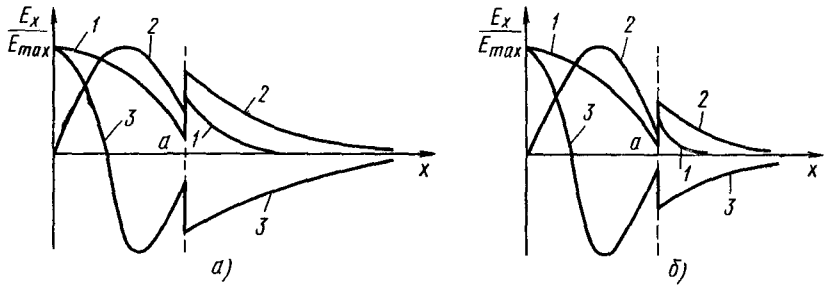



Рис. 9.4. Распределение напряженности и электрического поля в плоском ДВ: *а* — на частоте $f_1$; *б* — на частоте $f_2 > f_1$; *1* — волны типа $E_{00}$; *2* — волны типа $E_{10}$; *3* — волны типа $E_{20}$

выше, чем соответствующие кривые для Е-волн, и при той же частоте $f$ значение $\bar{\tau}$ для Н-волн больше, а фазовая скорость меньше, чем для Е-волн с теми же индексами. Критические частоты волн типов $E_{m0}$ и $H_{m0}$ совпадают и, таким образом, являются по крайней мере дважды вырожденными. Это обстоятельство затрудняет использование ПДВ для передачи СВЧ-сигналов в одномодовом режиме.

## § 9.3. КРУГЛЫЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ВОЛНОВОД

Круглый диэлектрический волновод представляет собой стержень круглого поперечного сечения радиусом $a$ с проницаемостями $\varepsilon_1$, $\mu_1$, помещенный в безграничную среду с параметрами $\varepsilon_2$, $\mu_2$ (рис. 9.5). Для вывода дисперсионного уравнения этого волновода запишем решение уравнения (5.15) внутри стержня ($r \leqslant a$), воспользовавшись результатами, полученными в § 7.2:

$$\psi_1^e = \dot{A}^e J_m(k_c r) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\theta, \tag{9.18}$$

где $\psi_1^e$ — функция, связанная с электрическим вектором Герца.

Так как в окружающей среде поперечное волновое число мнимое, уравнение (5.15) для этой области приобретает вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi_2^e}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi_2^e}{\partial \theta}-\tau^2\psi_2^e=0.$$

Решив его методом разделения переменных (см. § 7.2), получим

$$\psi_2^e=[\dot{B}^e I_m(\tau r)+\dot{C}^e K_m(\tau r)]\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\theta,$$

где $I_m(x)$, $K_m(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка $m$. Графики этих функций приведены в Приложении 5. Поскольку поле на бесконечности должно отсутствовать, постоянную интегрирования $\dot{B}^e$ принимаем равной нулю. Таким образом, функция $\psi_2^e$ определена:

$$\psi_2^e=\dot{C}^e K_m(\tau r)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\theta. \tag{9.19}$$

Так как при $m>0$ на границе раздела $\partial\psi/\partial l \neq 0$, в общем случае в круглом ДВ распространяются гибридные волны. Поэтому наряду с (9.18) и (9.19) необходимо иметь выражения для функции $\psi^m$, связанной с магнитным вектором Герца. Запишем их в виде

$$\psi_1^m = A^m J^m(k_c r)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\theta; \tag{9.20}$$

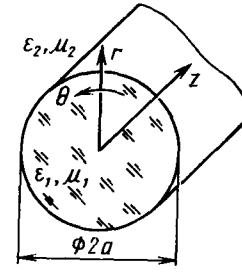



Рис. 9.5. Круглый диэлектрический волновод

$$\psi_2^m = C^m K_m(\tau r) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\theta. \tag{9.21}$$

Подставим в (6.31)—(6.34) значения функций $\psi_1^e$, $\psi_1^m$, $\psi_2^e$, $\psi_2^m$ на границе раздела:

$$k_c^2 \dot{A}^e J_m(\bar{k}_c) = -\tau^2 C^e K_m(\bar{\tau}); \tag{9.22}$$

$$k_c^2 \dot{A}^m J_m(\bar{k}_c) = -\tau^2 \dot{C}^m K_m(\bar{\tau}); \tag{9.23}$$

$$\mp\frac{\beta m}{a}\dot{A}^e J_m(\bar{k}_c) + \omega\mu_1 k_c \dot{A}^m J'_m(\bar{k}_c) = \mp\frac{\beta m}{a}\dot{C}^e K_m(\bar{\tau}) + $$

$$+\omega\mu_2 \tau \dot{C}^m K'_m(\bar{\tau}); \tag{9.24}$$

$$\dot{A}^e \omega\varepsilon_1 k_c J'_m(\bar{k}_c) \mp \frac{\beta m}{a}\dot{A}^m J^m(\bar{k}_c) = \omega\varepsilon_2 \tau \dot{C}^e K'_m(\bar{\tau}) \mp (\beta m/a)\dot{C}^m K_m(\bar{\tau}). \tag{9.25}$$

С помощью (9.22) и (9.23) заменим в (9.24) и (9.25) постоянные $\dot{C}^e$ и $\dot{C}^m$ на $\dot{A}^e$ и $\dot{A}^m$. После перегруппировки членов и деления на $k_2 a k_c^2 J_m(\bar{\tau})$ получим однородную систему уравнений с двумя неизвестными;

$$\pm\frac{\beta m}{\bar{k}_2}\left(\frac{1}{\bar{k}_c^2}+\frac{1}{\bar{\tau}^2}\right)\dot{A}^e - Z_{02}\left[\bar{\mu}\frac{J'_m(\bar{k}_c)}{\bar{k}_c J_m(\bar{k}_c)}+\frac{K'_m(\bar{\tau})}{\bar{\tau}K_m(\bar{\tau})}\right]\dot{A}^m = 0; \tag{9.26}$$

$$\frac{1}{Z_{02}}\left[\bar{\varepsilon}\frac{J'_m(\bar{k}_c)}{\bar{k}_c J_m(\bar{k}_c)}+\frac{K'_m(\bar{\tau})}{\bar{\tau}K_m(\bar{\tau})}\right]\dot{A}^e \mp \frac{\beta m}{\bar{k}_2}\left(\frac{1}{\bar{k}_c^2}+\frac{1}{\bar{\tau}^2}\right)\dot{A}^m = 0. \tag{9.27}$$

Для упрощения дальнейших вычислений введем функции

$$s_m(x) = \frac{J'_m(x)}{xJ_m(x)};\quad t_m(x) = -\frac{K'_m(x)}{xK_m(x)}. \tag{9.28}$$

Используя эти обозначения, приравняем определитель системы уравнений нулю, что является условием существования нетривиальных решений:

$$m^2\frac{\bar{\beta}^2}{\bar{k}_2^2}\left(\frac{1}{\bar{k}_c^2}+\frac{1}{\bar{\tau}^2}\right)^2 - [\bar{\varepsilon}s_m(\bar{k}_c)-t_m(\bar{\tau})][\bar{\mu}s_m(\bar{k}_c)-t_m(\bar{\tau})] = 0. \tag{9.29}$$

Преобразуем первый член этого уравнения, учитывая, что согласно (9.2) $\bar{\beta}^2 = \bar{k}_2^2 + \bar{\tau}^2$, а по (9.4) $\bar{k}_2^2 = (\bar{k}_c^2 + \bar{\tau}^2)/(\bar{\varepsilon}\bar{\mu}-1)$:

$$\frac{\bar{\beta}^2}{\bar{k}_2^2}\left(\frac{1}{\bar{k}_c^2}+\frac{1}{\bar{\tau}^2}\right) = \frac{(\bar{k}_2^2+\bar{\tau}^2)(\bar{\varepsilon}\bar{\mu}-1)}{(\bar{k}_c^2+\bar{\tau}^2)}\frac{\bar{k}_c^2+\bar{\tau}^2}{\bar{k}_c^2\bar{\tau}^2} = \frac{1}{\bar{\tau}^2}+\frac{\bar{\varepsilon}\bar{\mu}}{\bar{k}_c^2}.$$

Подставив это выражение в (2.29), получим дисперсионное уравнение для круглого ДВ:

$$m^2\left(\frac{1}{\bar{\tau}^2}+\frac{\bar{\varepsilon}\bar{\mu}}{\bar{k}_c^2}\right)\left(\frac{1}{\bar{k}_c^2}+\frac{1}{\bar{\tau}^2}\right) - [\bar{\varepsilon}s_m(\bar{k}_c)-t_m(\bar{\tau})][\bar{\mu}s_m(\bar{k}_c)-t_m(\bar{\tau})] = 0. \tag{9.30}$$

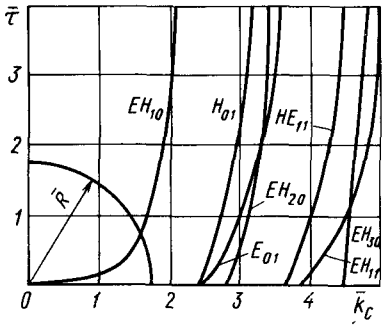



Рис. 9.6. Графическое решение дисперсионного уравнения для круглого ДВ

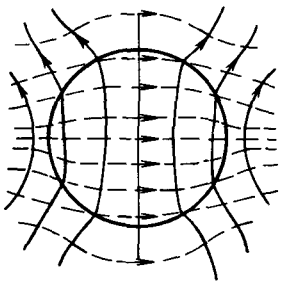


Рис. 9.7. Эпюра силовых линий электромагнитного поля волны типа $EH_{10}$ в круглом ДВ:
——— — линии вектора **E**;
— — — — — линии вектора **H**

Дисперсионные кривые, построенные по уравнению (9.30) для различных $m$, показаны на рис. 9.6. Заметим, что при отсутствии вариаций поля по азимуту ($m=0$) E- и H-волны могут распространяться в волноводе независимо друг от друга. Дисперсионное уравнение разделяется при этом на два. Приравняв нулю первую квадратную скобку в (9.30), получим уравнение для волн типа $E_{0n}$ (согласно (9.27) $\dot{A}^e \neq 0$). Первый индекс этого обозначения указывает число $m$ вариаций поля по азимуту, второй равен числу нулей функции $\psi$ на промежутке $(0, a)$ при $\theta=\text{const}$. Приравняв нулю вторую квадратную скобку (9.30), получим дисперсионное уравнение для волн типов $H_{0n}$.

При наличии вариаций поля по азимуту ($m\neq 0$) в круглом ДВ распространяются гибридные волны. При этом каждому значению индекса $m$ соответствуют два решения дисперсионного уравнения (две дисперсионные кривые), отличающиеся отношением коэффициентов $\dot{A}^e$ и $\dot{A}^m$. Действительно, в соответствии с (9.26) и (9.29)

$$\frac{\dot{A}^e}{\dot{A}^m}=Z_{02}\frac{\tilde{\mu}s_m(\bar{k}_c)-t_m(\bar{\tau})}{\frac{\bar{\beta}m}{\bar{k}_2}\left(\frac{1}{\bar{k}_c^2}+\frac{1}{\bar{\tau}^2}\right)}=Z_{02}\sqrt{\frac{\tilde{\mu}s_m(\bar{k}_c)-t_m(\bar{\tau})}{\tilde{\varepsilon}s_m(\bar{k}_c)-t_m(\bar{\tau})}}.$$

Из выражений (6.10) и (6.19) следует, что это отношение равно отношению максимальных значений амплитуд продольных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей волны на данном радиусе $r$. Используя (9.26) и (9.29), найдем

$$\frac{|\dot{E}_z(r,\,0)|}{|\dot{H}_z(r,\,\pi/2m)|}=Z_{02}\sqrt{\frac{\tilde{\mu}s_m(\bar{k}_c)-t_m(\bar{\tau})}{\tilde{\varepsilon}s_m(\bar{k}_c)-t_m(\bar{\tau})}}. \qquad (9.31)$$

Численный анализ показывает, что для одного из решений значение квадратного корня меньше, а для другого — больше

единицы. В первом случае отношение $E_{z\max}/H_{z\max}$ меньше, чем отношение поперечных составляющих электрического и магнитного полей в плоской волне, распространяющейся во второй среде. Такие волны обозначаются $НЕ_{mn}$, так как магнитное поле в них «больше» электрического. Другое решение соответствует волнам типа $ЕН_{mn}$.

Основным типом волны в круглом ДВ является гибридная волна $ЕН_{10}$, критическая частота которой равна нулю. Эпюра силовых линий электромагнитного поля этой волны показана на рис. 9.7.

## § 9.4. СТРУКТУРА И ПАРАМЕТРЫ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ. СВЕТОВОДЫ

В СВЧ-диапазоне диэлектрические волноводы применяются в качестве линий передачи миллиметровых и субмиллиметровых волн, так как обеспечивают на этих длинах волн передачу большей мощности с меньшими потерями, чем металлические линии передачи. В них используются в основном диэлектрические стержни из полимерных материалов (полиэтилен, фторопласт, органическое стекло) круглого, эллиптического или прямоугольного сечения. Последние две формы сечения позволяют обеспечить фиксацию плоскости поляризации волны, однако их расчет более сложен, чем круглого ДВ.

Рассмотрим основные параметры волны типа $ЕН_{10}$ в круглом ДВ. Особенностью открытых линий передачи является наличие электромагнитного поля и потока энергии в окружающем волновод пространстве. Граничный радиус поля $r_0$ принято определять из условия [5]:

$$\tau r_0 = 1 \quad \text{или} \quad r_0/a = 1/\bar{\tau}. \tag{9.32}$$

При этом, как показывают расчеты, внутри окружности радиусом $r_0$ проходит 80—90% энергии волны, а напряженность поля при $r=r_0$ составляет 5—10% от напряженности поля на поверхности стержня. Для нормального распространения волны в диэлектрическом волноводе необходимо иметь вокруг него свободное пространство в радиусе $(2—3)r_0$, что создает трудности при его установке в аппаратуру.

Рабочий диапазон частот круглого ДВ ограничен сверху значением $k_c = 2{,}405$, или

$$f_c = 2{,}405c/(2\pi a\sqrt{\bar{\varepsilon}\bar{\mu}-1}), \tag{9.33}$$

если диэлектрический стержень находится в воздухе или вакууме. Хотя критическая частота волны типа $ЕН_{10}$ равна нулю, на очень низких частотах значение $\bar{\tau}$ стремится к нулю, а фазовая скорость волны — к скорости света в окружающей среде (см.

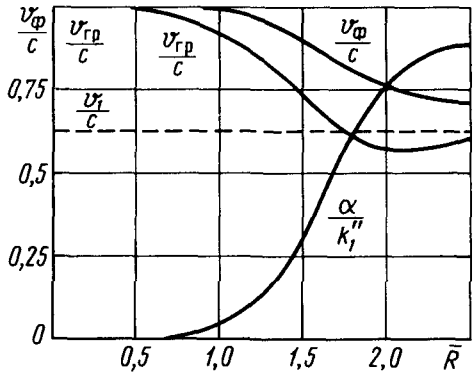



Рис. 9.8. Зависимость основных параметров круглого ДВ от нормированной частоты

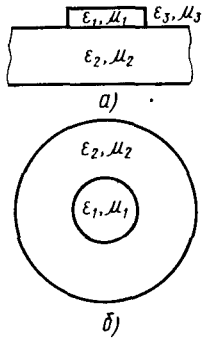



Рис. 9.9. Типы световодов: *а* — пленочный; *б* — волоконный

рис. 9.6). Это приводит к увеличению граничного радиуса $r_0$ и потере способности волны следовать за изгибами стержня. Поэтому нижнюю границу рабочего диапазона $f_н$ находят из условия $v_ф < 0{,}999c$, т. е. фазовая скорость должна быть меньше скорости света в окружающей среде хотя бы на 0,1%. Из выражения (9.5) следует, что при $\bar{\varepsilon} = 2{,}5$ $\bar{\mu} = 1$ это условие эквивалентно неравенству $\bar{\tau} \geqslant 0{,}04k_c$, что определяет значение $R_н \simeq k_c = 0{,}9$. Для стержня из полиэтилена радиусом 1 см, находящегося в воздухе, $f_н = 3{,}8$ ГГц; $\bar{\tau}_н = 0{,}036$; $r_{0н} = 28$ см; $f_c = 9{,}4$ ГГц [5].

Затухание волн в волноводе обусловлено потерями в диэлектрике. Его значение пропорционально потоку энергии волны, распространяющемуся в стержне, так как в воздухе диэлектрические потери весьма малы. Отсюда следует, что отношение этого потока к общей мощности волны не должно быть слишком большим. Это условие ограничивает рабочий диапазон со стороны высоких частот значением $R_в = 1{,}2$. Зависимость основных параметров диэлектрического волновода от нормированной частоты $R$ показана на рис. 9.8. Как видно из графика, в оптимальном рабочем диапазоне постоянная затухания волны типа $EH_{10}$ в круглом ДВ составляет 5—15% от постоянной затухания плоской Т-волны в материале стержня.

Из выражения для нормированной частоты следует, что при близких по значению показателях преломления сред, образующих волновод, его характерный размер $a$ может быть много больше длины волны в свободном пространстве при сохранении одномодового или близкого к нему режима работы волновода. Это обстоятельство используется при создании диэлектрических волноводов оптического диапазона — *световодов*.

В настоящее время применяются в основном пленочные и волоконные световоды. Основу пленочного световода составляет

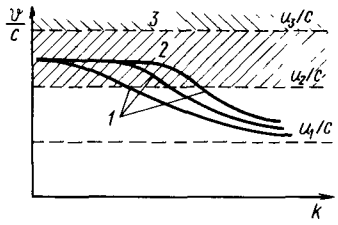



Рис. 9.10. Дисперсионные характеристики пленочного световода: *1* — волноводные волны в пленке; *2* — область свободных волн в подложке; *3* — область свободных волн в воздухе

пленка, выращенная на диэлектрической подложке или сформированная в ней методами интегральной технологии (рис. 9.9, *а*). Показатель преломления подложки должен быть меньше, чем пленки. Такие волноводы используются для передачи света на небольшие расстояния — в пределах интегральной схемы оптического диапазона. Анализ показывает, что в пленочных ДВ возможно существование волн трех типов: свободных волн в воздухе, фазовая скорость которых $v_{ф1} \geqslant c$, свободных волн в подложке $(c \geqslant v_{фп} \geqslant u_2)$ и направленных волн в пленке (волноводные моды), фазовая скорость которых удовлетворяет неравенству $v_п \geqslant v_ф \geqslant u_1$. Области существования этих типов волн показаны на дисперсионной характеристике пленочного ДВ (рис. 9.10). Для передачи информации используются волны третьего типа.

Волоконный диэлектрический волновод (световод) состоит из сердцевины (керна) и оболочки круглого поперечного сечения. Керн и оболочка выполнены из специальных стекол, отличающихся коэффициентом преломления и сваренных между собой (рис. 9.9, *б*). На наружную поверхность оболочки наносится поглощающее свет покрытие. Жгуты таких волокон (оптические кабели) применяются для передачи изображений, а также информации на большие расстояния (дальняя оптическая связь).

В первом случае диаметр керна составляет 10—20 мкм, диаметр оболочки — 50 мкм, $\bar{\varepsilon} = 1{,}05—1{,}1$. При длине волны излучения $\lambda = 600$ нм нормированная частота $R = 80 \div 120$. При таком значении $R$ в волноводе может распространяться несколько тысяч типов волн. Различие их фазовых и групповых скоростей в данном случае не имеет значения, так как при передаче даже быстро движущихся изображений на небольшие расстояния яркость на входе каждого световода меняется медленно по сравнению с временем пробега сигнала по световоду.

Для передачи больших объемов информации на значительные расстояния желательно обеспечить одномодовый режим работы световода. С этой целью диаметр сердцевины уменьшают до 3—5 мкм, а нормированную диэлектрическую проницаемость $\bar{\varepsilon}$ — до 1,005—1,01. Применение специальных, особо чистых стекол и современной технологии изготовления световодов для дальней связи позволило снизить затухание в них до 0,2 дБ/км на длине волны $\lambda = 1{,}55$ мкм, что в десятки раз меньше затухания при распространении этого же излучения в атмосфере. Наименьшее значение затухания и дисперсии получается в градиентных световодах, показатель преломления которых плавно меняется

по радиусу, например по параболическому закону. Применение новых материалов позволяет снизить затухание в световодах еще на порядок [6].

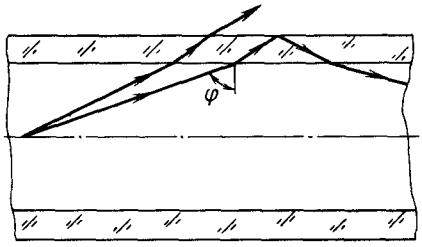


Рис. 9.11. Распространение волн в диэлектрической трубке

В заключение рассмотрим особенности распространения электромагнитных волн в диэлектрических трубках. При больших углах падения φ луча парциальной волны на внутреннюю поверхность трубки происходит полное внутреннее отражение от ее наружной поверхности (рис. 9.11). Соответствующий тип волны распространяется с очень малым затуханием, так как бóльшая часть его электромагнитного поля сосредоточена внутри трубки (в воздухе).

Небольшое уменьшение угла падения приводит к появлению преломленного луча (см. рис. 9.11) и излучению энергии из трубки. Такие типы волн имеют большую постоянную затухания. Поэтому диэлектрическая трубка имеет разреженный спектр типов волн и может работать в одномодовом режиме при больших по сравнению с длиной волны размерах поперечного сечения. Таким образом, ее можно рассматривать как сверхразмерный диэлектрический волновод [17].

## § 9.5. КВАЗИОПТИЧЕСКИЕ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

В субмиллиметровом диапазоне длин волн наряду с диэлектрическими волноводами находят применение квазиоптические линии передачи, в которых электромагнитная волна направляется с помощью системы линз или зеркал (рис. 9.12).

Рассмотрим линию передачи, образованную последовательностью линз радиусом $R$ и фокусным расстоянием $F_0$ (рис. 9.12, *а*). Радиус линзы $R \gg \lambda$, иначе само понятие линзы оказывается неприменимым. По законам геомерической оптики все лучи, прошедшие через линзу, собираются в ее фокусе $F$. Вследствие дифракции, однако, даже при отсутствии аберраций линзы лучи собираются не в точке, а в фокусном пятне радиусом $r_0 \approx \approx \lambda F_0 / R$, а затем снова расходятся. Если в том месте, где радиус

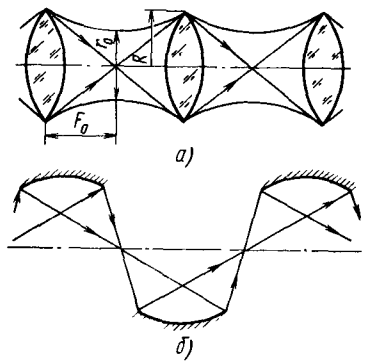


Рис. 9.12. Типы квазиоптических линий передачи:
*а* — линзовая; *б* — зеркальная

расходящегося пучка лучей станет равным $R$, поставить новую линзу, то она снова сфокусирует расходящийся пучок и т. д. Таким образом, система линз может обеспечить направленную передачу энергии. Малые потери на излучение в окружающее пространство (радиационные потери) обеспечиваются при выполнении условия $R^2 \gg \lambda L$, где $L$ — расстояние между линзами. При этом все лучи между линзами распространяются внутри некоторой поверхности, касательной ко всем крайним лучам и называемой *каустикой*. Различным типам волн в *линзовой линии передачи* соответствуют различные формы каустических поверхностей. Волна с наименьшим диаметром каустики является основной, она имеет минимальные радиационные потери. Аналогичными свойствами обладают и *зеркальные линии передачи* (рис. 9.12, *б*).

**Контрольные вопросы**

1. Поясните процесс распространения волн в ДВ с помощью концепции парциальных волн.
2. Как связана фазовая скорость волны со скоростями света в ДВ и среде, его окружающей?
3. Какими факторами определяются фазовая и групповая скорости распространения волн в ДВ? Как связаны поперечные постоянные распространения волн в ДВ с частотой?
4. Какие типы волн могут распространяться в плоском ДВ? Как определить их критические частоты?
5. Какие типы волн распространяются в круглом ДВ? Какой из них является основным?
6. Чем определяется скорость затухания поля в среде, окружающей ДВ? Что такое граничный радиус поля?
7. Чем определяется рабочий и оптимальный диапазоны частот круглого ДВ?
8. Опишите конструкцию пленочных световодов. Укажите, какие типы волн в них распространяются.
9. Какова конструкция волоконных светодов? Перечислите области их применения. Чем отличаются волоконные световоды для передачи изображений и для дальней оптической связи?
10. Опишите особенности распространения волн в диэлектрической трубке.
11. Опишите конструкцию и основные свойства квазиоптических линий передачи.

## ГЛАВА 10

# ЗАМЕДЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

### § 10.1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА МЕДЛЕННЫХ ВОЛН

Медленные волны применяются в электронике СВЧ и ускорительной технике для осуществления длительного взаимодействия электромагнитного поля с потоком заряженных частиц. Такое взаимодействие возникает, если заряженные частицы и электромагнитная волна движутся с приблизительно одинаковыми скоростями. Так как скорость частиц не может превышать скорость света, для реализации длительного взаимодействия необходимо замедлять электромагнитные волны. Использование с этой целью диэлектрических волноводов (см. гл. 9) нецелесообразно, так как они не могут обеспечить большое замедление в сочетании с малыми потерями. Кроме того, не все диэлектрики можно помещать в вакуум, в котором движутся заряженные частицы. Поэтому для создания медленных волн разработаны специальные металлические и металлодиэлектрические линии передачи, называемые *замедляющими системами* (ЗС). Замедляющие системы применяются также в квантовых и параметрических усилителях бегущей волны, в качестве линий задержки и т. п.

Для выяснения принципов построения ЗС рассмотрим условия существования и основные свойства медленных волн. В гл. 5 было показано, что в отсутствие потерь эти волны характеризуются мнимым критическим волновым числом $k_c = i\tau$, квадрат которого является собственным значением уравнения (5.15). Замедление фазовой скорости $n_\phi$ связано с поперечным волновым числом $\tau$ соотношениями

$$n_\phi = \beta/k = \sqrt{1+\tau^2/k^2};\ \tau = k\sqrt{n_\phi^2 - 1}. \qquad (10.1)$$

Запишем уравнение (5.15) для Е-волны, помножим обе его части на $\psi^{e*}$, и проинтегрируем по поперечному сечению ЗС. Применив формулу Грина (П.15), получим

$$k_c^2 = -\tau^2 = \frac{\int\limits_S |\nabla_\perp \psi^e|^2 \, dS - \oint\limits_l \psi^{e*} \frac{\partial \psi^e}{\partial n} dl}{\int\limits_l |\psi^e|^2 \, dS}.$$

Согласно этому выражению, при $k_c^2<0$ функция $\psi^e$ и ее нормальная производная отличны от нуля, по крайней мере на части контура поперечного сечения ЗС $l$.

Введем продольное поверхностное сопротивление $Z_{s\parallel}=E_z/H_l$ и выразим его через функцию $\psi^e$, используя (6.1), (6.2):

$$Z_{s\parallel}=\frac{k_c^2}{i\omega\varepsilon}\frac{\psi^e}{\partial\psi^e/\partial n}.$$

Подставив это соотношение в формулу для $k_c^2$, найдем

$$k_c^2=\frac{\int\limits_S|\nabla_\perp\psi^e|^2\,dS}{\int\limits_S|\psi^e|^2\,dS+\frac{Z_0}{ik}\oint\limits_l\frac{1}{Z_{s\parallel}}|\psi^e|^2\,dl}. \qquad (10.2)$$

Таким образом, для существования незатухающих медленных Е-волн необходимо, чтобы на поверхности ЗС (или ее части) продольное поверхностное сопротивление было отлично от нуля и имело индуктивный характер $(Z_{s\parallel}=iX_{s\parallel},\ 0<X_{s\parallel}<\infty)$. Аналогично доказывается, что для существования медленных Н-волн поверхность ЗС должна обладать емкостным поперечным поверхностным сопротивлением $Z_{s\perp}=iX_{s\perp}=E_l/H_z,\ -\infty<X_{s\perp}<0$. Если образующие ЗС тела имеют как продольное, так и поперечное поверхностное сопротивление, в ней распространяются гибридные медленные волны.

В соответствии с (10.1) и (10.2) дисперсионная характеристика ЗС определяется зависимостью поверхностного сопротивления от частоты. Поэтому выражение (10.2) и аналогичные соотношения для гибридных и Н-волн могут использоваться для анализа и синтеза замедляющих систем.

Поверхности, обладающие ненулевыми сопротивлениями $Z_{s\parallel}$ и (или) $Z_{s\perp}$, называют *импедансными*. Как показано в § 9.2 и 9.3, напряженность поля медленной волны уменьшается по мере удаления от таких поверхностей. Скорость убывания поля увеличивается с ростом поперечного волнового числа $\tau$ и, согласно выражению (10.1), с увеличением частоты и замедления поле сильнее «прижимается» к импедансным поверхностям.

В качестве примера рассмотрим плоскую поверхность $x=0$, над которой в направлении оси $z$ распространяется медленная Е-волна. Ее электромагнитное поле определяется мембранной функцией

$$\psi=\dot{A}e^{-\tau x} \qquad (10.3)$$

(считаем, что волна однородна по координате $y$).

Составляющие электромагнитного поля вычислим по формулам (6.1), (6.2):

$$\begin{aligned}\dot{E}_x&=i\beta\tau\dot{A}e^{-\tau x}e^{-i\beta z};\\ \dot{E}_z&=-\tau^2\dot{A}e^{-\tau x}e^{-i\beta z};\\ \dot{H}_y&=i\omega\varepsilon\tau\dot{A}e^{-\tau x}e^{-i\beta z}.\end{aligned} \qquad (10.4)$$

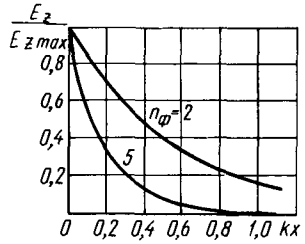



Рис. 10.1. Распределение поля медленной волны в поперечном сечении линии передачи

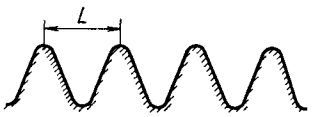



Рис. 10.2. Гофрированная металлическая поверхность

Зависимость продольной составляющей электрического поля этой волны от нормированного расстояния до импедансной плоскости показана на рис. 10.1.

Как следует из этих выражений, плоскость, направляющая волну, должна обладать продольным поверхностным сопротивлением

$$Z_{s\parallel}=\mathrm{i}X_{s\parallel}=\dot{E}_z(0)/\dot{H}_y(0)=\mathrm{i}Z_0\tau/k=\mathrm{i}Z_0\sqrt{n_\Phi^2-1},$$

что согласуется со сделанным ранее выводом.

Замедление, соответствующее данному значению поверхностного сопротивления, можно вычислить по формуле

$$n_\Phi^2=\left[\left(\frac{X_{s\parallel}}{Z_0}\right)^2+1\right]^{1/2}.$$

Характеристическое сопротивление медленной Е-волны

$$Z_c^e=E_x/H_y=Z_0\beta/k=Z_0n_\Phi$$

в $n_\Phi$ раз больше, чем Т-волны. При больших замедлениях амплитуда напряженности магнитного поля уменьшается настолько, что ею при расчете электрического поля можно пренебречь и вычислять последнее методами квазистатики.

Поверхностное сопротивление гладкого металлического проводника в СВЧ-диапазоне практически равно нулю. Поэтому в линии передачи, образованной такими проводниками, распространение медленных волн невозможно. Для создания замедляющих систем используются гофрированные (ребристые) металлические поверхности (рис. 10.2). На уровне вершин гофра среднее значение продольной составляющей электрического поля отлично от нуля. Если длина замедленной волны $\lambda_g$ много больше расстояния между выступами гофра $L$, то волна как бы «не чувствует» отдельных выступов и впадин (неоднородностей) и распространяется вдоль такой гофрированной структуры, как вдоль гладкой импедансной поверхности. Другое качественное объяснение замедления волн гофрированными металлическими поверхностями заключается в том, что парциальная волна, распространяясь со скоростью света вдоль изгибов гофрированной поверхности, по оси $z$ движется с меньшей скоростью. Естественно, что такое объяснение мало пригодно для количественных оценок.

## § 10.2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ГАРМОНИКИ

Как отмечалось ранее, если расстояние между выступами гофра $L$ много меньше длины волны $\lambda_g$, то гофрированную поверхность приближенно можно считать гладкой. Если же условие малости не выполняется, то гофрированную поверхность необходимо рассматривать как периодическую структуру.

Общие закономерности распространения волн в периодических структурах определяются *теоремой Флоке*, которая формулируется следующим образом: для данного типа волны электромагнитные поля в поперечных сечениях периодической структуры, отстоящих друг от друга на период, отличаются только фазовым множителем:

$$\dot{\mathbf{E}}(x_1,\ x_2,\ z+L)=\dot{\mathbf{E}}(x_1,\ x_2,\ z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi};$$
$$\dot{\mathbf{H}}(x_1,\ x_2,\ z+L)=\dot{\mathbf{H}}(x_1,\ x_2,\ z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}, \tag{10.5}$$

где $x_1$, $x_2$ — координаты точки поперечного сечения; $L$ — период структуры, равный минимальному расстоянию, при перемещении на которое она совмещается сама с собой; $\varphi$ — сдвиг фазы в сечениях, отстоящих друг от друга на один период.

В общем случае $\varphi=\varphi'-\mathrm{i}\varphi''$ — комплексная величина, причем действительная ее часть, как следует из (10.5), определяет сдвиг фазы поля в периодической структуре, а мнимая — изменение его амплитуды. Согласно теореме Флоке, все возможные значения угла $\varphi'$ лежат в интервале $[-\pi,\ \pi]$, так как функция $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$ имеет период $2\pi$. При положительных значениях угла $\varphi'$ поле в сечении $z+L$ отстает по фазе от поля в сечении $z$, что определяет положительное значение фазовой скорости волны. Отрицательным значениям угла $\varphi'$ соответствует отрицательное значение $v_\Phi$. Поскольку свойства волн с противоположными направлениями фазовых скоростей одинаковы, достаточно рассмотреть значения угла $\varphi'$, заключенные в интервале $[0,\ \pi]$.

Опишем электромагнитное поле волны, распространяющейся в периодической структуре. В гладкой линии передачи оно определяется продольной составляющей электрического или магнитного вектора Герца (см. § 5.4):

$$\dot{\Gamma}_z(x_1,\ x_2,\ z)=\dot{A}\psi(x_1,\ x_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_z z}.$$

В периодической структуре условия распространения не остаются постоянными, поэтому не только фаза вектора Герца, но и его амплитуда должны зависеть от координаты $z$. Эту зависимость можно учесть, записав вектор Герца в виде

$$\dot{\Gamma}_z(x_1,\ x_2,\ z)=\dot{\Phi}(x_1,\ x_2,\ z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{z0}z}. \tag{10.6}$$

Подставив это выражение в (10.5), найдем, что оно удовлетворяет теореме Флоке, если

$$\dot{\Phi}(x_1,\ x_2,\ z+L)=\dot{\Phi}(x_1,\ x_2,\ z); \tag{10.7}$$

$$k_{z0}=\varphi/L, \tag{10.8}$$

т. е. если $\dot{\Phi}(x_1,\ x_2,\ z)$ — периодическая функция координаты $z$. При наличии затухания $k_{z0}=\beta_0-i\alpha$ — комплексная величина, причем $\beta_0=\varphi'/L$; $\alpha=\varphi''/L$. В этом случае $\Gamma_z=\dot{\Phi}e^{-\alpha z}e^{-i\beta_0 z}$, т. е. периодическая функция $\dot{\Phi}$ определяет незатухающую амплитуду поля: $\dot{\Phi}=\Gamma_z e^{\alpha z}e^{i\beta_0 z}$.

Разложим периодическую функцию $\dot{\Phi}$ в ряд Фурье:

$$\dot{\Phi}(x_1,\ x_2,\ z)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\psi_p(x_1,\ x_2)e^{-i\frac{2\pi p}{L}z}. \tag{10.9}$$

Подставив выражение (10.9) в (10.6), получим

$$\dot{\Gamma}_z(x_1,\ x_2,\ z)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\psi_p(x_1,\ x_2)e^{-ik_{zp}z}, \tag{10.10}$$

где

$$k_{zp}=\beta_p-i\alpha=(\varphi'+2\pi p)/L-i\varphi''/L. \tag{10.11}$$

Каждый член разложения (10.10) описывает плоскую волну с независящей от $z$ амплитудой и постоянной распространения $k_{zp}$. Подставив соотношение (10.10) в (5.12), нетрудно убедиться, что каждая из функций $\psi_p(x_1,\ x_2)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\nabla_\perp^2\psi_p+k_{\text{ср}}^2\psi_p=0, \tag{10.12}$$

где

$$k_{\text{ср}}=(k^2-k_{zp}^2)^{1/2}. \tag{10.13}$$

Электромагнитное поле Е-волны описывается выражениями (4.10), (4.11). Подставив в них разложение (10.10), найдем

$$\dot{\mathbf{E}}=\sum_{p=-\infty}^{\infty}(-ik_{zp}\nabla_\perp\psi_p+k_{\text{ср}}^2\psi_p\mathbf{e}_z)e^{-ik_{zp}z}; \tag{10.14}$$

$$\dot{\mathbf{H}}=i\omega\varepsilon\sum_{p=-\infty}^{\infty}[\nabla_\perp,\ \psi_p\mathbf{e}_z]e^{-ik_{zp}z}. \tag{10.15}$$

Так как функции $\psi_p$ определяются из уравнений (10.12) с точностью до постоянного множителя, необходимо вывести соотношения, связывающие относительные значения этих множителей. Для этого выберем некоторую точку поперечного сечения с координатами $x_{10}$, $x_{20}$, в которой вид функции $\dot{\Phi}$ известен, и вычислим для нее коэффициенты разложения в ряд Фурье:

$$\dot{A}_p=\frac{1}{L}\int_0^L\dot{\Phi}(x_{10},\ x_{20},\ z)e^{i\frac{2\pi p}{L}z}dz. \tag{10.16}$$

Тогда нормированные функции распределения поля принимают вид

$$\psi_p^{\text{н}}(x_1,\ x_2)=\dot{A}_p\frac{\psi_p(x_1,\ x_2)}{\psi_p(x_{10},\ x_{20})}.$$

Выражения (10.10)—(10.15) показывают, что электромагнитное поле волны в периодической структуре можно представить в виде суперпозиции плоских электромагнитных волн, имеющих одинаковые постоянные затухания $\alpha_p=\alpha=\varphi''/L$ и разные фазовые скорости:

$$\boxed{v_{\text{ф}p}=\frac{\omega}{\beta_p}=\frac{\omega L}{\varphi'+2\pi p}.} \qquad (10.17)$$

Эти волны называют *пространственными гармониками*. Поле каждой гармоники удовлетворяет уравнениям Максвелла на частоте $\omega$ и граничным условиям на гладких металлических проводниках, но не удовлетворяет условиям на гофрированных поверхностях. Эти условия выполняются только для всей совокупности пространственных гармоник. Амплитуды отдельных гармоник определяются выражением (10.16), которое с помощью соотношений (10.6) и (10.11) преобразуется к виду

$$\dot{A}_p=\frac{1}{L_0}\int_0^L\dot{\Gamma}_z(x_{10},\ x_{20},\ z)\,\mathrm{e}^{k_{zp}z}\,\mathrm{d}z. \qquad (10.18)$$

Здесь в качестве $x_{10}$ и $x_{20}$ удобно задавать координаты импедансной поверхности, на которой известна зависимость $\dot{\Gamma}_z(z)$.

Из выражения (10.17) следует, что фазовые скорости пространственных гармоник различны как по значению, так и по направлению. Если рассматривать падающую волну $(0\leqslant\varphi'\leqslant\pi)$, то наибольшую по абсолютному значению фазовую скорость имеет нулевая пространственная гармоника, которая называется *основной*. Фазовые скорости гармоник с $p\geqslant 0$ положительны, а фазовые скорости гармоник с $p<0$ отрицательны.

Групповые скорости всех гармоник

$$v_{\text{гр}p}=\left(\frac{\mathrm{d}\beta_p}{\mathrm{d}\omega}\right)^{-1}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\beta_0+\frac{2\pi p}{L}\right)\right]^{-1}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\beta_0}=v_{\text{гр}0}$$

одинаковы и равны групповой скорости основной гармоники, так как групповая скорость равна скорости переноса энергии в замедляющей системе. Таким образом, у одних пространственных гармоник направления фазовой и групповой скоростей совпадают, а у других — они противоположны. В первом случае пространственные гармоники называют *прямыми*, во втором — *обратными*.

Распределение поля каждой пространственной гармоники в поперечном сечении периодической структуры зависит от функций $\psi_p$. Если фазовая скорость гармоники на данной частоте меньше скорости света в среде, заполняющей структуру, то $k_{cp}=i\tau_p$ — мнимая величина, и решение уравнения (10.12) описывает поверхностную волну, «прижимающуюся» к импедансной поверхности тем сильнее, чем больше замедление. Как следует из (10.17), замедление увеличивается с ростом абсолютного значения номера гармоники $p$.

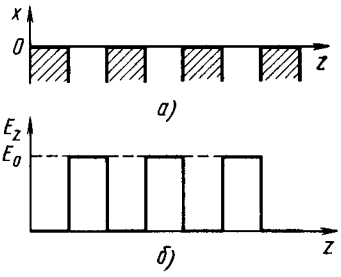



Рис. 10.3. Импедансная поверхность с пазами (*а*) и распределение электрического поля на поверхности зубцов (*б*)

Проиллюстрируем изложенное на конкретном примере. Пусть импедансная поверхность образована металлической плоскостью $x=0$ с прорезанными в ней пазами (рис. 10.3, *а*). Электромагнитное поле каждой пространственной гармоники Е-волны, распространяющейся над структурой в направлении оси $z$, определяется функцией $\psi_p$, имеющей вид (10.3):

$$\psi_p=\dot{A}_p e^{-\tau_p x} \tag{10.19}$$

(полагаем, что вариации поля по оси $y$ отсутствуют).

Для нахождения коэффициентов $A_p$ воспользуемся граничными условиями. На поверхности выступа касательная к нему, составляющая электрического поля $E_z=0$. Предположим, что между выступами на линии $x=0$ составляющая поля $E_z$, постоянна по амплитуде и фазе и равна $E_0$. Такая аппроксимация справедлива, если кромки выступов закруглены. Таким образом,

$$\dot{E}_z(0, z)=\begin{cases}E_0 e^{-in\varphi}, & |z-nL|\leqslant d/2;\\ 0, & d/2\leqslant|z-nL|\leqslant L/2.\end{cases} \tag{10.20}$$

График функции $|E_z(0, z)|$ показан на рис. 10.3, *б*, где $d$ — ширина паза, $L$ — период ЗС.

Подставив выражение (10.19) в (10.14), получим

$$\dot{E}_z(x, z)=-\sum_{p=-\infty}^{\infty}\tau_p^2\psi_p(x)e^{-i\beta_p z}. \tag{10.21}$$

Сравнив это выражение с (10.10), видим, что значение $-\tau_p^2\psi_p$ можно определить по формуле (10.18), подставив в нее вместо $\Gamma_z$ значение $\dot{E}_z(0, z)$:

$$-\tau_p^2\psi_p(0)=\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\dot{E}_z(0, z)e^{i\beta_p z}dz.$$

Учитывая (10.10) и (10.20) и обозначив $-\tau_p^2\dot{A}_p=\dot{B}_p$, найдем

$$\dot{B}_p=\frac{1}{L}\int_{-d/2}^{d/2}E_0 e^{i\beta_p z}dz=\frac{d}{L}M_p E_0,$$

где $M_p=\sin(\beta_p d/2)/(\beta_p d/2)$ — амплитудный коэффициент гармоники, называемый *коэффициентом формы системы*.

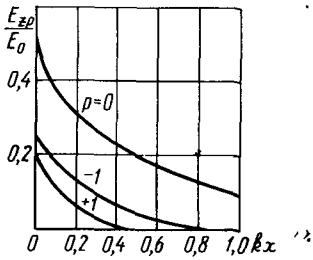



Рис. 10.4. Распределение электрического поля пространственных гармоник над импедансной поверхностью

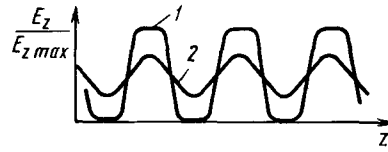



Рис. 10.5. Распределение электрического поля над импедансной поверхностью:
*1* — $kx=0{,}2$; *2* — $kx=0{,}6$

Электромагнитное поле пространственных гармоник медленной волны вычисляется по формулам (10.14), (10.15):

$$\dot{E}_{xp}=-\frac{i\beta_p}{\tau_p}\frac{d}{L}M_pE_0e^{-\tau_p x}e^{-i\beta_p z};$$

$$\dot{E}_{zp}=\frac{d}{L}M_pE_0e^{-\tau_p x}e^{-i\beta_p z};$$

$$\dot{H}_{yp}=-\frac{ik}{Z_0\tau_p}\frac{d}{L}M_pE_0e^{-\tau_p x}e^{-i\beta_p z}.$$

Зависимость $E_{zp}$ от координаты $x$ для $\varphi=\pi/2$ и замедления основной пространственной гармоники $n_{\phi 0}=2$ показана на рис. 10.4 (отношение $d/L=0{,}5$).

С ростом абсолютного значения номера гармоники уменьшается ее амплитудный коэффициент и увеличивается скорость убывания поля по мере удаления от поверхности структуры. На достаточно больших расстояниях ($x>5/|\tau_0|$) в поле медленной волны достаточно учитывать только основную пространственную гармонику. Этот вывод подтверждается графиками зависимости суммарного поля $E_z=\sum_{p=-\infty}^{\infty}E_{zp}$ от координаты $z$, построенными для различных значений $x$ (рис. 10.5).

## § 10.3. ХАРАКТЕРИСТИКИ И ПАРАМЕТРЫ ЗАМЕДЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

Наиболее существенные свойства замедляющей системы отражаются ее дисперсионной характеристикой, позволяющей найти фазовую и групповую скорости любой пространственной гармоники на данной частоте. Дисперсионные характеристики ЗС имеют особенности, связанные с периодическим изменением свойств системы вдоль координаты $z$.

Как и в однородных линиях передачи, в периодических структурах возможно распространение бесконечно большого числа типов волн, отличающихся распределением поля в поперечном сечении структуры. Поле каждого типа волны представляют в виде суммы бесконечного числа пространственных гармоник. Характерной особенностью периодических структур является наличие у каждого типа волны двух частот отсечки — нижней $\omega_н$ и верхней $\omega_в$, соответствующих значениям фазового сдвига $\varphi'=0$ и $\pi$ (или $\pi$ и 0, если зависимость $\omega=\omega(\varphi')$ — убывающая функция). Действительно, процесс распространения волны в периодической структуре можно рассматривать как процесс последовательного ее отражения от неоднородностей (рис. 10.6). Если сдвиг фазы волны на период структуры равен 0 или $\pi$, то волны, отраженные от всех неоднородностей, оказываются в фазе, в результате чего волна полностью отражается и распространение ее в структуре становится невозможным.

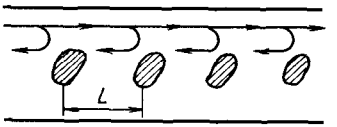


*Рис. 10.6.* Распространение волны в периодической структуре

Интервал между частотами отсечки, в котором $\varphi'$ плавно меняется от 0 до $\pi$ (или от $\pi$ до 0), а волна распространяется с небольшим затуханием, обусловленным активными потерями, называется *полосой пропускания* (прозрачности). Вне этого интервала сдвиг фазы $\varphi'$ имеет постоянное значение, равное 0 или $\pi$, а затухание, обусловленное в основном отражением энергии от структуры, быстро увеличивается по мере удаления от границы полосы пропускания. Заметим, что полосы пропускания, соответствующие различным типам волн в периодической структуре, могут частично или полностью перекрываться.

Для построения дисперсионной характеристики периодической структуры необходимо в каждой полосе пропускания знать зависимость $\omega=\omega(\varphi')$ или $k=k(\varphi')$. Эта зависимость определяется с помощью расчетов или экспериментов. С помощью соотношений (10.1) и (10.11) строятся дисперсионные характеристики в координатах $\beta$, $k$ или $\lambda$, $n_ф$. Пример такого построения для двух полос пропускания показан на рис. 10.7. Отдельные ветви дисперсионных кривых в каждой полосе пропускания соответствуют различным пространственным гармоникам. Все они имеют одинаковые групповые, но различные фазовые скорости. Обычно при построении дисперсионных характеристик фазовые скорости всех пространственных гармоник полагают положительными (пунктир на рис. 10.7). В этом случае групповые скорости гармоник с $p\geqslant 0$ и $p<0$ имеют разные знаки.

Периодические структуры различаются по типу дисперсии основной пространственной гармоники. Так, на рис. 10.7 в основной полосе пропускания дисперсия положительна, а в высшей — отрицательна. В последнем случае для нумерации

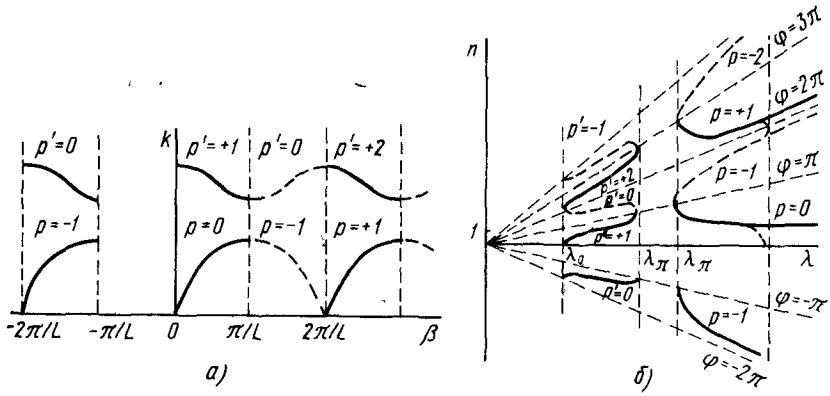



Рис. 10.7. Дисперсионные характеристики периодической структуры: *а* — в координатах $k$, $\beta$; *б* — в координатах $n$, $\lambda$

гармоник обычно используют индекс $p'=p+1$. При такой нумерации основная гармоника $(p'=0)$ имеет положительную дисперсию.

Нижняя (длинноволновая) частота отсечки основной полосы пропускания структуры, характеристика которой изображена на рис. 10.7, *а*, равна нулю. Это характерно для открытых (незамкнутых в одном из поперечных направлений) структур. Такие системы относятся к многосвязным линиям передачи и способны передавать постоянный ток. На низких частотах, когда длина волны много больше глубины гофра, последний оказывает слабое влияние на распространение волны, замедление которой близко к единице, а структура поля — к структуре Т-волны. По мере роста частоты влияние гофра увеличивается и замедление возрастает.

В односвязных (закрытых) периодических структурах нижняя частота отсечки основной полосы пропускания больше нуля (штрихпунктир на рис. 10.7, *б*). На низких частотах, когда неоднородности мало влияют на распространение волны, такая структура работает как гладкий волновод, в котором распространяются быстрые волны. По мере увеличения частоты влияние неоднородностей растет и быстрая волна превращается в медленную.

Свойства замедляющей системы наряду с дисперсионной характеристикой определяются и рядом других параметров. К наиболее важным из них относятся:

*относительная ширина полосы пропускания*

$$\delta_\omega = \frac{2(\omega_в - \omega_н)}{(\omega_в + \omega_н)}; \qquad (10.22)$$

*крутизна дисперсионной характеристики данной пространственной гармоники* (параметр дисперсии)

$$\varkappa_p = \frac{\lambda}{n_{\phi p}} \frac{\mathrm{d}n_{\phi p}}{\mathrm{d}\lambda}; \tag{10.23}$$

*сопротивление связи p-й* пространственной гармоники

$$R_{\text{ср}} = \frac{|\dot{E}_{zp}|^2}{2\beta_p^2 P}, \tag{10.24}$$

где $P$ — поток энергии в замедляющей системе. Сопротивление связи является функцией поперечных координат и характеризует эффективность взаимодействия электромагнитного поля системы с потоком заряженных частиц. Так как на границах полосы пропускания передаваемая мощность равна нулю, сопротивление связи в этих точках обращается в бесконечность;

*затухание*, определяемое, как и в обычных линиях передачи, через мощность потерь в стенках ЗС (дБ/м)

$$A = 4{,}34 \frac{P_L}{LP}, \tag{10.25}$$

где $P_L$ — мощность, рассеиваемая в одном периоде ЗС;

*волновое сопротивление*

$$Z_{\text{в}} = \frac{\left| \int_1^2 \dot{\mathbf{E}}_\perp \mathrm{d}\mathbf{l} \right|^2}{2P}, \tag{10.26}$$

где криволинейный интеграл вычисляется между заранее определенными точками на проводящих поверхностях по линии, лежащей в плоскости поперечного сечения системы. Другими факторами, которые необходимо учитывать при выборе ЗС для конкретного применения, являются максимальная передаваемая мощность, наличие «паразитных» полос пропускания, расположенных близко по частоте к рабочей полосе, теплорассеивающая способность системы, ее габариты, технологичность конструкции, чувствительность характеристик и параметров к погрешностям изготовления и т. п.

## § 10.4. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ЗАМЕДЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

Тип замедляющей системы определяется в основном способом реализации импедансной поверхности. В соответствии с этим различают гребенчатые, спиральные, стержневые, резонаторные и некоторые другие типы ЗС [7].

В гребенчатых системах импедансная поверхность образуется с помощью пазов, прорезанных в проводниках ЗС перпендикулярно направлению распространения волны. Некоторые разновидности ЗС гребенчатого типа показаны на рис. 10.8. Это плоская гребенка (рис. 10.8, *а*), экранированная плоская гребенка (рис. 10.8, *б*), двусторонняя плоская гребенка

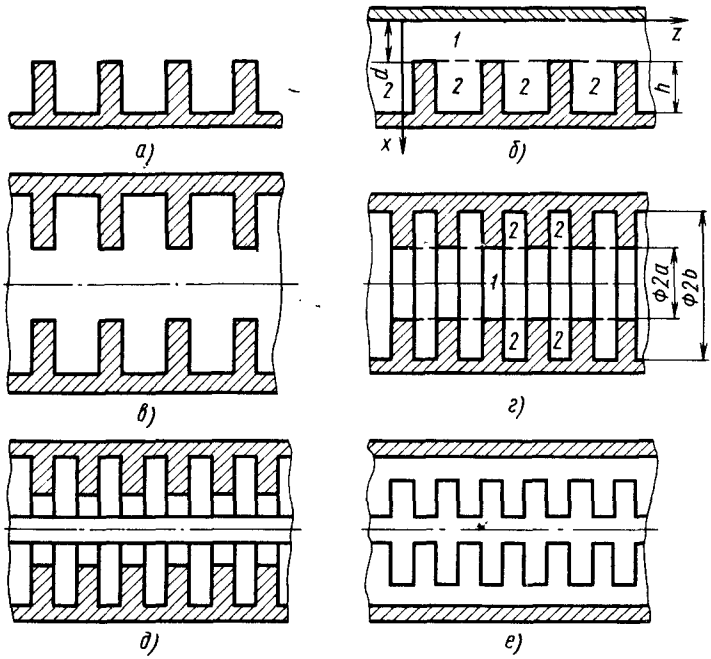



Рис. 10.8. Типы гребенчатых ЗС

(рис. 10.8, *в*). К гребенчатым ЗС с осевой симметрией относятся круглый диафрагмированный волновод (КДВ), изображенный на рис. 10.8, *г*; коаксиальный диафрагмированный волновод с диафрагмами на внешнем (рис. 10.8, *д*) и внутреннем (рис. 10.8, *е*) проводниках, а также ряд других конструкций. Плоские гребенчатые ЗС могут быть не ограничены в направлении оси $y$ (открытые) или ограничены проводящими плоскостями $y=\text{const}$, отстоящими друг от друга на расстоянии $l$ (закрытые). В первом случае такие параметры ЗС, как волновое сопротивление и сопротивление связи, рассчитываются на единицу ее ширины.

Выведем дисперсионное уравнение основного типа Е-волны, поле которой не зависит от координаты $y$, для экранированной плоской гребенки (рис. 10.8, *б*). Для этого воспользуемся широко применяемым для анализа ЗС *методом частичных областей*. Разделим весь объем системы на две частичные области — пространство взаимодействия *1* и пазы *2*. Решение уравнения Гельмгольца в области *1* для функции $\psi_1$ при условии $\partial/\partial y=0$ запишем в виде (9.12):

$$\psi_1 = \dot{A}e^{-\tau x} + \dot{B}e^{\tau x}$$

(наличием пространственных гармоник пренебрегаем). На гладкой металлической поверхности $x=0$ функция $\psi_1$ должна обращаться

в нуль, что дает возможность исключить одну из постоянных интегрирования:

$$\psi_1 = \dot{B}_1 \operatorname{sh} \tau x. \tag{10.27}$$

Рассмотрим электромагнитное поле в области *2* (в пазу ЗС). Если паз достаточно узкий, то можно считать, что поле не зависит от координаты $z\,(k_z=0,\ \zeta=1)$. Так как зависимость поля от координаты $y$ также отсутствует, уравнение Гельмгольца для функции $\psi_2$ принимает вид

$$\psi_2''(x)+k^2\psi_2(x)=0,$$

откуда с учетом граничного условия $\psi_2(d+h)=0$ получим

$$\psi_2=\dot{A}_2\left[-\sin kx+\frac{\sin k(d+h)}{\cos k(d+h)}\cos kx\right]=C\sin k(d+h-x), \tag{10.28}$$

где $C=\dot{A}_2/\cos k(d+h)$.

Для «сшивания» полей на границе раздела областей воспользуемся условиями (6.31), (6.35), предварительно усреднив функцию $\psi_2$ по периоду замедляющей системы. Поскольку на поверхности зубца $\psi_2=0$,

$$\psi_{2cp}=\frac{1}{L}\int_0^L \psi_2(d,\ z)\,\mathrm{d}z=\frac{d}{L}\dot{C}\sin kh.$$

Таким образом,

$$-\tau^2\dot{B}\operatorname{sh}\tau d=k^2(d/L)\dot{C}\sin kh;$$

$$\tau\dot{B}\operatorname{ch}\tau d=-k(d/L)\dot{C}\cos kh.$$

Разделив первое уравнение на второе и помножив левую и правую части на $h$, найдем дисперсионное уравнение гребенки

$$\tau h\operatorname{th}\left(\frac{d}{h}\tau h\right)=kh\operatorname{tg}kh, \tag{10.29}$$

позволяющее для заданного волнового числа $k$ найти поперечное волновое число $\tau$, а следовательно, фазовую постоянную волны

$$\beta=(k^2+\tau^2)^{1/2}=k\left[1+(\tau/k)^2\right]^{1/2}$$

и коэффициент замедления фазовой скорости

$$n_\Phi=\beta/k=\left[1+(\tau/k)^2\right]^{1/2}.$$

Дисперсионные характеристики основного типа волны в плоской гребенке, построенные по уравнению (10.29), показаны на рис. 10.9. Ее нижняя частота

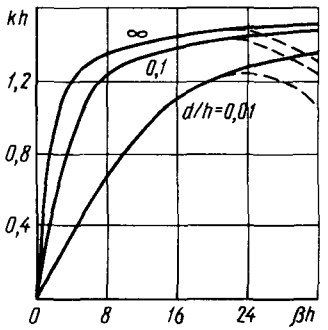



Рис. 10.9. Дисперсионные характеристики экранированной гребенчатой ЗС

отсечки равна нулю, что характерно для открытых систем, а верхняя определяется из условия $kh=2\pi h/\lambda=\pi/2$, т. е. на верхней частоте отсечки глубина паза равна четверти длины волны в свободном пространстве. На низких частотах $(kh\ll 1)$ тангенсы в (10.29) можно заменить их аргументами, откуда следует, что $n_\phi=1+h/d$, т. е. замедленно не зависит от частоты и тем более, чем больше глубина паза. Вблизи частоты отсечки замедление стремится к бесконечности. При этом, однако, нарушается условие $L\ll\lambda_g$ и уравнение (10.29), не учитывающее наличия пространственных гармоник, теряет смысл. Учет этих гармоник приводит к дисперсионным характеристикам, показанным на рис. 10.9 пунктиром.

Для вычисления сопротивления связи гребенки определим мощность, передаваемую в пространстве взаимодействия (на единицу ширины ЗС):

$$P=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_0^d \dot{E}_x\dot{H}_y^*\,\mathrm{d}x.$$

Используя (10.27), а также (6.8)—(6.13), найдем

$$P=0{,}25\omega\varepsilon\beta\tau|\dot{A}|^2(\operatorname{ch}2\tau d-2\tau d).$$

Учтя, что $E_z=-\tau^2\psi_1=-\tau^2\dot{A}\operatorname{sh}\tau x$, получим

$$R_c=\frac{|\dot{E}_z|^2}{2\beta^2P}=Z_0\frac{2\tau^3\operatorname{sh}^2\tau x}{\beta^3k(\operatorname{sh}2\tau d-2\tau d)}.$$

Это выражение, так же как и предыдущие, не учитывает наличия пространственных гармоник и высокочастотной отсечки.

Анализ распространения электромагнитных волн в плоских гребенчатых ЗС конечной ширины (закрытых) более сложен, так как электромагнитное поле зависит от координаты $y$. В этом случае в системе могут распространяться только гибридные волны (см. § 6.3) и для вывода дисперсионного уравнения необходимо использовать все граничные условия (6.31)—(6.34). Соответствующие расчеты показывают, что для волны основного ЕН-типа приближенное дисперсионное уравнение (10.29) остается справедливым, если заменить в нем волновое число $k$ на $k_c=\left(k^2-\pi^2/l^2\right)^{1/2}$.

Анализ распространения электромагнитных волн в круглом диафрагмированном волноводе (рис. 10.8, *г*) производится аналогичным образом. Функцию $\psi_1$ в пространстве взаимодействия *1* для азимутально-однородной Е-волны запишем следующим образом:

$$\psi_1=AF_0(x);\quad F_0=\begin{cases}J_0(x), & x=k_cr,\ k^2-\beta^2\geqslant 0;\\ I_0(x), & x=\tau r,\ k^2-\beta^2<0.\end{cases}\qquad(10.30)$$

Электромагнитное поле в области 2 (между диафрагмами) рассматриваем как поле стоячей Т-волны в радиальной линии (см. § 8.3):

$$\psi_2 = C[J_0(kr)N_0(kb) - J_0(kb)N_0(kr)].$$

Усреднив функцию $\psi_2$ по периоду ЗС и используя условия (6.31), (6.35) на границе раздела $r=a$, получим дисперсионное уравнение

$$\bar{x}\frac{F_0(\bar{x})}{F'_0(\bar{x})} = \bar{k}\frac{J_0(\bar{k})N_0(\gamma\bar{k}) - N_0(\bar{k})J_0(\gamma\bar{k})}{J_1(\bar{k})N_0(\gamma\bar{k}) - N_1(\bar{k})J_0(\gamma\bar{k})}, \quad (10.31)$$

где $\bar{x}=xa$, $\bar{k}=ka$ — нормированные волновые числа; $\gamma=b/a$; $F'_0(\bar{x})=\mathrm{d}F_0/\mathrm{d}\bar{x}$.

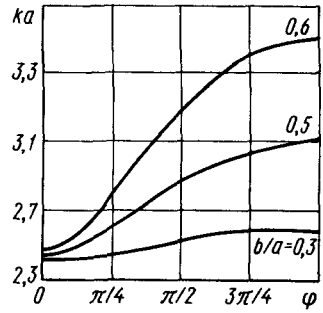



Рис. 10.10. Дисперсионные характеристики круглого диафрагмированного волновода

Дисперсионные характеристики КДВ, построенные по уравнению (10.31) с учетом высших пространственных гармоник, показаны на рис. 10.10. Нижняя частота отсечки основного типа Е-волны приблизительно равна критической частоте волны типа $E_{01}$ в круглом волноводе радиусом $b$. Вблизи этой частоты отсечки в диафрагмированном волноводе распространяются быстрые волны, фазовая скорость которых уменьшается с ростом частоты и при некотором ее значении становится равной скорости света. При дальнейшем увеличении частоты быстрая волна превращается в медленную. Распределение продольной составляющей электрического поля волны в поперечном сечении для трех значений фазовой скорости ($v_ф > c$, $v_ф = c$ и $v_ф < c$) показано на рис. 10.11.

Гребенчатые ЗС отличаются простой, жесткой конструкцией, имеют высокую теплорассеивающую способность, что позволяет применять их во всем СВЧ-диапазоне, включая миллиметровый. К недостаткам таких ЗС, особенно закрытых, относится сильная

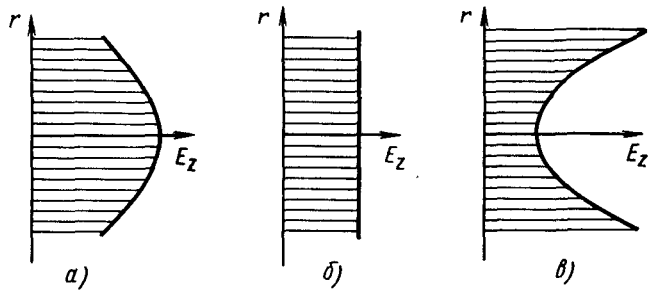



Рис. 10.11. Распределение продольной составляющей электрического поля в пролетном канале КДВ:
$а$ — $n_ф<1$; $б$ — $n_ф=1$; $в$ — $n_ф>1$

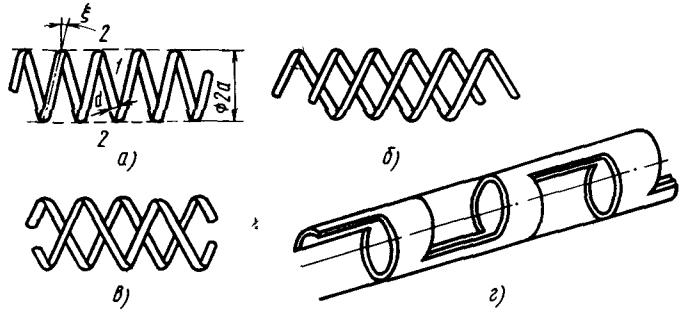



Рис. 10.12. Типы спиральных ЗС

дисперсия, ограничивающая рабочую полосу частот приборов и устройств, в которых эти системы применяются.

Импедансная поверхность *спиральных ЗС* образована тонким металлическим проводником, свернутым в спираль, как правило, круглого поперечного сечения (рис. 10.12, *а*). Спиральных проводников может быть несколько (многозаходная спираль) с одинаковыми (рис. 10.12, *б*) или встречными (рис. 10.12, *в*) направлениями навивки. Разновидностью спиральной ЗС со встречной навивкой является система типа «кольцо — стержень» (рис. 10.12, *г*), отличающаяся более жесткой и технологичной конструкцией. Обычно спираль размещается в металлическом экране и фиксируется в нем с помощью диэлектрических держателей (опор) различной конфигурации.

Проведем анализ распространения электромагнитных волн в простейшей спиральной ЗС — открытой спирали (рис. 10.12, *а*), воспользовавшись моделью анизотропно-проводящего цилиндра, в соответствии с которой спираль заменяется сплошной гладкой цилиндрической поверхностью, проводящий ток только в направлении навивки проводника. Такое приближение справедливо, если диаметр проводника $d$ и шаг спирали $L$ много меньше длины волны. Поскольку у анизотропно-проводящего цилиндра отличны от нуля как продольное, так и поперечное поверхностное сопротивление, в спиральной ЗС могут распространяться только гибридные волны.

Опишем электромагнитное поле волны в свободной спирали с помощью метода частичных областей. Поле в области *1* ($r \leqslant a$) определяется функциями $\psi_1^e = \dot{A}^e I_n(\tau r)\cos n\theta$ и $\psi_1^m = \dot{A}^m I_n(\tau r)\sin n\theta$:

$$\dot{E}_{1r} = \left[ -i\beta\tau \dot{A}^e I_n'(\tau r) - i\frac{n\omega\mu}{r}\dot{A}^m I_n(\tau r) \right]\cos n\theta;$$

$$\dot{E}_{1\theta} = \left[ -\frac{n\beta}{r}\dot{A}^e I_n(\tau r) + i\omega\mu\tau \dot{A}^m I_n'(\tau r) \right]\sin n\theta;$$

$$\dot{E}_{1z} = -\tau^2 \dot{A}^e I_n(\tau r)\cos n\theta;$$

$$\dot{H}_{1r} = \left[ -\frac{i\omega\varepsilon n}{r}\dot{A}^e I_n(\tau r) - i\beta\tau \dot{A}^m I_n'(\tau r) \right]\sin n\theta;$$

$$\dot{H}_{1\theta}=\left[\mathrm{i}\omega\varepsilon\tau\dot{A}^{e}I_n'(\tau r)-\frac{\mathrm{i}\beta n}{r}\dot{A}^{m}I_n(\tau r)\right]\cos n\theta;$$

$$\dot{H}_{1z}=-\tau^2\dot{A}^{m}I_n(\tau r)\sin n\theta.$$

Аналогичные выражения характеризуют электромагнитное поле в области 2 $(r>a)$:

$$\dot{E}_{2r}=\left[-\mathrm{i}\beta\tau\dot{B}^{e}K_n'(\tau r)-\mathrm{i}\frac{n\omega\mu}{r}\dot{B}^{m}K_n(\tau r)\right]\cos n\theta;$$

$$\dot{E}_{2\theta}=\left[-\frac{\beta n}{r}\dot{B}^{e}K_n(\tau r)+\mathrm{i}\omega\mu\tau\dot{B}^{m}K_n'(\tau r)\right]\sin n\theta;$$

$$\dot{E}_{2z}=-\tau^2\dot{B}^{e}K_n(\tau r)\cos n\theta;$$

$$\dot{H}_{2r}=\left[-\frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon n}{r}\dot{B}^{e}K_n(\tau r)-\mathrm{i}\beta\tau\dot{B}^{m}K_n'(\tau r)\right]\sin n\theta;$$

$$\dot{H}_{2\theta}=\left[\mathrm{i}\omega\varepsilon\tau\dot{B}^{e}K_n'(\tau r)-\frac{\mathrm{i}\beta n}{r}\dot{B}^{m}K_n(\tau r)\right]\cos n\theta;$$

$$\dot{H}_{2z}=-\tau^2\dot{B}^{m}K_n(\tau r)\sin n\theta.$$

Функции $I_n(x)$ и $K_n(x)$ в первой и второй областях выбраны из условия конечности поля на оси ЗС и на бесконечно большом расстоянии от нее.

На поверхности анизотропно-проводящего цилиндра составляющая электрического поля, параллельная виткам спирали, должна обращаться в нуль:

$$\dot{E}_{1z}(a)\sin\xi+\dot{E}_{1\theta}(a)\cos\xi=0;$$

$$\dot{E}_{2z}(a)\sin\xi+\dot{E}_{2\theta}(a)\cos\xi=0,$$

где $\xi$ — угол навивки спирали.

Составляющие электрического поля, перпендикулярные виткам спирали, и составляющие магнитного поля, параллельные ее виткам, должны быть непрерывны на поверхности цилиндра [см. (2.28)]:

$$\dot{E}_{1z}(a)\cos\xi-\dot{E}_{1\theta}(a)\sin\xi=\dot{E}_{2z}(a)\cos\xi-\dot{E}_{2\theta}(a)\sin\xi;$$

$$\dot{H}_{1z}(a)\sin\xi+\dot{H}_{1\theta}(a)\cos\xi=\dot{H}_{2z}(a)\sin\xi+\dot{H}_{2\theta}(a)\cos\xi.$$

Подставив в эти формулы выражения для электромагнитного поля, получим систему однородных линейных уравнений относительно коэффициентов $\dot{A}^{e}$, $\dot{A}^{m}$, $\dot{B}^{e}$, $\dot{B}^{m}$. Ненулевые решения этой системы возможны при равенстве ее определителя нулю [7]:

$$\frac{I_n'(\tau a)K_n'(\tau a)}{I_n(\tau a)K_n(\tau a)}+\frac{(\tau^2a^2-n\beta a\operatorname{ctg}\xi)^2}{(ka)^2(\tau a)^2\operatorname{ctg}^2\xi}=0. \tag{10.32}$$

Дисперсионное уравнение (10.32) позволяет для заданного волнового числа $k$ найти значения поперечного волнового числа $\tau$, соответствующие различным типам волн в спиральной ЗС. Наибольший интерес представляет азимутально-однородная волна $(n=0)$, имеющая отличную от нуля продольную составляющую электрического поля на оси ЗС. Для этой волны дисперсионное уравнение принимает вид

$$(ka)^2\operatorname{ctg}^2\xi=(\tau a)^2\frac{I_0(\tau a)K_0(\tau a)}{I_1(\tau a)K_1(\tau a)}. \tag{10.33}$$

При $\tau a\gg 1$ значение дроби в (10.33) приближается к единице. В этом случае справедливо приближенное уравнение $ka\operatorname{ctg}\xi=\tau a$, в соответствии с которым замедление фазовой скорости

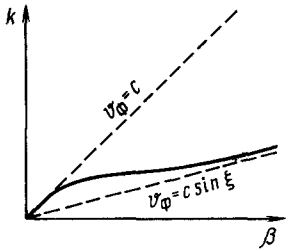



Рис. 10.13. Дисперсионная характеристика спиральной ЗС

$$n_\phi = \frac{\beta}{k} = \sqrt{1 + \left(\frac{\tau a}{ka}\right)^2} = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \xi} = \frac{1}{\sin \xi}.$$

Полученный результат можно объяснить тем, что вдоль проводника спирали со скоростью света в данной среде распространяется Т-волна. Тогда скорость ее перемещения вдоль оси системы

$$v_z = c \frac{L}{\sqrt{L^2 + (2\pi a)^2}} = c \sin \xi.$$

Таким образом, при больших значениях τ (на больших частотах) замедление фазовой скорости в спирали не зависит от частоты, т. е. дисперсия отсутствует. На более низких частотах фазовая скорость начинает возрастать, стремясь при ω→0 к скорости света (рис. 10.13). На форму дисперсионной характеристики спиральной ЗС существенно влияет наличие внешнего экрана и диэлектрических опор. Подбирая конфигурацию и материал этих элементов конструкции, можно получать желаемую форму дисперсионной характеристики системы.

Слабая дисперсия и незначительное влияние высших пространственных гармоник являются основными достоинствами спиральных ЗС. С их помощью легко получают сравнительно большие замедления $n_\phi = 5 \div 20$. К недостаткам этих систем относятся плохая теплорассеивающая способность, малые поперечные размеры и трудность получения небольших значений замедления, что ограничивает применение спиральных ЗС в мощных и высокочастотных приборах.

Импедансная поверхность *стержневых* ЗС образована тонкими (по сравнению с длиной волны) металлическими стержнями (штырями), расположенными перпендикулярно направлению распространения медленной волны (рис. 10.14, *а*—*в*). Анализ таких систем часто проводится приближенным *методом многопроводных*

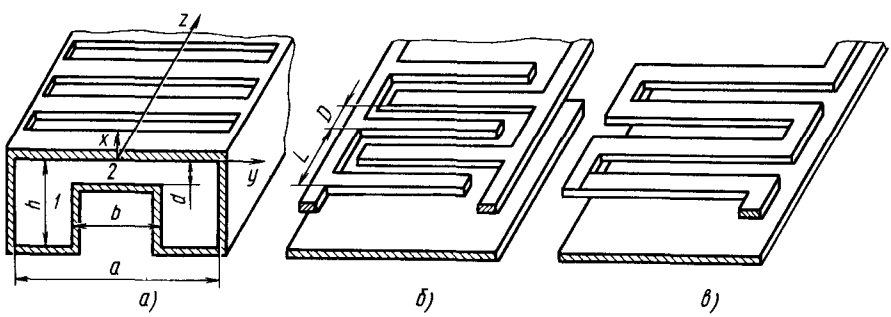



Рис. 10.14. Типы стержневых ЗС:
*а* — лестничная; *б* — встречно-штыревая; *в* — меандровая

*линий* [7], основанным на предположении о том, что вдоль стержней (в направлении оси $y$, рис. 10.14, *а*) распространяются Т-волны. Такое предположение справедливо, если период системы $L \ll \lambda$ и замедление $n_{\Phi} \gg 1$. Оно позволяет рассматривать стержневую ЗС как многопроводную линию передачи (см. § 8.1). Действительно, при больших замедлениях, как показано в § 10.1, электрическое поле распространяющихся вдоль оси $z$ Е-волн в плоскости $xOz$ близко к квазистатическому, т. е. к полю Т-волн в поперечном сечении многопроводной линии передачи.

Выберем экран в качестве опорного проводника, введем напряжения $\dot{U}_m(y)$ и токи $\dot{I}_m(y)$ для каждого стержня ($m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Согласно теореме Флоке,

$$\dot{U}_p(y)=\dot{U}_m(y)\mathrm{e}^{-\imath(p-m)\varphi};\quad \dot{I}_p(y)=\dot{I}_m(y)\mathrm{e}^{-\imath(p-m)\varphi}.$$

Подставив эти соотношения в (8.7) и (8.11), получим уравнения, связывающие напряжение и ток $m$-го стержня:

$$\frac{\mathrm{d}\dot{U}_m}{\mathrm{d}z}=-\imath\omega\dot{I}_m\sum_{n=-\infty}^{\infty}L_n\mathrm{e}^{-\imath n\varphi}; \tag{10.34}$$

$$\frac{\mathrm{d}\dot{I}_m}{\mathrm{d}z}=-\imath\omega\dot{U}_m\left(C_m-\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-\imath n\varphi}\right), \tag{10.35}$$

где $n=p-m$; $L_n=L_{pm}$; $C_n=C_{pm}$.

По формуле эти уравнения аналогичны уравнениям (8.14), что позволяет записать их решение в виде

$$\dot{U}_m=\dot{A}_m\mathrm{e}^{-\imath ky}+\dot{B}_m\mathrm{e}^{\imath ky};$$

$$\dot{I}_m=Y_{\text{в}}(\varphi)(\dot{A}_m\mathrm{e}^{-\imath ky}-\dot{B}_m\mathrm{e}^{\imath ky}),$$

где

$$Y_{\text{в}}(\varphi)=u\left[C_m-\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-\imath n\varphi}\right] \tag{10.36}$$

— волновая проводимость многопроводной линии, зависящая от сдвига фаз напряжения в соседних проводниках $\varphi$.

Рассмотрим отрезок многопроводной линии длиной $h$, к концам которого подключены реактивные сосредоточенные элементы $Y_1$ и $Y_2$ (рис. 10.15):

$$Y_1(\omega)=\frac{\dot{I}_m(0)}{\dot{U}_m(0)}=Y_{\text{в}}(\varphi)\frac{\dot{A}_m-\dot{B}_m}{\dot{A}_m+\dot{B}_m};$$

$$Y_2(\omega)=\frac{\dot{I}_m(h)}{\dot{U}_m(h)}=Y_{\text{в}}(\varphi)\frac{\dot{A}_m\mathrm{e}^{-\imath kh}-\dot{B}_m\mathrm{e}^{\imath kh}}{\dot{A}_m\mathrm{e}^{-\imath kh}+\dot{B}_m\mathrm{e}^{\imath kh}}.$$

Исключив из этих уравнений $A_m$ и $B_m$, найдем

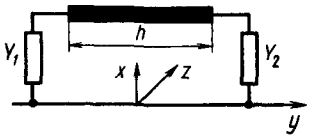



Рис. 10.15. Эквивалентная схема стержневой ЗС

$$Y_2(\omega)=Y_в(\varphi)\frac{Y_1(\omega)+\mathrm{i}Y_в(\varphi)\operatorname{tg}kh}{Y_в(\varphi)+\mathrm{i}Y_1(\omega)\operatorname{tg}kh}. \quad (10.37)$$

Данное уравнение позволяет построить зависимость $\varphi=f(k)$, т. е. дисперсионную характеристику замедляющей системы, если известна ее волновая проводимость или волновое сопротивление $Z_в(\varphi)=1/Y_в(\varphi)$.

Для вычисления волновой проводимости преобразуем выражение (10.36), учитывая, что в периодической системе $C_{-n}=C_n$: $Y_в(\varphi)=u\left(C_m-2\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos n\varphi\right)$.

Учтя соотношение (8.10), окончательно получим

$$Y_в(\varphi)=u\left[C_0-4\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin^2\frac{n\varphi}{2}\right], \quad (10.38)$$

где $C_0=C_{m0}$ — емкость между проводником и экраном.

Так как в многопроводной линии распространяется Т-волна, погонные емкости $C_n$ можно определять методами квазистатики.

Воспользуемся найденными соотношениями, чтобы рассчитать дисперсионную характеристику лестничной замедляющей системы (см. рис. 10.14, *а*). На симметричном типе волны в плоскости симметрии $y=0$ напряженность электрического поля максимальна, а магнитного поля равна нулю. Поэтому достаточно рассмотреть половину ЗС, представив ее эквивалентную схему в виде последовательного соединения двух отрезков многопроводных линий с различными волновыми проводимостями $Y_{в1}(\varphi)$ и $Y_{в2}(\varphi)$ (рис. 10.16), причем проводимости $Y_1=\infty$ (короткое замыкание), $Y_2=0$ (холостой ход).

Применив формулу (10.37), вычислим проводимость в сечении $y=-b/2$ (рис. 10.16):

$$Y_a=-\mathrm{i}Y_{в1}\operatorname{ctg}kl_1,\quad l_1=(a-b)/2.$$

Рассматривая это выражение как граничное условие для второй линии передачи, найдем проводимость в сечении $y=0$, которая должна обращаться в нуль:

$$Y_{в2}\frac{-\mathrm{i}Y_{в1}\operatorname{ctg}kl_1+\mathrm{i}Y_{в2}\operatorname{tg}kl_2}{Y_{в2}+Y_{в1}\operatorname{ctg}kl_1\operatorname{tg}kl_2}=0,\quad l_2=b/2.$$

Таким образом, дисперсионное уравнение лестничной ЗС имеет вид

$$Y_{в1}\operatorname{ctg}kl_1-Y_{в2}\operatorname{tg}kl_2=0.$$

Волновые проводимости $Y_{в1}$ и $Y_{в2}$ отличаются только значениями погонной емкости между стержнем и экраном. Оставив в первом приближении один член суммы (10.38) и считая $l_1=l_2=l$, получим

$$\operatorname{tg}^2kl=\frac{C_{01}-4C_1\sin^2\varphi/2}{C_{02}-4C_1\sin^2\varphi/2}. \quad (10.39)$$

Построенные по этой формуле дисперсионные характеристики для $C_{01}=0$ (экран в области *1* отсутствует) и $C_{02}=0$ (экран в области *2* отсутствует) показаны на рис. 10.17. Наибольшей шириной полосы пропускания обладают системы с выступом в средней части. Нижняя частота отсечки в этом случае

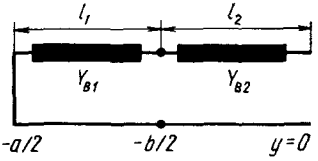



Рис. 10.16. Эквивалентная схема лестничной ЗС

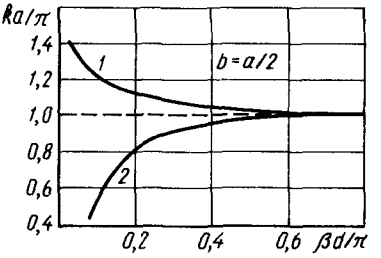



Рис. 10.17. Дисперсионные характеристики лестничной ЗС:
*1* — $h/a=0{,}1$, $d=\infty$; *2* — $d/a=0{,}1$, $h=\infty$

близка к критической частоте П-образного волновода с таким же поперечным сечением, как и замедляющая система, а верхняя определяется из уравнения (10.39).

Интересными свойствами обладают стержневые встречно-штыревые (см. рис. 10.14, *б*) и меандровые (см. рис. 10.14, *в*) ЗС. Период $L$ этих систем включает два полупериода, разделенных зеркальной плоскостью симметрии. Дисперсионные характеристики таких систем имеют две полосы пропускания, соединяющиеся в точке $\varphi=\pi$ и соответствующие симметричным и антисимметричным относительно продольной плоскости симметрии типам волн (рис. 10.18, *а*). Так как при $\varphi>\pi$ симметричные волны превращаются в антисимметричные и наоборот, можно считать, что дисперсионные характеристики этих типов волн пересекаются, а сдвиг фазы определять на полупериод: $\varphi=\beta L/2$ (рис. 10.18, *б*). В системах этих типов наибольшую амплитуду вблизи продольной плоскости симметрии имеет симметричная волна, которая для меандровых ЗС обладает положительной, а для встречно-штыревых — отрицательной дисперсией.

Стержневые ЗС обладают сравнительно хорошими теплорассеивающими свойствами и относительно большими размерами

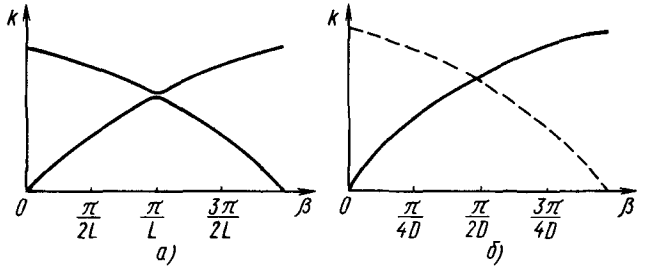



Рис. 10.18. Дисперсионные характеристики встречно-штыревых и меандровых ЗС:
———— симметричная волна; — — — — — — антисимметричная волна

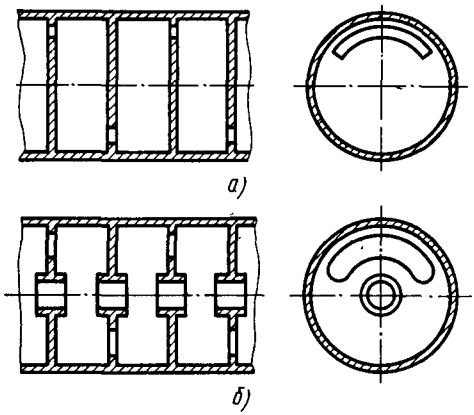



Рис. 10.19. Типы резонаторных ЗС с индуктивными щелями связи:
*а*—с цилиндрическими резонаторами; *б*—с тороидальными

элементов структуры, технологичны в изготовлении. Поэтому они широко используются в электронных приборах средней и большой мощности в широком диапазоне длин волн, включая миллиметровый.

*Резонаторные ЗС* представляют собой последовательность объемных резонаторов — замкнутых металлических полостей, соединенных между собой специальными элементами связи — отверстиями, петлями или штырями (рис. 10.19). К резонаторным можно отнести также гребенчатые ЗС, рассматривая их пазы как резонаторы, а пространство взаимодействия — как элемент связи между ними. Так, круглый диафрагмированный волновод (см. рис. 10.8, *г*) можно представить в виде цепочки цилиндрических резонаторов (отрезков круглого волновода, закрытых металлическими крышками), связанных отверстиями в общих стенках.

Свойства объемных резонаторов подробно рассматриваются в следующей главе. В них могут возбуждаться различные виды колебаний, каждый из которых характеризуется собственной частотой $\omega_j$ и определенным распределением электрического и магнитного полей в объеме резонатора $\dot{\mathbf{E}}_j$, $\dot{\mathbf{H}}_j$, $j=1, 2, \ldots$ .

Электромагнитное поле простейшего вида колебаний типа $E_{010}$ в цилиндрическом резонаторе можно описать выражениями (7.31), если положить в них $m=0$, $n=1$, $k_z=0$. Оно содержит только две составляющие

$$E_z=\dot{A}J_0\left(\frac{\nu_{01}r}{a}\right);\quad H_\theta=\dot{A}\frac{ika}{Z_0\nu_{01}}J_1\left(\frac{\nu_{01}r}{a}\right).$$

Если в ЗС сдвиг фазы на период равен нулю, то векторы электрического поля в соседних резонаторах направлены в одну сторону и отверстие связи практически не искажает поле в резонаторе (рис. 10.20, *а*). Поэтому собственная частота резонатора с отверстиями связи практически совпадает с собственной частотой резонатора без отверстия.

Когда сдвиг фазы между колебаниями в соседних резонаторах равен $\pi$, их электрические поля направлены навстречу друг другу (рис. 10.20, *б*). Вблизи отверстия электрическое поле уменьшается,

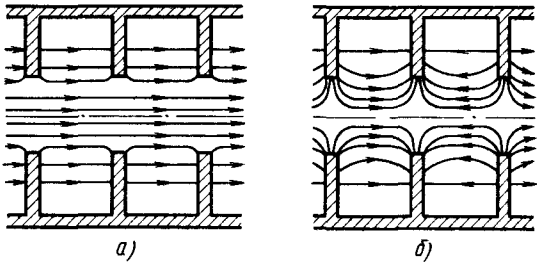



Рис. 10.20. Распределение электрического поля в цепочке резонаторов, связанных через отверстие, на 0- и π-видах колебаний

что приводит к увеличению собственной частоты резонатора (см. гл. 13). В результате дисперсионная характеристика КДВ приобретает вид, показанный на рис. 10.10.

Связь между резонаторами может осуществляться и с помощью щелей, расположенных вблизи цилиндрической оболочки (см. рис. 10.19, *а*). При $\varphi = 0$ токи, протекающие по стенкам диафрагмы, имеют противоположные направления и не возбуждают щель связи (рис. 10.21, *а*). При $\varphi = \pi$ токи в стенках диафрагмы имеют одинаковые направления (рис. 10.21, *б*). Так как линии полного тока непрерывны, в щели связи возбуждается электрическое поле, создающее ток смещения, равный суммарному току, протекающему по стенкам диафрагмы. Появление электрического и связанного с ним магнитного поля щели связи уменьшает собственную частоту резонатора со щелью, в результате чего дисперсионная характеристика системы приобретает вид, показанный на рис. 10.22. Как видно, цепочка резонаторов со щелями связи обладает отрицательной дисперсией.

Полоса пропускания этой ЗС, как правило, шире, чем у КДВ, так как щели обеспечивают бóльшую степень связи. На практике применяют ЗС с резонаторами и щелями сложной формы (см.

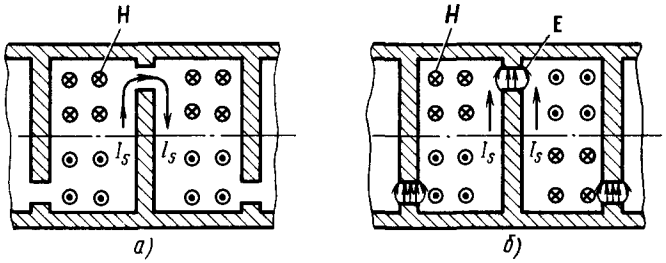



Рис. 10.21. Распределение электромагнитного поля в цепочке резонаторов со щелями связи на 0- и π-видах колебаний

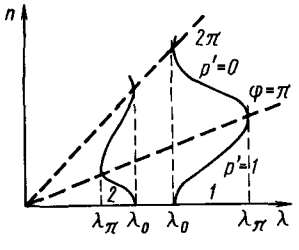



Рис. 10.22. Дисперсионная характеристика цепочки резонаторов со щелями связи в резонаторной (кривая *1*) и щелевой (кривая *2*) полосе пропускания

рис. 10.19, *б*). Такие цепочки связанных резонаторов (ЦСР) имеют высокое сопротивление связи, жесткую, хорошо отводящую тепло конструкцию и поэтому широко используются в мощных электронных приборах СВЧ-диапазона. Ввиду сложной формы резонаторов и щелей связи электромагнитное поле и дисперсионная характеристика ЦСР могут быть рассчитаны только с помощью ЭВМ [8].

Управление формой дисперсионной характеристики резонаторных ЗС может осуществляться с помощью стержней

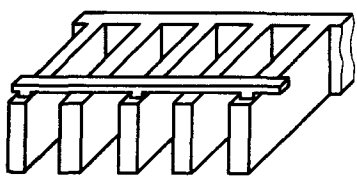


Рис. 10.23. Гребенчатая ЗС со связками

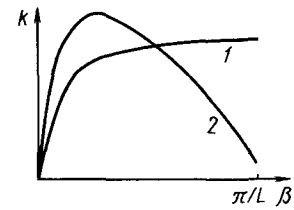



Рис. 10.24. Дисперсионные характеристики гребенчатой ЗС без связок (кривая *1*) и со связками (кривая *2*)

(связок), соединяющих несмежные резонаторы. Рассмотрим, например, систему, гребни которой соединены связками через один (рис. 10.23). При $\varphi=0$ все гребни (сегменты) имеют одинаковый потенциал, поэтому ток по связкам не протекает и заряд на связках не наводится. Следовательно, связки не изменяют собственную частоту резонаторов. При $\varphi=\pi$ связка проходит над сегментом, имеющим потенциал противоположного знака, и на ней наводится заряд. При этом емкость связка-сегмент понижает собственную частоту резонатора. При промежуточных значениях угла $\varphi$ емкость связок также уменьшает собственную частоту резонатора, однако влияние тока, протекающего по связке за счет разности потенциалов на сегментах, эквивалентно включению шунтирующего индуктивного элемента и повышает частоту резонатора. В результате получается характеристика, показанная на рис. 10.24. Там же показана дисперсионная характеристика этой системы без связок. Резонаторные ЗС со связками и пазами различной конфигурации широко применяются в электронных приборах дециметрового и верхней части сантиметрового диапазона. Использованию их на более высоких частотах препятствуют малые размеры связок.

## Контрольные вопросы

1. Чем определяется скорость убывания амплитуды медленной волны при удалении от поверхности линии передачи?
2. Какими свойствами должна обладать поверхность, вдоль которой возможно распространение медленных волн?
3. Сформулируйте теорему Флоке для периодических структур. Какие значения может принимать сдвиг фазы на период структуры?
4. Перечислите основные свойства пространственных гармоник. Чем определяется амплитуда гармоники?
5. Постройте дисперсионные характеристики замедляющих систем в координатах $n$, $\lambda$ и $k$, $\beta$. Как находятся по этим характеристикам фазовая и групповая скорости?
6. Дайте определения основных параметров замедляющих систем. Поясните их физический смысл.
7. Перечислите основные типы замедляющих систем и дайте их краткую характеристику.
8. Опишите конструкцию и перечислите основные свойства гребенчатых замедляющих систем.
9. Поясните конструкцию и перечислите основные свойства спиральных замедляющих систем.
10. Опишите конструкцию и перечислите основные свойства стержневых замедляющих систем.
11. Поясните конструкцию и перечислите основные свойства резонаторных замедляющих систем.

## ГЛАВА 11

# ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

### § 11.1. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

*Объемным резонатором* называется совокупность металлических и (или) диэлектрических тел, внутри или вблизи которых концентрируется переменное электромагнитное поле. Область существования этого поля $V$ можно отделить от остального пространства условной границей $S$, излучение энергии через которую отсутствует или незначительно (рис. 11.1). Количество энергии, запасенной в электромагнитном поле объемного резонатора, зависит от частоты. Вблизи некоторых частот (длин волн), называемых собственными, количество запасенной энергии, так же как и в колебательном контуре вблизи его резонансной частоты, резко увеличивается. Поскольку в СВЧ-диапазоне колебательные контуры, состоящие из конденсаторов и индуктивных катушек, реализовать затруднительно, их функции выполняют объемные резонаторы.

Простейшим объемным резонатором может служить отрезок волновода длиной $l$, закрытый с обеих сторон металлическими крышками (рис. 11.2). Предположим, что в волноводе на частоте $\omega$ возбуждена волна определенного типа, распространяющаяся в сторону положительных значений координаты $z$. Дойдя до конца отрезка, волна отражается от правой крышки, распространяется в противоположном направлении и, отразившись от левой крышки, интерферирует с первоначальной волной. Этот

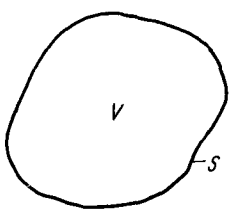



Рис. 11.1 Объемный резонатор

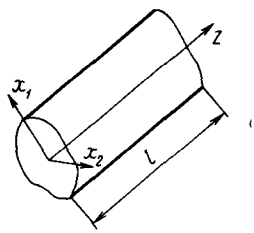



Рис. 11.2. Закрытый объемный волноводный резонатор

процесс повторяется многократно. Если в результате интерференции амплитуда первоначальной волны увеличивается, то в отрезке волновода происходит накопление энергии, т. е. наблюдается резонанс. Условием резонанса является равенство фаз первоначальной и двукратно отраженной волн. Последняя на своем пути приобретает сдвиг фазы

$$\Delta\varphi = \beta l + \varphi_{\text{пр}} + \beta l + \varphi_{\text{л}},$$

где $\varphi_{\text{пр, л}}$ — сдвиг фазы волны при ее отражении от крышки, равный в зависимости от типа поляризации волны нулю или $\pi$.

Таким образом, условие резонанса имеет вид

$$\Delta\varphi = 2\beta l + \varphi_{\text{пр}} + \varphi_{\text{л}} = 2\pi s, \quad s = 1, 2, \ldots . \tag{11.1}$$

Учитывая, что $\beta = 2\pi/\lambda_g$ и приняв во внимание возможные значения сдвигов фаз $\varphi_{\text{пр}}$ и $\varphi_{\text{л}}$, преобразуем (11.1) следующим образом:

$$\lambda_g = 2l/p, \tag{11.2}$$

где $p = s - \delta$; $\delta = 0$ или 1 в зависимости от типа поляризации волны. Следовательно, индекс $p$ принимает целые положительные значения, начинающиеся с 0 либо 1.

Таким образом, при резонансе на длине отрезка волновода $l$ укладывается целое число $p$ полуволн. При этом значению $p = 0$ соответствует бесконечно большая длина волны в волноводе. *Собственные длины волн* $\lambda_p$, соответствующие различным значениям индекса $p$, определим, подставив в (11.2) выражение (5.31):

$$\frac{n_{\text{ср}}\lambda_p}{\sqrt{1-(\lambda_p/\lambda_c)^2}} = \frac{2l}{p},$$

откуда

$$\lambda_p = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\lambda_c^2} + \dfrac{p^2 n_{\text{ср}}^2}{4l^2}}}. \tag{11.3}$$

Из равенства (11.3) следует, что собственная длина волны (частота) объемного резонатора определяется типом волны в отрезке волновода и числом полуволн, укладывающихся на его длине. Этими же факторами характеризуется и распределение электромагнитного поля в объеме резонатора.

Резонаторы рассмотренного типа получили название волноводных. Они могут быть выполнены на основе прямоугольных, круглых, П-образных, коаксиальных, полосковых и других линий передачи, в том числе и периодических структур (рис. 11.3, *а — в*). Способность этих резонаторов на определенных частотах накапливать энергию сохраняется при изменении формы крышек

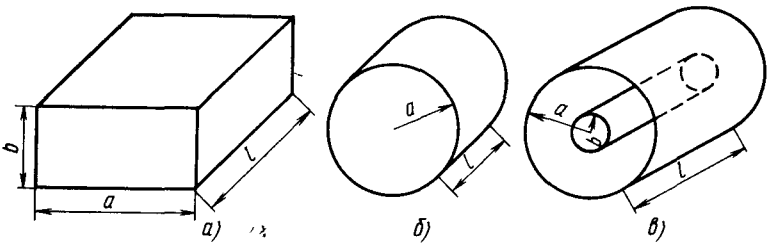



Рис. 11.3. Типы закрытых волноводных резонаторов: *а* — прямоугольный; *б* — цилиндрический; *в* — коаксиальный

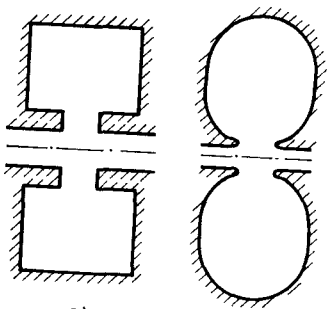



Рис. 11.4. Типы аксиально-симметричных резонаторов: *а* — со ступенчатой формой образующей; *б* — с плавной формой образующей

(рис. 11.4, *а* — *б*). Резонаторы этого типа используются в электронных приборах СВЧ и линейных ускорителях для осуществления взаимодействия электромагнитного поля с потоками заряженных частиц. В полости резонатора могут располагаться металлические втулки, укрепленные на держателях или диафрагмах различной формы (рис. 11.5, *а*). Такие резонаторы называют *многозазорными*. Они также применяются в электронных приборах СВЧ и ускорителях заряженных частиц.

Свернув линию передачи в кольцо, получим *кольцевой резонатор* (рис. 11.5, *б*), условием резонанса в котором является равенство фаз первоначальной волны и волны, обогнувшей резонатор по кольцу. Кольцевые резонаторы выполняются как из однородных, так и из периодических линий передачи (рис. 11.5, *в*).

Описанные резонаторы имеют замкнутую металлическую оболочку, внутри которой сосредоточено электромагнитное поле. Поэтому они называются *закрытыми* или полыми. Наряду с ними существуют *открытые резонаторы*, электромагнитное поле которых неограничено в пространстве, но быстро убывает при удалении от поверхности тел, образующих резонатор.

Рассмотрим, например, резонатор, выполненный из отрезка диэлектрического волновода (рис. 11.6, *а*). Электромагнитное поле резонатора представим как суперпозицию парциальных волн, многократно отражающихся от боковых и торцевых поверхностей диэлектрического стержня (рис. 11.6, *б*). При определенных условиях (см. § 11.4) на боковых и торцевых поверхностях стержня наблюдается полное внутреннее отражение, что приводит на некоторых частотах к сложению парциальных

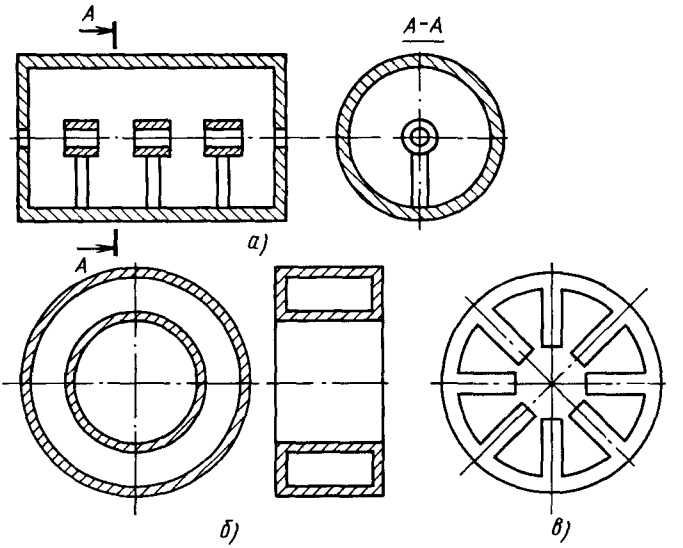



Рис. 11.5. Многозазорный (*а*) и кольцевые (*б*, *в*) резонаторы

волн и накоплению энергии внутри резонатора. При этом снаружи амплитуда поля быстро уменьшается по мере удаления от поверхности диэлектрика. Такие резонаторы называются *диэлектрическими*. Они могут помещаться в металлический экран, но могут и не иметь его.

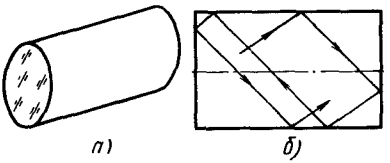



Рис. 11.6. Диэлектрический резонатор (*а*) и ход лучей в нем (*б*)

Другой тип открытых резонаторов представляет собой отрезок линии передачи, открытый с одной или двух сторон. Линия передачи может быть при этом как закрытой (рис. 11.7, *а*), так и открытой (рис. 11.7, *б*), а также нерегулярной (рис. 11.7, *в*). При определенных условиях в таких устройствах также возможно накопление энергии, а ее излучение через торцевые (а в открытых

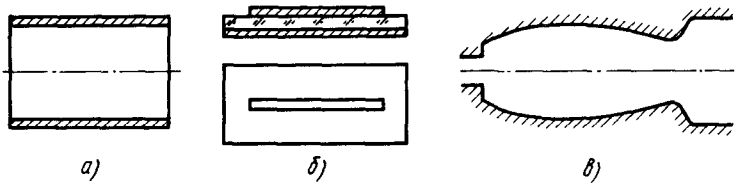



Рис. 11.7. Открытые волноводные резонаторы, выполненные на основе круглого волновода (*а*), МПЛ (*б*), нерегулярного круглого волновода (*в*)

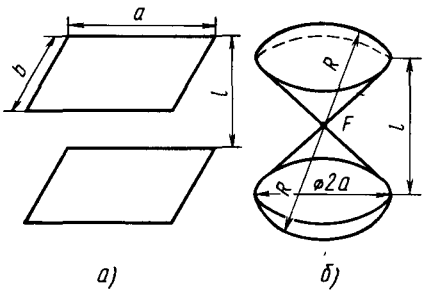



Рис. 11.8. Открытые зеркальные резонаторы с плоскими (*а*) и со сферическими конфокальными (*б*) зеркалами

линиях передачи и через боковые) участки окружающей резонатор поверхности $S$ может практически отсутствовать. Такие резонаторы называются *открытыми волноводными*. Кроме того, открытый резонатор может быть образован двумя изолированными металлическими поверхностями (зеркалами), расположенными на некотором расстоянии друг от друга (рис. 11.8, *а*, *б*). Такие открытые резонаторы называют *зеркальными*.

## § 11.2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ В РЕЗОНАТОРЕ

Любой объемный резонатор можно представить в виде некоторого объема $V$, ограниченного поверхностью $S$. В дальнейшем предполагаем заполняющую резонатор среду однородной и изотропной (рис. 11.9, *а*). Электромагнитное поле свободных, т. е. происходящих при отсутствии сторонних токов, колебаний в таком резонаторе удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} - i\omega\varepsilon\dot{\mathbf{E}} = 0; \quad (11.4) \qquad \operatorname{div}(\varepsilon\dot{\mathbf{E}}) = 0; \quad (11.6)$$

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} + i\omega\mu\dot{\mathbf{H}} = 0; \quad (11.5) \qquad \operatorname{div}(\mu\dot{\mathbf{H}}) = 0 \quad (11.7)$$

и определенным граничным условиям на поверхности $S$. Для закрытых резонаторов с идеально проводящей оболочкой граничное условие имеет вид (2.38). Условную поверхность, ограничивающую открытый резонатор, всегда можно расположить так, чтобы поле на ней было пренебрежимо мало: $\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{H}} = 0$.

Нетривиальные решения уравнений (11.4) — (11.7) с граничными условиями (2.38) существуют только при некоторых значениях

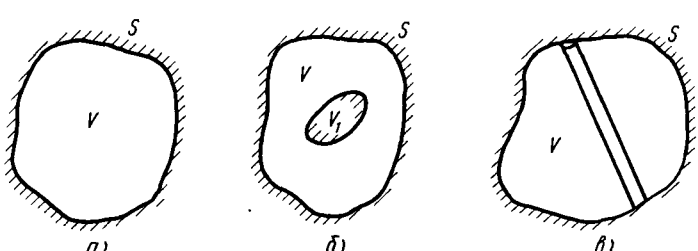



Рис. 11.9. Топологические типы объемных резонаторов:
*а* — односвязный; *б* — односвязный с изолированным проводящим телом; *в* — многосвязный

круговой частоты $\omega_0$, $\omega_1$, ..., которые образуют бесконечное счетное множество и называются собственными частотами. Каждой частоте $\omega_m$ соответствует одно или несколько решений $\dot{\mathbf{E}}_m$, $\dot{\mathbf{H}}_m$, называемых *собственными функциями* и описывающих распределение электромагнитного поля в объеме резонатора. Эти распределения называются *видами колебаний (модами).* Если несколько видов колебаний имеют совпадающие собственные частоты, то они называются *вырожденными.* Кратность вырождения равна числу видов колебаний, имеющих одну и ту же собственную частоту.

Совокупность собственных частот образует *спектр резонатора*, плотность которого $N$ равна числу собственных частот, находящихся в единичном частотном интервале. При этом вырожденные собственные частоты необходимо считать столько раз, какова их кратность. В соответствии с *формулой Рэлея — Джинса* плотность спектра быстро увеличивается с ростом частоты:

$$N=\frac{V}{2\pi^2 c^3}\omega^2. \tag{11.8}$$

*Запишем уравнения (11.4), (11.5) для собственных колебаний* с номерами $m$ и $n$ (последние для удобства возьмем в комплексно-сопряженной форме):

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_m=\mathrm{i}\omega_m\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_m;\ \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_m=-\mathrm{i}\omega_m\mu\dot{\mathbf{H}}_m;$$

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_n^*=-\mathrm{i}\omega_n^*\varepsilon^*\dot{\mathbf{E}}_n^*;\ \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_n^*=\mathrm{i}\omega_n^*\mu^*\dot{\mathbf{H}}_n^*.$$

Умножим первое уравнение на $\dot{\mathbf{E}}_n^*$, а четвертое на $\dot{\mathbf{H}}_m$ и проинтегрируем их по объему $V$. Используя тождество (П.7) и условия (2.38), получим

$$0=\omega_m\varepsilon\int_V\dot{\mathbf{E}}_m\dot{\mathbf{E}}_n^*\mathrm{d}V-\omega_n^*\mu^*\int_V\dot{\mathbf{H}}_m\dot{\mathbf{H}}_n^*\mathrm{d}V. \tag{11.9}$$

Проделав аналогичные операции со вторым и третьим уравнениями, найдем

$$0=\omega_m\mu\int_V\dot{\mathbf{H}}_m\dot{\mathbf{H}}_n^*\mathrm{d}V-\omega_n^*\varepsilon^*\int_V\dot{\mathbf{E}}_m\dot{\mathbf{E}}_n^*\mathrm{d}V.$$

Исключим из этих соотношений поочередно члены, содержащие $\dot{\mathbf{E}}_m$, $\dot{\mathbf{H}}_m$. В результате получим

$$(k_m^2-k_n^{*2})\int_V\dot{\mathbf{E}}_m\dot{\mathbf{E}}_n^*\mathrm{d}V=0;\ (k_m^2-k_n^{*2})\int_V\dot{\mathbf{H}}_m\dot{\mathbf{H}}_n^*\mathrm{d}V=0.$$

Если $k_m\neq k_n^*$, то интегралы в этих выражениях должны быть равны нулю. Это означает, что виды колебаний, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. Ортогональность имеет место и в том случае, когда заполняющая резонатор

среда обладает потерями, но не сохраняется, если поверхность $S$ не идеально проводящая.

Положив в полученных равенствах $n=m$, видим, что собственные числа резонатора с идеально проводящей оболочкой действительны:

$$k_m^2=\omega_m^2\varepsilon\mu=k_m^{*2}=\omega_m^{*2}\varepsilon^*\mu^*. \tag{11.10}$$

В этом случае из выражений (11.9) и (11.10), следует

$$|\varepsilon|\int_V \dot{\mathbf{E}}_m\dot{\mathbf{E}}_m^*\,dV=|\mu|\int_V \dot{\mathbf{H}}_m\dot{\mathbf{H}}_m^*\,dV=N_m. \tag{11.11}$$

Величину $N_m$ называют *нормой собственной функции*. Сравнив соотношение (11.11) с (1.38), видим, что норма связана с энергией свободных колебаний $W_m$:

$$N_m=4\frac{|\varepsilon|}{\varepsilon'}W_{Em}=4\frac{|\mu|}{\mu'}W_{Hm}\approx 2W_m. \tag{11.12}$$

Предполагается, что потери в среде малы, $\varepsilon''\ll\varepsilon'$, $\mu''\ll\mu'$. Так как решения однородных уравнений Максвелла определены с точностью до постоянного множителя, его можно выбрать таким образом, чтобы $N_m=1$. Такие собственные функции называются *ортонормированными*. Для них $W_m\approx 1/2$.

Из выражений (11.4) и (11.5) следует, что значению $\omega=\omega_0=0$ соответствуют решения, для которых $\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_0=\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_0=0$. Это так называемые *безвихревые* или *потенциальные функции*, поскольку их можно представить как градиенты скалярных потенциалов: $\dot{\mathbf{E}}_0=-\operatorname{grad}\dot{\varphi}^e$; $\dot{\mathbf{H}}_0=-\operatorname{grad}\dot{\varphi}^m$. Подставив эти выражения в (11.6), (11.7), получим уравнение Лапласа, которому удовлетворяют оба потенциала:

$$\nabla^2\dot{\varphi}^{e,m}=0. \tag{11.13}$$

На идеально проводящей поверхности функции $\varphi^e$ и $\varphi^m$ должны удовлетворять граничным условиям $\partial\dot{\varphi}^e/\partial\tau=0$; $\partial\dot{\varphi}^m/\partial n=0$, где $\tau$ — орт касательной к поверхности $S$. Эти условия следуют из соотношений (11.6) и (11.7). Формально условия ортонормировки можно распространить и на потенциальные поля.

Из уравнения (11.13) и граничных условий следует, что в односвязных областях $\dot{\varphi}^e=\text{const}$ и $\dot{\mathbf{E}}_0=0$. Однако если в объеме резонатора $V$ имеются изолированные идеально проводящие тела $V_1$ (рис. 11.9, *б*), то на их поверхностях потенциал $\dot{\varphi}^e$ может принимать постоянные, но различные значения. В этом случае уравнение (11.13) имеет нетривиальные решения, определяющие гармоническое электрическое поле резонатора, совпадающее со статическим полем изолированных тел.

Многосвязные резонаторы (рис. 11.9, *в*) можно превратить в односвязные, введя условные перегородки, на поверхности которых выполняются условия Неймана. Значения скалярного

магнитного потенциала на разных сторонах этой перегородки могут быть различными, что обусловливает наличие нетривиальных решений уравнения (11.13) и существование гармонического магнитного поля, совпадающего с полем постоянного тока, текущего по внутренним элементам конструкции резонатора.

### § 11.3. ПАРАМЕТРЫ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

Исследуем свойства вихревых решений однородных уравнений Максвелла, соответствующих собственным частотам $\omega_1$, $\omega_2$, ..., $\omega_j$, ..., не равным нулю. Для этого положим в уравнениях (11.4), (11.5) $\omega=\omega_j$ и исключим из них, например, вектор $\mathbf{E}$:

$$\operatorname{rot}\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_j=\omega_j^2\mu\dot{\mathbf{H}}_j. \tag{11.14}$$

Помножим полученное уравнение скалярно на $\dot{\mathbf{H}}_j^*$ и проинтегрируем по объему $V$:

$$\int_V \dot{\mathbf{H}}_j^*\operatorname{rot}\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_j\,dV=\omega_j^2\int_V\mu\dot{\mathbf{H}}_j^*\dot{\mathbf{H}}_j\,dV.$$

Преобразуем левую часть этого уравнения, используя векторное тождество (П.7) и теорему Гаусса (П.12):

$$\int_V \dot{\mathbf{H}}_j^*\operatorname{rot}\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_j\,dV=\int_V\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_j\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_j^*\,dV+\int_V\operatorname{div}\left[\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_j,\ \dot{\mathbf{H}}_j^*\right]dV=$$

$$=\int_V\varepsilon^{-1}|\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_j|^2\,dV+\oint_S\left[\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_j,\ \dot{\mathbf{H}}_j^*\right]d\mathbf{S}=\int_V\varepsilon^{-1}|\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_j|^2\,dV+i\omega_j\oint_S\left[\dot{\mathbf{E}}_j,\ \dot{\mathbf{H}}_j^*\right]d\mathbf{S}.$$

Второй из полученных интегралов представляет собой удвоенную комплексную мощность излучения $P_{uj}$ (см. § 1.6):

$$\oint_S\left[\dot{\mathbf{E}}_j,\ \dot{\mathbf{H}}_j\right]d\mathbf{S}=2P_{uj}=2P'_{uj}+2iP''_{uj}. \tag{11.15}$$

Подставив преобразованную левую часть в (11.14), получим

$$\omega_j^2=\frac{\int_V\varepsilon^{-1}|\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_j|^2\,dV-2\omega_jP''_{uj}+2i\omega_jP'_{uj}}{\int_V\mu|\dot{\mathbf{H}}_j|^2\,dV}. \tag{11.16}$$

Из этого выражения следует, что собственная частота $\omega_j$ — комплексное число: $\omega_j=\omega'_j+i\omega''_j$. Мнимая часть его равна нулю тогда и только тогда, когда $\varepsilon$ и $\mu$ — действительные величины (отсутствуют потери в среде, заполняющей резонатор) и мощность излучения $P'_{uj}$ через границу резонатора $S$ равна нулю (активные среды не рассматриваем). В этом случае, как следует из (11.4), (11.5), напряженности электрического и магнитного полей в резонаторе сдвинуты по фазе на 90°.

Если среда, заполняющая резонатор, однородна и изотропна, а мощность излучения равна нулю, то выражение (11.16) упрощается:

$$k_j^2=\omega_j^2\varepsilon\mu=\frac{\int\limits_V|\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_j|^2\,\mathrm{d}V}{\int\limits_V|\dot{\mathbf{H}}_j|^2\,\mathrm{d}V}. \tag{11.17}$$

Найдем энергию электромагнитного поля собственных колебаний $W$, запасенную в резонаторе. Из выражения (1.40) следует, что если мнимая часть мощности излучения из резонатора $P''_{\mathrm{u}j}=0$, то средние значения энергии электрического и магнитного полей в резонаторе равны. Отсюда

$$W=W_E+W_H=2W_E=2W_H=\frac{1}{2}\int\limits_V\varepsilon|\dot{\mathbf{E}}_j|^2\,\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int\limits_V\mu|\dot{\mathbf{H}}_j|^2\,\mathrm{d}V.$$

Выясним физический смысл комплексной собственной частоты. Зависимость напряженностей электрического и магнитного полей от времени определяется выражениями

$$\mathbf{E}_j(\mathbf{r},\,t)=\operatorname{Re}\left[\dot{\mathbf{E}}_j(\mathbf{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_j t}\right]=\mathrm{e}^{-\omega''t}\operatorname{Re}\left[\dot{\mathbf{E}}_j(\mathbf{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' t}\right];$$

$$\mathbf{H}_j(\mathbf{r},\,t)=\operatorname{Re}\left[\dot{\mathbf{H}}_j(\mathbf{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_j t}\right]=\mathrm{e}^{-\omega''t}\operatorname{Re}\left[\dot{\mathbf{H}}_j(\mathbf{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' t}\right].$$

Эти формулы описывают затухающие колебания, причем мнимая часть комплексной частоты определяет скорость уменьшения их амплитуды. Если эта скорость достаточно мала ($\omega''_j\ll\omega'_j$), то в пределах одного периода колебания можно считать гармоническими и вычислять среднюю энергию по формуле

$$W_j=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\omega''_j t}\int\limits_V\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_j(\mathbf{r},\,0)\,\dot{\mathbf{E}}_j^*(r,\,0)\,\mathrm{d}V=W_j(0)\mathrm{e}^{-2\omega''_j t}. \tag{11.18}$$

За один период энергия колебаний уменьшается на

$$\Delta W=W(0)-W(T)=W_0\left(1-\mathrm{e}^{-2\omega''_j T}\right)=W(0)\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{4\pi\omega_j}{\omega_j}}\right).$$

Учитывая малость показателя степени, разложим экспоненту в полученном выражении в степенной ряд, ограничившись первыми двумя членами разложения:

$$\Delta W=W_j(0)\left(1-1+\frac{4\pi\omega''_j}{\omega'_j}+\ldots\right)=\frac{4\pi\omega''_j}{\omega'_j}W(0). \tag{11.19}$$

Величину, равную отношению действительной части комплексной собственной частоты к удвоенной мнимой части, называют *добротностью* объемного резонатора на данном виде колебаний:

$$\boxed{Q_j = \omega_j'/(2\omega_j'')} \qquad (11.20)$$

Величину, обратную добротности, называют *декрементом затухания*:

$$d_j = 1/Q_j = 2\omega_j''/\omega_j'.$$

В случае малого затухания добротность, как это следует из выражения (11.19), равна умноженному на $2\pi$ отношению энергии, запасенной в резонаторе, к энергии, теряемой за период:

$$Q_j = 2\pi \frac{W_j}{\Delta W}. \qquad (11.21)$$

Если амплитуда колебаний в резонаторе поддерживается постоянной с помощью внешнего источника, он развивает мощность

$$P_{пj} = \frac{\Delta W}{T} = \Delta W_j \frac{\omega'}{2\pi},$$

компенсирующую потерю энергии в резонаторе. Подставив найденное из этого выражения значение $\Delta W_j$ в (11.20), получим

$$\boxed{Q_j = \frac{\omega_j' W_j}{P_{пj}}.} \qquad (11.22)$$

При больших затуханиях равенства (11.21) и (11.22) не выполняются, так как в разложении (11.19) необходимо учитывать члены более высокого порядка, однако определение (11.20) при этом сохраняет силу.

Мощность потерь в резонаторе $P_п$ складывается из мощности потерь в стенках резонатора и среде, его заполняющей (собственные потери $P_{0j}$), и мощности потерь $P_{нj}$ за счет излучения энергии в другие элементы СВЧ-системы или окружающее пространство, которые можно рассматривать как «нагрузку» резонатора:

$$P_{пj} = P_{0j} + P_{нj}. \qquad (11.23)$$

Подставив это равенство в (11.22), найдем

$$\boxed{1/Q_j = 1/Q_{0j} + 1/Q_{внj},} \qquad (11.24)$$

где $Q_{0j} = 2W_j/P_{0j}$ — собственная, а $Q_{внj} = 2W_j/P_{внj}$ — *внешняя добротности резонатора*. Добротность $Q_j$ называют *нагруженной добротностью*.

*КПД резонатора* называют отношение мощности, излучаемой в нагрузку к суммарной мощности потерь в резонаторе:

$$\eta_к = \frac{P_н}{P_0} = \frac{1}{1 + Q_{вн}/Q_0}. \qquad (11.25)$$

КПД резонатора увеличивается при уменьшении внешней и увеличении его собственной добротности.

Собственная частота и добротность — основные параметры объемного резонатора на данном виде колебаний. Значения этих параметров инвариантны, т. е. не зависят от способа вычисления. Наряду с ними часто используют и другие параметры резонатора, значения которых определяются неоднозначно. *Эквивалентное напряжение резонатора*

$$\dot{U}_{\text{эк}j} = -\int_1^2 \dot{\mathbf{E}}_j d\mathbf{l}. \tag{11.26}$$

Криволинейный интеграл в правой части этого выражения вычисляется между некоторыми заранее выбранными точками 1 и 2 на границе резонатора $S$ по заданной кривой $l$. Значение $\dot{U}_{\text{эк}j}$ на данном виде колебаний зависит от положения точек 1 и 2 и формы кривой $l$, так как электрическое поле резонатора не потенциально. Обычно эквивалентное напряжение вычисляется в резонаторах, предназначенных для взаимодействия с заряженными частицами. В этом случае в качестве кривой $l$ выбирается траектория заряженных частиц. При этом эквивалентное напряжение пропорционально изменению энергии заряженных частиц, происходящему в результате их взаимодействия с электромагнитным полем резонатора.

*Эквивалентное сопротивление резонатора*

$$R_{\text{эк}j} = \frac{|\dot{U}_{\text{эк}j}|^2}{2P_{\text{п}j}} = \frac{\left|\int_1^2 \dot{\mathbf{E}}_j d\mathbf{l}\right|^2}{2P_{\text{п}j}}. \tag{11.27}$$

Отношение эквивалентного сопротивления к добротности называют *волновым сопротивлением резонатора*:

$$\boxed{\rho_j = \frac{R_{\text{эк}j}}{Q_j} = \frac{|\dot{U}_{\text{эк}j}|^2}{2\omega_j' W_j}.} \tag{11.28}$$

Волновое сопротивление не зависит от добротности резонатора и является мерой эффективности взаимодействия его электромагнитного поля с заряженными частицами. Действительно, чем больше $\rho_j$, тем больше при данной запасенной энергии эквивалентное напряжение резонатора. Заметим, что на практике часто используют величины, обратные сопротивлениям — эквивалентную проводимость резонатора $G_{\text{эк}j} = R_{\text{эк}j}^{-1}$ и волновую проводимость $G_{0j} = \rho_j^{-1}$.

## § 11.4. ЗАКРЫТЫЕ ВОЛНОВОДНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

Так как закрытый волноводный резонатор представляет собой отрезок регулярной линии передачи (см. рис. 11.2), его электромагнитное поле описывается проекцией электрического или магнитного вектора Герца на ось $z$, имеющей вид

$$\dot{\Gamma}_z(x_1, x_2, z)=\psi(x_1, x_2)\xi(z). \qquad (11.29)$$

Причем функции $\psi$ и $\xi$ удовлетворяют уравнениям (5.15), (5.16).

Предположим, что уравнение (5.15) с определенными граничными условиями для контура поперечного сечения волновода решено, т. е. найдены собственные функции волновода $\psi_{mn}$ и соответствующие им критические волновые числа $k_{cmn}$. Общее решение уравнения (5.16) имеет вид

$$\zeta=\dot{A}_1 e^{-ik_z z}+\dot{A}_2 e^{ik_z z}. \qquad (11.30)$$

Ранее постоянные интегрирования $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$ не были определены, так как волновод полагался бесконечно длинным. В данном случае отрезок волновода имеет конечную длину, и на его концах должно выполняться условие

$$\dot{\mathbf{E}}_\tau=\dot{\mathbf{E}}_\perp=0, \quad z=0, \ l. \qquad (11.31)$$

Связь электрического поля резонатора с функциями $\psi$ и $\zeta$ определяется формулами (6.1) и (6.3). Из них следует, что для Е-волны $\dot{\mathbf{E}}_\perp=\zeta'\nabla_\perp\psi$, а для Н-волн $\dot{\mathbf{E}}_\perp=-i\omega\mu\zeta[\nabla_\perp, \psi\mathbf{e}_z]$. Подставив эти выражения в (11.31), получим следующие граничные условия: для **Е-** и **Н**-волн:

$$\zeta'=0 \qquad (11.32); \qquad \zeta=0. \qquad (11.33)$$

Подставив в (11.32) выражение (11.30) и положив $z=0$, найдем

$$-\dot{A}_1+\dot{A}_2=0 \text{ или } \dot{A}_1=\dot{A}_2=\dot{A}/2,$$

откуда $\zeta=\dot{A}\cos k_z z$. Использовав второе граничное условие, получим $\cos k_z l=0$, т. е.

$$k_z=p\pi/l, \quad p=0, \ 1, \ 2, \ ...$$

Таким образом, для Е-волн функция

$$\Gamma_z^e=\psi^e(x_1, x_2)\cos\frac{p\pi}{l}z, \quad p=0, \ 1, \ 2... \qquad (11.34)$$

Проделав аналогичные вычисления для Н-волн, найдем

$$\Gamma_z^m=\psi^m(x_1, x_2)\sin\frac{p\pi}{l}z, \quad p=1, \ 2, \ ... \ . \qquad (11.35)$$

Составляющие электромагнитного поля резонатора определяют из выражений (6.1)—(6.4) после подстановки в них (11.34) или (11.35). Для Е-колебаний

$$\dot{E}_1=-\frac{p\pi}{lh_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\sin\frac{p\pi}{l}z; \qquad (11.36)$$

$$\dot{E}_2=-\frac{p\pi}{lh_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\sin\frac{p\pi}{l}z; \qquad (11.37)$$

$$\dot{E}_z=k_c^2\psi\cos\frac{p\pi}{l}z; \qquad (11.38)$$

$$\dot{H}_1=\frac{ik}{Z_0h_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\cos\frac{p\pi}{l}z; \qquad (11.39)$$

$$\dot{H}_2=-\frac{ik}{Z_0h_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\cos\frac{p\pi}{l}z; \qquad (11.40)$$

$$\dot{H}_z=0. \qquad (11.41)$$

Для Н-колебаний

$$\dot{E}_1 = -\frac{iZ_0 k}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\sin\frac{p\pi}{l}z; \quad (11.42) \qquad \dot{H}_1 = \frac{p\pi}{lh_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\cos\frac{p\pi}{l}z; \quad (11.45)$$

$$\dot{E}_2 = \frac{iZ_0 k}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\sin\frac{p\pi}{l}z; \quad (11.43) \qquad \dot{H}_2 = \frac{p\pi}{lh_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\cos\frac{p\pi}{l}z; \quad (11.46)$$

$$\dot{E}_z = 0 \quad (11.44) \qquad \dot{H}_z = k_c^2\psi\sin\frac{p\pi}{l}z. \quad (11.47)$$

В приведенных выражениях

$$k = k_j = (k_{cmn}^2 + k_z^2)^{1/2} = (k_{cmn}^2 + p^2\pi^2/l^2)^{1/2} \quad (11.48)$$

— собственное волновое число данного вида колебаний в резонаторе, характеризующееся тремя индексами $m$, $n$, $p$. Возможность замены этих чисел одним индексом $j$ следует из того факта, что последовательность любых комбинаций трех натуральных чисел можно пронумеровать по порядку, т. е. эти комбинации образуют счетное множество.

Анализ полученных выражений позволяет сделать следующие выводы о структуре поля свободных колебаний волноводных резонаторов:

1) продольное волновое число (постоянная распространения) принимает только действительные значения. Это означает, что даже при наличии потерь в волноводе (но при идеально проводящих стенках) зависимость амплитуды поля от координаты $z$ есть гармоническая функция. Индекс $p$ равен числу полуволн, укладывающихся по длине резонатора; все полуволны имеют одинаковую амплитуду;

2) бегущая электромагнитная волна в резонаторе отсутствует. Фаза колебаний как функция от $z$ для данной полуволны остается постоянной, а затем скачком меняется на $\pi$, что соответствует изменению знака синуса или косинуса. Поэтому в резонаторе существуют колебания, а не волны, как в волноводе.

Распределения амплитуд и фаз электрического и магнитного полей в резонаторе, иллюстрирующие эти выводы, показаны на рис. 11.10. Заметим, что результаты проведенного анализа на-

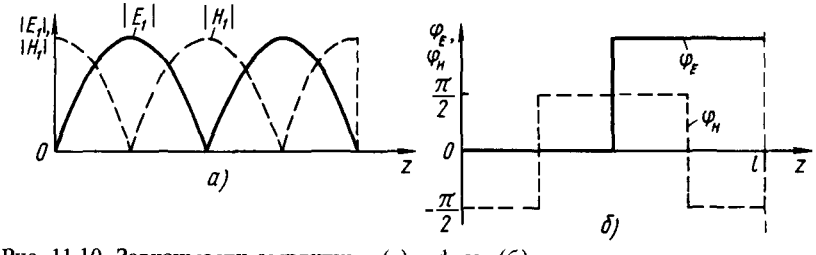



Рис. 11.10. Зависимости амплитуды (*а*) и фазы (*б*) поперечных составляющих поля от координаты $z$ в волноводном закрытом резонаторе для $p=2$

ходятся в согласии с выводами, полученными в § 11.1 методом парциальных волн.

Рассмотрим некоторые типы волноводных резонаторов. Взяв в качестве линии передачи отрезок прямоугольного волновода, получим призматический резонатор (см. рис. 11.3, *а*). Так как функция $\psi$ для Е- и Н-волн в прямоугольном волноводе определяется выражениями (7.4) и (7.12), а критическое волновое число — формулой (7.11), для проекций вектора Герца получим выражения

$$\dot{\Gamma}_z^e = \dot{A} \sin\frac{m\pi}{a} x \sin\frac{n\pi}{b} y \cos\frac{p\pi}{l} z; \tag{11.49}$$

$$\dot{\Gamma}_z^m = \dot{B} \cos\frac{m\pi}{a} x \cos\frac{n\pi}{b} y \sin\frac{p\pi}{l} z. \tag{11.50}$$

Один из трех индексов в каждой из этих формул может быть равен нулю.

Электромагнитное поле свободных колебаний в призматическом резонаторе описывается с помощью выражений (11.36)—(11.47) после подстановки в них соответствующей функции $\psi$. Собственные волновые числа и длины волн вычисляются с помощью выражения (11.48):

$$k_j = k_{mnp} = \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2\right]^{1/2}; \tag{11.51}$$

$$\lambda_j = \lambda_{mnp} = \frac{2n_{\text{ср}}}{\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{l^2}}}. \tag{11.52}$$

Как и следовало ожидать, все размеры резонатора входят в формулы (11.51), (11.52) симметрично.

Аналогично волноводам вид колебаний, имеющий наименьшую собственную частоту (наибольшую собственную длину волны), называется *основным*. Как следует из (11.52), для этого вида колебаний один из индексов, соответствующий наименьшему размеру резонатора, должен быть равен нулю, а остальные два — единице. Так, если наименьшим из трех размеров резонатора является его длина $l$, основной вид колебаний в таком резонаторе — $E_{110}$ (у Н-колебаний индекс $p$ не может быть равен нулю). Эпюры силовых линий электромагнитного поля этого и некоторых других видов колебаний в призматическом резонаторе показаны на рис. 11.11, *а*—*г*. Заметим, что в данном случае различие между колебаниями Е- и Н-вида чисто условное и зависит от того, какой из трех размеров резонатора считать его длиной.

Цилиндрический резонатор выполняется из отрезка круглого волновода (см. рис. 11.3, *б*). С учетом (7.29) определим функцию $\dot{\Gamma}_z$ для этого волновода:

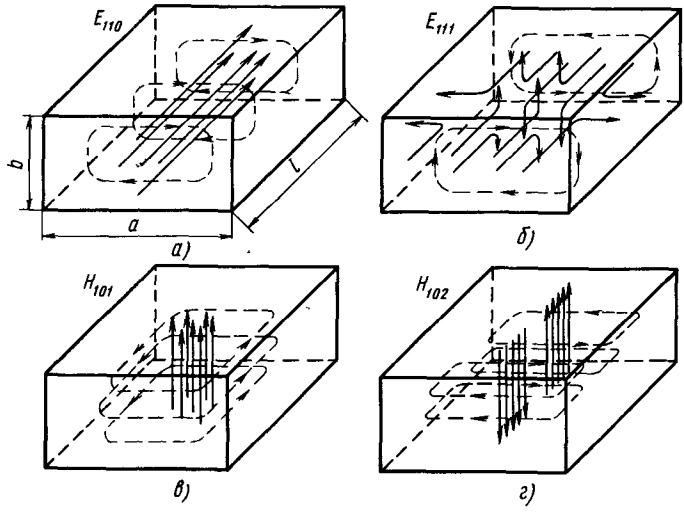



Рис. 11.11. Эпюры силовых линий электромагнитного поля свободных колебаний в призматическом резонаторе:
*а*—для колебаний вида $E_{110}$; *б*—для колебаний вида $E_{111}$; *в*—для колебаний вида $H_{101}$; *г*—для колебаний вида $H_{102}$; ————линии вектора **E**; — — — — —линии вектора **H**

$$\dot{\Gamma}_z^e = \dot{A} J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{a}\right)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\theta \cos\frac{p\pi}{l} z; \tag{11.53}$$

$$\dot{\Gamma}_z^m = \dot{B} J_m\left(\frac{\chi_{mn} r}{a}\right)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\theta \sin\frac{p\pi}{l} z. \tag{11.54}$$

Подставив выражения (11.53), (11.54) в (11.36)—(11.47), найдем составляющие электромагнитного поля в резонаторе, а с помощью формулы (11.48)—собственные волновые числа и длины волн:

$$k_j = [(\xi_{mn}/a)^2 + (\pi p/l)^2]^{1/2};$$

$$\lambda_j = \frac{2n_{ср}}{\sqrt{(\xi_{mn}/a)^2 + p^2/l^2}},$$

где $\xi_{mn} = \gamma_{mn}$ для E-колебаний и $\xi_{mn} = \chi_{mn}$ для H-колебаний. На рис. 11.12 представлена зависимость нормированного собственного волнового числа $k_0 a$ некоторых видов колебаний от отношения $l/a$.

Если $\frac{l}{a} < \frac{\sqrt{\nu_{01}^2 - \chi_{11}^2}}{\pi} = 2{,}03$, то основным видом колебаний в цилиндрическом резонаторе является вид $E_{010}$, собственная длина волны которого совпадает с критической длиной волны

$E_{01}$ в волноводе, из которого выполнен резонатор, и не зависит от длины резонатора $l$: $\lambda_{010}=2\pi a/\nu_{01}=2{,}612$.

При $a/l<0{,}492$ наибольшей собственной длиной волны обладают колебания вида $H_{111}$.

Как следует из (11.36)—(11.41), электромагнитное поле колебаний вида $E_{010}$ содержит только две составляющие:

$$\dot{E}_z=\dot{A}J_0\left(\frac{\nu_{01}r}{a}\right);$$

$$\dot{H}_\theta=\mathrm{i}\dot{A}Z_0^{-1}J_1\left(\frac{\nu_{01}r}{a}\right).$$

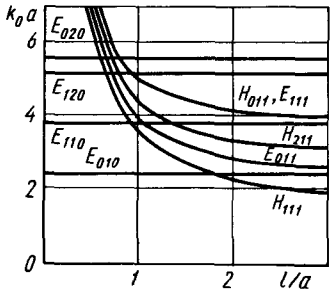



Рис. 11.12. Зависимость собственных волновых чисел различных видов колебаний в цилиндрическом резонаторе от отношения $l/a$

Эпюры силовых линий электромагнитного поля колебаний вида $E_{010}$ и $H_{111}$ показаны на рис. 11.13, *а*, *б*.

Вычислим энергию поля колебаний вида $E_{010}$, запасенную в резонаторе, заполненном идеальным диэлектриком ($\varepsilon''=\mu''=0$):

$$W=\frac{1}{2}\int_V \mu|H_\theta|^2\mathrm{d}V=\frac{\mu l}{2Z_0^2}2\pi|\dot{A}|^2\int_0^a J_1^2\left(\frac{\nu_{01}r}{a}\right)r\mathrm{d}r.$$

Для расчета последнего интеграла используем формулу (П.32):

$$\int_0^a J_1^2\left(\frac{\nu_{01}r}{a}\right)r\mathrm{d}r=\frac{a^2}{2}\left[J_1^2(\nu_{01})-J_0(\nu_{01})J_2(\nu_{01})\right].$$

Так как $\nu_{01}$ — корень функции Бесселя $J_0(x)$, второй член в квадратных скобках равен нулю. Таким образом, $W=0{,}5\pi\varepsilon la^2J_1^2(\nu_{01})|\dot{A}|^2$.

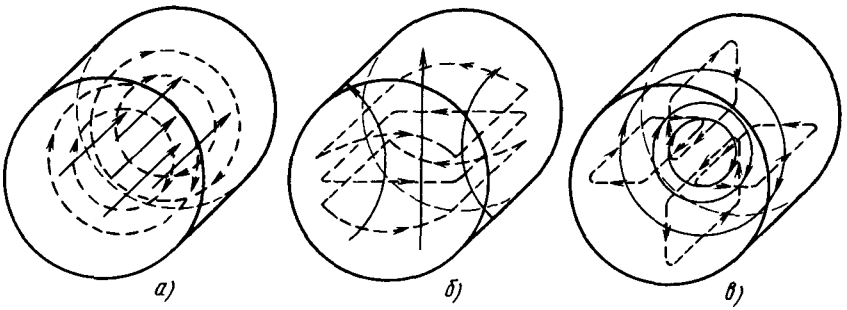



Рис. 11.13. Эпюры силовых линий электромагнитного поля свободных колебаний в цилиндрическом резонаторе:
*а* — для колебаний вида $E_{010}$; *б* — для колебаний вида $H_{111}$; *в* — для колебаний вида $H_{011}$: ——— линии вектора **E**; — — — — линии вектора **H**

Мощность потерь найдем энергетическим методом:

$$P_{\text{п}} = 0{,}5 R_s \oint_S |\dot{\mathbf{H}}_\tau|^2 \, \mathrm{d}S,$$

где $\dot{\mathbf{H}}_\tau$ — касательная составляющая магнитного поля в резонаторе с идеально проводящими стенками. Интеграл удобно разбить на две части, одна из которых учитывает потери в цилиндрической оболочке:

$$P_{\text{ц}} = \frac{1}{2} R_s \frac{2\pi a l}{Z_0^2} J_1^2(\nu_{01}) |\dot{A}|^2,$$

а другая — в двух крышках:

$$P_{\text{кр}} = R_s \frac{2\pi}{Z_0^2} |\dot{A}|^2 \int_0^a J_1^2(\nu_{01}) r \, \mathrm{d}r = R_s \frac{\pi a^2}{Z_a^2} J_1^2(\nu_{01}) |\dot{A}|^2.$$

Таким образом,

$$P_{\text{п}} = P_{\text{ц}} + P_{\text{кр}} = \frac{\pi a^2}{Z_0^2} J_1^2(\nu_{01}) \left(1 + \frac{l}{a}\right) R_s |\dot{A}|^2.$$

Собственная добротность резонатора

$$Q_0 = \frac{\omega_0 W}{P_{\text{п}}} = \frac{\nu_{01}}{2} \frac{l/a}{1 + l/a} \frac{Z_0}{R_s}.$$

Полученное выражение удобно преобразовать так:

$$Q_0 = \frac{\nu_{01}}{2} \frac{l/a}{1 + l/a} \frac{Z_0}{\sqrt{\frac{\omega_0 \mu}{2\sigma}}} = \frac{l/a}{1 + l/a} \sqrt{\frac{Z_0 \sigma_{\text{м}} \sigma_{\text{отн}} a \nu_{01}}{2}} = 1{,}6 \cdot 10^5 \sqrt{a \sigma_{\text{отн}}} \frac{1}{1 + a/l},$$

где $\sigma_{\text{отн}} = \sigma / \sigma_{\text{м}}$; $\sigma_{\text{м}}$ — электропроводность меди.

При одновременном уменьшении всех размеров резонатора его собственная частота увеличивается обратно пропорционально радиусу $a$, а добротность уменьшается как $1/\sqrt{a}$, поскольку увеличивается поверхностное сопротивление $R_s$ (см. § 2.7). При удлинении резонатора и неизменном радиусе частота остается постоянной, а добротность увеличивается за счет уменьшения доли потерь в торцевых крышках.

Найдем волновое сопротивление резонатора, предварительно вычислив его эквивалентное напряжение следующим образом:

$$\dot{U}_{\text{эк}} = -\int_0^l \dot{E}_z(r_0, z) \, \mathrm{d}z = -l \dot{A} J_0(\nu_{01} r_0 / a).$$

Такое определение соответствует выбору точек 1 и 2 на крышках резонатора и линии интегрирования $l$ в виде прямой $r = r_0$, $\theta = \text{const}$, параллельной оси $z$. Подставив значение $\dot{U}_{\text{эк}}$ в (11.28) и положив $\mu = \mu_0$, получим

$$\rho(r_0)=\frac{Z_0 J_0^2\left(\frac{\nu_{01}}{a}r_0\right)l}{\pi\nu_{01}J_1^2(\nu_{01})a}=\frac{185{,}2}{\sqrt{\varepsilon_r}}\left[J_0\left(\frac{\nu_{01}}{a}r_0\right)\right]^2\frac{l}{a}.$$

Следовательно, волновое сопротивление резонатора для колебаний вида $E_{010}$ зависит от радиуса, принимая максимальное значение на оси симметрии.

Из других видов колебаний цилиндрического резонатора выделим $H_{011}$-колебания (рис. 11.13, *в*). Так как волна типа $H_{01}$ в круглом волноводе имеет малое затухание, цилиндрический резонатор на этом виде колебаний обладает высокой собственной добротностью. Поскольку его собственная частота зависит от длины резонатора $l$, легко осуществить механическую перестройку частоты резонатора, сделав одну его крышку подвижной. Небольшой зазор между цилиндрической оболочкой и крышкой незначительно возмущает поле резонатора, так как он не пересекается линиями тока, текущего только в азимутальном направлении. В то же время при колебаниях других видов наличие зазора оказывает существенное влияние, что используется для их подавления.

Интересными свойствами обладают E- и H-колебания с большим числом вариаций поля по азимуту. На рис. 11.14, *а* показано распределение амплитуды азимутальной составляющей электрического поля колебаний вида $H_{m1p}$ по радиусу резонатора. Как видно из рисунка, при больших $m$ поле концентрируется вблизи оболочки, а в приосевой области его напряженность практически равна нулю. Такая же картина характерна и для других составляющих электромагнитного поля, а также для колебаний вида $E_{m1p}$.

Объяснить это явление можно, использовав представление о парциальных волнах, которые распространяются в резонаторе в азимутальном направлении, многократно отражаясь от его оболочки (рис. 11.14, *б*). Резонанс наблюдается, когда фазы первоначальной волны и волны, совершившей оборот вокруг оси резонатора, совпадают. При достаточно большом угле падения $\varphi$ внутри резонатора образуется поверхность (в данном случае цилиндрическая), внутрь которой лучи не проникают. Такую поверхность, касательную ко всем лучам, называют *каустической* (каустикой). Внутри нее электромагнитное поле быстро убывает. Виды колебаний, имеющие каустическую поверхность, по аналогии с известным акустическим эффектом получили название *моды шепчущей галереи* (МШГ). При уменьшении азимутального индекса $m$ и увеличении радиального индекса $n$ радиус каустики уменьшается, а затем она вообще исчезает. МШГ имеют сравнительно невысокую добротность, так как их электромагнитное поле сосредоточено вблизи цилиндрической оболочки резонатора и наводит в ней токи сравнительно большой амплитуды; их применение в приборах СВЧ позволяет увеличить

размеры поперечного сечения резонатора. Эпюры силовых линий электромагнитного поля одного из МШГ ($H_{311}$), построенные по формулам (11.42)—(11.47), показаны на рис. 11.14, *в*.

*Коаксиальный резонатор* образован отрезком коаксиального волновода (см. рис. 11.3, *в*). В таком волноводе могут распространяться волны Т-, Е- и Н-типов. Соответственно в резонаторе существуют колебания вида $T_p$, $E_{mnp}$, $H_{mnp}$. Анализ последних двух видов колебаний проводится аналогично рассмотренному ранее для призматического и цилиндрического резонаторов. Наибольший интерес представляют Т-колебания, которые при поперечных размерах резонатора, малых по сравнению с длиной волны, являются наиболее низкочастотными.

Для Т-волн в коаксиальном волноводе функция $\psi$ имеет вид (8.25). С точностью до постоянного множителя

$$\dot{\Gamma}_z = \ln\frac{r}{b}\left(\dot{A}_1 e^{-ikz} + \dot{A}_2 e^{ikz}\right).$$

Используя выражения (8.1), определим постоянные интегрирования $\dot{A}_1$, $\dot{A}_2$, собственные волновые числа, длины волн и частоты:

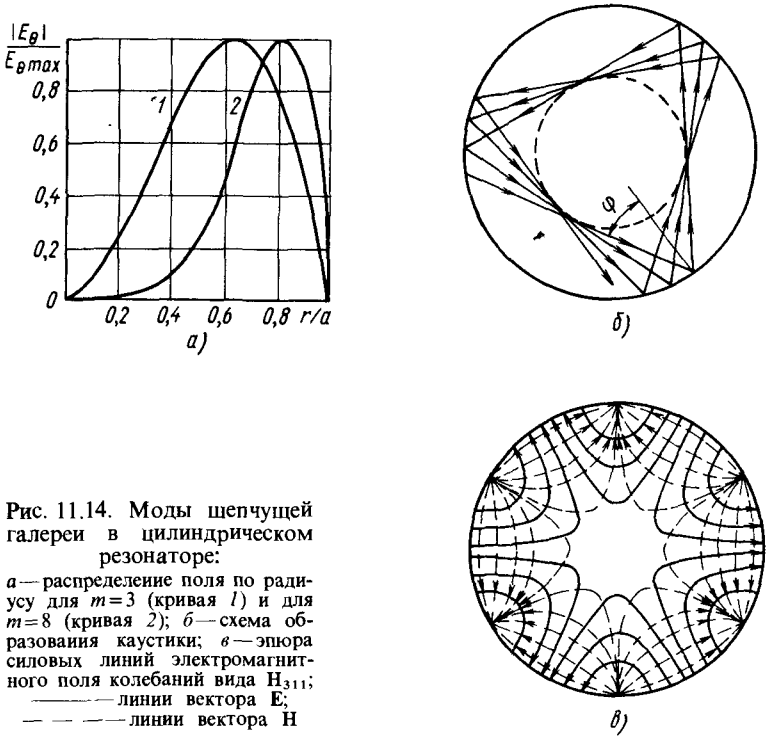



Рис. 11.14. Моды шепчущей галереи в цилиндрическом резонаторе:
*а* — распределение поля по радиусу для $m=3$ (кривая *1*) и для $m=8$ (кривая *2*); *б* — схема образования каустики; *в* — эпюра силовых линий электромагнитного поля колебаний вида $H_{311}$;
———— линии вектора **E**;
— — — — линии вектора **H**

$$\dot{\Gamma}_z = \dot{A} \ln\frac{r}{b} \cos\frac{p\pi}{l} z, \quad p = 1, 2, \ldots; \tag{11.55}$$

$$k_p = p\pi/l; \quad f_p = pc/(2ln); \quad \lambda_p = 2ln_{\text{ср}}/p.$$

Как видно, собственные частоты различных Т-колебаний в коаксиальном резонаторе отстоят друг от друга на равные интервалы $\Delta f = f_{p+1} - f_p = c/(2ln_{\text{ср}})$, т. е. образуют *эквидистантный спектр*. На основном виде колебаний $T_1$ по длине резонатора $l$ укладывается половина длины волны. Поэтому коаксиальный резонатор часто называют полуволновым.

Электромагнитное поле колебаний определяется вектором Герца (11.55) и соотношениями (11.36)—(11.41). Оно имеет только поперечные составляющие:

$$\dot{E}_r = -\frac{p\pi}{l} \dot{A} \frac{1}{r} \sin\frac{p\pi}{l} z;$$

$$\dot{H}_\theta = -\frac{ik_p}{Z_0} \dot{A} \frac{1}{r} \cos\frac{p\pi}{l} z = -\frac{ip\pi}{Z_0 l} \dot{A} \frac{1}{r} \cos\frac{p\pi}{l} z.$$

Эпюры силовых линий электромагнитного поля основного вида колебаний коаксиального резонатора показаны на рис. 11.15, *а*.

Наиболее низкочастотными Е- и Н-колебаниями являются колебания вида $H_{111}$ и $E_{110}$ (рис. 11.15, *б*, *в*), ограничивающие область существования эквидистантного спектра колебаний. В коаксиальном резонаторе существуют и МШГ, а именно те виды, радиус каустики которых больше радиуса внутреннего проводника резонатора. В этом случае наличие внутреннего проводника слабо возмущает электромагнитное поле, которое практически совпадает с полем тех же видов колебаний в цилиндрическом резонаторе. «Объемные» виды колебаний, имеющие каустики малого радиуса или вообще не имеющие их, сильно возмущаются внутренним проводником. Если

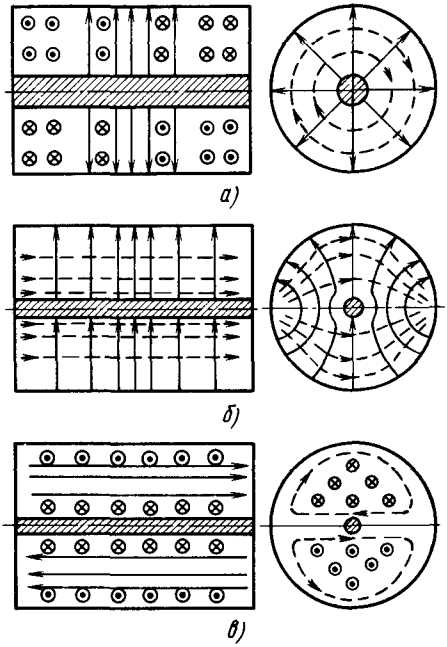



Рис. 11.15. Эпюры силовых линий электромагнитного поля свободных колебаний в коаксиальном резонаторе:
*а* — для колебаний вида $T_1$, *б* — для колебаний вида $H_{111}$, *в* — для колебаний вида $E_{110}$; ——— линии вектора **E**; — — — — линии вектора **H**

этот проводник выполнен из хорошо поглощающего материала, добротность «объемных» видов колебаний может быть значительно снижена, что позволяет проводить селекцию, т. е. избирательное поглощение колебаний и разрежение их спектра.

### § 11.5. ЗАКРЫТЫЕ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

В технике СВЧ широко применяются резонаторы сложной формы, в частности аксиально-симметричные (см. рис. 11.4). Анализ электромагнитного поля в таких структурах возможен только приближенными методами, как правило, ориентированными на использование ЭВМ.

Так как аксиально-симметричные резонаторы регулярны в азимутальном направлении, для описания электромагнитного поля в них целесообразно использовать проекции электрического и магнитного векторов Герца на угловую координату $\theta$ цилиндрической системы координат $r$, $\theta$, $z$, ось которой совпадает с осью симметрии резонатора. Таким образом, положим

$$\dot{\Gamma}^e = \dot{\Gamma}^e_\theta \mathbf{e}_\theta; \quad \dot{\Gamma}_m = \dot{\Gamma}^m_\theta \mathbf{e}_\theta. \tag{11.56}$$

Рассмотрим виды колебаний, электромагнитное поле которых не зависит от угла $\theta$ (азимутально-однородные). Уравнение (5.6) в этом случае принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\dot{\Gamma}_\theta)}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\dot{\Gamma}_\theta)}{\partial z}\right)+k^2\dot{\Gamma}_\theta=0. \tag{11.57}$$

Введем двумерную функцию $\psi(r, z)=r\Gamma_\theta(r, z)$. Подставив ее в (11.57), получим

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{k^2}{r}\psi=0. \tag{11.58}$$

Составляющие электромагнитного поля выражаются через функцию $\psi$ следующим образом [см. формулы (4.10), (4.11), (4.20), (4.21)]:

Для Е-колебаний $(\psi=\psi^e=r\dot{\Gamma}^e_\theta)$*

$$\dot{E}_r=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{\Gamma}^e_\theta}{\partial\theta}\right)=0; \quad \dot{H}_r=-i\omega\varepsilon\frac{\partial\dot{\Gamma}^e_\theta}{\partial z}=-\frac{i\omega\varepsilon}{r}\frac{\partial\psi^e}{\partial z};$$

$$\dot{E}_\theta=k^2\dot{\Gamma}_\theta=\frac{k^2}{r}\psi^e, \quad \dot{H}_\theta=0;$$

$$\dot{E}_z=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{\Gamma}^e_\theta}{\partial\theta}\right)=0; \quad \dot{H}_z=\frac{i\omega\varepsilon}{r}\frac{\partial(r\dot{\Gamma}^e_\theta)}{\partial r}=\frac{i\omega\varepsilon}{r}\frac{\partial\psi^e}{\partial r}, \tag{11.59}$$

* В литературе колебания, описываемые функцией $\psi^e$, обычно называют Н-колебаниями, так как у них $H_z\neq0$; колебания, описываемые функцией $\psi^m$, называют Е-колебаниями $(E_z\neq0)$.

для Н-колебаний $\left(\psi=\psi^m=r\dot{\Gamma}_\theta^m\right)$

$$\dot{E}_r=\frac{i\omega\mu}{r}\frac{\partial\psi^m}{\partial z};\quad \dot{H}_r=0;$$

$$\dot{E}_\theta=0;\quad \dot{H}_\theta=\frac{k^2}{r}\psi^m; \qquad (11.60)$$

$$\dot{E}_z=-\frac{i\omega\mu}{r}\frac{\partial\psi^m}{\partial r};\quad \dot{H}_z=0.$$

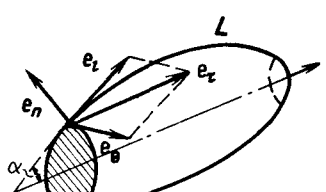



Рис. 11.16. К выводу граничных условий на оболочке аксиально-симметричного резонатора

Граничные условия для функций $\psi^e$ и $\psi^m$ находят, исходя из того, что на оболочке резонатора касательная составляющая напряженности электрического поля

$$\dot{\mathbf{E}}_\tau=\dot{E}_l\mathbf{e}_l+\dot{\mathbf{E}}_\theta\mathbf{e}_\theta=0, \qquad (11.61)$$

где $\mathbf{e}_l$ — орт касательной к образующей резонатора $L$ (рис. 11.16). Так как орты $\mathbf{e}_l$ и $\mathbf{e}_\theta$ взаимно перпендикулярны, каждая из составляющих должна обращаться в нуль:

$$\dot{E}_l=\dot{E}_r\sin\alpha+\dot{E}_z\cos\alpha=0;\ \dot{E}_\theta=0 \text{ на } L,$$

где $\alpha$ — угол между касательной к образующей резонатора и осью $z$.

Для Е-колебаний первое условие выполняется всегда, а из второго следует

$$\psi^e=0 \text{ на } L. \qquad (11.62)$$

Для Н-колебаний второе условие выполняется всегда. Подставив в первое условие значения $\dot{E}_r$ и $\dot{E}_z$, получим

$$\frac{i\omega\mu}{r}\left(\frac{\partial\psi^m}{\partial z}\sin\alpha-\frac{\partial\psi^m}{\partial r}\cos\alpha\right)=0.$$

Выражение в скобках есть нормальная производная функции $\psi^m$. Таким образом, для Н-колебаний

$$\frac{\partial\psi^m}{\partial n}=0 \text{ на } L. \qquad (11.63)$$

К граничным условиям (11.62) и (11.63) необходимо добавить условия на оси резонатора, которая служит частью границы области определения функций $\psi$. Так как в резонаторе напряженности поля не могут иметь бесконечно больших значений, функция $\psi$ должна удовлетворять условиям

$$\psi=0,\ \frac{\partial\psi}{\partial n}=\frac{\partial\psi}{\partial r}=0 \text{ при } r=0. \qquad (11.64)$$

Таким образом, граничные условия для функций $\psi^e$ и $\psi^m$, описывающих азимутально-однородные виды колебаний

в аксиально-симметричных резонаторах, разделяются. Это означает, что Е- и Н-колебания могут существовать в них независимо друг от друга.

В случае азимутально-неоднородных видов колебаний электрические и магнитные поля оказываются связанными через граничные условия. Как видно из рис. 11.16, если угол наклона касательной к образующей $\alpha > 0$, то $\dot{E}_z \neq 0$ и $\dot{H}_z \neq 0$ вблизи поверхности резонатора. Как показано в [8], электромагнитное поле азимутально-неоднородных видов колебаний описывается двумя двумерными скалярными функциями $\Psi(r, z)$ и $\Phi(r, z)$, удовлетворяющими системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)\Psi=\mp\frac{2m}{r^3}\Phi; \tag{11.65}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}+\frac{1}{2}\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)\Phi=\mp\frac{2m}{r^3}\Psi. \tag{11.66}$$

Связь функций $\Psi$ и $\Phi$ с составляющими электромагнитного поля резонатора определяется формулами [8]:

$$\dot{E}_r=\frac{i\omega\mu}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\theta;\quad \dot{E}_\theta=-\frac{j\omega\mu}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\theta;$$

$$\dot{E}_z=-\frac{i\omega\mu}{r}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\mp\frac{m}{r}\Phi\right)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\theta;$$

$$\dot{H}_r=\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\mp\frac{m}{r^2}\Psi\right)+\frac{k^2}{r}\Phi\right]\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\theta;$$

$$\dot{H}_\theta=\left[\frac{1}{r}\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)\Psi\pm\frac{m}{r^2}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right]\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\theta;$$

$$H_z=\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\mp\frac{m}{r}\Psi\right)\right]\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\theta,$$

согласно которым на образующей идеально проводящей поверхности резонатора и его оси функции $\Psi$ и $\Phi$ удовлетворяют граничным условиям

$$\Psi=\pm\frac{mr}{k^2r^2-m^2}\frac{\partial \Phi}{\partial r}=0;\quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}=0 \text{ на } L; \tag{11.67}$$

$$\Phi(0, z)=\Psi(0, z)=\frac{\partial \Phi(0, z)}{\partial r}=\frac{\partial \Psi(0, z)}{\partial r}=0. \tag{11.68}$$

Решение уравнения (11.58) или уравнений (11.65), (11.66) для резонатора с произвольной формой образующей возможно только численными методами (см. гл. 14). В некоторых случаях, однако, неплохие результаты можно получить, используя приближенные методы, основанные на априорных оценках распределения электромагнитного поля в резонаторе.

Рассмотрим, например, широко используемый в приборах СВЧ тороидальный резонатор (см. рис. 11.4, *а*). Его можно рассматривать как деформированный цилиндр, распределение электромагнитного поля основного вида колебаний в котором показано на рис. 11.13, *а*. При деформации торцевой крышки

электрическое поле резонатора сосредотачивается в его зазоре, а магнитное вытесняется в периферийную часть (рис. 11.17). Пренебрегая наличием магнитного поля в зазоре резонатора $V_1$ и электрического поля в его периферийной части $V_2$, из первых двух уравнений Максвелла получим $\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{E}}=0$ в $V_1$ и $\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{H}}=0$ в $V_2$, т. е. электрическое поле в зазоре и магнитное в периферийной части резонатора можно рассматривать как статические и ввести эквивалентные емкость зазора $C_{эк}$ и индуктивность периферийной части $L_{эк}$, вычисляя эти величины методами электро- и магнитостатики. Так, емкость зазора $C_{эк}$ вычисляется как сумма торцевой емкости $C_т$, определяемой по формуле для плоского конденсатора и боковой $C_б=4\pi\varepsilon a\ln(h/d)$:

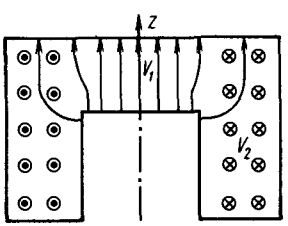



Рис. 11.17. Эпюра силовых линий электромагнитного поля основного вида колебаний тороидального резонатора:
——— линии вектора **E**;
— — — — линии вектора **H**

$$C_{эк}=\frac{\varepsilon\pi a^2}{d}+4\pi a\varepsilon\ln\frac{h}{d}=\frac{\varepsilon\pi a^2}{d}\left(1+\frac{4d}{a}\ln\frac{h}{d}\right).$$

Эквивалентную индуктивность найдем, предположив, что по боковой поверхности резонатора течет ток проводимости $I$; такой же ток смещения течет в зазоре резонатора. Напряженность магнитного поля этого тока вычислим с помощью закона Ампера: $\dot{H}_\theta=I/(2\pi r)$. Тогда эквивалентная индуктивность

$$L_{эк}=\dot{I}^{-1}\int_S\mu\dot{H}_\theta\,\mathrm{d}S=\frac{\mu h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

Рассматривая резонатор как параллельный колебательный контур с параметрами $L_{эк}$, $C_{эк}$, найдем его собственную длину волны и волновое сопротивление:

$$\lambda_0=\frac{2\pi c}{\omega_0}=2\pi c\sqrt{L_{эк}C_{эк}}=\pi a\sqrt{\frac{2h}{d}\left(1+\frac{4d}{a}\ln\frac{h}{d}\right)};$$

$$\rho=\sqrt{\frac{L_{эк}}{C_{эк}}}=120\sqrt{\frac{hd\ln b/a}{2a^2\left(1+\frac{4d}{a}\ln\frac{h}{d}\right)}}.$$

Полученные формулы обеспечивают погрешность 10—20% при $2\leqslant b/a\leqslant 5$ и $2\leqslant h/d\leqslant 10$.

Описанный метод непригоден для тороидальных резонаторов вытянутой вдоль оси $z$ формы. Лучшие результаты в таком случае дает представление резонатора в виде короткозамкнутого отрезка коаксиальной линии, нагруженного на емкость зазора

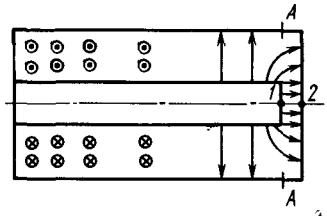



Рис. 11.18. Эпюра силовых линий электромагнитного поля четвертьволнового коаксиального резонатора с емкостным зазором:
——— линии вектора **E**; — — — — линии вектора **H**

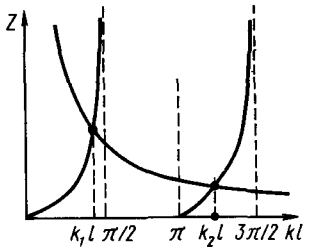



Рис. 11.19. Графическое решение характеристического уравнения для коаксиального резонатора с емкостным зазором

(рис. 11.18). При резонансе сумма проводимостей в сечении $AA$ резонатора обращается в нуль:

$$Y_{\text{л}}(l)+Y_C=0,$$

где $Y_{\text{л}}(l)$ — проводимость отрезка коаксиальной линии передачи; $Y_C$ — проводимость емкостного зазора. Используя уравнения (8.14), (8.16) и граничное условие $U(0)=0$, найдем проводимость отрезка линии:

$$Y(l)=Z_{\text{в}}^{-1}\operatorname{ctg} kl.$$

Следовательно, собственное волновое число коаксиального резонатора с емкостным зазором определяется из уравнения:

$$\operatorname{ctg} kl=\omega C_{\text{т}} Z_{\text{в}},$$

или

$$\operatorname{tg} kl=\left(kaC_{\text{т}}^{\text{н}} Z_{\text{в}}^{\text{н}}\right)^{-1}, \qquad (11.69)$$

где $C_{\text{т}}^{\text{н}}=C_{\text{т}}/(\varepsilon a)$ — нормированная емкость зазора; $Z_{\text{в}}^{\text{н}}=Z_{\text{в}}/Z_0$.

Графическое решение этого уравнения для двух видов колебаний показано на рис. 11.19. Как видно, емкостный зазор снижает собственную частоту резонатора. При фиксированной собственной частоте влияние емкости зазора необходимо компенсировать уменьшением длины резонатора. Поэтому емкость $C_{\text{т}}$ называют *укорачивающей*.

Найдем волновое сопротивление коаксиального резонатора с емкостным зазором между точками *1* и *2*, расположенными на его оси (см. рис. 11.18), для чего вычислим запасенную в резонаторе энергию:

$$W=0{,}5\int_V \mu|\dot{\mathbf{H}}|^2\,\mathrm{d}V=0{,}5\int_0^l L_1|\dot{I}|^2\,\mathrm{d}z,$$

где $I$ — ток; $L_1$ — погонная индуктивность коаксиальной линии передачи. Обозначив напряжение на зазоре резонатора $\dot{U}(l)=\dot{U}_0$, согласно (8.16) найдем

$$\dot{U}(z)=U_0\frac{\sin kz}{\sin kl};\quad \dot{I}(z)=\frac{iU_0\cos kz}{Z_в\sin kl}.$$

Следовательно,

$$W=\frac{Z_в^2U_0^2}{\omega_0L_1}\frac{\sin^2k_0l}{l/2+(1/4k)\sin k_0l}.$$

Таким образом, волновое сопротивление

$$\rho=\frac{U_0^2}{2\omega_0W}=2Z_в\frac{\sin^2k_0l}{(k_0l+0{,}5\sin 2k_0l)}.$$

Если торцевой емкостью можно пренебречь $(C_т^н=0)$, то из (11.69) следует, что $k_0l=\pi/2$, т. е. $l=\lambda_0/4$. Волновое сопротивление такого резонатора пропорционально волновому сопротивлению коаксиальной линии передачи: $\rho=\frac{4}{\pi}Z_в$.

К резонаторам сложной формы относится и многозазорный резонатор, выполненный из отрезка периодической структуры (рис. 11.20, *а*). Используя условие резонанса (11.1), запишем

$$2\varphi N=2\pi p,\quad p=0,\ 1,\ 2,\ ...,$$

где $N$ — число периодов (ячеек) структуры. Отсюда следует, что сдвиг фазы на период структуры $\varphi$ принимает дискретные значения:

$$\varphi_p=\pi p/N,\quad p=0,\ 1,\ ...,\ N-1.$$

Таким образом, каждому типу волны в структуре соответствует $N$ видов колебаний, отличающихся распределением поля по длине резонатора. Если электрическое поле ячейки сосредоточено в узком зазоре, то зависимость $|E_z|=f(z)$ имеет вид, близкий к ступенчатой функции. Для $p=0$ и $p=N-1$ она изображена на рис. 11.20, *б*, *в*. В первом случае амплитуды и фазы поля во всех зазорах одинаковы (0-колебания), во втором — фазы в соседних зазорах противоположны, а амплитуды монотонно увеличиваются при перемещении от крайних зазоров к цент-

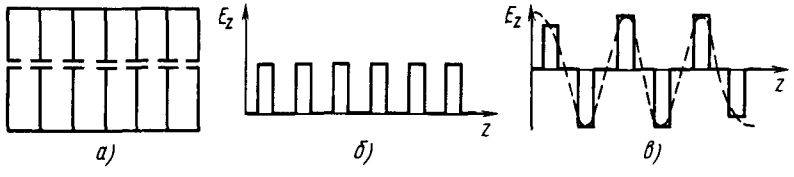



Рис. 11.20. Схема многозазорного резонатора (*а*) и распределение продольной составляющей электрического поля в его зазорах на 0- и π-видах колебаний (*б*, *в*)

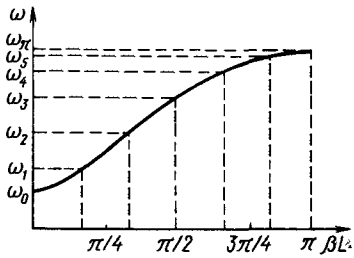



Рис. 11.21. К определению собственных частот многозазорного резонатора

ральным (π-колебания). Собственные частоты отдельных видов колебаний определяются по дисперсионной характеристике периодической структуры (рис. 11.21). Заметим, что собственная частота $\omega_5$ π-вида колебаний в резонаторе не совпадает с частотой $\omega_\pi$, на которой сдвиг фазы на период бесконечной структуры равен π.

Резонанс в кольцевом резонаторе (см. рис. 11.5, *б*) возникает, когда волна, прошедшая по кольцу, складывается с первоначальной, т. е.

$$\Delta\varphi = \beta l = 2\pi p, \quad p = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $l$ — длина кольца. Отсюда длина волны в линии при резонансе $\lambda_{gp} = l/p$. Если дисперсионная характеристика линии передачи известна, то это уравнение позволяет определить собственные частоты кольцевого резонатора. Необходимо, однако, учитывать, что при изгибе линии передачи ее дисперсионная характеристика искажается.

В зависимости от способа возбуждения в кольцевых резонаторах могут наблюдаться собственные колебания, поле которых представляет собой либо стоячие, либо бегущие в азимутальном направлении волны. Поэтому каждому числу $p$ соответствуют два вида колебаний, отличающихся направлением распространения волн. В идеальном резонаторе эти виды колебаний вырождены. Наличие неоднородностей и элементов возбуждения в реальных резонаторах снимает это вырождение.

Если в качестве линии передачи для кольцевого резонатора используется периодическая структура (см. рис. 11.5, *в*), сдвиг фазы между ее ячейками лежит в интервале [0, π]. Это ограничивает значения индекса $p$. Согласно условию, $\varphi N = 2\pi p$,

$$\varphi = 2\pi p/N, \quad p = 0, 1, \ldots, N/2.$$

где $N$ — число периодов структуры в кольце.

Таким образом, данному типу волны в структуре соответствуют $N/2+1$ видов колебаний в резонаторе, из которых все, за исключением 0-$(p=0)$ и π-$(p=N/2)$ видов, по крайней мере дважды вырождены. Собственные частоты этих колебаний определяются дисперсионной характеристикой периодической структуры.

## § 11.6. ОТКРЫТЫЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ РЕЗОНАТОРЫ

Основные типы открытых резонаторов перечислены в § 11.1. Для изучения электромагнитных колебаний в этих резонаторах удобно использовать метод парциальных волн.

Рассмотрим диэлектрический резонатор, выполненный из пластины диэлектрика толщиной $a$ и длиной $l$. Ширину пластины считаем бесконечно большой, а электромагнитное поле — не зависящим от координаты $y$ (рис. 11.22). Электромагнитные колебания в такой пластине можно представить как процесс многократного отражения плоской волны от боковых и торцевых граней. Высокой добротностью эти колебания обладают в том случае, когда отсутствует излучение, т. е. когда углы падения волны $\theta_1$ и $\theta_2$ на боковые и торцевые грани пластины больше угла полного внутреннего отражения $\theta_0$. Из анализа треугольника $ABC$ видно, что $\theta_1+\theta_2=\pi/2$. Отсюда следует, что $\theta_0<\pi/4$. Согласно (2.25), $n_{ср1}/n_{ср2}>\sqrt{2}$. Считая $\mu_{1r}=1$, получим $\varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r2}>2$. На практике это неравенство должно выполняться с запасом, так как в противном случае скорость убывания поля по мере удаления от поверхности резонатора оказывается слишком малой, что создает неудобства при монтаже резонаторов в аппаратуре. Увеличение $\varepsilon_r$ приводит к уменьшению размеров резонатора, что облегчает миниатюризацию аппаратуры. Очевидно, что материал для изготовления диэлектрических резонаторов должен обладать также малыми потерями и рядом других свойств (хорошо обрабатываться, иметь малую зависимость диэлектрической проницаемости от температуры и т. п.). Часто для этой цели применяются плавленый кварц и рутил (кристаллический оксид титана $TiO_2$).

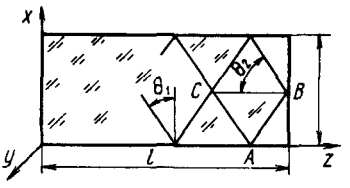


Рис. 11.22. К анализу колебаний в плоском диэлектрическом резонаторе

Условие резонанса в диэлектрическом резонаторе, так же как и в закрытом волноводном, имеет вид (11.1), однако сдвиги фазы при отражении от торцов $\varphi_{пр}$ и $\varphi_{л}$ зависят от вида колебаний и диэлектрической проницаемости резонатора. Для определения этих углов необходимо использовать граничные условия (1.18), (1.19). Если $\varepsilon_{r1}\gg 1$, то из (1.19) следует, что нормальная к торцу составляющая напряженности электрического поля $E_n=E_z\approx 0$. Это равенство выполняется, если $\varphi_{пр,л}=0$, оно называется *условием типа магнитной стенки* (в отличие от условия типа *электрической стенки*, для которой $H_n=0$). Согласно (11.1), на низшем для данного типа волны виде колебаний $\beta\approx 0$. Поэтому в обозначениях таких колебаний третий индекс принимается равным нулю*, а их собственные частоты совпадают с критическими частотами соответствующих волн в волноводе. Более точные результаты получают в результате численного расчета поля резонатора вблизи торцов.

* Иногда третий индекс обозначают буквой $\delta$, полагая, что $\delta\ll 1$.

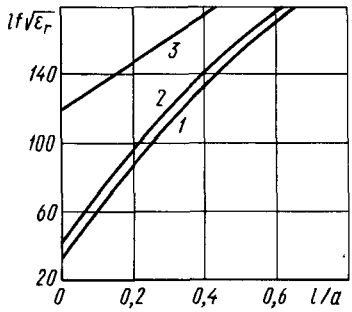



Рис. 11.23. Зависимости нормированных собственных частот ЦДР от отношения $l/a$ для колебаний вида $H_{010}$ (кривая *1*), вида $EH_{110}$ (кривая *2*) и вида $HE_{110}$ (кривая *3*)

Некоторые результаты этих расчетов для цилиндрического диэлектрического резонатора (ЦДР) показаны на рис. 11.23 [9]. Как видно, наименьшими собственными частотами характеризуются колебания видов $EH_{110}$ и $H_{010}$.

Диэлектрические резонаторы характеризуются высокой добротностью и сравнительно малыми габаритами. Так рутиловый резонатор на частоту $f_0 = 9{,}2$ ГГц имеет диаметр 3,8 мм, высоту $l = 1{,}4$ мм, добротность $Q = 500$, что позволяет широко использовать его в гибридных интегральных схемах СВЧ-диапазона.

## § 11.7. ОТКРЫТЫЕ ВОЛНОВОДНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

Открытые волноводные резонаторы (см. рис. 11.7) выполняются на основе как односвязных, так и многосвязных линий передач. В последнем случае излучение из открытого конца линии передачи мало, так как ее поперечные размеры обычно много меньше длины волны, а векторы напряженности электрического поля в разных частях поперечного сечения имеют противоположные направления. Можно считать, что на открытом конце многосвязной линии передачи выполняются граничные условия типа магнитной стенки ($\varphi_{отр} = 0$). Из уравнения (11.1) следует, что собственные длины волн резонатора, открытого с одного конца ($\varphi_д = \pi$, $\varphi_{пр} = 0$), определяются соотношением

$$\lambda_g = 4l/(2p-1), \quad p = 1, 2, 3, \ldots.$$

Основному типу колебаний соответствует $p = 1$. При этом $l = \lambda_g/4$ (четвертьволновый резонатор). Для резонатора, открытого с двух сторон (полуволнового), $\varphi_д = \varphi_{пр} = 0$, и собственные длины волн находят по формуле (11.2). Влияние высших нераспространяющихся типов волн, возникающих вблизи открытого конца, может быть учтено введением в эквивалентную схему резонатора реактивностей, наличие которых равносильно некоторому изменению длины резонатора.

Из открытого конца односвязных линий передачи обычно наблюдается заметное излучение, так как размеры поперечного сечения этих линий сравнимы с длиной волны. Оценим добротность открытого резонатора, расположенного между двумя неоднородностями в регулярном волноводе, отстоящими друг от друга на расстояние $l$ (рис. 11.24). Коэффициенты отражения от

левой и правой неоднородностей обозначим $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$. Электромагнитное поле в резонаторе на данном виде колебаний представляет собой стоячую волну, т. е. суперпозицию двух бегущих волн одинаковой амплитуды, распространяющихся в противоположных направлениях. Обозначим энергию поля бегущей волны, запасенную в единице длины волновода, $W_1$. Тогда полная энергия электромагнитного поля в резонаторе $W=2W_1l$.

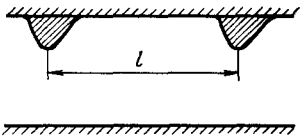



Рис. 11.24. Схема открытого волноводного резонатора

При отражении от концевых неоднородностей часть энергии волны излучается из резонатора. Мощности излучения $P_{пр}$ и $P_л$ из правого и левого концов характеризуются коэффициентами отражения и групповой скоростью волны:

$$P_{пр}=(1-|\Gamma_2|^2)W_1v_{гр};\quad P_л=(1-|\Gamma_1|^2)W_1v_{гр}.$$

Определим радиационную (т. е. обусловленную потерями на излучение) добротность резонатора аналогично (11.22):

$$Q_р=\frac{\omega_0 W}{P_л+P_{пр}}. \tag{11.70}$$

В соответствии с принятой в § 11.2 терминологией эта величина есть внешняя добротность резонатора, так как в формуле (11.70) не учитываются потери энергии в стенках. Иногда $Q_р$ называют *дифракционной добротностью.*

Подставив в (11.70) значения запасенной энергии и мощности излучения, получим

$$Q_р=\frac{\omega_0 W_1 l}{[1-(|\Gamma_1|^2+|\Gamma_2|^2)/2]W_1v_{гр}}. \tag{11.71}$$

В металлическом волноводе фазовая и групповая скорости связаны соотношением (5.33). Поэтому

$$\frac{\omega_0 l}{v_{гр}}=\frac{2\pi c l v_ф}{\lambda c^2}=2\pi\frac{v_ф}{c}\frac{l}{\lambda}. \tag{11.72}$$

Отношение $v_ф/c=\lambda_g/\lambda$. При резонансе на длине резонатора должно укладываться целое число полуволн: $\lambda_g\approx 2l/p$. Приближенный характер этого равенства обусловлен тем, что оно не учитывает влияние высших нераспространяющихся типов волн, возникающих вблизи неоднородностей. Подставив выражение (11.72) и найденное значение $\lambda_g$ в (11.71), получим

$$Q_p=\frac{4\pi}{p}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2\frac{1}{1-(|\Gamma_1|^2+|\Gamma_2|^2)/2}. \tag{11.73}$$

Из этой формулы следует, что при фиксированном числе полуволн, укладывающихся по длине резонатора, его

радиационная добротность быстро увеличивается с ростом отношения $l/\lambda$, а также при увеличении модулей коэффициентов отражения от концевых неоднородностей. Добротность возрастает также при уменьшении индекса $p$.

Считая в (11.73) $\Gamma_1=\Gamma_2=0$, найдем *естественную добротность* отрезка волновода, т. е. минимальное значение добротности, которое может иметь резонатор, выполненный из этого отрезка:

$$Q_e=\frac{4\pi}{p}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2,\quad p=1, 2, \ldots. \tag{11.74}$$

Эта добротность может достигать больших значений при $l\gg\lambda$, т. е. при $\lambda_g\gg\lambda$. Так как $\lambda_g=\lambda/\sqrt{1-(f_c/f)^2}$, это условие выполняется на частотах, близких к критической частоте волновода.

Формула (11.74) качественно справедлива и для открытого волноводного резонатора, излучение из которого происходит в свободное пространство (см. рис. 11.7). При этом под $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ следует понимать коэффициенты отражения от открытого конца волновода, значения которых при $\lambda\approx\lambda_c$ могут быть близки к единице. Для объяснения этого факта воспользуемся методом парциальных волн (рис. 11.25). На частотах, близких к критической для данного типа волны, угол отражения парциальной волны $\varphi$ мал и она выходит из открытого конца волновода под малым углом к оси $x$. Благодаря дифракции выходящий луч изменяет свое направление на некоторый небольшой угол $\xi$. Если $\varphi<\xi$, то выходящий луч поворачивает обратно в волновод, образуя отраженную волну. Таким образом, коэффициент отражения зависит от угла $\varphi$. Рассмотрим, например, волну типа $H_{m0}$ в прямоугольном волноводе, критическое волновое число которой $k_c=\pi m/a$ (показатель преломления $n$ считаем равным единице). На частоте, близкой к критической, волновое число превышает $k_c$ на малое значение:

$$ka=k_ca(1+\nu),\quad \nu\ll 1. \tag{11.75}$$

Определим угол $\varphi$, воспользовавшись формулой (5.1):

$$\varphi=\sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\sqrt{1-\left(\frac{k_ca}{ka}\right)^2}.$$

Подставив в это выражение значение $ka$ из предыдущего выражения, найдем, что угол $\varphi$ непосредственно связан с $\nu$:

$$\varphi\approx\sqrt{1-\frac{1}{(1+\nu)^2}}\approx\frac{\sqrt{2\nu+\nu^2}}{1+\nu}\approx\sqrt{2\nu}. \tag{11.76}$$

Анализ дифракции электромагнитных волн из открытого конца волновода позволяет получить следующее приближенное выражение для коэффициента отражения:

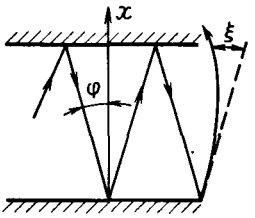



Рис. 11.25. Излучение из открытого конца волновода

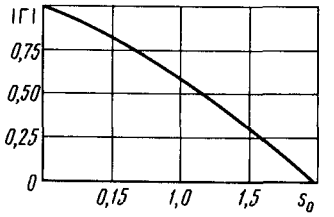



Рис. 11.26. Зависимость модуля коэффициента отражения от открытого конца волновода от параметра $s_0$

$$\Gamma \approx e^{-i\delta(1+i)s_0}, \tag{11.77}$$

где $\delta = 0{,}824$; $s_0 = \varphi\sqrt{k_c a}$ — параметр, характеризующий дифракционную размытость пучка лучей, отраженных от одной стенки волновода, в плоскости другой стенки. Зависимость модуля коэффициента отражения от параметра $s_0$ показана на рис. 11.26. Аналогичный характер эта зависимость имеет и для волноводов с другой формой поперечного сечения.

Если $k \approx k_c$, то модули коэффициента отражения $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ близки к единице и $\lambda_g \approx 2l/p$. В этом случае собственное волновое число резонатора определяется формулой

$$k_0 = \sqrt{k_c^2 + p^2\pi^2/l^2} = k_c\sqrt{1 + \frac{p^2\pi^2}{k_c^2 l^2}} \approx k_c\left(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2\pi^2}{k_c^2 l^2}\right). \tag{11.78}$$

Сравнив это выражение с (11.75), видим, что в данном случае

$$\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{p\pi}{k_c l}\right)^2, \quad \varphi = \frac{p\pi}{\sqrt{2}\,k_c l} = \frac{p\lambda_c}{2\sqrt{2}\,l}. \tag{11.79}$$

Из выражений (11.73), (11.77) и (11.79) следует, что при увеличении индекса $p$, т. е. числа вариаций поля по длине открытого резонатора, его радиационная добротность резко падает, в то время как добротность закрытого резонатора такой же конфигурации мало зависит от индекса $p$.

Увеличенной радиационной добротностью обладают открытые резонаторы, выполненные из отрезков нерегулярных волноводов. Рассмотрим, например, бочкообразный резонатор (рис. 11.27). Если кривизна его образующей мала, то в каждом сечении такой резонатор можно рассматривать как круглый волновод радиусом $a(z)$, имеющий критическое волновое число $k_c(z) = \nu_{mn}/a(z)$. В средней части волновода $k > k_c$, там существуют распространяющиеся волны. Вблизи тех сечений, где $k = k_c$, образуются каустические поверхности *1* (см. рис. 11.27), от которых парциальные волны отражаются. Так как эти поверхности находятся

внутри резонатора, излучение из его открытых концов уменьшается. Увеличение продольного индекса $p$ приводит к росту угла $\varphi$ и сдвигу каустик к концам резонатора, а затем и к их исчезновению, что приводит к уменьшению радиационной добротности. Однако для небольших значений индекса $p$, когда каустики существуют, радиационная добротность может оставаться достаточно высокой.

При использовании открытых резонаторов в электронных приборах необходимо обеспечить заданное распределение поля по длине резонатора и излучение энергии из него в выходной волновод. Первая задача решается при использовании нерегулярных волноводов со специально подобранной зависимостью радиуса от координаты $z$ (рис. 11.28). Соединение с выходным волноводом, имеющим бóльший диаметр, чем резонатор (длина волны в волноводе должна быть существенно меньше критической), осуществляется с помощью ступенчатых или плавных переходов, обеспечивающих необходимый коэффициент отражения.

Часто бывает необходимо иметь увеличенные размеры поперечного сечения резонатора, что приводит к росту плотности его спектра. Поэтому приходится применять различные способы подавления нежелательных видов колебаний (селекции мод). Одним из них является использование мод шепчущей галереи в качестве рабочих. Подавление нежелательных объемных колебаний производится в этом случае введением в резонатор соосно с его оболочкой металлического или поглощающего стержня.

Описанные свойства открытых волноводных резонаторов позволяют эффективно применять их в диапазонах миллиметровых и субмиллиметровых волн, где использование закрытых резонаторов оказывается нецелесообразным или просто невозможным. Действительно, рассмотрим закрытый резонатор, имеющий на основном виде колебаний собственную частоту $\omega_0$ и добротность

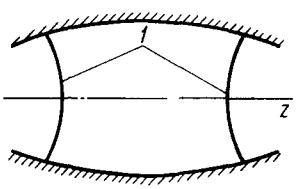



Рис. 11.27. Бочкообразный открытый волноводный резонатор:
*1* — каустические поверхности

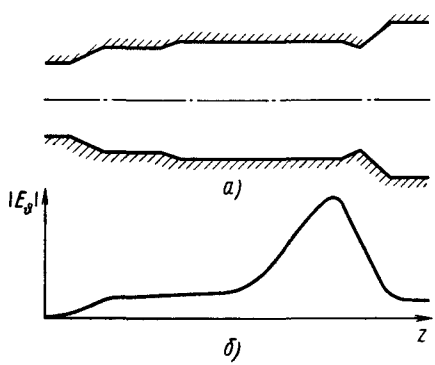



Рис. 11.28. Открытый резонатор сложной формы (*а*) и распределение в нем электрического поля основного вида колебаний (*б*)

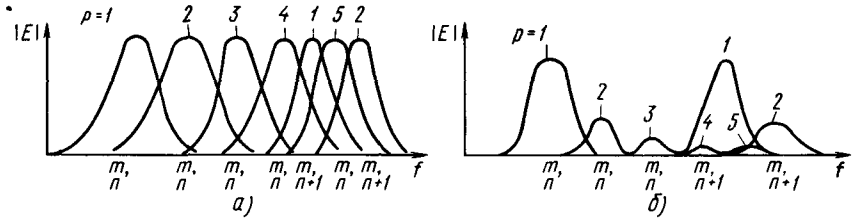



Рис. 11.29. Амплитудно-частотные характеристики закрытого (*а*) и открытого (*б*) волноводных резонаторов

$Q_0$. Переход на более высокую собственную частоту $\omega_0' = m\omega_0$ возможен следующими способами:

1) пропорциональным уменьшением всех размеров резонатора в $m$ раз. При этом вид колебаний сохраняется, его добротность снижается в $\sqrt{m}$ раз, объем резонатора и запасенная в нем энергия (при той же напряженности поля) уменьшаются в $m^3$ раз. Уже в миллиметровом диапазоне размеры резонатора становятся настолько малыми, что его трудно изготовить с требуемой точностью. Так, тороидальный резонатор (см. рис. 11.4, *а*) с собственной частотой основного вида колебаний $f_0 = 100$ ГГц ($\lambda_0 = 3$ мм) имеет диаметр $2a \approx 1{,}5$ мм, длину зазора $d \approx 0{,}15$ мм;

2) переходом на высшие виды колебаний с сохранением размеров резонатора. При этом в соответствии с (11.8) увеличивается плотность спектра. Начиная с некоторой частоты резонансные кривые различных видов колебаний в закрытом резонаторе оказываются так близко друг к другу, что наблюдается их перекрытие, т. е. резонатор теряет способность осуществлять частотную селекцию сигналов (рис. 11.29, *а*).

В открытом резонаторе высокую добротность имеют только колебания вида $E_{mn1}$ и $H_{mn1}$ (рис. 11.29, *б*). Поэтому плотность спектра высокодобротных колебаний открытого резонатора определяется формулой (6.51), в которую частота входит в первой, а не во второй степени, т. е. спектр открытого волноводного резонатора разрежен по третьему индексу, благодаря чему он сохраняет свои частотно-селективные свойства на более высоких частотах.

## § 11.8. ОТКРЫТЫЕ ЗЕРКАЛЬНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

При переходе в оптический диапазон плотность спектра открытых волноводных резонаторов становится слишком велика. Дальнейшее разрежение спектра может быть достигнуто путем удаления еще двух стенок резонатора, оболочка которого превращается, таким образом, в две металлические пластины, расположенные на расстоянии друг от друга (см. рис. 11.8). Такие пластины называются зеркалами, а сам резонатор — *открытым зеркальным резонатором*. Рассуждения, аналогичные

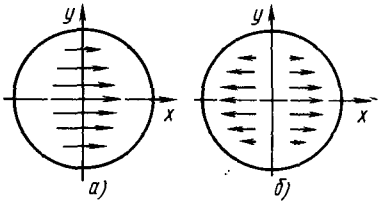



Рис. 11.30. Распределение тока по поверхности зеркал открытого резонатора:
*а* — для колебаний вида $EH_{m11}$; *б* — для колебаний вида $EH_{m21}$

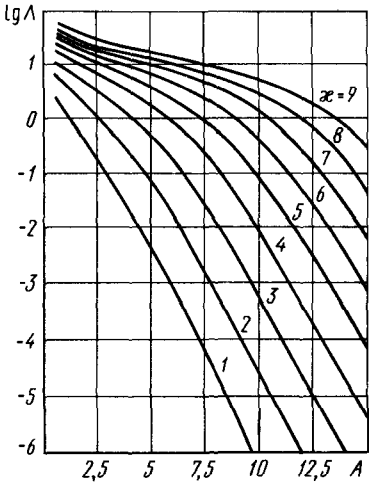



Рис. 11.31. Зависимости нормированного затухания от апертуры $A$ открытого резонатора с круглыми зеркалами

только что проделанным, показывают, что в таком резонаторе высокой добротностью обладают только колебания вида $HE_{m11}$ и $EH_{m11}$, т. е. разрежение спектра происходит по двум индексам. Собственная длина волны таких колебаний определяется формулой (11.52):

$$\lambda_{m11}=\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{l}\right)^2}}.$$

Если размеры зеркал и расстояния между ними сравнимы, а $m\gg 1$, то

$$\lambda_{m11}\approx\frac{2a}{m}, \qquad (11.80)$$

т. е. между зеркалами укладывается целое число полуволн. Расстояние между собственными частотами высокодобротных колебаний $\Delta f=\frac{c}{\lambda_{m+1,1,1}}-\frac{c}{\lambda_{m,1,1}}=\frac{c}{2a}$ не зависит от частоты, т. е. такой резонатор обладает эквидистантным спектром. Поэтому размеры резонатора могут на много порядков превышать его собственную длину волны. Аналогичными свойствами обладают и резонаторы с круглыми зеркалами. Распределение поля основных видов колебаний на поверхности зеркал таких резонаторов показано на рис. 11.30. Так как изменение амплитуды поля основного вида колебаний на зеркале незначительно (размер зеркала много меньше полупериода изменения поля), эти колебания обычно обозначают $H_{m00}$ и $E_{m00}$, при этом первый индекс часто опускают.

Добротность открытых резонаторов с плоскими зеркалами сильно зависит от степени их параллельности, что затрудняет изготовление и настройку (юстировку) резонаторов. Меньшей чувствительностью

к погрешностям изготовления обладают конфокальные резонаторы, сферические зеркала которых имеют общий фокус $F$ (рис. 11.6, *б*). В таких резонаторах, как и в бочкообразных, возможно образование каустик, что увеличивает их радиационную добротность.

На рис. 11.31 показана зависимость величины $\Lambda = k''l$, где $k''$ — мнимая часть собственного волнового числа колебаний видов $HE_{np}$ и $EH_{np}$ конфокального резонатора от его апертуры $A = ka^2/l$. Параметром этих зависимостей служит величина $\varkappa = n + 2p + 1$, $n$, $p = 0, 1, 2, \ldots$. Добротность резонатора

$$Q = \frac{\omega'}{2\omega''} = \frac{k'}{2k''} = \frac{\pi}{\Lambda}\frac{l}{\lambda}.$$

Открытые зеркальные резонаторы вследствие своей высокой добротности и простоты конструкции широко применяются в квантовых усилителях и генераторах оптического диапазона, а также в электронных приборах миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов.

**Контрольные вопросы**

1. Поясните принцип действия закрытого объемного резонатора, пользуясь методом парциальных волн.
2. Перечислите основные типы объемных резонаторов.
3. Сформулируйте математическую задачу расчета электромагнитного поля в объемном резонаторе. Дайте определение вида собственных колебаний.
4. Дайте определение и перечислите основные свойства спектра свободных колебаний объемного резонатора.
5. Дайте определение основных параметров объемного резонатора.
6. Опишите основные свойства призматических и цилиндрических объемных резонаторов. Укажите основные виды их собственных колебаний. Что такое «моды шепчущей галереи»?
7. Опишите основные свойства собственных колебаний в коаксиальных закрытых резонаторах.
8. Сформулируйте задачу расчета электромагнитного поля и параметров аксиально-симметричных резонаторов сложной формы. В чем отличие расчета азимутально-однородных и азимутально-неоднородных колебаний?
9. Опишите приближенные методы расчета параметров тороидальных и коаксиальных резонаторов с емкостным зазором.
10. Сформулируйте условия резонанса в многозазорных и кольцевых резонаторах. Как определяются собственные частоты отдельных видов колебаний этих резонаторов?
11. Опишите основные свойства диэлектрических резонаторов.
12. Опишите конструкцию открытых волноводных резонаторов и дайте определение их радиационной добротности.
13. Укажите основные факторы, характеризующие радиационную добротность открытых резонаторов. Что такое естественная добротность волновода?
14. Укажите особенности спектра собственных колебаний открытых волноводных резонаторов. Что такое «селекция мод» в открытом резонаторе?
15. Опишите конструкцию и перечислите основные свойства зеркальных открытых резонаторов. В чем состоят основные особенности их спектра?
16. Какими факторами определяется радиационная добротность конфокальных открытых резонаторов?

ГЛАВА 12

# ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В РЕЗОНАТОРАХ И ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ

## § 12.1. ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН В ВОЛНОВОДАХ

Электромагнитные поля в линиях передачи возбуждаются сторонними токами и полями, распределение которых в пространстве предполагается известным. Рассмотрим, в качестве примера, закрытую линию передачи (волновод), в объеме $V$ которой, ограниченном плоскостями $S_1(z=z_1)$ и $S_2(z=z_2)$, существует сторонний ток с заданной плотностью $\dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}}(\mathbf{r})$, а в оболочке $S_б$ волновода имеется отверстие, на поверхности которого $S_0$ задано стороннее электромагнитное поле $\dot{\mathbf{E}}_0$, $\dot{\mathbf{H}}_0$ (рис. 12.1). Напряженности сторонних полей и плотность тока изменяются во времени по гармоническому закону с заданной частотой $\omega$; $\dot{\mathbf{E}}_0$, $\dot{\mathbf{H}}_0$ и $\dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}}$ — их комплексные амплитуды.

Напряженность электромагнитного поля волновода удовлетворяет уравнениям Максвелла (1.31)—(1.34) и граничным условиям

$$\dot{\mathbf{E}}_\tau = 0 \text{ на } S_б, \quad \dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_0, \quad \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}_0 \text{ на } S_0. \tag{12.1}$$

Представим электромагнитное поле в тех частях волновода, где источники отсутствуют, т. е. при $z<z_1$ и $z>z_2$, в виде суперпозиции полей свободных волн:

$$\dot{\mathbf{E}} = \begin{cases} \sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m \dot{\mathbf{E}}_m, & z>z_2; \\ \sum\limits_{m=1}^{\infty} A_{-m} \dot{\mathbf{E}}_{-m}, & z<z_1; \end{cases} \tag{12.2}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \begin{cases} \sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m \dot{\mathbf{H}}_m, & z>z_2; \\ \sum\limits_{m=1}^{\infty} A_{-m} \dot{\mathbf{H}}_{-m}, & z<z_1. \end{cases} \tag{12.3}$$

Индексами $m$ и $-m$ в этих выражениях обозначены номера собственных волн, распространяющихся вправо и влево от

области $V$. Так как свойства падающих и отраженных волн одного и того же типа одинаковы, их постоянные распространения связаны соотношением

$$k_{z,-m}=-k_{zm}. \qquad (12.4)$$

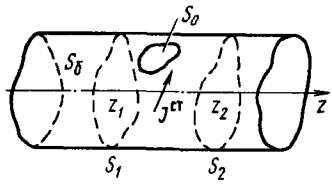



Рис. 12.1. Возбуждение линии передачи сторонними током и полем

Напряженность поля каждой свободной волны удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла на частоте $\omega$ и граничному условию

$$\dot{\mathbf{E}}_{m\tau}=0 \text{ на } S_б+S_0. \qquad (12.5)$$

Из выражений (12.2) и (12.3) следует, что для определения поля, создаваемого источниками вне области их существования (вне объема $V$), достаточно найти коэффициенты разложений $A_{\pm m}$. Воспользуемся для их вычисления леммой Лоренца (1.50), выбрав в качестве поля $\dot{\mathbf{E}}_1$, $\dot{\mathbf{H}}_1$ поле волновода $\dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{H}}$, а в качестве поля $\dot{\mathbf{E}}_2$, $\dot{\mathbf{H}}_2$ — поле собственной волны $\dot{\mathbf{E}}_m$, $\dot{\mathbf{H}}_m$. Учитывая (12.2) и (12.3), получим

$$-\sum_{n=1}^{\infty} A_{-n}\int_{S_1}\{[\dot{\mathbf{E}}_{-n},\dot{\mathbf{H}}_m]-[\dot{\mathbf{E}}_m,\dot{\mathbf{H}}_{-n}]\}\mathbf{e}_z\,dS+\sum_{n=1}^{\infty} A_n\int_{S_2}\{[\dot{\mathbf{E}}_n,\dot{\mathbf{H}}_m]-[\dot{\mathbf{E}}_m,\dot{\mathbf{H}}_n]\}\mathbf{e}_z\,dS+$$

$$+\int_{S_б}\{[\dot{\mathbf{E}},\dot{\mathbf{H}}_m]-[\dot{\mathbf{E}}_m,\dot{\mathbf{H}}]\}\,dS=\int_V \dot{\mathbf{J}}^{ст}\dot{\mathbf{E}}_m\,dV.$$

Используя обобщенное соотношение ортогональности (6.58), а также граничные условия (12.1) и (12.5), найдем

$$A_{-m}=N_{cm}^{-1}\left(\int_V \dot{\mathbf{J}}^{ст}\dot{\mathbf{E}}_m\,dV-\int_{S_0}[\dot{\mathbf{E}}_0,\dot{\mathbf{H}}_m]\mathbf{e}_z\,dS\right). \qquad (12.6)$$

Положив теперь $\dot{\mathbf{E}}_2=\dot{\mathbf{E}}_{-m}$, $\dot{\mathbf{H}}_2=\dot{\mathbf{H}}_{-m}$, запишем

$$A_m=N_{cm}^{-1}\left(\int_V \dot{\mathbf{J}}^{ст}\dot{\mathbf{E}}_{-m}\,dV+\int_{S_0}[\dot{\mathbf{E}}_0,\dot{\mathbf{H}}_{-m}]\mathbf{e}_z\,dS\right). \qquad (12.7)$$

При выводе равенства (12.6) учтено, что, как следует из (6.58), $N_{c-m}=-N_{cm}$.

На практике возбуждение линий передачи часто производится сторонним полем $\dot{\mathbf{E}}_0$, заданным на отверстии $S_0$ в поперечном сечении линии передачи $S$ (рис. 12.2). На остальной части этого сечения стороннее электромагнитное поле отсутствует.

Запишем выражение для электромагнитного поля в волноводе в виде рядов (12.2), (12.3), в которых коэффициенты $A_{-m}=0$ (волны, отраженные от правого конца линии передачи, отсутствуют). Применим к объему $V$, ограниченному боковой поверхностью линии передачи, сечением $S$ и сечением $S_1$, находящимся на произвольном расстоянии от $S$ (рис. 12.2), лемму Лоренца. Проделав вычисления, аналогичные предыдущему случаю, получим

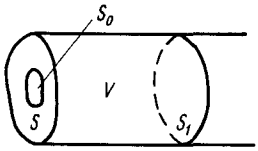



Рис. 12.2. Возбуждение линии передачи сторонним полем отверстия в торцевой крышке

$$A_m = \frac{1}{N_{em}} \int_{S_0} [\dot{\mathbf{E}}_0, \dot{\mathbf{H}}_{-m}]\,\mathbf{e}_z\,dS. \qquad (12.8)$$

Если отверстие в поперечном сечении линии передачи возбуждает волны, распространяющиеся в сторону отрицательных значений оси $z$, коэффициенты возбуждения

$$A_{-m} = -\frac{1}{N_{em}} \int_{S_0} [\dot{\mathbf{E}}_0, \dot{\mathbf{H}}_m]\,\mathbf{e}_z\,dS. \qquad (12.9)$$

Формулы (12.6)—(12.9) позволяют рассчитать амплитуды волн, возбуждаемых в линии передачи сторонними полями и токами. Как видно, для возбуждения данного типа волны с максимальной интенсивностью необходимо, чтобы направление вектора плотности возбуждающего тока совпадало с направлением вектора напряженности электрического поля волны, а его область существования находилась в максимуме этого поля.

Возбуждение линии передачи сторонним полем, заданным на отверстии в ее оболочке, осуществляется только касательной составляющей вектора напряженности электрического поля, если для свободных волн на оболочке выполняется граничное условие $\mathbf{E}_\tau = 0$. Отверстие должно находиться в области максимального значения касательной составляющей магнитного поля данного типа волны, а направления векторов возбуждающего поля $\dot{\mathbf{E}}_{0\tau}$ и поля волны $\dot{\mathbf{H}}_{m\tau}$ должны быть взаимно перпендикулярны.

## § 12.2. ЭЛЕМЕНТЫ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Для создания сторонних токов и полей, возбуждающих волны в линии передачи, используются различные способы. В электронных приборах СВЧ в качестве стороннего выступает ток движущихся заряженных частиц. В технике СВЧ сторонние токи и поля в линии передачи создаются специальными *элементами возбуждения* (*связи*). Наиболее распространенными из них являются штыри, петли и отверстия (щели) (рис. 12.3).

Электрический ток в тонком штыре с достаточной степенью точности можно считать линейным. При этом выражение для интеграла возбуждения упрощается:

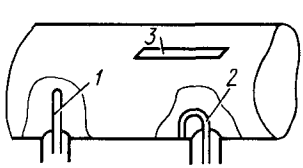



Рис. 12.3. Элементы возбуждения:
*1* — штырь; *2* — петля; *3* — щель

$$\int_V \dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}} \dot{\mathbf{E}}_{\pm m}\,dV = \int_0^h \dot{I}(l)\,\dot{\mathbf{E}}_{\pm m}\,dl, \qquad (12.10)$$

где $\dot{I}(l)$ — распределение тока по его длине; интегрирование ведется по оси штыря.

Из этого выражения следует, что для возбуждения данного типа волны штырь должен располагаться параллельно си-

ловым линиям ее электрического поля в том месте волновода, где амплитуда напряженности этого поля максимальна. Данный тип волны не возбуждается штырем, если последний расположен перпендикулярно силовым линиям электрического поля, или в том месте волновода, где напряженность этого поля равна нулю.

Рассмотрим петлю, выполненную из тонкого провода. Интеграл возбуждения поля такой петлей определяется выражением (12.10). Если размеры петли малы по сравнению с длиной волны, то амплитуду тока в ней можно считать постоянной: $\dot{I}(l)=\dot{I}_{\text{п}}$. В этом случае

$$\int_V \dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}}\dot{\mathbf{E}}_m dV=\dot{I}_{\text{п}}\oint_l \dot{\mathbf{E}}_m d\mathbf{l}=\dot{I}_{\text{п}}\int_{S_{\text{п}}} \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_m d\mathbf{S}=-i\omega\dot{I}_0\int_{S_{\text{п}}}\mu\dot{\mathbf{H}}_m d\mathbf{S}=-i\omega\dot{\mathbf{I}}_0\dot{\Phi}_{\text{п}m}, \quad (12.11)$$

где $\dot{\Phi}_{\text{п}m}=\int_{S_{\text{п}}}\mu\dot{\mathbf{H}}_m d\mathbf{S}$ — поток магнитной индукции через поверхность $S_{\text{п}}$, натянутую на петлю.

Таким образом, для возбуждения данного типа волны петлю необходимо располагать так, чтобы плоскость ее витка была перпендикулярна силовым линиям магнитной индукции поля волны. При повороте плоскости петли относительно силовых линий поля амплитуда возбуждаемой волны плавно меняется от максимального значения до нуля, когда плоскость петли параллельна силовым линиям и поток магнитной индукции через нее равен нулю.

Вычисление амплитуды волны, возбуждаемой электромагнитным полем отверстия в стенке волновода, не представляет трудностей, если известна касательная составляющая электрического поля отверстия. Обычно, однако, поле отверстия заранее не известно, что существенно усложняет расчет.

Проанализируем возбуждение электромагнитных волн в линии передачи *1* с помощью отверстия $S_0$ в бесконечно тонкой стенке (диафрагме) *2* (рис. 12.4, *а*). Поле в отверстии возникает под действием стороннего поля, существующего вне линии передачи (область *2* на рис. 12.4, *а*). Им может быть поле другой линии передачи, резонатора или волны в свободном пространстве, падающей на диафрагму. Предполагается, что в отсутствие отверстия стороннее поле $\mathbf{E}^{\text{ст}}$, $\mathbf{H}^{\text{ст}}$ известно и удовлетворяет граничным условиям $\mathbf{E}_\tau^{\text{ст}}=\mathbf{H}_n^{\text{ст}}=0$ на идеально проводящей поверхности, закрывающей отверстие в диафрагме.

При наличии отверстия указанные граничные условия не имеют места, вследствие чего возбуждающее поле искажается. При

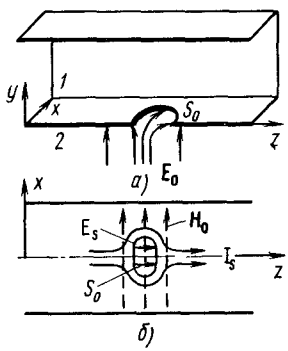



Рис. 12.4. Возбуждение тангенциального электрического поля отверстия заданным электрическим (*а*) и магнитным (*б*) полями

этом касательная составляющая электрического поля на отверстии возникает как за счет возмущения нормальной составляющей электрического поля, так и вследствие разрыва линий поверхностного тока, возбуждаемого касательной составляющей невозмущенного магнитного поля (рис. 12.4, *б*).

Как следует из теории дифракции, электрическое и магнитное поля отверстия совпадают с полями электрического и магнитного диполей, моменты которых $\mathbf{P}^e$ и $\mathbf{P}^m$ определяются невозмущенным сторонним полем и конфигурацией отверстия:

$$\dot{\mathbf{P}}^e = \varepsilon p \dot{\mathbf{E}}_{0n} \mathbf{e}_n; \quad \dot{P}_m = -\mu_0 (M_1 \dot{H}_{01} \mathbf{e}_1 + M_2 \dot{H}_{02} \mathbf{e}_2), \qquad (12.12)$$

где $\mathbf{e}_n$ — орт нормали к плоскости отверстия, направленный из области *1* в область *2*; $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — орты ортогональной системы координат, введенной на отверстии; $\dot{E}_{0n}$, $\dot{H}_{01}$, $\dot{H}_{02}$ — нормальная и касательные составляющие напряженности невозмущенного стороннего поля в центре отверстия; $p$, $M_1$ и $M_2$ — *коэффициенты поляризуемости*, значения которых определяются размером и формой отверстия. Для малого по сравнению с длиной волны круглого отверстия диаметром $a$ $p = a^3/16$, $M_1 = M_2 = a^3/6$. Для вытянутой эллиптической щели с осями $a$ и $b$ $p = M_2 = \pi a b^2/16$, $M_1 = \pi a^3/[16 \ln(4a/b - 1)]$ (предполагается, что длинная ось эллипса $a$ параллельна орту $\mathbf{e}_1$ и $a \ll \lambda$). Если размеры отверстия соизмеримы с длиной волны, то коэффициенты поляризуемости необходимо поделить на выражение $[1 - (\lambda/\lambda_c)^2]$, где $\lambda_c$ — критическая длина основного типа волны в волноводе, имеющем такое же поперечное сечение, как и отверстие. Для узкой щели длиной $a$ $\lambda_c \approx 2a$.

Конечная толщина диафрагмы $t$ ухудшает условия возбуждения. Это явление учитывается умножением коэффициентов возбуждения на множитель

$$\exp\left[-\frac{2{,}73At}{\lambda_c}\sqrt{1-(\lambda_c/\lambda)^2}\right],$$

где $A$ — постоянная, примерно равная 1 для круглой диафрагмы и 3 для узкой щели при $t < 0{,}02a$. С увеличением $t$ значение постоянной $A$ уменьшается. Таким образом, эффективный коэффициент магнитной поляризуемости отверстия в толстой диафрагме

$$M^e_{1,2} = \frac{M_{1,2}}{1-(\lambda_c/\lambda)^2}\exp\left[-\frac{2{,}73At}{\lambda_c}\sqrt{1-(\lambda_c/\lambda)^2}\right].$$

Коэффициенты поляризуемости отверстий более сложной формы приведены в [9].

Вычислив касательные составляющие электрического поля моментов $\dot{\mathbf{P}}^e$ и $\dot{\mathbf{P}}^m$ в плоскости диафрагмы, определим интеграл возбуждения. В том случае, когда поле собственной волны линии передачи на отверстии можно считать постоянным, выражение для интеграла возбуждения имеет вид

$$\int_{S_0}[\dot{\mathbf{E}}_\tau, \dot{\mathbf{H}}_m]\,dS = 2i\omega(\dot{P}^e\dot{\mathbf{E}}_{m0} + \dot{P}^m\dot{\mathbf{H}}_{m0}), \qquad (12.13)$$

где $\dot{\mathbf{E}}_{m0}$, $\dot{\mathbf{H}}_{m0}$ — напряженности поля собственной волны линии передачи в центре отверстия.

## § 12.3. ВОЗБУЖДЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ В ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРАХ

Рассмотрим электромагнитные колебания в замкнутом объеме $V$ (ограниченном поверхностью $S$; рис. 12.5), возбуждаемые сторонним током плотностью $\dot{\mathbf{J}}_{ст}$, а также сторонним полем $\dot{\mathbf{E}}_{отв}$, заданным на отверстии $S_0$ в оболочке резонатора $S$. Заполняющую объем $V$ среду считаем однородной и изотропной. Электромагнитное поле в резонаторе удовлетворяет уравнениям Максвелла на частоте возбуждения $\omega$:

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} = i\omega\varepsilon\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{J}}^{ст}; \qquad (12.14)$$

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} = -i\omega\mu\dot{\mathbf{H}}. \qquad (12.15)$$

На поверхности резонатора $S$ выполняются граничные условия

$$\dot{\mathbf{E}}_\tau = 0 \text{ на } S - S_0, \quad \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_{отв} \text{ на } \mathbf{S}_0. \qquad (12.16)$$

Будем искать решения уравнений (12.14), (12.15) в виде разложений по собственным функциям резонатора $\dot{\mathbf{E}}_m$, $\dot{\mathbf{H}}_m$:

$$\dot{\mathbf{E}} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\dot{\mathbf{E}}_m; \quad \dot{\mathbf{H}} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m\dot{\mathbf{H}}_m. \qquad (12.17)$$

Эти функции удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла на собственных частотах $\omega_m$, которые удобно записать для комплексно-сопряженных значений:

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_m^* = -i\omega_m^*\varepsilon^*\mathbf{E}_m^*; \qquad (12.18)$$

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_m^* = i\omega_m^*\mu^*\dot{\mathbf{H}}_m, \qquad (12.19)$$

а также однородным граничным условиям на поверхности резонатора $S$:

$$\dot{\mathbf{E}}_{m\tau}^* = 0. \qquad (12.20)$$

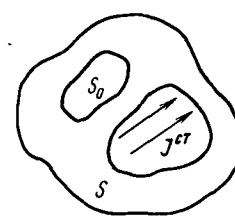


Рис. 12.5. Возбуждение резонатора сторонними токами и полями

В разложения (12.17) включены как вихревые ($m \geqslant 1$), так и потенциальные ($m = 0$) собственные функции. Для последних $\omega_m = \omega_0 = 0$ (см. § 11.3).

Для вычисления коэффициентов разложения $a_m$ и $b_m$ помножим скалярно уравнение (12.14) на $\dot{\mathbf{E}}_m^*$, а уравнение (12.19) на $\dot{\mathbf{H}}$ и вычтем второе соотношение из первого:

$$\dot{\mathbf{E}}_m^*\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_m^* = i\omega\dot{\mathbf{E}}_m^*\varepsilon\dot{\mathbf{E}} - i\omega_m^*\dot{\mathbf{H}}\mu^*\dot{\mathbf{H}}_m^* + \dot{\mathbf{J}}^{ст}\dot{\mathbf{E}}_m^*.$$

Проделаем аналогичные преобразования с уравнениями (12.15) и (12.18), помножив первое на $\dot{\mathbf{H}}_m^*$, а второе на $\dot{\mathbf{E}}$:

$$\dot{\mathbf{H}}_m^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_m^* = -i\omega \dot{\mathbf{H}}_m^* \mu \dot{\mathbf{H}} + i\omega_m^* \dot{\mathbf{E}} \varepsilon^* \dot{\mathbf{E}}_m^*.$$

Преобразуем левую часть полученных равенств с помощью векторного тождества (П.7) и проинтегрируем их по объему резонатора $V$. Подставив вместо $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ их разложения (12.17), получим

$$\oint_S [\dot{\mathbf{H}}, \dot{\mathbf{E}}_m^*] \, d\mathbf{S} = i\omega \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_V \dot{\mathbf{E}}_m^* \varepsilon \dot{\mathbf{E}}_n \, dV + \int_V \dot{\mathbf{J}}^{ст} \dot{\mathbf{E}}_m^* \, dV - i\omega_m^* \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_V \dot{\mathbf{H}}_n \mu^* \dot{\mathbf{H}}_m^* \, dV;$$

$$\oint_S [\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}_m^*] \, d\mathbf{S} = -i\omega \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_V \dot{\mathbf{H}}_m^* \mu \dot{\mathbf{H}}_n \, dV + i\omega_m^* \sum_{n=1}^{\infty} a_m \int_V \dot{\mathbf{E}}_n \varepsilon^* \dot{\mathbf{E}}_m^* \, dV.$$

Из граничного условия (12.20) следует, что левая часть первого равенства равна нулю. Подынтегральное выражение в левой части второго равенства отлично от нуля только на отверстии $S_0$. Таким образом, согласно условиям нормировки (11.11), получим

$$N_m \left( \omega \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|} a_m - \omega_m^* \frac{\mu^*}{|\mu|} b_m \right) = i \int_V \dot{\mathbf{J}}^{ст} \dot{\mathbf{E}}_m^* \, dV;$$

$$N_m \left( \omega_m^* \frac{\varepsilon^*}{|\varepsilon|} a_m - \omega \frac{\mu}{|\mu|} b_m \right) = -i \int_{S_0} [\dot{\mathbf{E}}_{отв}, \dot{\mathbf{H}}_m^*] \, d\mathbf{S}.$$

Исключая из этих уравнений по очереди $b_m$, $a_m$ и используя (11.10), найдем коэффициенты разложения:

$$a_m = \frac{i|\varepsilon|/\varepsilon}{(\omega^2 - \omega_m^2) N_m} \left( \omega \int_V \dot{\mathbf{J}}^{ст} \dot{\mathbf{E}}_m^* \, dV + \omega_m^* \frac{\mu^*}{\mu} \int_{S_0} [\dot{\mathbf{E}}_{отв}, \dot{\mathbf{H}}_m^*] \, dS \right); \qquad (12.21)$$

$$b_m = \frac{i|\mu|/\mu}{(\omega^2 - \omega_m^2) N_m} \left( \omega_m^* \frac{\varepsilon^*}{\varepsilon} \int_V \dot{\mathbf{J}}^{ст} \dot{\mathbf{E}}_m^* \, dV + \omega \int_{S_0} [\dot{\mathbf{E}}_{отв}, \dot{\mathbf{H}}_m^*] \, dS \right). \qquad (12.22)$$

Интегралы возбуждения в этих выражениях аналогичны тем, которые содержатся в (12.6), (12.7). Поэтому для возбуждения колебаний в резонаторах применяют такие же элементы, как и для возбуждения волн в волноводе. Одинаковы и принципы размещения этих элементов в резонаторах и волноводах.

Формулы для амплитудных коэффициентов потенциальных полей имеют вид

$$a_0 = \frac{i|\varepsilon|}{\omega \varepsilon N_0} \int_V \dot{\mathbf{J}}^{ст} \dot{\mathbf{E}}_0^* \, dV; \qquad (12.23)$$

$$b_0 = \frac{i|\mu|}{\omega\mu N_0} \int_{S_0} [\dot{\mathbf{E}}_{\text{отв}}, \dot{\mathbf{H}}_0^*] \, dS. \tag{12.24}$$

Таким образом, потенциальное электрическое поле существует в резонаторе при наличии стороннего тока. Чтобы выяснить причину появления этого поля, преобразуем интеграл возбуждения для $a_0$, используя векторное тождество (П.6):

$$\int_V \dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}} \dot{\mathbf{E}}_0^* dV = -\int_V \dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}} \operatorname{grad} \dot{\varphi}^{e^*} dV = -\int_V \operatorname{div}(\dot{\varphi}^{e^*} \dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}}) dV + \int_V \dot{\varphi}^{e^*} \operatorname{div} \dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}} dV =$$

$$= -\oint_S \dot{\varphi}^{e^*} \dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}} dS + \int_V \dot{\varphi}^{e^*} \operatorname{div} \dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}} dV.$$

Так как на идеально проводящей поверхности резонатора $\varphi^e = 0$, с учетом (1.37) найдем

$$a_0 = \frac{i|\varepsilon|}{\omega\varepsilon N_0} \int_V \dot{\varphi}^{e^*} \operatorname{div} \dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}} dV = \frac{|\varepsilon|}{\varepsilon N_0} \int_V \dot{\varphi}^{e^*} \dot{\rho}^{\text{ст}} dV.$$

Следовательно, потенциальное электрическое поле есть поле пространственного заряда, связанного со сторонним током. Если амплитуда стороннего тока в резонаторе постоянна, то $\operatorname{div} \dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}} = 0$, и потенциальное электрическое поле в резонаторе отсутствует.

Потенциальное магнитное поле существует в резонаторах при наличии отверстий в стенке резонатора. Его можно рассматривать как магнитное поле отверстия, «провисающее» в резонатор. Кроме того, как показано в § 11.3, в многосвязных резонаторах и резонаторах с изолированными идеально проводящими телами возможно существование гармонических электрического и магнитного полей.

Из выражения (12.24) следует, что коэффициенты возбуждения потенциальных полей обратно пропорциональны частоте. Частотная зависимость коэффициентов возбуждения вихревых полей имеет более сложный характер и определяется знаменателем выражений (12.21) и (12.22). Представим его в более удобном для анализа виде:

$$\omega^2 - \omega_m^2 = \omega^2 - (\omega_m' + i\omega_m'')^2 = \omega^2 - \omega_m'^2 + \omega_m''^2 - 2i\omega_m'\omega_m'',$$

откуда

$$\omega^2 - \omega_m^2 = \omega^2 - \omega_{m0}^2 - i\omega_m'^2/Q_m, \tag{12.25}$$

где

$$\omega_{m0} = \omega_m' \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_m^2}} \tag{12.26}$$

— резонансная частота $m$-го вида колебаний, которая при $Q_m \geqslant 15$ практически совпадает с действительной частью собственной частоты. Введя *обобщенную расстройку*

$$\xi_m = Q_m\left(\frac{\omega}{\omega_{m0}} - \frac{\omega_{m0}}{\omega}\right), \tag{12.27}$$

запишем

$$\omega^2 - \omega_{m0}^2 = \frac{\omega\omega_{m0}}{Q_m}\xi_m.$$

На частотах, близких к резонансной, можно положить $\omega_m'^2 \approx \omega\omega_{m0}$. При этом выражение (12.25) примет вид

$$\omega^2 - \omega_m^2 = \frac{\omega\omega_{m0}}{Q_m}(\xi_m - i). \tag{12.28}$$

Подставив выражение (12.28) в (12.21) и (12.22), определим модули коэффициентов возбуждения:

$$|a_m| = \frac{Q_m N_m^{-1}}{\omega\omega_{m0}\sqrt{\xi_m^2+1}}\left|\omega\int_V \dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}}\dot{\mathbf{E}}_m^* dV + \omega_m^*\int_{S_0}[\dot{\mathbf{E}}_{\text{отв}}, \dot{\mathbf{H}}_m^*]\,d\mathbf{S}\right|; \tag{12.29}$$

$$|b_m| = \frac{Q_m N_m^{-1}}{\omega\omega_{m0}\sqrt{\xi_m^2+1}}\left|\omega_m^*\int_V \dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}}\dot{\mathbf{E}}_m^* dV + \omega\int_{S_0}[\dot{\mathbf{E}}_{\text{отв}}, \dot{\mathbf{H}}_m^*]\,d\mathbf{S}\right|. \tag{12.30}$$

При заданных возбуждающих токах и полях амплитуда данного вида колебаний в резонаторе пропорциональна его добротности. Максимальное значение амплитуд достигается при $\xi_m = 0$, т. е. когда частота возбуждения $\omega$ совпадает с резонансной частотой данного вида колебаний $\omega_{m0}$. При $\xi_m = 1$ амплитуда колебаний в резонаторе составляет $1/\sqrt{2} \approx 0{,}7$ от максимальной. Положив в (12.27) $\xi_m = 1$, найдем

$$Q_m = 1\Big/\left(\frac{\omega}{\omega_{m0}} - \frac{\omega_{m0}}{\omega}\right) \approx \frac{\omega_{m0}}{2\Delta\omega},$$

где $\Delta\omega$ — полуширина резонансной кривой, определенная по уровню 0,7. Это равенство справедливо только для резонаторов с высокой добротностью.

Предположим, что резонансная частота $\omega_{m0}$ данного (рабочего) вида колебаний достаточно сильно отличается от резонансных частот остальных видов колебаний, так что при $\xi_m \leqslant 1$ обобщенные расстройки остальных видов колебаний $\xi_n \gg 1$, $n \neq m$. Это условие выполняется тем легче, чем более разрежен спектр колебаний.

Как следует из выражений (12.29) и (12.30), при выполнении указанных условий амплитуда рабочего вида колебаний в резонаторе значительно превышает амплитуды колебаний остальных видов, что позволяет в разложениях (12.17) пренебречь всеми членами, кроме резонансного:

$$\dot{\mathbf{E}} \approx a_m \dot{\mathbf{E}}_m; \quad \dot{\mathbf{H}} \approx b_m \dot{\mathbf{H}}_m. \tag{12.31}$$

Распределение поля вынужденных колебаний в этом приближении совпадает с распределением поля свободных колебаний соответствующего вида, а зависимость амплитуды от частоты имеет такой же характер, как и для колебательного контура. В этом смысле резонатор эквивалентен колебательному контуру. Эквивалентность нарушается, если данный вид колебаний вырожден или участок спектра вблизи него содержит слишком много резонансных частот.

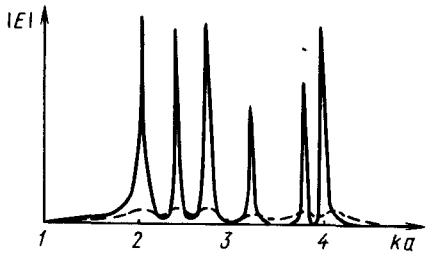



Рис. 12.6. Амплитудно-частотная характеристика закрытого цилиндрического резонатора:
——— $Q = 500$; — — — — — $Q = 10$

На рис. 12.6 показана зависимость напряженности электрического поля в фиксированной точке объема цилиндрического резонатора от частоты (амплитудно-частотная характеристика) для двух значений добротности (для простоты приняты одинаковыми добротности всех видов колебаний). Возбуждение резонатора осуществляется с помощью малой петли, расположенной в месте соединения боковой и торцевой стенок. Такое положение позволяет возбуждать практически все виды колебаний с примерно одинаковыми значениями интеграла возбуждения, так как азимутальная или радиальная составляющая магнитного поля всех видов колебаний у торцевой стенки максимальна. При большой добротности резонатора на его характеристике наблюдаются узкие пики, соответствующие резонансам тех или иных видов колебаний. При малой добротности амплитудно-частотная характеристика имеет плавную форму и на ней отсутствуют интервалы частот, где поле того или иного вида колебаний преобладает.

При более строгом рассмотрении наряду с вихревыми собственными функциями следует учитывать и потенциальные поля элементов связи резонатора с внешними цепями. Энергия, запасенная в потенциальных полях, эквивалентна энергии, запасенной в некотором реактивном элементе (конденсаторе или катушке индуктивности). Примеры расчета параметров таких элементов приведены в § 12.4.

## § 12.4. РАСЧЕТ ВЫНУЖДЕННЫХ ВОЛН (КОЛЕБАНИЙ) В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ И РЕЗОНАТОРАХ

Используем изложенную в предыдущих параграфах методику для расчета амплитуд колебаний и волн, возбуждаемых в резонаторах и линиях передачи различными элементами возбуждения (связи). В качестве первого примера рассмотрим прямоугольный волновод, в котором установлена диафрагма с малым отверстием (рис. 12.7). На диафрагму падает волна типа $H_{10}$ заданной амплитуды. Необходимо определить амплитуду волны за диафрагмой, возбуждаемой отверстием.

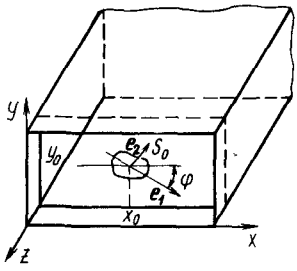



Рис. 12.7. Прямоугольный волновод, возбуждаемый отверстием в диафрагме

Коэффициенты возбуждения волн в отрезке линии передачи, находящемся справа от диафрагмы, определяются выражением (12.8). В соответствии с формулой (12.13) оно преобразуется к виду

$$A_m=\frac{i\omega}{N_{em}}\left(-\dot{\mathbf{P}}^e\dot{\mathbf{E}}_{m0}+\dot{\mathbf{P}}^m\mathbf{H}_{m0}\right). \qquad (12.32)$$

Для волны типа $H_{10}$

$$\dot{\mathbf{E}}_{m0}=-\frac{ikaZ_0}{\pi}\sin\frac{\pi x_0}{a}\mathbf{e}_y e^{-i\beta_m z};$$

$$\dot{\mathbf{H}}_{m0}=\left(\frac{i\beta_m a}{\pi}\sin\frac{\pi x_0}{a}\mathbf{e}_x+\cos\frac{\pi x_0}{a}\mathbf{e}_z\right)e^{-i\beta_m z};$$

$$N_{em}=\int_S([\dot{\mathbf{E}}_m\dot{\mathbf{H}}_{-m}]-[\dot{\mathbf{E}}_{-m},\dot{\mathbf{H}}_m])\mathbf{e}_z\,dS=2\int_S\dot{E}_{my}\dot{H}_{mx}\,dS=\frac{kb_m a^3bZ_0}{\pi^2}.$$

Электрический и магнитный дипольные моменты, входящие в выражение (12.32), найдем по формуле (12.12), в которую входят напряженности невозмущенного возбуждающего поля. При отсутствии отверстия в диафрагме оно представляет собой суперпозицию падающей и отраженной волн:

$$\dot{\mathbf{E}}_0=\dot{\mathbf{E}}_m+\Gamma\dot{\mathbf{E}}_{-m};\ \dot{\mathbf{H}}_0=\dot{\mathbf{H}}_m-\Gamma\dot{\mathbf{H}}_{-m},$$

где $\Gamma=-1$ — коэффициент отражения от идеально проводящей диафрагмы без отверстия. Обозначим заданную амплитуду падающей волны через $B_m=1$. Так как $\beta_m=-\beta_m$, в плоскости диафрагмы ($z=0$)

$$\dot{\mathbf{E}}_0=0;\ \dot{\mathbf{H}}_0=\frac{2i\beta_m a}{\pi}\sin\frac{\pi x_0}{a}\mathbf{e}_x.$$

Подставив эти выражения в (12.12), получим

$$\dot{\mathbf{P}}^e=0;\ \dot{\mathbf{P}}^m=-\mu_0(M_1\cos\varphi\mathbf{e}_1+M_2\sin\varphi\mathbf{e}_2)\dot{H}_{0x}(x_0),$$

где $\varphi$ — угол между осью симметрии отверстия и осью $x$ (рис. 12.7); $x_0$ — координата центра отверстия.

Таким образом,

$$A_m=\frac{2i\omega}{N_{em}}\left[-\mu_0(M_1\cos\varphi\mathbf{e}_1+M_2\sin\varphi\mathbf{e}_2)\dot{H}_{0x}(x_0)\dot{H}_{m0}(x_0)=\right.$$

$$\left.=\frac{8\pi i}{ab\lambda_g}(M_1\cos^2\varphi+M_2\sin^2\varphi)\sin^2\frac{\pi x_0}{a}\right]. \qquad (12.33)$$

Полученное выражение позволяет найти коэффициент передачи энергии из одного волновода в другой:

$$K=|A_m|^2=\frac{64\pi^2}{a^2b^2\lambda_g^2}(M_1\cos^2\varphi+M_2\sin^2\varphi)^2\sin^4\frac{\pi x_0}{a}. \qquad (12.34)$$

В качестве второго примера рассмотрим возбуждение колебаний в объемном резонаторе с помощью петли связи, соединенной с коаксиальной линией передачи (рис. 12.8). Поле вынужденных колебаний в резонаторе в соответствии с (12.17) представим в виде разложения по его собственным функциям $\dot{\mathbf{E}}_m$, $\dot{\mathbf{H}}_m$:

$$\dot{\mathbf{E}}=\sum_{m=1}^{\infty} a_m \dot{\mathbf{E}}_m + a_0 \dot{\mathbf{E}}_0;\quad \dot{\mathbf{H}}=\sum_{m=1}^{\infty} b_m \dot{\mathbf{H}}_m + b_0 \dot{\mathbf{H}}_0, \qquad (12.35)$$

где $\dot{\mathbf{E}}_0$ — напряженность потенциального электрического поля, обусловленного наличием в резонаторе стороннего тока; $\dot{\mathbf{H}}_0$ — напряженность гармонического магнитного поля, возникающего вследствие того, что при наличии петли связи резонатор представляет собой двухсвязную область (см. § 11.3).

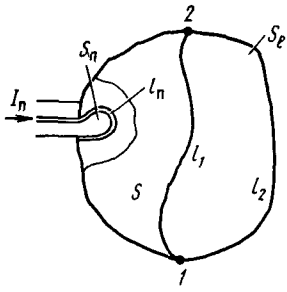


Рис. 12.8. Возбуждение объемного резонатора петлей связи

Если размеры петли малы по сравнению с длиной волны и она выполнена из тонкого провода, то ток в проводнике петли можно считать линейным, а его амплитуду одинаковой в любом сечении проводника петли: $\dot{I}_п(l)=\dot{I}_п$. В этом случае $\operatorname{div}\dot{\mathbf{J}}^{ст}=0$ и $a_0=0$ (см. § 12.3). Гармоническое магнитное поле напряженностью $\dot{\mathbf{H}}_0$ связано со скалярным магнитным потенциалом: $b_0\dot{\mathbf{H}}_0=-\operatorname{grad}\dot{\varphi}^m$. Последний удовлетворяет уравнению Лапласа (11.13) с граничными условиями $\partial\dot{\varphi}^m/\partial n=0$ на оболочке резонатора $S_0$ и поверхности $S_п$, натянутой на петлю связи. Так как по петле течет ток $\dot{I}_п$, магнитный потенциал на поверхности терпит разрыв:

$$\dot{\varphi}_2^m-\dot{\varphi}_1^m=\dot{I}_п. \qquad (12.36)$$

Уравнение (11.13) с граничными условиями (12.36) характеризует магнитное поле постоянного тока $\dot{I}_п$, текущего по петле. Отношение потока магнитной индукции этого поля через поверхность $S_п$ к току $\dot{I}_п$ есть статическая индуктивность петли $L_п$ с учетом влияния стенок резонатора:

$$L_п=\dot{I}_п^{-1}\int_{S_п}\mu b_0\dot{\mathbf{H}}_0 d\mathbf{S}. \qquad (12.37)$$

Аналитическое решение уравнения (11.13) в большинстве случаев невозможно ввиду сложной конфигурации резонатора и петли связи. Поэтому индуктивность петли обычно рассчитывается приближенными методами (см. Приложении 6).

Рассмотрим вихревую часть поля. Из формул (12.11), (12.22) следует, что

$$b_m=-\frac{\omega_m^{*2}}{\omega^2-\omega_m^2}\,\frac{\varepsilon^*|\mu|}{\varepsilon\mu}\,\frac{\dot{\Phi}_{пm}^*}{N_m}\,\dot{I}_п. \qquad (12.38)$$

В соответствии с выражением (11.10) $\varepsilon\mu=\omega_m^{*2}\varepsilon^*\mu^*/\omega_m^2$. Используя это соотношение, а также выражение (11.28), получим

$$b_m=-\frac{\omega_m^2 Q_m}{\omega\omega_{m0}(\xi-\mathrm{i})}\,\frac{|\mu|}{\mu^*}\,\frac{\dot{\Phi}_{пm}^*}{N_m}\,\dot{I}_п. \qquad (12.39)$$

При малых расстройках и отсутствии вырождения $m$-го вида колебаний в разложениях (12.35) всеми членами, кроме резонансного и гармонического, можно пренебречь. Вычислим в этом приближении полное сопротивление петли связи: $Z_п=-\mathscr{E}_п/\dot{I}_п$, где $\mathscr{E}_п$ — ЭДС, наводимая в петле полем резонатора. По закону магнитной индукции

$$\dot{U}_п=-\mathrm{i}\omega\dot{\Phi}_п=-\mathrm{i}\omega\left[\int_{S_п}\mu b_0\dot{\mathbf{H}}_0 dS+\int_{S_п}\mu b_m\dot{\mathbf{H}}_m d\mathbf{S}\right].$$

Подставив в это выражение значение $b_m$ из (12.39) с учетом (12.37), найдем

$$Z_п=\mathrm{i}\omega L_п-\frac{\mathrm{i}\omega_m^2 Q_m}{\omega_{m0}(\xi-\mathrm{i})}\,\frac{|\mu|}{\mu^*}\,\frac{|\dot{\Phi}_{пm}|^2}{N_m}.$$

Первый член этого выражения равен собственному индуктивному сопротивлению петли связи, а второй — сопротивлению $Z_{вн}$, вносимому резонатором.

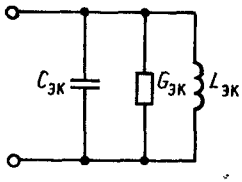



Рис. 12.9. Колебательный контур, эквивалентный объемному резонатору

Преобразуем выражение для $Z_{вн}$ с помощью определения добротности (11.22):

$$Z_{вн}=-\frac{i\omega_m^2\omega'_m}{\omega_{m0}(\xi-i)}\frac{|\mu|}{\mu^*}\frac{W_m}{P_{пm}}\frac{|\dot\Phi_{пm}|^2}{N_m}.$$

Полагая $\omega'_m=\omega_{m0}$ и считая магнитные потери малыми ($|\mu|\approx\mu^*$) с учетом соотношения (11.12), определим

$$Z_{вн}=\frac{\omega_m^2}{1+i\xi}\frac{|\dot\Phi_{пm}|^2}{2P_{пm}}. \qquad (12.40)$$

Таким образом, вносимое сопротивление на данном виде колебаний зависит от потока магнитной индукции через петлю (т. е. от ее размеров и места расположения в резонаторе), мощности потерь и обобщенной расстройки.

Выразим с помощью (11.27) мощность потерь через эквивалентное сопротивление резонатора $R_{экm}$ и подставим результат в (12.40). В результате получим

$$Z_{вн}=\frac{\omega_m^2}{1+i\xi}\frac{|\dot\Phi_{пm}|^2}{\left|\int\limits_{l_1}\dot{\mathbf{E}}_m\,d\mathbf{l}\right|^2}R_{экm}.$$

Интеграл в знаменателе вычисляется по заданной кривой $l_1$ между точками, лежащими на оболочке резонатора. Замкнем контур интегрирования по линии $l_2$, лежащей на оболочке (рис. 12.8). При этом значение интеграла, согласно (12.20), не изменится:

$$\int\limits_{l_1}\dot{\mathbf{E}}_m\,d\mathbf{l}=\oint\limits_{l_1+l_2}\dot{\mathbf{E}}_m\,d\mathbf{l}=\int\limits_{S_l}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_m\,d\mathbf{l}=-i\omega_m\dot\Phi_m, \qquad (12.41)$$

где $\Phi_m$ — поток вектора магнитной индукции через поверхность $S_l$, натянутую на контур $l_1+l_2$. Таким образом,

$$Z_{вн}=\frac{1}{1+i\xi}\frac{\omega_m}{\omega_m^*}\frac{|\dot\Phi_{пm}|^2}{|\dot\Phi_m|^2}R_{экm}\approx\frac{1-i\xi}{1+\xi^2}\frac{|\dot\Phi_{пm}|^2}{|\dot\Phi_m|^2}R_{экm}. \qquad (12.42)$$

Введем коэффициент трансформации петли связи $n_{пm}=|\dot\Phi_{пm}|/|\dot\Phi_m|$. На резонансной частоте $\xi=0$ и $Z_{вн}=n_{пm}^2R_{экm}$, т. е. петля служит трансформатором, преобразующим эквивалентное сопротивление $R_{экm}$ во вносимое сопротивление $Z_{вн}$. Заметим, что в соответствии с (12.40) сопротивление $Z_{вн}$ не зависит от способа определения $R_{экm}$.

Рассмотрим вносимую проводимость

$$Y_{вн}=G_{вн}+iB_{вн}=(1+i\xi)\,G_{экm}/n_{пm}^2.$$

Аналогичную зависимость полной проводимости от частоты имеет параллельный колебательный контур:

$$Y=G+i\left[\omega L-1/(\omega C)\right]=(1+i\xi)\,G.$$

Поэтому вблизи собственной частоты резонатор с петлей связи можно представить эквивалентной схемой (рис. 12.9), параметры которой определяются формулами

$$L_{эк}=\frac{R_{экm}n_{пm}^2}{\omega_{m0}Q_m};\quad C_{эк}=\frac{Q}{\omega_{m0}R_{экm}n_{пm}^2};$$

$$G_{эк}=\frac{1}{R_{экm}n_{пm}^2}. \qquad (12.43)$$

**Контрольные вопросы**

1. Сформулируйте задачу расчета вынужденного электромагнитного поля в ЛП. В каком виде представляют это поле?
2. Что такое интегралы возбуждения? Какими факторами определяется амплитуда данного типа волны, возбуждаемой в линии передачи?
3. Перечислите основные типы элементов возбуждения (связи) волн в ЛП.
4. Приведите выражение для интеграла возбуждения волн в волноводе тонким штырем. Дайте рекомендации по размещению штыря в линии передачи с целью получения максимальной амплитуды данного типа волны. Как разместить штырь, чтобы данный тип волны не возбуждался?
5. Приведите выражение для интеграла возбуждения волн в волноводе индуктивной петлей. Дайте рекомендации по размещению петли в ЛП для получения максимального (минимального) коэффициента возбуждения данного типа волны.
6. Опишите структуру поля отверстий связи. Какими компонентами невозмущенного электромагнитного поля оно возбуждается?
7. Приведите выражение для коэффициента возбуждения волны в ЛП с помощью отверстия. Что такое коэффициенты поляризуемости отверстия?
8. Сформулируйте задачу расчета электромагнитного поля вынужденных колебаний в объемном резонаторе. В каком виде представляют это поле?
9. Какими факторами определяется амплитуда возбуждения данного вида колебаний в резонаторе? Какие элементы используются для возбуждения колебаний?
10. В каких случаях возникают в резонаторе потенциальные электрические и магнитные поля? Как зависят коэффициенты возбуждения этих полей от частоты?
11. Как зависят коэффициенты возбуждения вихревых видов колебаний резонатора от частоты? В чем проявляется эквивалентность резонатора и колебательного контура? В чем различие между ними?
12. Чем характеризуется коэффициент передачи мощности через отверстие в диафрагме, установленной в поперечном сечении волновода?
13. Дайте определение коэффициента трансформации петли связи. Как вычислить эквивалентное сопротивление петли связи?

## ГЛАВА 13

# НЕРЕГУЛЯРНЫЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

### § 13.1. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

При изготовлении электродинамических систем (резонаторов, линий передач и т. п.) неизбежны отклонения от заданной формы и размеров. Кроме того, в электродинамическую систему могут специально вноситься тела, нарушающие ее регулярность (возмущающие тела). Строгое решение уравнений Максвелла для таких «возмущенных» систем, как правило, оказывается невозможным. Однако во многих случаях решение для нерегулярной системы можно найти, если известно соответствующее решение для невозмущенной (регулярной) системы. Методы отыскания таких решений составляют предмет теории возмущений. Рассмотрим основные положения этой теории применительно к объемным резонаторам и линиям передачи.

1. Пусть имеется полый резонатор $V$ с однородным вакуумным заполнением и идеально проводящей оболочкой $S$. Предположим, что на данном виде колебаний напряженности электрического $\dot{\mathbf{E}}_0$ и магнитного $\dot{\mathbf{H}}_0$ полей известны. Они удовлетворяют уравнениям Максвелла на собственной частоте $\omega_0$:

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_0 = i\omega_0\varepsilon_0\dot{\mathbf{E}}_0;\ \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_0 = -i\omega_0\mu_0\dot{\mathbf{H}}_0,$$

где $\varepsilon_0$, $\mu_0$ и $\omega_0$ — действительные скалярные величины. На границе резонатора выполняется условие $\dot{\mathbf{E}}_{0\tau} = 0$.

Заполним резонатор диэлектриком с параметрами $\varepsilon$, $\mu$. Напряженности электрического $\dot{\mathbf{E}}$ и магнитного $\dot{\mathbf{H}}$ полей резонатора с заполнением удовлетворяют уравнениям Максвелла на «возмущенной» собственной частоте $\omega$:

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} = i\omega\varepsilon\dot{\mathbf{E}};\ \operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} = -i\omega\mu\dot{\mathbf{H}}$$

и тем же условиям на границе $S$.

Вычислим сумму $\sum = (\dot{\mathbf{E}}_0^* \operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_0^*) + (\dot{\mathbf{E}}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_0^* - \dot{\mathbf{H}}_0^*\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}})$ и проинтегрируем ее по объему резонатора:

$$\int_V \sum dV = i\int_V (\omega\dot{\mathbf{E}}_0^*\varepsilon\dot{\mathbf{E}} + \omega_0\dot{\mathbf{H}}\mu_0\dot{\mathbf{H}}_0^* - \omega_0\dot{\mathbf{E}}\varepsilon_0\dot{\mathbf{E}}_0^* + \omega\dot{\mathbf{H}}_0^*\mu\dot{\mathbf{H}})\,dV.$$

Преобразуем левую часть, используя векторное тождество (П.7) и теорему Гаусса, а к правой части прибавим и отнимем одинаковые интегралы:

$$\oint_S \{[\dot{\mathbf{H}}, \dot{\mathbf{E}}_0^*] + [\dot{\mathbf{H}}_0^*, \dot{\mathbf{E}}]\} \, d\mathbf{S} = i \int_V (\omega \dot{\mathbf{E}}_0^* \varepsilon \dot{\mathbf{E}} - \omega_0 \dot{\mathbf{H}} \mu_0 \dot{\mathbf{H}}_0^* - \omega_0 \dot{\mathbf{E}} \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}_0^* + \omega \dot{\mathbf{H}}_0^* \mu \dot{\mathbf{H}}) \, dV +$$

$$+ i \int_V (\omega \dot{\mathbf{E}}_0^* \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} + \omega \dot{\mathbf{H}} \mu_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*) \, dV - i \int_V (\omega \dot{\mathbf{E}}_0^* \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} + \omega \dot{\mathbf{H}} \mu_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*) \, dV.$$

Левая часть полученного выражения равна нулю в соответствии с граничными условиями. Приведя подобные члены в правой части, получим

$$0 = i(\omega - \omega_0) \int_V (\varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{E}}_0^* + \mu_0 \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{H}}_0^*) \, dV + i\omega \int_V [\dot{\mathbf{E}}_0^* (\varepsilon - \varepsilon_0) \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{H}}_0^* (\mu - \mu_0) \dot{\mathbf{H}}] \, dV.$$

Записанное равенство позволяет найти изменение собственной частоты при введении в резонатор диэлектрика или магнетика:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{\int_V (\dot{\mathbf{E}}_0^* \Delta\varepsilon \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{H}}_0^* \Delta\mu \dot{\mathbf{H}}) \, dV}{\int_V (\varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{E}}_0^* + \mu_0 \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{H}}_0^*) \, dV}, \tag{13.1}$$

где $\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0$; $\Delta\mu = \mu - \mu_0$; $\Delta\omega = \omega - \omega_0$.

При выводе этой формулы не было сделано никаких допущений, поэтому соотношение (13.1) точное. Непосредственно воспользоваться им, однако, затруднительно, так как возмущенное электромагнитное поле обычно неизвестно. Если допустить, что в резонатор вносится малое возмущающее тело объемом $\Delta V$ (рис. 13.1) и вне этого объема влиянием возмущения можно пренебречь, т. е. положить $\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_0$, $\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}_0$ вне $\Delta V$, уравнение (13.1) принимает следующий вид:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{\int_{\Delta V} (\dot{\mathbf{E}}_0^* \Delta\varepsilon \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{H}}_0^* \Delta\mu \dot{\mathbf{H}}) \, dV}{4W_0}, \tag{13.2}$$

где $W_0 = \frac{1}{4}\left(\int_V \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{E}}_0^* \, dV + \int_V \mu_0 \dot{\mathbf{H}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^* \, dV\right)$ — энергия, запасенная в невозмущенном резонаторе.

Интеграл в числителе выражения (13.2) легко вычислить, если возмущающее тело имеет вытянутую форму и вектор $\dot{\mathbf{E}}_0$ параллелен длинной оси тела или перпендикулярен ей. В первом случае $\dot{\mathbf{E}} \approx \dot{\mathbf{E}}_0$, а во втором — $\mathbf{D} \approx \mathbf{D}_0$ или $\varepsilon \dot{\mathbf{E}} = \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}_0$. Аналогичные соотношения справедливы и для вектора $\mathbf{H}$.

Возмущающее тело может представлять собой диэлектрик или магнетик с потерями. Пусть, например,

$$\varepsilon = \varepsilon_0(\varepsilon_r' - i\varepsilon_r''), \quad \mu = \mu_0. \tag{13.3}$$

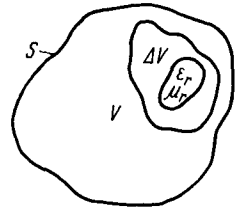



Рис. 13.1. Объемный резонатор с возмущающим телом

В этом случае круговая частота $\omega$ комплексна:

$$\omega=\omega'+i\omega''=\omega'(1+i/2Q). \tag{13.4}$$

Собственную частоту невозмущенного резонатора также можно для общности считать комплексной:

$$\omega_0=\omega_0'+i\omega_0''=\omega_0'(1+i/2Q_0). \tag{13.5}$$

Если возмущающее тело введено в область, где $\mathbf{H}_0\approx 0$, то, подставив в выражение (13.2) формулы (13.3)—(13.5) и разделив действительную и мнимую части полученного равенства, найдем

$$\frac{\omega'-\omega_0'}{\omega'}=-\varepsilon_0\frac{\int_{\Delta V}\dot{\mathbf{E}}_0^*(\varepsilon_r'-1)\dot{\mathbf{E}}\,dV}{4W_0};$$

$$\frac{1}{Q}-\frac{1}{Q_0}=\varepsilon_0\frac{\int_{\Delta V}\dot{\mathbf{E}}_0^*\varepsilon''\dot{\mathbf{E}}\,dV}{4W_0}.$$

Эти соотношения часто используются для измерения диэлектрической проницаемости различных материалов резонансным методом. Они справедливы и для магнетиков, если $\varepsilon$ заменить на $-\mu$, а $\dot{\mathbf{E}}$ на $\dot{\mathbf{H}}$.

Формула (13.1) позволяет также определить изменение собственной частоты, возникающее при деформации стенки резонатора. Если эта деформация уменьшает объем резонатора на $\Delta V$, то она эквивалентна введению в резонатор возмущающего тела объемом $\Delta V$, расположенного у границы $S$. Так как вектор $\dot{\mathbf{E}}_0$ перпендикулярен границе, а вектор $\dot{\mathbf{H}}$ параллелен ей, внутри $\Delta V$ $\varepsilon\dot{\mathbf{E}}=\varepsilon_0\dot{\mathbf{E}}_0$, $\dot{\mathbf{H}}=\dot{\mathbf{H}}_0$. В этом случае выражение (13.1) принимает вид

$$\frac{\Delta\omega}{\omega}=-\frac{\int_{\Delta V}\left(\varepsilon_0\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}|E_0|^2+\mu_0(\mu_r-1)|\dot{\mathbf{H}}_0|^2\right)dV}{4W_0}. \tag{13.6}$$

При деформации стенки внутрь возмущающее тело можно считать идеально проводящим, т. е. положить $\varepsilon_r=\infty$, $\mu_r=0$ (внутри $\Delta V$ не накапливается энергия). Тогда

$$\frac{\Delta\omega}{\omega}=\frac{\int_{\Delta V}(\mu_0|\dot{\mathbf{H}}_0|^2-\varepsilon_0|\dot{\mathbf{E}}_0|^2)\,dV}{4W_0}. \tag{13.7}$$

При деформации стенки наружу знак $\Delta\omega$, очевидно, должен быть обратным.

Влияние искажения поля резонатора вблизи объема $\Delta V$ может быть учтено введением в формулу (13.7) множителей $k_1$ и $k_2$:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega}=\frac{k_1\int\limits_{\Delta V}\mu_0|\dot{\mathbf{H}}_0|^2\,dV-k_2\int\limits_{\Delta V}\varepsilon_0|\dot{\mathbf{E}}_0|^2\,dV}{4W_0}. \tag{13.8}$$

Значения этих множителей зависят от формы возмущающего объема и равны единице в тех случаях, когда при $\Delta V\to 0$ соответствующее поле стремится к своему невозмущенному состоянию. Например, $k_2=1$, если возмущающее тело имеет вид цилиндра малого радиуса, высота которого стремится к нулю. Если, однако, уменьшение объема $\Delta V$ достигается за счет изменения радиуса цилиндра, при $\Delta V\to 0$ он превращается в тонкую иглу, которая возмущает поле резонатора. В этом случае $k_2>1$. Соотношение (13.8) называют *теоремой Слэтера* (теоремой возмущений).

2. Рассмотрим регулярный волновод, заполненный продольно-однородной средой с параметрами $\varepsilon$, $\mu$. Опишем поле падающей волны в волноводе следующим образом:

$$\dot{\mathbf{E}}=\check{\mathbf{E}}\zeta;\ \dot{\mathbf{H}}=\check{\mathbf{H}}\zeta,$$

где $\dot{\mathbf{E}}(x_1, x_2)$, $\check{\mathbf{H}}(x_1, x_2)$ — векторные функции, определенные в поперечном сечении волновода $S$; $\zeta=e^{-ik_z z}$. Это поле удовлетворяет уравнениям Максвелла на частоте возбуждения $\omega$:

$$\operatorname{rot}(\check{\mathbf{H}}\zeta)=i\omega\varepsilon\check{\mathbf{E}}\zeta;$$

$$\operatorname{rot}(\check{\mathbf{E}}\zeta)=-i\omega\mu\check{\mathbf{H}}\zeta.$$

Используя векторное тождество (П.8), преобразуем эти уравнения:

$$[\operatorname{grad}\zeta,\ \check{\mathbf{H}}]+\zeta\operatorname{rot}\check{\mathbf{H}}=i\omega\varepsilon\check{\mathbf{E}}\zeta;$$

$$[\operatorname{grad}\zeta,\ \check{\mathbf{E}}]+\zeta\operatorname{rot}\check{\mathbf{E}}=-i\omega\mu\check{\mathbf{H}}\zeta.$$

Поскольку $\operatorname{grad}\zeta=-ik_z\zeta\mathbf{e}_z$, получим

$$\operatorname{rot}\check{\mathbf{H}}-ik_z[\mathbf{e}_z,\ \check{\mathbf{H}}]=i\omega\varepsilon\check{\mathbf{E}}; \tag{13.9}$$

$$\operatorname{rot}\check{\mathbf{E}}-ik_z[\mathbf{e}_z,\ \check{\mathbf{E}}]=-i\omega\mu\check{\mathbf{H}}. \tag{13.10}$$

Для волновода с вакуумным заполнением имеют место аналогичные соотношения

$$\operatorname{rot}\check{\mathbf{H}}_0^*+ik_{z0}^*[\mathbf{e}_z,\ \check{\mathbf{H}}_0^*]=-i\omega\varepsilon_0\check{\mathbf{E}}_0^*; \tag{13.11}$$

$$\operatorname{rot}\check{\mathbf{E}}_0^*+ik_{z0}^*[\mathbf{e}_z,\ \check{\mathbf{E}}_0^*]=i\omega\mu_0\check{\mathbf{H}}_0^*; \tag{13.12}$$

В выражениях (13.9)—(13.12) $k_{z0}=\beta_0-i\alpha_0$, $k_z=\beta-i\alpha$ — постоянные распространения в невозмущенном волноводе и в волноводе с возмущающим телом. На боковой поверхности волновода касательные составляющие векторов $\check{\mathbf{E}}$ и $\check{\mathbf{E}}_0$ равны нулю.

Помножим уравнение (13.11) скалярно на $\check{\mathbf{E}}$, уравнение (13.10) — на $\check{\mathbf{H}}_0^*$ и вычтем второе из первого. В результате найдем

$$\check{\mathbf{E}}\operatorname{rot}\check{\mathbf{H}}_0^*-\check{\mathbf{H}}_0^*\operatorname{rot}\check{\mathbf{E}}=-i\omega\check{\mathbf{E}}\varepsilon_0\check{\mathbf{E}}_0^*+i\omega\check{\mathbf{H}}_0^*\mu\check{\mathbf{H}}-\check{\mathbf{E}}[ik_{z0}^*\mathbf{e}_z,\ \check{\mathbf{H}}_0^*]-\check{\mathbf{H}}_0^*[ik_z\mathbf{e}_z,\ \check{\mathbf{E}}].$$

Проделав аналогичную операцию с уравнениями (13.12) и (13.9), получим

$$\check{\mathbf{H}}\operatorname{rot}\check{\mathbf{E}}_0^*-\check{\mathbf{E}}_0^*\operatorname{rot}\check{\mathbf{H}}=\mathrm{i}\omega\check{\mathbf{H}}\mu_0\check{\mathbf{H}}_0^*-\mathrm{i}\omega\check{\mathbf{E}}_0^*\varepsilon\check{\mathbf{E}}-\check{\mathbf{H}}[\mathrm{i}k_{z0}^*\mathbf{e}_z,\ \check{\mathbf{E}}_0^*]-\check{\mathbf{E}}_0^*[\mathrm{i}k_z\mathbf{e}_z,\ \check{\mathbf{H}}].$$

Вычтем второе равенство из первого и проинтегрируем разность по объему отрезка волновода произвольной длины. Использовав тождество (П.7) и теорему Гаусса, найдем

$$\oint_S\{[\check{\mathbf{H}}_0^*,\ \check{\mathbf{E}}]-[\check{\mathbf{E}}_0^*,\ \check{\mathbf{H}}]\}\,\mathrm{d}\mathbf{S}=-\mathrm{i}\omega\int_V\check{\mathbf{E}}\varepsilon_0\check{\mathbf{E}}_0^*\,\mathrm{d}V+\mathrm{i}\omega\int_V\check{\mathbf{H}}_0^*\mu\mathbf{H}\,\mathrm{d}V-\mathrm{i}\omega\int_V\check{\mathbf{H}}\mu_0\check{\mathbf{H}}_0^*\,\mathrm{d}V+$$

$$+\mathrm{i}\omega\int_V\check{\mathbf{E}}_0^*\varepsilon\check{\mathbf{E}}\mathrm{d}V-\mathrm{i}k_{z0}\int_V\check{\mathbf{E}}[\mathbf{e}_z,\ \check{\mathbf{H}}_0^*]\,\mathrm{d}V-\mathrm{i}k_z\int_V\check{\mathbf{H}}_0^*[\mathbf{e}_z,\ \check{\mathbf{E}}]\,\mathrm{d}V+\mathrm{i}k_{z0}^*\int_V\check{\mathbf{H}}[\mathbf{e}_z,\ \check{\mathbf{E}}_0^*]\,\mathrm{d}V+$$

$$+\mathrm{i}k_z\int_V\check{\mathbf{E}}_0^*[\mathbf{e}_z,\ \check{\mathbf{H}}]\,\mathrm{d}V. \tag{13.13}$$

Интеграл по боковой поверхности волновода в левой части полученного равенства равен нулю вследствие граничных условий на ней. Так как подынтегральное выражение не зависит от координаты $z$, интегралы по торцевым поверхностям имеют одинаковые значения и противоположные знаки. Таким образом, левая часть равенства равна нулю. Подынтегральные выражения правой части (13.13) также не зависят от координаты $z$, что позволяет заменить объемные интегралы интегралами по площади поперечного сечения волновода. Произведя перестановку членов в векторно-скалярных произведениях и сгруппировав однородные члены, получим

$$k_z-k_{z0}^*=\frac{\omega\int_S[\check{\mathbf{E}}(\varepsilon-\varepsilon_0)\check{\mathbf{E}}_0^*+\check{\mathbf{H}}(\mu-\mu_0)\check{\mathbf{H}}_0^*]\,\mathrm{d}S}{\int_S\{[\check{\mathbf{E}},\ \check{\mathbf{H}}_0^*]+[\check{\mathbf{E}}_0^*,\ \check{\mathbf{H}}]\}\mathbf{e}_z\,\mathrm{d}S}. \tag{13.14}$$

Если возмущающее тело занимает малую часть $\Delta S$ поперечного сечения волновода, то вне этой части можно принять $\check{\mathbf{E}}=\check{\mathbf{E}}_0$, $\check{\mathbf{H}}=\check{\mathbf{H}}_0$. В этом случае интеграл в знаменателе выражения (13.14) приближенно равен учетверенной мощности $P_0$ невозмущенной волны:

$$k_z-k_{z0}^*=\frac{\omega\varepsilon_0\int_{\Delta S}\mathbf{E}(\varepsilon_r-1)\check{\mathbf{E}}_0^*\,\mathrm{d}S+\omega\mu_0\int_{\Delta S}\check{\mathbf{H}}(\mu_r-1)\check{\mathbf{H}}_0^*\,\mathrm{d}S}{4P_0}. \tag{13.15}$$

Выражение (13.15) есть математическая формулировка теоремы возмущения для линий передачи, которая позволяет найти изменение постоянной распространения волны, происходящее при внесении в линию малого возмущения. Пусть, например, в волновод вносится параллельно его оси диэлектрический стержень

с параметрами $\varepsilon=\varepsilon'_r-i\varepsilon''_r$, $\mu=\mu_0$ (рис. 13.2). Тогда из соотношения (13.15) следует, что

$$\beta-\beta_0=\frac{\omega\varepsilon_0\int_{\Delta S}\check{\mathbf{E}}(\varepsilon'_r-1)\check{\mathbf{E}}_0^*\,dS}{4P_0}; \qquad (13.16)$$

$$\alpha-\alpha_0=\frac{\omega\varepsilon_0\int_{\Delta S}\check{\mathbf{E}}\varepsilon''\check{\mathbf{E}}_0^*\,dS}{4P_0}. \qquad (13.17)$$

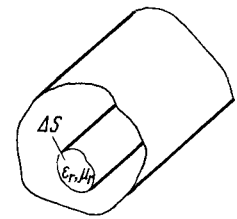


Рис. 13.2. Регулярный волновод с продольно-однородным возмущающим телом

Формулы (13.16)—(13.17) позволяют вычислить изменение постоянной фазы и постоянной затухания в линии передачи при внесении в нее продольно-однородного диэлектрика с поперечным сечением $\Delta S$. Аналогичные соотношения можно вывести из (13.15) и для магнетиков, а также при деформации стенки волновода. В последнем случае, учитывая, что внутри возмущающего объема $\check{\mathbf{E}}=(\varepsilon_0/\varepsilon)\check{\mathbf{E}}_0$, $\check{\mathbf{H}}=\check{\mathbf{H}}_0$, и перейдя к пределу при $\varepsilon\to\infty$, $\mu\to 0$, получим

$$\beta-\beta_0=\frac{\omega\int_{\Delta S}(\varepsilon_0|\check{\mathbf{E}}_0|^2-\mu_0|\check{\mathbf{H}}_0|^2)\,dS}{4P_0}.$$

Следовательно, если то место поперечного сечения линии передачи, где преобладает электрическое поле, деформируется внутрь, то постоянная фазы увеличивается (фазовая скорость волны уменьшается), а если деформация происходит в том месте, где преобладает магнитное поле, то постоянная фазы уменьшается (фазовая скорость растет).

## § 13.2. НЕОДНОРОДНОСТИ В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ

В § 13.1 рассматривались неоднородности в поперечном сечении линий передачи, однако в продольном направлении эти линии оставались регулярными. Существуют, однако, неоднородности, нарушающие регулярность, т. е. продольную однородность линий передачи (рис. 13.3).

Пусть в линии передачи возбуждена волна определенного типа единичной амплитуды, распространяющаяся в сторону положительных значений оси $z$. Назовем ее падающей волной и обозначим индексом $p$. В материале неоднородности поле этой волны возбуждает объемный ток плотностью $\mathbf{J}_0(\mathbf{r})$. Этот ток, в свою очередь, возбуждает в линии передачи бесконечное число типов волн, распространяющихся влево и вправо от неоднородности. Если начало координат расположено в месте нахождения неоднородности, то электромагнитное поле слева от нее ($z<0$) представляет собой суперпозицию падающей и отраженных (возбужденных током плотностью $\mathbf{J}_0(\mathbf{r})$) волн:

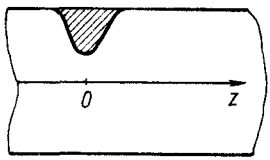



Рис. 13.3. Линия передачи с неоднородностью

$$\dot{\mathbf{E}}^{(\pi)} = \dot{A}_0 \check{\mathbf{E}}_p e^{-i\beta_p z} + \sum_{m=1}^{\infty} \dot{A}_{-m} \check{\mathbf{E}}_{-m} e^{-i\beta_{-m} z}; \quad (13.18)$$

$$\dot{\mathbf{H}}^{(\pi)} = \dot{\mathbf{A}}_0 \check{\mathbf{H}}_p e^{-i\beta_p z} + \sum_{m=1}^{\infty} \dot{\mathbf{A}}_{-m} \check{\mathbf{H}}_{-m} e^{-i\beta_{-m} z} \quad (13.19)$$

(активными потерями в линии передачи пренебрегаем).

Справа от неоднородности ($z>0$) электромагнитное поле представляет собой суперпозицию волн, распространяющихся в положительном направлении оси $z$:

$$\dot{\mathbf{E}}^{(\text{пр})} = \sum_{m=1}^{\infty} \dot{A}_m \check{\mathbf{E}}_m e^{-i\beta_m z}; \quad (13.20)$$

$$\dot{\mathbf{H}}^{(\text{пр})} = \sum_{m=1}^{\infty} \dot{A}_m \check{\mathbf{H}}_m e^{-i\beta_m z}. \quad (13.21)$$

Коэффициенты возбуждения $A_m$, $A_{-m}$ определяются в соответствии с формулами (12.6), (12.7), распределением плотности возбуждающего тока, т. е. размерами, формой и электрофизическими параметрами неоднородностей. Поэтому для расчета коэффициентов возбуждения используются граничные условия на поверхности неоднородности и условия непрерывности составляющих электромагнитного поля в свободной части поперечного сечения линии передачи. В результате подстановки в эти условия выражений (13.18)—(13.21) получают систему уравнений относительно коэффициентов возбуждения. Редукция (усечение) рядов в выражениях (13.18)—(13.19) и соответствующее ограничение числа уравнений позволяет получить в качестве решения редуцированной системы приближенные значения коэффициентов возбуждения.

Другой подход к вычислению электромагнитного поля нерегулярной системы состоит в задании функции распределения касательной к поперечному сечению линии передачи $S$, расположенному в области неоднородности, составляющей напряженности электрического поля $\mathbf{E}_\perp(x_1, x_2)$. Используя эту функцию, с помощью выражений (12.8), (12.9) определяют коэффициенты возбуждения $A_m$, $A_{-m}$ в разложениях (13.18)—(13.21). При этом поперечная составляющая электрического поля оказывается непрерывной функцией от $z$ вблизи сечения $S$, так как ее предельные значения при $z\to 0$ слева и справа от неоднородности равны $\dot{E}_\perp(x_1, x_2)$.

Напряженность магнитного поля также должна быть непрерывна в свободной части сечения $S$. Приравняв выражения (13.9), (13.19) при $z=z_0$, где $z_0$ — координата сечения $S$, получим интегральное уравнение относительно функции $\dot{\mathbf{E}}_\perp(x_1, x_2)$, так как она входит в выражения для коэффициентов возбуждения под знаком интеграла. Решение интегрального уравнения дает возможность определить вид функции $\dot{\mathbf{E}}_\perp(x_1, x_2)$ и, следовательно,

найти напряженность электромагнитного поля нерегулярной системы. Расчет осуществляют, как правило, с помощью ЭВМ.

Если линия передачи работает в одномодовом режиме, т. е. если на частоте возбуждения в ней распространяется только один (рабочий) тип волны с индексом $p$, то вдали от неоднородности существуют только падающая, отраженная и прошедшая волны этого типа. Следовательно, вдали от неоднородности ее свойства характеризуются *коэффициентами отражения* $\Gamma$ и *прохождения* $T$, причем

$$\Gamma = \dot{A}_{-p}/\dot{A}_0;\ T = \dot{A}_p/\dot{A}_0. \qquad (13.22)$$

Для недиссипативных неоднородностей по закону сохранения энергии

$$|\Gamma|^2 + |T|^2 = 1. \qquad (13.23)$$

При расчете электромагнитного поля вблизи неоднородности необходимо учитывать нераспространяющиеся типы волн, в поле которых запасается электромагнитная энергия. Поэтому недиссипативная неоднородность эквивалентна некоторой реактивности, включенной в линию передачи.

Для иллюстрации изложенных методов рассчитаем электромагнитное поле некоторых неоднородностей в прямоугольном волноводе. Выбор этого типа линии передачи обусловлен его широким применением, а также тем обстоятельством, что электромагнитные поля различных типов волн в прямоугольном волноводе описываются простыми аналитическими выражениями. В ряде случаев это позволяет получить решение, не прибегая к помощи ЭВМ.

1. Рассмотрим *металлический штырь* в прямоугольном волноводе, ось которого параллельна узкой стенке и имеет координаты $x = x_0$, $z = 0$ (рис. 13.4). Радиус штыря обозначим через $r_0$. Пусть в волноводе возбуждена волна типа $H_{10}$, распространяющаяся в сторону положительных значений оси $z$. Поперечные составляющие поля волны $E_{0y}$, $H_{0x}$ определяются выражениями (7.20), (7.21):

$$\dot{E}_{0y} = \dot{A}_0 \sin\frac{\pi x}{a} e^{-i\beta_1 z}; \qquad (13.24)$$

$$\dot{H}_{0x} = -\dot{A}_0 \frac{\beta_1}{kZ_0} \sin\frac{\pi x}{a} e^{-i\beta_1 z}, \qquad (13.25)$$

где $A_0 = -ikZ_0\pi B/a$ (затухание, обусловленное активными потерями, не учитываем).

Это поле возбуждает в штыре поверхностный ток, который при малом радиусе штыря ($r_0 \ll a$) можно приближенно заменить линейным током, текущим по его оси. Так как амплитуда поля падающей волны и свойства штыря не зависят от $y$, наведенный в штыре ток также не зависит от этой координаты. Таким образом, в данном приближении плотность возбуждающего тока

$$\mathbf{j}^{ст}(x, y, z) = \dot{I}_0 \delta(x - x_0)\delta(z)\mathbf{e}_y. \qquad (13.26)$$

Ток возбуждает волны, распространяющиеся вправо и влево от штыря, так что поле в волноводе определяется формулами (13.18)—(13.21). Поскольку $\mathbf{j}^{ст}$ не зависит от $y$, интегралы возбуждения для

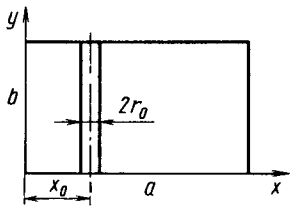


Рис. 13.4. Штырь в прямоугольном волноводе

всех типов волн, имеющих вариации поля по оси $y$, обращаются в нуль. Следовательно, штырь возбуждает в волноводе только волны типов $H_{m0}$, электромагнитное поле которых определяется выражениями

$$\dot{\mathbf{E}}_{my}=\dot{A}_m\sin\frac{m\pi x}{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{zm}z};$$

$$\dot{\mathbf{H}}_{mx}=-\dot{A}_m\frac{k_{zm}}{kZ_0}\sin\frac{m\pi x}{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{zm}z},$$

где $m=\pm1,\ \pm2,\ldots$ . При отсутствии потерь в рабочем диапазоне частот волновода

$$k_{z1}=\beta_1=(k^2-\pi^2/a^2)^{1/2};\ k_{zm}=-\mathrm{i}\alpha_m=-\mathrm{i}(m^2\pi^2/a^2-k^2)^{1/2}.$$

Рассчитаем коэффициенты возбуждения волн $A_m$ с помощью формул (12.6), (12.7), предварительно вычислив обобщенную норму (6.58). Учитывая, что $\sin(-m\pi x/a)=-\sin(m\pi x/a)$, получим

$$N_{em}=\int_S\{[\dot{\mathbf{E}}_m,\dot{\mathbf{H}}_{-m}]-[\dot{\mathbf{E}}_{-m},\dot{\mathbf{H}}_m]\}\mathbf{e}_z\,\mathrm{d}S=-\int_S\dot{E}_{my}\dot{H}_{-mx}\,\mathrm{d}x+\int_S\dot{E}_{-my}\dot{H}_{mx}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\left(-\frac{k_{z,-m}}{kZ_0}+\frac{k_{z,m}}{kZ_0}\right)\frac{ab}{2}=\frac{k_{zm}}{kZ_0}ab. \tag{13.27}$$

Определим интегралы возбуждения, используя (13.26):

$$\int_V\mathbf{j}^{\mathrm{ст}}\dot{\mathbf{E}}_m\,\mathrm{d}V=\int_0^b\dot{I}_0\dot{E}_{my}(x_0,0)\,\mathrm{d}y=\dot{I}_0b\sin\frac{m\pi x_0}{a}. \tag{13.28}$$

Подставив выражения (13.27) и (13.28) в (12.6) и (12.7), найдем

$$\dot{A}_m=\frac{\dot{I}_0Z_0k}{k_{zm}a}\sin\frac{m\pi x_0}{a},\ m=\pm1,\ \pm2,\ldots\ .$$

Таким образом, для электрического поля слева от штыря

$$\dot{E}_y=\dot{E}_{0y}+\sum_{m=1}^{\infty}\dot{A}_{-m}\dot{E}_{-my}=\dot{A}_0\sin\frac{\pi x}{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_1z}-$$

$$-\dot{I}_0Z_0k\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{m\pi x_0}{a}}{k_{zm}a}\sin\frac{m\pi x}{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{zm}z}. \tag{13.29}$$

На поверхности идеально проводящего штыря касательная составляющая напряженности электрического поля $\dot{E}_y$ должна обращаться в нуль. Выбрав некоторую линию на этой поверхности, например прямую $x=x_0+r_0$, $z=0$, и записав для нее указанное граничное условие, получим уравнение относительно тока стержня $I_0$:

$$\dot{A}_0\sin\frac{\pi x_0}{a}-\dot{I}Z_0k\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(m\pi x_0/a)}{k_{zm}a}\sin\frac{m\pi(x_0+r_0)}{a}=0.$$

Учитывая, что

$$\sin\frac{m\pi x_0}{a}\sin\frac{m\pi(x_0+r_0)}{a}=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{m\pi r_0}{a}-\cos\frac{m\pi(2x_0+r_0)}{a}\right]\approx\frac{1}{2}\left(\cos\frac{m\pi r_0}{a}-\cos\frac{2m\pi x_0}{a}\right),$$

найдем

$$\dot{I}_0=\frac{2\dot{A}_0\sin(\pi x_0/a)}{kZ_0\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{k_{zm}a}\left(\cos\dfrac{m\pi r_0}{a}-\cos\dfrac{2m\pi x_0}{a}\right)}. \tag{13.30}$$

Приравнивание нулю касательной составляющей напряженности электрического поля на любой другой линии, лежащей на поверхности стержня, приводит к аналогичному выражению, отличающемуся от (13.30) малыми величинами, зависящими от $r_0$. Это различие обусловлено непостоянством суммарного поля на поверхности штыря. Оно уменьшается при уменьшении радиуса $r_0$.

Первый член ряда (13.29) соответствует отраженной волне типа $H_{10}$. Поэтому коэффициент отражения от стержня

$$\Gamma=\frac{A_{-1}}{\dot{A}_0}=\frac{Z_0 k}{\beta_1 a \dot{A}_0}\dot{I}_0\sin\frac{\pi x_0}{a}=\frac{2\sin^2(\pi x_0/a)}{\beta_1 a\sum\limits_{m=1}^{\infty}(k_{zm}a)^{-1}(\cos m\pi r_0/a-\cos 2m\pi x_0/a)}.$$

Волна, излучаемая штырем в положительном направлении оси $z$, имеет такую же амплитуду, которая складывается с амплитудой падающей волны. Следовательно, коэффициент передачи $T=1+\Gamma$. Эквивалентные параметры штыря в волноводе приведены в гл. 13.

2. Рассмотрим диафрагму в прямоугольном волноводе, края отверстия которой параллельны узкой стенке волновода (рис. 13.5). Поле падающей волны типа $H_{10}$, определяемое выражениями (13.24), (13.25), возбуждает отраженные и проходящие волны типа $H_{m0}$ (коэффициенты возбуждения волн других типов равны нулю по тем же причинам, что и в предыдущем случае). При этом в отверстии диафрагмы образуется электрическое поле напряженностью $\dot{\mathbf{E}}_д$, амплитуда которой зависит от координаты $x$:

$$\dot{\mathbf{E}}_д=\begin{cases}\dot{E}_0(x)\,\mathbf{e}_y, & c<x<d;\\ 0, & x<c,\ x>d.\end{cases}\qquad(13.31)$$

Используя (13.18)—(13.21), а также (13.22), (13.24), (13.25), запишем выражения для поперечных составляющих напряженности электромагнитного поля слева и справа от диафрагмы:

$$\dot{E}_y^-=\dot{A}_0\sin\frac{\pi x}{a}\left(e^{-i\beta_1 z}+\Gamma e^{i\beta_1 z}\right)+\sum_{m=2}^{\infty}\dot{A}_{-m}\sin\frac{m\pi x}{a}e^{-ik_{zm}z};\qquad(13.32)$$

$$\dot{H}_x^-=-\dot{A}_0\frac{\beta_1}{kZ_0}\sin\frac{\pi x}{a}\left(e^{-i\beta_1 z}-\Gamma e^{i\beta_1 z}\right)+\sum_{m=2}^{\infty}\dot{A}_{-m}\frac{k_{zm}}{kZ_0}\sin\frac{m\pi x}{a}e^{ik_{zm}z}\qquad(13.33)$$

при $z<0$ и

$$\dot{E}_y^+=\dot{A}_0 T\sin\frac{\pi x}{a}e^{-i\beta_1 z}+\sum_{m=2}^{\infty}\dot{A}_m\sin\frac{m\pi x}{a}e^{-ik_{zm}z};\qquad(13.34)$$

$$\dot{H}_x^+=-\dot{A}_0\frac{\beta_1}{kZ_0}T\sin\frac{\pi x}{a}e^{-i\beta_1 z}+\sum_{m=2}^{\infty}\dot{A}_m\frac{k_{zm}}{kZ_0}\sin\frac{m\pi x}{a}e^{-ik_{zm}z}\qquad(13.35)$$

при $z>0$.

В этих выражениях $\Gamma$ и $T$ — коэффициенты отражения и прохождения волны типа $H_{10}$ в волноводе с диафрагмой.

При $z=0$ электрическое поле волновода совпадает с полем диафрагмы:

$$E_y^-(x,0)=E_y^+(x,0)=E_д(x).\qquad(13.36)$$

Положим в выражении (13.32) $z=0$, помножим левую и правую части на $\sin(\pi x/a)$ и проинтегрируем полученное равенство по $x$ в пределах от 0 до $a$. В соответствии с (13.36) получим

$$\int_c^d\dot{E}_0(t)\sin\frac{\pi t}{a}dt=A_0\frac{a}{2}(1+\Gamma).\qquad(13.37)$$

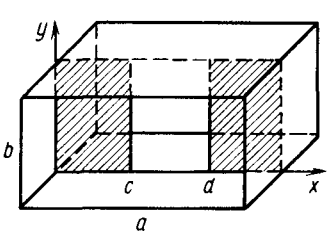



Рис. 13.5. Диафрагма в волноводе

Аналогично, помножив обе части (13.32) на $\sin(m\pi x/a)$, найдем

$$\int_c^d \dot{E}_0(t)\sin\frac{m\pi t}{a}\,dt = -\frac{a}{2}\dot{A}_{-m}. \tag{13.38}$$

Из выражения (13.34) таким же образом определим

$$\int_c^d \dot{E}_0(t)\sin\frac{\pi t}{a}\,dt = \dot{A}_0\frac{a}{2}T; \tag{13.39}$$

$$\int_c^d \dot{E}_0(t)\sin\frac{m\pi t}{a}\,dt = \frac{a}{2}\dot{A}_m. \tag{13.40}$$

В отверстии диафрагмы напряженность магнитного поля должна быть непрерывной. Положив в соотношениях (13.33) и (13.35) $z=0$ и приравняв их, получим

$$-\dot{A}_0(1-\Gamma)\sin\frac{\pi x}{a}+\sum_{m=2}^{\infty}\dot{A}_{-m}\frac{k_{zm}}{\beta_1}\sin\frac{m\pi x}{a} = -\dot{A}_0 T\sin\frac{\pi x}{a}+\sum_{m=2}^{\infty}\dot{A}_m\frac{k_{zm}}{\beta_1}\sin\frac{m\pi x}{a}.$$

Это равенство справедливо при $c\leqslant x\leqslant d$.

Упростим данное выражение, сгруппировав подобные члены:

$$\dot{A}_0(\Gamma+T-1)\sin\frac{\pi x}{a} = \sum_{m=2}^{\infty}(A_m-A_{-m})\frac{k_{zm}}{\beta_1}\sin\frac{m\pi x}{a}.$$

Подставив в это равенство формулы (13.37)—(13.40), найдем

$$\frac{\Gamma}{1+\Gamma}\sin\frac{\pi x}{a}\int_c^d \dot{E}_0(t)\sin\frac{\pi t}{a}\,dt = \sum_{m=2}^{\infty}\frac{k_{zm}}{\beta_1}\sin\frac{m\pi x}{a}\int_c^d \dot{E}_0(t)\sin\frac{m\pi t}{a}\,dt. \tag{13.41}$$

Полученное соотношение есть интегральное уравнение относительно напряженности электрического поля в отверстии диафрагмы, возбуждаемого падающей волной единичной амплитуды. Приближенный аналитический метод решения этого уравнения (метод Швингера) изложен в [2]. Оно может быть решено также численными методами. Найденная в результате решения функция $\dot{E}_0(x)$ позволяет определить коэффициенты возбуждения различных типов волн в волноводе с диафрагмой (см. § 17.2).

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте основные положения теории возмущений применительно к резонаторам. Как использовать эту теорию для измерения параметров диэлектриков и магнетиков?
2. Сформулируйте основные положения теории возмущений применительно к линиям передачи.
3. Как изменяются собственная частота резонатора и постоянная распространения линии передачи при деформации их стенок?
4. Как описывается поле в линии передачи при наличии неоднородностей? Опишите общие алгоритмы расчета поля в линиях передачи с неоднородностями.
5. Как определяется ток штыря, расположенного параллельно узкой стенке прямоугольного волновода?
6. Опишите метод расчета поля в волноводе с диафрагмой, края отверстия которой параллельны узкой стенке волновода.

ГЛАВА 14

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВНУТРЕННИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

## § 14.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ И ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ИХ РЕШЕНИЯ

В § 1.8 внутренняя краевая задача электродинамики сформулирована как задача отыскания решений уравнений Максвелла в замкнутой области $V$, на границе которой $S$ электромагнитное поле удовлетворяет заданным условиям. Как показано ранее, к решению этой задачи сводится расчет электромагнитного поля в закрытых и открытых объемных резонаторах и линиях передачи, а также в различных нерегулярных системах.

В зависимости от формы области $V$ и свойств заполняющей ее среды для решения уравнений Максвелла используются различные методы. Для областей простой правильной формы с однородным изотропным заполнением существуют аналитические решения, выражающие напряженности электрического и магнитного полей через известные математические функции координат и времени. Примеры таких решений содержатся в предыдущих главах. Они являются точными в том смысле, что указанные математические функции можно вычислить с любой заданной точностью.

Для более сложных областей аналитическое решение задачи найти не удается и приходится решать ее приближенно. Независимо от метода и используемых технических средств процесс приближенного решения содержит следующие основные этапы:

1) постановка задачи — уточнение целей расчета и типов рассчитываемых объектов, их математическое описание, определение необходимого объема и требуемой точности получаемой в результате решения информации;

2) аналитическая обработка — построение математической модели объекта, преобразование исходных уравнений к наиболее простому и удобному для решения данной задачи виду, исследование свойств полученных уравнений и их решений, степени их адекватности исходному физическому объекту;

3) дискретизация — переход от непрерывных функций к дискретным и от функциональных уравнений к алгебраическим,

в определенном смысле приближающимся к исходным функциям и уравнениям;

4) решение полученной в процессе дискретизации системы алгебраических уравнений (матричной задачи);

5) обработка результатов — расчет требуемых параметров и характеристик электродинамической системы по данным, найденным в результате выполнения предыдущих этапов.

Одной из наиболее существенных характеристик приближенного метода решения является погрешность получаемых с его помощью результатов, которая складывается из погрешностей, вносимых на каждом этапе. К составляющим общей погрешности относятся:

— неустранимая погрешность, возникающая на первом этапе решения за счет неточности исходных данных. Действительно, размеры и форма реальной системы всегда отличаются от номинальных, а электрофизические параметры входящих в ее состав тел не могут быть определены абсолютно точно;

— погрешность модели, возникающая на втором этапе вследствие неполной адекватности математического описания реальному физическому объекту;

— погрешность численного метода, возникающая при дискретизации задачи;

— вычислительная погрешность, возникающая на четвертом и пятом этапах в связи с конечной точностью представления чисел и конечным числом операций над ними.

До появления ЭВМ основная погрешность вносилась за счет описания реальной системы сравнительно простой математической моделью. Значение этой погрешности оценить заранее не представляется возможным. В то же время простая модель позволяет применять на последующих этапах несложные и достаточно точные алгоритмы.

По мере развития вычислительной математики и совершенствования ЭВМ появляется возможность использовать все более сложные математические модели, достаточно полно и точно отражающие свойства реальной системы. При этом основная погрешность возникает при численном решении уравнений модели (этапы третий и четвертый). Средства вычислительной математики позволяют заранее оценить погрешность многих алгоритмов. Тем самым в современных методах решения влияние неконтролируемой погрешности математической модели существенно уменьшается.

Любой метод расчета электродинамических систем на определенных этапах предполагает выполнение операций над числами. В связи с этим под «численными методами расчета», которые рассматриваются в настоящей главе, понимаются методы, позволяющие получить решение задачи в результате выполнения заданной конечной последовательности арифметических действий

(алгоритма), которая не может быть выражена с помощью математической формулы. Алгоритм численного решения должен предусматривать полностью формализованные методы получения всех промежуточных и конечных результатов из строго определенного набора исходных данных. Для задач электродинамики таким набором являются конфигурация системы, электрофизические параметры образующих ее тел, сторонние токи и поля.

## § 14.2. ОСНОВНЫЕ КЛАССЫ ВНУТРЕННИХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА

С математической точки зрения уравнения Максвелла (1.1)—(1.4) представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, неизвестные функции которых зависят от четырех независимых переменных — трех пространственных координат и времени. В качестве коэффициентов при неизвестных функциях в эти уравнения входят электрофизические параметры тел, образующих электродинамическую систему.

Сложность решения системы уравнений в частных производных зависит от свойств их коэффициентов, числа неизвестных функций и их размерности (числа независимых переменных), а также от типа граничных и начальных условий. По степени сложности внутренние задачи электродинамики разделяют на различные типы и классы.

К наиболее сложным относятся нелинейные задачи, которые возникают, когда электрофизические параметры среды, заполняющей систему, зависят от напряженности электрического и (или) магнитного полей. Методы решения таких задач разработаны только для некоторых достаточно простых частных случаев. Во многих задачах, однако, нелинейностью среды можно пренебречь.

Решения линейных задач удовлетворяют принципу суперпозиции. Это позволяет, используя интегралы и ряды Фурье, ограничиться анализом процессов, гармонически зависящих от времени, и исключить эту переменную из уравнений Максвелла (см. § 1.5). В результате решение упрощается.

Возможность дальнейшего упрощения системы уравнений Максвелла зависит от формы области $V$, свойств заполняющей ее среды, распределения сторонних токов и полей.

Следует отметить, что электромагнитное поле в линии передачи или резонаторе при наличии возбуждения может быть представлено в виде суперпозиции полей свободных волн (колебаний) (см. гл. 12). Задача о вынужденных колебаниях сводится, таким образом, к задаче о свободных колебаниях (волнах).

Выделим, в порядке возрастания их сложности, три основных класса линейных внутренних краевых задач электродинамики о свободных колебаниях (волнах).

1. Двумерная скалярная задача возникает в том случае, когда уравнения Максвелла удается свести к одному уравнению относительно скалярной двумерной функции. Как показано в гл. 5 и 11, к этой задаче сводится расчет электромагнитного поля свободных волн (колебаний) в регулярных линиях передачи и волноводных резонаторах с однородным изотропным заполнением и граничными условиями типа электрической ($\mathbf{E}_\tau = 0$) или магнитной ($\mathbf{H}_\tau = 0$) стенок. При этом электромагнитное поле описывается функцией $\psi$, удовлетворяющей уравнению (5.15) с граничными условиями (6.39)—(6.41). Такая же задача возникает при расчете поля азимутально-однородных видов колебаний в аксиально-симметричных резонаторах с однородным изотропным заполнением. При этом дифференциальное уравнение имеет вид (11.58), а искомая функция $\psi$ удовлетворяет условиям (11.62) или (11.63) на образующей резонатора и (11.64) на его оси. К двумерной скалярной задаче сводится расчет и в некоторых других случаях, представляющих ограниченный практический интерес [8]. В обобщенном виде эту задачу можно сформулировать как решение уравнения

$$\mathscr{L}\psi = \Lambda Q \psi \tag{14.1}$$

в двумерной области $D$ с граничным условием

$$\mathscr{L}_s \psi = 0 \tag{14.2}$$

на ее границе $L$. В этих уравнениях $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}_s$ — некоторые дифференциальные выражения; $Q$ — двумерная положительная *весовая функция*, $\Lambda = k^2$ или $\Lambda = k_c^2$.

2. Если регулярная линия передачи имеет неоднородное и (или) анизотропное заполнение, то E- и H-волны в ней не разделяются (см. гл. 6). Для описания электромагнитного поля в таких линиях необходимы две скалярные двумерные функции $\psi^e$ и $\psi^m$, связанные через граничные условия и характеристическое уравнение. Примером может служить диэлектрический волновод, рассмотренный в § 9.2 и 9.3. Другой задачей, требующей введения двух функций, является расчет электромагнитного поля азимутально-неоднородных видов колебаний в аксиально-симметричных резонаторах (см. § 11.5).

В обобщенном виде рассматриваемая задача сводится к решению векторного уравнения

$$\mathscr{L}\xi = \Lambda Q \xi \tag{14.3}$$

в двумерной области $D$ с граничными условиями

$$\mathscr{L}_s \xi = 0 \tag{14.4}$$

на ее границе $L$. Здесь

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1(x_1, x_2) \\ \xi_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

— искомая векторная функция-столбец;

$$\mathscr{L}=\begin{bmatrix}\mathscr{L}_{11} & \mathscr{L}_{12}\\ \mathscr{L}_{21} & \mathscr{L}_{22}\end{bmatrix};\quad \mathscr{L}_s=\begin{bmatrix}\mathscr{L}_{s11} & \mathscr{L}_{s12}\\ \mathscr{L}_{s21} & \mathscr{L}_{s22}\end{bmatrix};\quad Q=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\ Q_{21} & Q_{22}\end{bmatrix}$$

— матричные дифференциальные операторы и весовая функция. Задачу решения уравнения (14.3) с граничными условиями (14.4) называют *векторной двумерной задачей.*

Таблица 14.1

| Размерность задачи | Тип функций | Тип электродинамической системы | Заполнение |
|---|---|---|---|
| 2 | Скалярные | Регулярные линии передачи и волноводные резонаторы; аксиально-симметричные резонаторы ($\partial/\partial\theta=0$) | Однородное, изотропное |
| | Векторные | Регулярные линии передачи и волноводные резонаторы; аксиально-симметричные резонаторы ($\partial/\partial\theta\neq 0$) | Неоднородное анизотропное Однородное, изотропное |
| 3 | Векторные | Нерегулярные системы | Произвольное |

3. Если в электродинамической системе не удается выделить направление, вдоль которого ее свойства неизменны, то понижение размерности искомых функций невозможно. Использование векторов Герца для описания электромагнитного поля в этом случае не дает преимуществ и в качестве рабочих обычно используются уравнения второго порядка (4.1) и (4.2) относительно электрического или магнитного поля с граничными условиями $\mathbf{E}_\tau=0$ или $(\mathrm{rot}\,\mathbf{H})_\tau=0$ на идеально проводящей поверхности. Задачи такого типа называют *векторными трехмерными задачами.*

Основные характеристики описанных классов задач электродинамики представлены в табл. 14.1.

Следует отметить, что первые алгоритмы и программы численного решения внутренних краевых задач электродинамики появились в середине 60-х годов. За последующие 20 лет созданы эффективные универсальные (пригодные для анализа областей произвольной формы) программы решения двумерных скалярных и векторных задач. В середине 80-х годов были разработаны первые универсальные алгоритмы и программы решения трехмерных задач электродинамики о свободных колебаниях. В настоящее время (1988), однако, эти алгоритмы далеки от совершенства и задача не может считаться окончательно решенной. Почти не разработаны полевые методы синтеза и оптимизации электродинамических систем, их анализа во временно́й области и целый ряд других проблем, над решением которых работают исследователи в разных странах.

## § 14.3. МЕТОДЫ ДИСКРЕТИЗАЦИИ И РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ЗАДАЧ

Одним из основных этапов численного решения задач электродинамики является дискретизация исходных уравнений. Существует ряд методов дискретизации уравнений математической физики, каждый из которых имеет определенные преимущества и недостатки и свою область применения [8]. Рассмотрим использование одного из наиболее универсальных и простых в реализации методов — *метода конечных разностей* — для решения скалярной двумерной задачи (14.1), (14.2).

Выберем в качестве $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}_s$ выражения, соответствующие полю азимутально-однородных видов колебаний в аксиально-симметричных резонаторах, т. е. проведем дискретизацию уравнения (11.58)

$$\mathscr{L}\psi = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{k^2}{r}\psi \qquad (14.5)$$

в двумерной области $D$ (меридиональном сечении резонатора), ограниченной образующей $L$ и осью симметрии резонатора $L_0$ (рис. 14.1). На образующей $L$ и оси симметрии $L_0$ функция $\psi$ удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned} &\psi = 0 \quad \text{или} \quad \partial\psi/\partial n = 0 \quad \text{на} \quad L; \\ &\psi = 0 \quad \text{и} \quad \partial\psi/\partial n = 0 \quad \text{на} \quad L_0. \end{aligned} \qquad (14.6)$$

Наложим на область $D$ сетку, форма ячеек которой может быть различной — треугольная, прямоугольная, криволинейная и т. п. Наиболее простые алгоритмы получаются при использовании прямоугольных сеток.

Пронумеруем вертикальные линии сетки индексом $m = 0, 1, \ldots, M$, а горизонтальные — индексом $n = 0, 1, \ldots, N$. Пересечения линий сетки (*узлы*) имеют координаты $z_m$, $r_n$. Значения функции $\psi$ в узлах $\psi(z_m, r_n)$ обозначим $\psi_{mn}$. Рассмотрим регулярный узел $(z_m, r_n)$, окруженный четырьмя соседними узлами, отстоящими

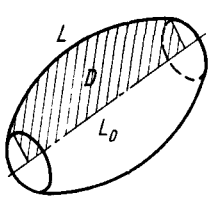



Рис. 14.1. Область определения функции $\psi$ в аксиально-симметричном резонаторе

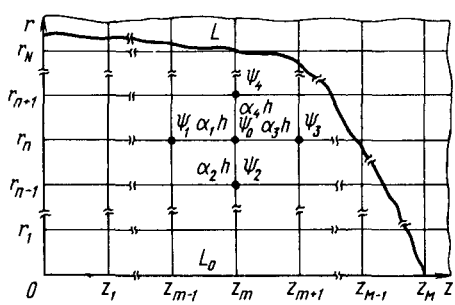



Рис. 14.2. Регулярная прямоугольная сетка, наложенная на область $D$

от него на расстоянии $\alpha_1 h$, $\alpha_2 h$, $\alpha_3 h$, $\alpha_4 h$ (рис. 14.2). Значения функции $\psi$ в узлах для удобства записи обозначим $\psi_0$, $\psi_1$, $\psi_2$, $\psi_3$, $\psi_4$. Разложим функцию $\psi$ в ряд Тейлора вокруг точки $z_m$, $r_n$:

$$\psi(z, r)=\psi_0+\frac{\partial\psi}{\partial z}(z-z_m)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}(z-z_m)^2+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial r}(r-r_n)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}(r-r_n)^2+\ldots. \quad (14.7)$$

Подставив в эти выражения $z=z_m-\alpha_1 h$; $z=z_m+\alpha_2 h$; $r=r_n-\alpha_3 h$; $r=r_n+\alpha_4 h$, найдем конечно-разностные аппроксимации производных:

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}=\frac{\psi_3\alpha_1^2-\psi_0(\alpha_1^2-\alpha_3^2)-\psi_1\alpha_3^2}{h\alpha_1\alpha_3(\alpha_1+\alpha_3)}; \quad (14.8)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=2\frac{\psi_1\alpha_3-\psi_0(\alpha_1+\alpha_3)+\psi_3\alpha_1}{h^2\alpha_1\alpha_3(\alpha_1+\alpha_3)}; \quad (14.9)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{\psi_4\alpha_2^2-\psi_0(\alpha_2^2-\alpha_4^2)-\psi_2\alpha_4^2}{h\alpha_2\alpha_4(\alpha_2+\alpha_4)}; \quad (14.10)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}=2\frac{\psi_2\alpha_4-\psi_0(\alpha_2+\alpha_4)+\psi_4\alpha_2}{h^2\alpha_2\alpha_4(\alpha_2+\alpha_4)}. \quad (14.11)$$

Погрешность этих аппроксимаций имеет порядок $h$ и снижается с уменьшением отношения $\alpha_{max}/\alpha_{min}$, где $\alpha_{max}$, $\alpha_{min}$ — максимальные и минимальные значения, выбранные из набора чисел $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$. Наименьшая погрешность порядка $h^2$ достигается при использовании регулярной квадратной сетки ($\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=1$).

Раскроем скобки в уравнении (14.5) и помножим обе его части на $r$. В результате получим

$$\mathscr{L}_1\psi=-\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-k^2\psi=0. \quad (14.12)$$

Следует отметить, что оператор $\mathscr{L}_1=r\mathscr{L}$ в отличие от оператора $\mathscr{L}$ несимметричен. При использовании метода конечных разностей это обстоятельство, однако, несущественно.

Записав уравнение (14.12) для точки с координатами $z_m$, $r_n$ и заменив в нем производные аппроксимирующими выражениями (14.8)—(14.11), получим конечно-разностное уравнение для регулярного узла, которое ввиду его громоздкости здесь не приводится. В случае применения регулярной квадратной сетки выражения (14.8)—(14.10) упрощаются, и конечно-разностное уравнение для узла $(z_m, r_n)$ приобретает вид

$$-\psi_{m+1.n}-\left(1-\frac{1}{2n}\right)\psi_{m.n+1}+4\psi_{mn}-\psi_{m-1.n}-\left(1+\frac{1}{2n}\right)\psi_{m.n-1}=(kh)^2\psi_{mn}. \quad (14.13)$$

Выражение в левой части этого равенства называется *равноплечным пятиточечным разностным оператором.*

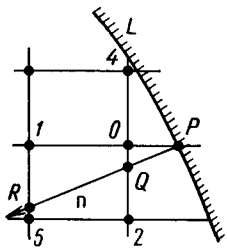



Рис. 14.3. К построению разностных уравнений для нерегулярных узлов сетки

Для нерегулярных (приграничных) узлов сетки построение разностных уравнений типа (14.13) невозможно, так как один или несколько соседних узлов лежат за пределами расчетной области. Если на границе $L$ или части ее, прилегающей к данному нерегулярному узлу, заданы условия Дирихле ($\psi=0$), значения сеточной функции $\psi_{mn}$ в граничных (лежащих на границе) узлах также полагаются равными нулю. Тогда конечно-разностные уравнения для нерегулярных узлов могут быть построены с помощью неравноплечного пятиточечного оператора, вид которого определяется с помощью выражений (14.8), (14.11).

Более сложная задача возникает, если на участке границы, прилегающей к данному нерегулярному узлу, задано условие Неймана, так как значения функции $\psi$ в граничных узлах в этом случае неизвестны. Для их отыскания необходимо разложить функцию $\psi$ в точке $(z_m, r_n)$ в ряд Тейлора по направлению нормали к границе и, приравняв первую производную ее нулю, получить уравнение, связывающее значение функции в граничном узле с ее значениями в других узлах. Подставив затем это значение в разностный оператор, найдем искомое уравнение для нерегулярного узла. При этом точность аппроксимации зависит от числа членов ряда Тейлора, удерживаемых в разложении.

Проиллюстрируем изложенное построением разностных операторов для нерегулярного узла 0 (рис. 14.3). Для этого построим нормаль $n$ к границе в узле $P$ и представим функцию $\psi$ в виде разложения в ряд Тейлора:

$$\psi=\psi(P)+\psi'_n(P)l+\frac{1}{2}\psi''_n(P)l^2+\ldots,$$

где $l$ — расстояние, отсчитываемое вдоль нормали от точки $P$. В соответствии с граничным условием $\partial\psi/\partial n=\psi'_n(P)=0$, откуда

$$\psi=\psi(P)+\frac{1}{2}\psi''_n(P)l^2+\ldots. \qquad (14.14)$$

При аппроксимации нулевого порядка оставляют только первый член этого разложения, т. е. считают, что значение функции $\psi$ вблизи границы не меняется. Можно положить, например, $\psi(P)=\psi_0$. Подставив затем найденное значение $\psi(P)$ в неравноплечный оператор, запишем конечно-разностное уравнение для $\psi_0$, содержащее значения функций $\psi$ в точках 0, 1, 2, 4.

Аппроксимация второго порядка предполагает сохранение в (14.14) двух членов. Выбрав две точки $Q$ и $R$, лежащие на нормали, найдем

$$\psi(Q)=\psi(P)+0{,}5\psi''_n(P)l_Q^2;$$

$$\psi(R)=\psi(P)+0{,}5\psi''_n(P)l_R^2,$$

откуда

$$\psi(P)=\frac{l_R^2\psi(Q)-l_Q^2\psi(R)}{l_Q^2-l_R^2}.$$

Если граница проходит не параллельно линиям сетки, то точки $Q$ и $R$ не являются узловыми. Для вычисления значений функции $\psi$ в этих точках необходимо провести ее линейную интерполяцию на промежутках между узловыми точками 0, 2 и 1, 5. Подставив найденное значение функции в точке $P$ в неравноплечный оператор, получим конечно-разностное уравнение, связывающее значение функции в узлах 0, 1, 2, 4 и 5.

Выведем конечно-разностные уравнения для узлов, расположенных вблизи оси резонатора. Используя граничные условия (11.64), найдем

$$\psi_{m,0}=0;$$
$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0. \qquad (14.15)$$

Разложим функцию $\psi$ в ряд Маклорена:

$$\psi(r, z_m)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}r^2+\ldots.$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2\psi(z_m, r_1)}{\partial r^2}\approx\frac{2}{h^2}\psi_{m,1}.$$

Подставив полученное выражение в (14.15), получим конечно-разностные уравнения для узлов, лежащих на линии сетки $r=r_1$:

$$-\psi_{m+1,1}+2\psi_{m,1}-\psi_{m-1,1}=(kh)^2\psi_{m1}.$$

Записав таким образом конечно-разностные уравнения для всех внутренних узлов сетки и пронумеровав эти узлы по порядку, т. е. введя индекс $j=m+n(M-1)$, получим систему однородных линейных алгебраических уравнений порядка $S=MN$ относительно $S$ неизвестных значений функций $\psi$ в узлах сетки. Фактически число уравнений и неизвестных меньше, чем $S$, так как для внешних узлов уравнения не составляются, а значения функции $\psi$ в этих узлах полагаются равными нулю. Соответствующей перенумерацией можно исключить внешние узлы и понизить порядок системы уравнений, что приведет к экономии памяти ЭВМ. При этом алгоритм расчета усложняется.

Запишем полученную систему уравнений в матричном виде

$$\mathbf{LX}=\Lambda_h\mathbf{X}, \qquad (14.16)$$

где

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \ldots. & L_{1S} \\ L_{21} & L_{22} & \ldots. & L_{2S} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ L_{S1} & L_{S2} & \ldots. & L_{SS} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}=\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_S \end{bmatrix}$$

— квадратная матрица коэффициентов конечно-разностных уравнений и вектор-столбец значений функции $\psi$ во внутренних узлах сетки; $\Lambda_h=(kh)^2$. Ненулевые решения системы (14.16) называются *собственными векторами* матрицы $\mathbf{L}$, а соответствующие им значения $\Lambda_h$ — *собственными числами* этой матрицы. На практике представляют интерес несколько наименьших собственных чисел и соответствующих им векторов задачи (14.16), приближенно описывающих основной и несколько высших азимутально-однородных видов колебаний в резонаторе.

Погрешность матричной задачи (14.16), как отмечалось, имеет порядок $h^2$. Поэтому для достижения приемлемой точности

приходится использовать сетки с достаточно малым шагом. При этом число внутренних узлов $S$ (т. е. порядок матрицы $\mathbf{L}$ и размерность вектора $\mathbf{X}$) составляет обычно 5—20 тысяч. Число элементов матрицы $\mathbf{L}$, равное $S^2$, достигает десятков миллионов и их невозможно хранить в памяти ЭВМ.

Структура матрицы $\mathbf{L}$, однако, очень разреженная, так как подавляющее число ее элементов имеют нулевые значения. Действительно, из выражения (14.13) следует, что строка матрицы $\mathbf{L}$, соответствующая регулярному узлу, содержит всего пять ненулевых элементов, значения которых легко вычисляются по индексам узла сетки. Поэтому нет необходимости хранить их в памяти ЭВМ. Несколько более сложную структуру имеют уравнения для нерегулярных узлов, однако и в них число ненулевых элементов не превышает десяти. Это позволяет хранить в памяти ЭВМ только узловые значения функции $\psi$ и использовать сетки с большим числом внутренних узлов.

Большинство известных методов вычисления собственных чисел матриц (методов решения спектральных задач) требует выполнения над матрицами определенных операций [10]. В условиях, когда сама матрица не хранится в памяти ЭВМ, единственно возможной операцией оказывается ее умножение на вектор. Это обстоятельство резко ограничивает число пригодных методов нахождения собственных чисел и векторов.

Одним из наиболее эффективных итерационных алгоритмов решения спектральных задач является *метод последовательной верхней релаксации* (ПВР), применяемый в тех случаях, когда все собственные числа матрицы $\mathbf{L}$ положительны. Алгоритм предполагает вычисление вектора $\mathbf{X}$ методом последовательных приближений, причем значения компонент этого вектора (значений $\psi_{mn}$) на итерации $i+1$ определяются по формуле

$$\psi_{mn}^{(i+1)} = \psi_{mn}^{(i)} + \nu\left(\tilde{\psi}_{mn} - \psi_{mn}^{(i)}\right), \tag{14.17}$$

где $\nu$ — коэффициент релаксации; $\tilde{\psi}_{mn}$ — значение $\psi_{mn}$, полученное из конечно-разностных уравнений. В частности, для регулярных узлов при обходе расчетной области в порядке возрастания $m$ и $n$, согласно (14.13),

$$\tilde{\psi}_{mn} = \frac{\psi_{m+1,n}^{(i)} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\psi_{m,n+1}^{(i)} + \psi_{m-1,n}^{(i+1)} + \left(1 + \frac{1}{2n}\right)\psi_{m,n-1}^{(i+1)}}{4 - (kh)^2}. \tag{14.18}$$

Из этой формулы следует, что по мере вычисления старые значения $\psi_{mn}$ можно замещать в памяти ЭВМ новыми. Таким образом, для хранения информации требуется всего $S$ (а не $2S$) ячеек памяти. Коэффициент релаксации $\nu$ определяет скорость сходимости итерационного процесса. Как следует из (14.17), при $\nu=1$ метод сводится к простой итерации, скорость сходимости которой достаточно мала. По мере увеличения $\nu$ скорость сходимости возрастает, стремясь к максимуму при оптимальном значении коэффициента релаксации, которое зависит от шага сетки и свойств матрицы $\mathbf{L}$ и лежит в интервале от 1 до 2.

В формулу (14.18) входит собственное число $(kh)^2$, которое заранее неизвестно. Его можно вычислить, если известны значения функции $\psi$ в узлах сетки. Для этого помножим матричное уравнение на вектор-строку $\mathbf{X}^T$:

$$\mathbf{X}^T\mathbf{L}\mathbf{X}=\Lambda_h\mathbf{X}^T\mathbf{X}.$$

Отсюда

$$\Lambda_h=(kh)^2=\frac{\mathbf{X}^T\mathbf{L}\mathbf{X}}{\mathbf{X}^T\mathbf{X}}. \qquad (14.19)$$

Равенство (14.19) называется *частным Рэлея*. Оно позволяет находить собственные числа по известным собственным векторам. Для симметричных матриц с положительными собственными значениями (положительно-определенных) частное Рэлея обладает свойством стационарности: погрешность определения $\Lambda_h$ имеет бóльший порядок малости, чем погрешность нахождения собственного вектора $\mathbf{X}$.

Используя частное Рэлея, можно построить двойной итерационный процесс решения спектральной задачи следующим образом.

1. Вектору $\mathbf{X}$ присваивают некоторое начальное значение $\mathbf{X}^{(0)}$. Например, все узловые значения $\psi_{mn}^{(0)}$ во внутренних узлах сетки полагают равными единице.
2. По формуле (14.19) вычисляют начальное значение $\Lambda_h^{(0)}$.
3. Используя найденные значения $\Lambda_h^{(0)}$, приводят $p$ шагов итерационного процесса по (14.17), (14.18).
4. По формуле (14.19) определяют новое значение $\Lambda_h^{(1)}$.
5. Проверяют выполнение критерия внутренней сходимости

$$\left|\frac{\Lambda_h^{(i)}-\Lambda_h^{(i-1)}}{\Lambda_h^{(i)}}\right|<\varepsilon,$$

где $\varepsilon$ — заданное малое число. Если неравенство не выполняется, итерационный процесс продолжается с п. 3. В противном случае итерационный процесс заканчивается, а найденные значения $k_h=\sqrt{\Lambda_h}/h$ и $\mathbf{X}$ считают приближенными значениями собственного волнового числа $k$ и собственной функции $\psi$.

Как показывает анализ [10], описанный итерационный процесс сходится к наименьшему собственному числу, соответствующему основному виду колебаний. Для расчета высших видов колебаний необходимо в процессе решения одновременно с вычислением нового значения $\Lambda_h$ проводить ортогонализацию вектора $\mathbf{X}$ ко всем ранее найденным собственным векторам, например с помощью *формулы Грамма — Шмидта*:

$$\mathbf{X}_q^{(i)}=\mathbf{X}_t^{(i)}-\sum_{m=1}^{q-1}(\mathbf{X}_m^T\mathbf{X}_t^{(i)})/(\mathbf{X}_m^T\mathbf{X}_m),$$

где $\mathbf{X}_t^{(i)}$ — приближенное значение вектора $\mathbf{X}_q$ на $i$-м шаге итерационного процесса; $\mathbf{X}_m$ — собственный вектор $m$-го вида колебаний; $\mathbf{X}_q$ — собственный вектор вычисляемого вида колебаний; $i$ — номер итерации. Таким образом, для вычисления $q$-го собственного вектора предварительно следует вычислить и сохранить в памяти $q-1$ собственных векторов с меньшими собственными числами.

## § 14.4. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ПАРАМЕТРОВ РЕГУЛЯРНЫХ ВОЛНОВОДОВ И АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

Вычислив собственный вектор $\mathbf{X}$ и собственное число $\Lambda_h$ данного вида колебаний, рассчитаем электромагнитное поле резонатора с помощью соотношений (11.59)—(11.60). Заменив в них производные центральными конечными разностями, для регулярных узлов сетки найдем

для Е-колебаний

$$\dot{E}_\theta = k_0^2 \dot{A}^e \frac{1}{2nh} \psi_{mn};$$

$$\dot{H}_r = -\mathrm{i} \frac{\dot{A}^e k_0}{2nh^2 Z_0} (\psi_{m+1,n} - \psi_{m-1,n});$$

$$\dot{H}_z = \mathrm{i} \frac{\dot{A}^e k_0}{2nh^2 Z_0} (\psi_{m,n+1} - \psi_{m,n-1}),$$

для Н-колебаний

$$\dot{E}_r = \mathrm{i} \dot{A}^m k_0 Z_0 \frac{\psi_{m+1,n} - \psi_{m-1,n}}{2nh^2};$$

$$\dot{E}_z = -\mathrm{i} \dot{A}^m k_0 Z_0 \frac{\psi_{m,n+1} - \psi_{m,n-1}}{2nh^2};$$

$$\dot{H}_\theta = \frac{\dot{A}^m k_0^2}{2nh} \psi_{mn},$$

где $k_0 \approx \sqrt{\Lambda_h}/h$ — приближенное значение собственного волнового числа, $\dot{A}^{e,m}$ — произвольный амплитудный множитель.

Эти формулы неприменимы для расчета электромагнитного поля на оси резонатора, так как узлы с отрицательными индексами не существуют. Для расчета поля на оси необходимо учесть граничные условия (11.64) и перейти в выражениях (11.59)—(11.60) к пределу при $r \to 0$. В этом случае для Е-колебаний

$$\dot{E}_\theta = \dot{H}_r = 0; \quad \dot{H}_z(0, z_m) = \frac{\mathrm{i}k}{Z_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \frac{2\mathrm{i}\dot{A}^e k}{Z_0 h^2} \psi_{m1},$$

для Н-колебаний

$$\dot{H}_\theta = \dot{H}_r = 0; \quad \dot{E}_z(0, z_m) = -\frac{2\mathrm{i}kZ_0 \dot{A}^m}{h^2} \psi_{m1}.$$

Добротность резонатора $Q$ вычисляется по формуле (11.22). Числитель и знаменатель этого выражения зависят от мембранной функции $\psi$. В частности, для Н-колебаний

$$W=\frac{1}{2}\int_V \mu |\dot{H}_\theta|^2 dV=\pi k_0^2 \mu \int_D \frac{1}{r^2}\psi^2(r, z) r dr dz;$$

$$P=\frac{1}{2}R_s\int_S |\dot{H}_\theta|^2 dS=\pi k_0 R_s \oint_L \frac{1}{r^2}\psi^2(r, z) r dl.$$

Отсюда

$$Q=\frac{Z_0 k_0}{R_s}\frac{\int_D r^{-1}\psi^2(r, z) dr dz}{\oint_L r^{-1}\psi^2(r, z) dl}. \qquad (14.20)$$

Волновое сопротивление резонатора ρ определяется выражением (11.28). Подставив в него значение энергии и выразив **E** через функцию ψ с помощью (11.59), для H-колебаний найдем

$$\rho=\frac{Z_0}{2\pi k_0^3}\frac{\left|\int_1^2 r^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial n}dl\right|^2}{\int_D r^{-1}|\psi|^2 dr dz}, \qquad (14.21)$$

где $\partial\psi/\partial n$ — производная функции ψ по нормали к линии $l$. Использовав соотношение (12.41) и равенство $\Phi=\int_{D_1}\mu H_\theta dr dz=$ $=\mu\int_{D_1} r^{-1}\psi dr dz$, преобразуем выражение для волнового сопротивления резонатора к виду

$$\rho=\frac{Z_0 k_0}{2\pi}\frac{\left|\int_{D_1} r^{-1}\psi dr dz\right|^2}{\int_D r^{-1}|\psi|^2 dr dz}, \qquad (14.22)$$

где интеграл в числителе берется по области $D_1$, ограниченной образующей резонатора и линией $l$, вдоль которой определяется волновое сопротивление. Формула (14.22) обеспечивает бо́льшую точность, чем (14.21), так как при ее применении нет необходимости вычисления производной сеточной функции. Кроме того, она пригодна и для определения волнового сопротивления на оси резонатора.

При использовании выражений (14.20), (14.22) следует интегрировать сеточные функции. Это интегрирование удобно вести по каждой ячейке сетки отдельно, а затем суммировать результаты. Воспользовавшись билинейной интерполяцией функции $f$ внутри ячейки квадратной сетки

$$f(r, z)=h^{-2}[f_{mn}(h-z')(h-r')+f_{m+1.n}z'(h-r')+f_{m+1.n+1}z'r'+f_{m.n+1}(h-z')r'],$$

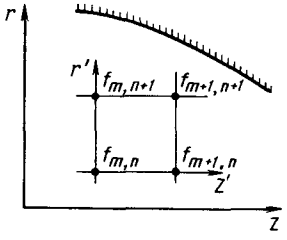



Рис. 14.4. К выводу формул для численного интегрирования по площади ячейки сетки

получим

$$\int_{D_k} f(r', z')\,dr'dz' = 0{,}25h^2\left(f_{mn}+f_{m+1,n}+f_{m+1,n+1}+f_{m,n+1}\right),$$

где $r'$, $z'$ — локальные координаты ячейки (рис. 14.4). Подставив в эту формулу вместо $f$ функции $r^{-1}\psi$ или $r^{-1}\psi^2$ и суммируя результаты интегрирования по всем ячейкам сетки, вычислим параметры резонатора. При этом интегрирование по нерегулярным ячейкам ведут с помощью специальных приемов [8].

## § 14.5. ПРОГРАММЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Для расчета электромагнитного поля и параметров свободных колебаний (волн) в электродинамических системах применяются комплексы программных модулей, каждый из которых выполняет определенные функции. Особенно сложную структуру имеют программы (пакеты прикладных программ) решения трехмерных задач электродинамики, насчитывающие десятки тысяч операторов. Далее приводится краткое описание пакета прикладных программ (ППП) расчета электромагнитного поля и параметров свободных колебаний (волн) в аксиально-симметричных резонаторах и регулярных волноводах методом конечных разностей, т. е. пакета прикладных программ решения скалярных двумерных задач электродинамики.

Структурная схема ППП показана на рис. 14.5. Управляющая программа (УП), работающая в вычислительной среде операционной системы общего пользования, осуществляет обращение к отдельным группам программных модулей, обеспечивает взаимодействие между ними, выделение необходимых ресурсов, запись и хранение промежуточных результатов.

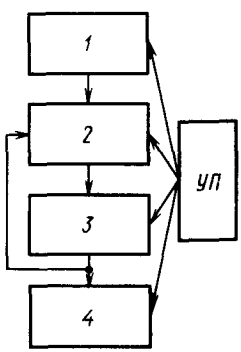



Рис. 14.5. Структурная схема ППП решения двумерных скалярных внутренних задач электродинамики

После начала работы управляющий модуль обращается к группе программных модулей ввода и анализа задания *1*. Форма области обычно описывается набором отрезков прямых и дуг окружностей, соединенных между собой. Каждый элемент границы определяется координатами начальной и конечной точек. Для дуги окружности необходимо дополнительно задать координаты любой ее промежуточной точки. Так как начало одного элемента совпадает с концом другого, для

описания границы необходимо задать $M_п+2M_0+1$ пар координат, где $M_п$ — число отрезков прямых; $M_0$ — число дуг окружностей.

После ввода производится анализ правильности исходной информации (число координат должно быть четным, граница — замкнутой и т. п.) и построение уравнений отрезков и дуг, образующих границу. Коэффициенты этих уравнений рассчитываются по координатам принадлежащих элементам границы точек, и записываются в память ЭВМ. Расчетная область затем может быть выведена на экран графического дисплея и при необходимости скорректирована.

Группа программных модулей *2* осуществляет подготовку информации для вычисления коэффициентов конечно-разностных уравнений. Исходя из заданного числа узлов выбирается шаг сетки $h$. Часто, с целью сокращения времени решения, вычисления производят на последовательности сеток, причем шаг каждой следующей сетки в два раза меньше, чем предыдущий. В этом случае начальный шаг и число сеток выбираются так, чтобы первая сетка содержала не менее 150—200 узлов и была связной, а последняя обеспечивала заданное число узлов (5—15 тыс.). Эта процедура может выполняться автоматически или вручную.

После выбора шага определяются координаты точек пересечения элементов границы со всеми линиями сетки. С помощью этих данных анализируется тип каждого узла сетки. Если он внешний, то в соответствующий элемент массива узловых значений функции $\psi$ записывается 0, если внутренний, то 1. Если данная сетка не первая, вместо этого производится интерполяция сеточной функции, полученной на старой сетке, в новые узлы. Кроме того, для каждого нерегулярного узла в отдельный массив заносятся его номер, длина нерегулярных плеч и их положение, тип условий на участке границы, прилегающей к узлу.

Полученная информация передается группе программных модулей *3*, осуществляющих решение матричной задачи. Эта группа включает модули решения разностных уравнений, вычисления собственного числа, ортогонализации, выбора коэффициента релаксации, проверки выполнения условий сходимости. В результате ее работы получаются массивы значений функции $\psi$ в узлах и собственные числа для заданных видов колебаний. Эта информация может передаваться в группу модулей *2* для организации вычислений на следующей сетке либо в группу модулей обработки результатов *4*, осуществляющих расчет составляющих электромагнитного поля и параметров электродинамической системы, а также вывод этих данных в виде таблиц, графиков и эпюр силовых линий.

В качестве примера на рис. 14.6, *а*, *б* показаны эпюры силовых линий электрического поля двух первых азимутально-однородных Н-колебаний в тороидальном резонаторе. Штрихпунктирной линией обозначена ось симметрии резонатора. Расчет производился по программе АЗИМУТ [8] методом конечных разностей на последовательности трех сеток, последняя из которых имела

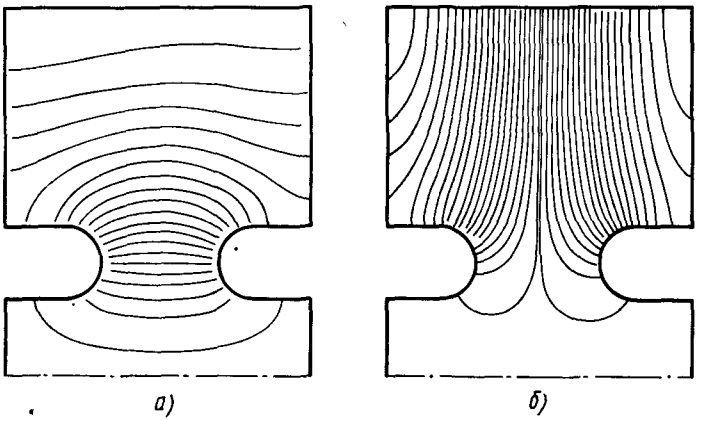



Рис. 14.6. Эпюры силовых линий электрического поля двух первых видов колебаний в тороидальном резонаторе:
*а* — для колебаний вида $H_{010}$; *б* — для колебаний вида $H_{011}$

около 10 тыс. узлов. Некоторая несимметрия поля обусловлена конечной погрешностью расчета.

Аналогичные результаты расчета двух видов колебаний в кольцевом резонаторе показаны на рис. 14.7. При этом использована другая форма графического представления поля, в соответствии с которой в каждом узле первой сетки строится вектор касательной к силовой линии, длина которого пропорциональна напряженности поля в этой точке.

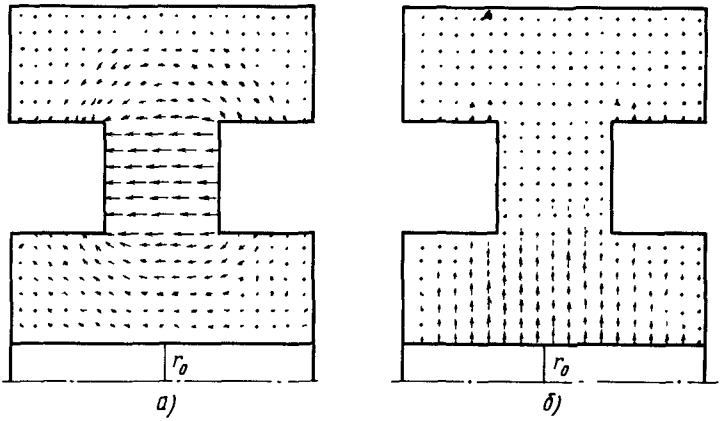



Рис. 14.7. Эпюры силовых линий электрического поля двух первых видов колебаний в кольцевом резонаторе:
*а* — для колебаний вида $H_{010}$; *б* — для колебания вида $H_{011}$; $r_0$ — радиус центрального стержня

Таблица 14.2

| Тип резонатора | Вид колебаний | $\lambda_0/R$ | ρ, Ом |
|---|---|---|---|
| Тороидальный | 1 | 3,498 | 95,17 |
| | 2 | 1,501 | 0,003 |
| Кольцевой | 1 | 2,946 | 29,17 |
| | 2 | 1,547 | 0,028 |

Рассчитанные значения собственных длин волн $\lambda_0$ (нормированных к внешнему радиусу резонатора $R$) и волнового сопротивления на оси тороидального резонатора и на линии $r=0{,}65R$ в кольцевом резонаторе приведены в табл. 14.2.

Погрешность вычисления собственных частот не превышает 0,2% по сравнению с экспериментальными данными. Погрешность расчета волнового сопротивления на основном виде колебаний — не более 1%, на втором виде колебаний в обоих случаях теоретическое значение ρ равно нулю. Отличие расчетного значения этого параметра от нуля характеризует степень несимметрии вычисленного поля резонатора.

Программа АЗИМУТ написана на алгоритмическом языке ФОРТРАН, содержит около 3 тыс. операторов и занимает 350 Кбайт памяти ЭВМ. Среднее время расчета одного вида колебаний на сетке, содержащей около 10 тыс. узлов, 1 мин на ЭВМ ЕС-1060.

**Контрольные вопросы**

1. Перечислите основные этапы процесса численного решения задач электродинамики.
2. Укажите основные источники погрешности, возникающей при численном решении задач электродинамики.
3. Перечислите основные классы внутренних краевых задач электродинамики и приведите примеры электродинамических систем, расчет которых требует решения соответствующих задач.
4. Запишите конечно-разностные уравнения для регулярных узлов квадратной сетки, возникающие при дискретизации уравнения для функции ψ, описывающей азимутально-однородные виды колебаний в аксиально-симметричных резонаторах.
5. Выведите конечно-разностные уравнения для функции ψ, описывающей электромагнитное поле свободных волн в регулярных волноводах.
6. Опишите способы построения конечно-разностных операторов для нерегулярных узлов сетки.
7. Сформулируйте матричную задачу на собственные значения, полученную в результате дискретизации, и перечислите свойства матрицы.
8. Опишите основные этапы решения спектральной матричной задачи методом последовательной верхней релаксации.
9. Приведите формулы, позволяющие вычислить составляющие электромагнитного поля по известной сеточной функции.
10. Перечислите способы расчета добротности и волнового сопротивления резонатора.
11. Укажите основные модули программы вычисления электромагнитного поля и параметров электродинамических систем.

# ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ СВЧ-ЦЕПЕЙ

## ГЛАВА 15
## ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

### § 15.1. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

Электродинамическое описание процессов распространения волн в линиях передачи часто оказывается излишне подробным. Действительно, как показано в гл. 5 и 6, для данного типа волны и фиксированной частоты распределение поперечных составляющих напряженности электромагнитного поля в любом сечении линии передачи одинаково (с точностью до амплитуды). Поэтому мощность, передаваемая падающей волной в линии без потерь

$$P=\frac{1}{2}\int_S[\dot{\mathbf{E}}_\perp,\dot{\mathbf{H}}_\perp^*]\mathbf{e}_z\,dS=\frac{0{,}5}{Z_c}\int_S|\dot{\mathbf{E}}_\perp|^2\,dS=\frac{Z_c}{2}\int_S|\dot{\mathbf{H}}_\perp|^2\,dS \qquad (15.1)$$

может быть определена величиной, пропорциональной амплитуде поперечной составляющей напряженности электрического или магнитного поля и характеристическим сопротивлением линии передачи для данного типа волны $Z_c$.

Введем *нормированные напряженности* $\dot{\mathbf{E}}_\perp^н$ и $\dot{\mathbf{H}}_\perp^н$ таким образом, чтобы

$$\int_S|\dot{\mathbf{E}}_\perp^н|^2\,dS=\int_S|\dot{\mathbf{H}}_\perp^н|^2\,dS=1, \qquad (15.2)$$

и запишем

$$\dot{\mathbf{E}}_\perp=a_U\dot{U}_{эк}\mathbf{E}_\perp^н;\ \ \mathbf{H}_\perp=a_I\dot{I}_{эк}\dot{\mathbf{H}}_\perp^н. \qquad (15.3)$$

В этих выражениях $a_U$, $a_I$ — коэффициенты; $\dot{U}_{эк}$, $\dot{I}_{эк}$ — эквивалентное напряжение и ток в линии передачи. Подставив выражения (15.2) и (15.3) в (15.1), найдем

$$P=\frac{1}{2}a_U a_I^*\dot{U}_{эк}\dot{I}_{эк}^*=\frac{|a_U|^2}{2Z_c}|\dot{U}_{эк}|^2=\frac{|a_I|^2}{2}Z_c|\dot{I}_{эк}|^2. \qquad (15.4)$$

Введя эквивалентные *волновые сопротивления* линии передачи $Z_{вU}=Z_c/|a_U|^2$ и $Z_{вI}=Z_c|a_I|^2$, получим

$$P=\frac{1}{2}\left|\frac{Z_{вI}}{Z_{вU}}\right|\dot{U}_{эк}\dot{I}^*_{эк}=\frac{1}{2Z_{вU}}|\dot{U}_{эк}|^2=\frac{1}{2}Z_{вI}|\dot{I}_{эк}|^2. \qquad (15.5)$$

Наряду с волновыми сопротивлениями часто используют волновые проводимости $Y_{вU,I}=1/Z_{вU,I}$.

Таким образом, эквивалентные напряжения и ток пропорциональны амплитудам напряженностей соответствующих полей и определяют передаваемую по линии передачи мощность. Эти величины называют *интегральными параметрами* линии передачи, так как они не зависят от поперечных координат и характеризуют электромагнитное поле волны в целом.

Значения коэффициентов $a_U$ и $a_I$ выбирают, исходя из удобства записи формул. Часто, например, полагают $|a_U|^2=Z_c$; $|a_I|^2=1/Z_c$. Получаемые при этом эквивалентные напряжения и токи называют *нормированными** и обозначают $\dot{U}^н_{эк}$, $\dot{I}^н_{эк}$. Из выражения (15.4) следует, что

$$P=\frac{1}{2}|\dot{U}^н_{эк}|^2=\frac{1}{2}|\dot{I}^н_{эк}|^2=\frac{1}{2}\dot{U}^н_{эк}\dot{I}^{н*}_{эк}, \qquad (15.6)$$

а волновые сопротивления $Z_{вU}=Z_{вI}=1$. Согласно (15.6), нормированные напряжение и ток имеют размерность $\sqrt{\text{Вт}}$.

В гл. 8 показано, что в двухпроводной линии передачи для Т-волны справедливы соотношения

$$P=\frac{1}{2}\dot{U}\dot{I}^*=\frac{1}{2Z_в}|\dot{U}|^2=\frac{1}{2}Z_в|\dot{I}|^2, \qquad (15.7)$$

где

$$\dot{U}=-\int_1^2\dot{\mathbf{E}}_\perp d\mathbf{l};\quad \dot{I}=\oint_l\dot{\mathbf{H}}_\perp d\mathbf{l} \qquad (15.8)$$

— напряжение между проводниками линии передачи и ток в одном из них; $Z_в=\dot{U}/\dot{I}$. Сравнивая выражения (15.4) и (15.7), видим, что они совпадают, если $a_I=1/a_U=\sqrt{Z_в/Z_c}$. В этом случае эквивалентные напряжения и токи равны «физическим» напряжениям и токам в линии передачи.

Для волн других типов физические напряжения и токи ввести не удается, так как поле этих типов волн в поперечном сечении линии передачи не является безвихревым. Тем не менее для определения эквивалентных токов и напряжений можно использовать формулы (15.8), выбрав соответствующим образом точки на контуре поперечного сечения направляющей системы и линии, по которым производится интегрирование.

---

* Их не следует путать с напряжениями и токами нормальных волн в многопроводных ЛП (см. гл. 8).

Рассмотрим, например, волну типа $H_{1o}$ в прямоугольном волноводе. Электромагнитное поле этой волны описывается выражениями (7.20)—(7.22). Подставив их в (15.2), найдем

$$\dot{E}_y^{\text{н}} = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{ab}}\sin\frac{\pi x}{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_z z}; \tag{15.9}$$

$$\dot{H}_x^{\text{н}} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{ab}}\sin\frac{\pi x}{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_z z}. \tag{15.10}$$

Рассчитаем эквивалентное напряжение волны типа $H_{1o}$ как интеграл между точками, расположенными посередине широких стенок волновода по прямой линии, соединяющей эти точки:

$$\dot{U}_{\text{эк}} = -\int_0^b \dot{E}_y\left(\frac{a}{2}, y\right)\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{i}kZ_0\pi b}{a}\dot{B}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_z z}. \tag{15.11}$$

Эквивалентный ток вычислим как продольный ток, текущий по широкой стенке волновода:

$$\dot{I}_{\text{эк}} = \int_0^a \dot{I}_{sz}\mathrm{d}x = \int_0^a \dot{H}_x(x, 0)\mathrm{d}x = 2\mathrm{i}k_z\dot{B}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_z z}. \tag{15.12}$$

Подставив выражения (7.20), (15.8) и (15.10) в первое из соотношений (15.3), найдем $a_U = -\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{a}{2b}}$. Аналогично, с помощью формул (7.21), (15.10) и (15.12) получим $a_I = -\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{b}{2a}}$. Эти выражения дают возможность определить волновые сопротивления эквивалентной прямоугольному волноводу длинной линии:

$$Z_{\text{в}U} = \frac{Z_c^m}{|a_U|^2} = \frac{2b}{a}Z_c^m = 2\frac{b}{a}\frac{k}{k_z}Z_0;$$

$$Z_{\text{в}I} = |a_I|^2 Z_c^m = \frac{\pi^2}{8}\frac{b}{a}\frac{k_z}{k}Z_0.$$

Волновое сопротивление можно рассчитать и с помощью выражения $Z_{\text{в}UI} = \dfrac{\dot{U}_{\text{эк}}}{\dot{I}_{\text{эк}}} = \dfrac{a_I}{a_U}\dfrac{\dot{E}_\perp}{\dot{H}_\perp}\dfrac{\dot{H}_\perp^{\text{н}}}{\dot{E}_\perp^{\text{н}}} = \dfrac{a_I}{a_U}Z_c^m = \dfrac{\pi b}{2a}\dfrac{k}{k_z}Z_0 = \sqrt{Z_{\text{в}U}Z_{\text{в}I}}$.

Как видно, в отличие от характеристического волновое сопротивление явно зависит от размеров линии передачи. Величины $Z_{\text{в}U}$, $Z_{\text{в}I}$ и $Z_{\text{в}UI}$ отличаются друг от друга постоянным множителем. Так как обычно имеет значение отношение волновых сопротивлений, это оказывается несущественным. В дальнейшем (в зависимости от контекста) в качестве волнового сопротивления

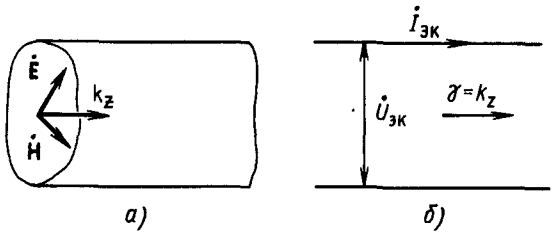



Рис. 15.1. Реальная линия передачи (*а*) и эквивалентная ей схема двухпроводной линии (*б*)

используется величина $Z_{вU}$, $Z_{вI}$ или $Z_{вUI}$. При этом индексы $\dot{U}$, $\dot{I}$ опускаются.

Аналогично вводятся эквивалентные параметры и для других линий передачи. Так, для микрополосковой линии $\dot{U}_{эк} = -\int_0^h \dot{E}_y(0, y)\,dy$, (см. рис. 8.10), а для щелевой $\dot{U}_{эк} = -\int_0^w \dot{E}_x(x, 0)\,dx$ (см. рис. 8.14). Соответствующие выражения для волнового сопротивления этих линий приведены в гл. 8, справочнике [4] и других изданиях.

Как показано далее, именно равенство волновых (а не характеристических) сопротивлений, как интегральных параметров линий передачи, обеспечивает минимальные отражения при их соединении. В этом заключается физическое содержание понятия волнового сопротивления, несмотря на некоторую условность его определения.

Таким образом, реальной линии передачи, в которой распространяется определенный тип волны, соответствует эквивалентная двухпроводная линия напряжением $\dot{U}_{эк}$, током $\dot{I}_{эк}$, волновым сопротивлением $Z_в$ и постоянной распространения $\gamma = k_z$, равной постоянной распространения в реальной линии (рис. 15.1). Если в реальной линии распространяется несколько типов волн, то каждому типу волны соответствует эквивалентная длинная линия со своими параметрами $\dot{U}$, $\dot{I}$, $Z_в$ (индекс «эк» здесь и далее опускается).

## § 15.2. КОЭФФИЦИЕНТЫ ОТРАЖЕНИЯ И СТОЯЧЕЙ ВОЛНЫ. ВХОДНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

Рассмотрим линию передачи с неоднородностью, в которой возбуждена волна, распространяющаяся вправо (падающая волна). Под воздействием поля этой волны в неоднородности возникают токи, порождающие волны различных типов, распространяющихся влево и вправо от нее. Предположим, что линия передачи работает в одномодовом режиме. В этом случае на достаточно

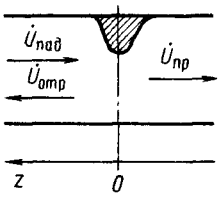



Рис. 15.2. Линия передачи с неоднородностью

большом удалении от неоднородности существуют только три волны одного и того же типа: падающая и отраженная — слева, прошедшая — справа от нее. Выберем начало координат в месте расположения неоднородности и направим ось $z$ в сторону генератора (рис. 15.2). Запишем напряжение в линии передачи при $z>0$ в виде суммы напряжений падающей и отраженной волн:

$$\dot{U}(z)=\dot{U}_{пад}+\dot{U}_{отр}=\dot{U}^{+}e^{ik_z z}+\dot{U}^{-}e^{-ik_z z}. \quad (15.13)$$

*Коэффициентом отражения волны* Г называется отношение амплитуд напряжения отраженной и падающей волн:

$$\Gamma(z)=\frac{\dot{U}_{отр}}{\dot{U}_{пад}}=\frac{\dot{U}^{+}}{\dot{U}^{-}}e^{-2ik_z z}. \quad (15.14)$$

Считая в (15.14) $z=0$, определим коэффициент отражения в месте расположения неоднородности. Следует учесть, что фактически электромагнитное поле при $z=0$ имеет сложный характер и из него трудно выделить поле данного типа волны. Поэтому величину $\Gamma(0)$ следует понимать как значение коэффициента отражения в регулярной линии передачи, в которой возбуждена отраженная волна такой же амплитуды и фазы, как волна, обусловленная наличием неоднородности. Коэффициент $\Gamma(0)$ зависит только от свойств неоднородности. Поэтому величину $\Gamma(0)=\Gamma_н$ называют коэффициентом отражения от неоднородности (коэффициентом отражения нагрузки). Таким образом,

$$\Gamma(z)=\Gamma_н e^{-2ik_z z}=\Gamma_н e^{-2\alpha z}e^{-2i\beta z}. \quad (15.15)$$

Коэффициент отражения можно представить в виде вектора на комплексной плоскости (рис. 15.3, *а*). Как следует из (15.15), при движении вдоль линии передачи конец вектора $\Gamma(z)$ описывает

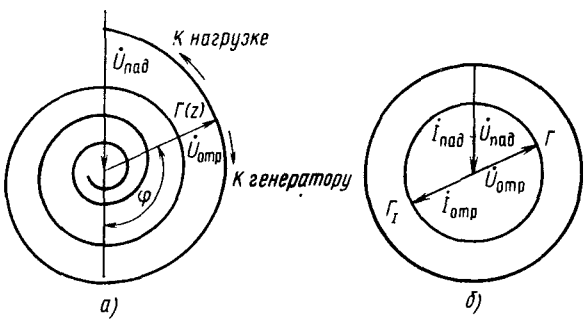



Рис. 15.3. Векторы напряжения падающей и отраженной волн в линии передачи с потерями (*а*) и без потерь (*б*)

спираль, причем перемещению к генератору соответствует вращение вектора $\Gamma(z)$ по часовой стрелке, а перемещению к нагрузке — против часовой стрелки. Повороту вектора $\Gamma(z)$ на 360° соответствует перемещение вдоль линии передачи на расстояние $\Delta z$, определяемое из условия $2\beta\Delta z = 4\pi\Delta z/\lambda_g = 2\pi$, откуда $\Delta z = \lambda_g/2$. При движении к генератору модуль коэффициента отражения уменьшается, так как амплитуда падающей волны растет, а отраженной — снижается. Если потери в линии передачи не учитываются ($\alpha = 0$), то конец вектора коэффициента отражения описывает окружность (рис. 15.3, *б*). Нетрудно видеть, что все возможные значения коэффициента отражения от пассивной, т. е. не увеличивающей энергию волны, нагрузки лежат внутри и на единичной окружности комплексной плоскости коэффициента отражения.

Из выражения (15.13) следует, что максимальное значение модуля напряжения в линии передачи без потерь $U_{max} = |\dot{U}_{пад}| + |\dot{U}_{отр}|$, а минимальное $U_{min} = |\dot{U}_{пад}| - |\dot{U}_{отр}|$. Отношение этих величин называется *коэффициентом стоячей волны напряжения*:

$$k_{ст} = \frac{U_{max}}{U_{min}} = \frac{|\dot{U}_{пад}| + |\dot{U}_{отр}|}{|\dot{U}_{пад}| - |\dot{U}_{отр}|} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}. \qquad (15.16)$$

Если коэффициент отражения равен нулю, то $k_{ст} = 1$, т. е. максимумы и минимумы напряжения в линии передачи отсутствуют. Если волна полностью отражается от нагрузки ($|\Gamma| = 1$), то $k_{ст} \to \infty$.

Рассмотрим эквивалентный ток в линии передачи с неоднородностью. Для $z > 0$, аналогично (15.13),

$$\dot{I}(z) = \dot{I}_{пад} + \dot{I}_{отр} = \dot{I}^{+} e^{ik_z z} + \dot{I}^{-} e^{-2ik_z z}. \qquad (15.17)$$

Введем *коэффициент отражения по току*

$$\Gamma_I(z) = \frac{\dot{I}_{отр}}{\dot{I}_{пад}} = \frac{\dot{I}^{-}}{\dot{I}^{+}} e^{-2ik_z z}.$$

Выразим $\dot{I}^{+}$ и $\dot{I}^{-}$ через $\dot{U}^{+}$ и $\dot{U}^{-}$ и волновые сопротивления $Z_в^{+}$ и $Z_в^{-}$:

$$\Gamma_I(z) = \frac{\dot{U}^{-}}{\dot{U}^{+}} \frac{Z_в^{+}}{Z_в^{-}} e^{-2ik_z z}.$$

Так как при изменении направления распространения волны знак потока энергии меняется на противоположный, из определений (15.5) следует, что $Z_в^{+} = -Z_в^{-}$. Таким образом,

$$\Gamma_I(z) = -\Gamma(z). \qquad (15.18)$$

На комплексной плоскости $\Gamma_I$ изображается вектором, диаметрально противоположным вектору $\Gamma$ (рис. 15.3, *б*).

Определим *входное сопротивление* линии передачи с неоднородностью как отношение эквивалентного сопротивления к эквивалентному току в данном сечении:

$$Z_{вх}(z) = \dot{U}(z)/\dot{I}(z). \qquad (15.19)$$

Согласно (15.13) и (15.17) и определению Г и $\Gamma_1$,

$$Z_{вх}(z)=Z_в\frac{1+\Gamma(z)}{1-\Gamma(z)}$$

или

$$\boxed{Z^н_{вх}(z)=\frac{1+\Gamma(z)}{1-\Gamma(z)},} \qquad (15.20)$$

где $Z^н_{вх}=Z_{вх}/Z_в$ — нормированное входное сопротивление.

Формально положив в (15.19) $z=0$, найдем входное сопротивление линии в месте расположения неоднородности. Его значение определяется только ее свойствами, поэтому величина $Z_{вх}(0)$ называется *сопротивлением неоднородности (нагрузки)* $Z_н$:

$$\boxed{Z^н_н=Z^н_{вх}(0)=\frac{1+\Gamma_н}{1-\Gamma_н},} \quad \boxed{Y^н_н=\frac{1-\Gamma_н}{1+\Gamma_н}.} \qquad (15.21)$$

Из выражений (15.20) и (15.21) следуют обратные соотношения:

$$\Gamma(z)=\frac{Z^н_{вх}-1}{Z^н_{вх}+1};\quad \Gamma_н=\frac{Z^н_н-1}{Z^н_н+1}; \qquad (15.22)$$

$$\Gamma(z)=\frac{1-Y^н_{вх}}{1+Y^н_{вх}};\quad \Gamma_н=\frac{1-Y^н_н}{1+Y^н_н}, \qquad (15.23)$$

где $Y^н_{вх}=Y_{вх}/Y_в$; $Y^н_н=Y_н/Y_в$.

Найдем связь между входным сопротивлением и сопротивлением нагрузки. Для этого в формулу (15.20) подставим значения Г и $\Gamma_н$ из (15.15) и (15.22):

$$Z^н_{вх}=\frac{1+\Gamma_н e^{-2ik_z z}}{1-\Gamma_н e^{-2ik_z z}}=\frac{Z^н_н+1+(Z^н_н-1)e^{-2ik_z z}}{Z^н_н+1-(Z^н_н-1)e^{-2ik_z z}}.$$

Помножив числитель и знаменатель полученного выражения на $e^{ik_z z}$ и используя формулы Эйлера, после несложных преобразований получим

$$\boxed{Z^н_{вх}=\frac{Z^н_н+i\operatorname{tg}k_z z}{1+iZ^н_н\operatorname{tg}k_z z}.} \qquad (15.24)$$

Аналогичная формула имеет место и для проводимостей:

$$Y^н_{вх}=\frac{Y^н_н+i\operatorname{tg}k_z z}{1+iY^н_н\operatorname{tg}k_z z}. \qquad (15.25)$$

## § 15.3. КРУГОВАЯ НОМОГРАММА ПОЛНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Расчет входных сопротивлений и проводимостей по формулам (15.24) и (15.25) лишен наглядности. Поэтому подобные расчеты часто производят с помощью специальных номограмм, из

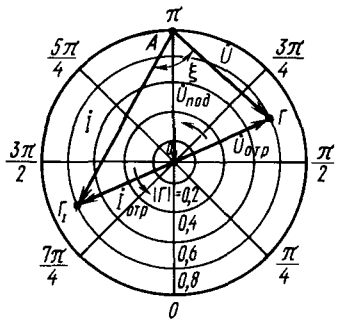



Рис. 15.4. Векторная диаграмма коэффициентов отражения по напряжению и току в линии передачи

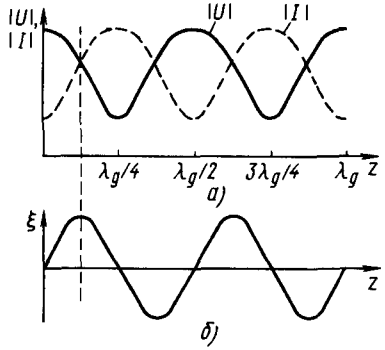



Рис. 15.5. Распределение амплитуд (*а*) и сдвига фазы (*б*) напряжения и тока в линии передачи

которых наиболее употребительна *круговая номограмма полных сопротивлений**. Для построения этой номограммы изобразим на комплексной плоскости вектор $AO$ напряжения падающей волны в линии без потерь $\dot{U}_{\text{пад}}$, направив его вертикально вниз и выбрав масштаб таким образом, чтобы $|\dot{U}_{\text{пад}}|=1$ (рис. 15.4). Из точки $O$ построим вектор напряжения отраженной волны $\dot{U}_{\text{отр}}$, приняв за начало отсчета фазы направление вектора падающей волны. Так как $|\dot{U}_{\text{пад}}|=1$, вектор напряжения отраженной волны $\dot{U}_{\text{отр}}$ совпадает с вектором коэффициента отражения Г. Напряжение в данном сечении линии передачи $\dot{U}(z)$ равно сумме векторов $\dot{U}_{\text{пад}}$ и $\dot{U}_{\text{отр}}$.

При перемещении вдоль линии передачи конец вектора коэффициента отражения описывает окружность, радиус которой равен $|\Gamma|$. В центре окружности $\Gamma=0$. Каждому радиусу, выходящему из центра окружности, соответствует определенная фаза коэффициента отражения. Так как изменению фазы на $2\pi$ соответствует перемещение вдоль линии передачи $\Delta z=\lambda_g/2$, угловую координату можно проградуировать непосредственно в линейных единицах: $\Delta z/\lambda_g=\varphi/(4\pi)$. Таким образом, каждой точке внутри единичной окружности на комплексной плоскости соответствует определенный коэффициент отражения, причем все его возможные значения при пассивной нагрузке находятся внутри и на единичной окружности $|\Gamma|=1$. Из выражения (15.16) следует также, что на каждой окружности значение коэффициента стоячей волны $k_{\text{ст}}$ постоянно.

Ток падающей волны совпадает по фазе с напряжением, поэтому путем выбора соответствующего масштаба эти векторы можно совместить на комплексной плоскости. Тогда вектор тока

* Ее называют также номограммой Вольперта или номограммой Смита.

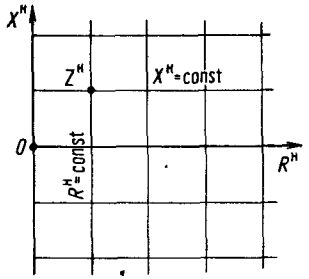



Рис. 15.6. Комплексная плоскость полного нормированного сопротивления

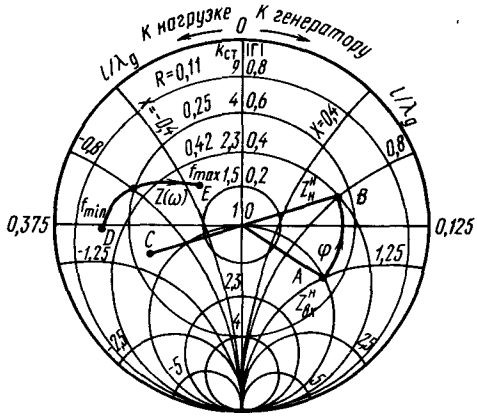



Рис. 15.7. Круговая номограмма полных сопротивлений

отраженной волны совпадет с вектором коэффициента отражения по току $\Gamma_I = -\Gamma$, а суммарный ток в данном сечении линии передачи изобразится вектором $\dot{I} = 1 + \Gamma_I = 1 - \Gamma$. При перемещении вдоль линии передачи в сторону генератора векторы $\Gamma$ и $\Gamma_I$ вращаются по часовой стрелке. Соответственно меняются модули тока и напряжения в линии передачи, а также сдвиг фазы $\xi$ между ними (рис. 15.5). При этом в каждом сечении передаваемая мощность $P = 0{,}5\dot{U}\dot{I}^* \cos\xi$ сохраняется постоянной.

Наряду с комплексной плоскостью коэффициента отражения рассмотрим комплексную плоскость нормированного сопротивления $Z^н = R^н + iX^н$ (рис. 15.6). Каждой точке на этой плоскости соответствует определенное значение $Z^н$, причем в правой полуплоскости $R \geqslant 0$ находятся полные сопротивления пассивных (не содержащих источников энергии) элементов. Функции (15.20) и (15.22) осуществляют отображение точек на плоскости коэффициента отражения в точки на плоскости нормированного сопротивления и обратно. Так как эти функции комплексного переменного удовлетворяют условиям Коши—Римана и, следовательно, являются аналитическими, отображение, осуществляемое ими, конформно, т. е. оно взаимно однозначно и сохраняет углы между отображаемыми линиями. Прямые $R^н = \text{const}$ и $X^н = \text{const}$ на плоскости $Z^н$ преобразуются, в частности, в семейства взаимно перпендикулярных окружностей, имеющих общую точку в нижней части окружности $|\Gamma| = 1$ (рис. 15.7). Из выражения (15.22) следует, что отображения всех точек правой полуплоскости $(R^н > 0)$ лежат внутри единичной окружности коэффициента отражения. Активные элементы $(R_н < 0)$ изображаются точками, расположенными вне единичной окружности $(|\Gamma| > 1)$. Плоскость коэффициента отраже-

ния с нанесенными на нее линиями $R^{н}=\text{const}$ и $X^{н}=\text{const}$ называется *круговой номограммой полных сопротивлений.*

Центры окружностей $R^{н}=\text{const}$ расположены на линии $\varphi=0$, которой на номограмме соответствуют действительные положительные значения $\Gamma=|\Gamma|$. Прямой $\varphi=\pi$ соответствуют действительные отрицательные значения $\Gamma=-\Gamma$. Согласно (15.20), на окружностях $R^{н}=\text{const}$, пересекающих эти линии, нормированное сопротивление принимает значения

$$R^{н}=\frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}=k_{ст};\quad R^{н}=\frac{1-|\Gamma|}{1+|\Gamma|}=\frac{1}{k_{ст}}.$$

Радиус $r$ окружности $R^{н}=\text{const}$ определяется из соотношения

$$2r=1-\Gamma=1-\frac{R_{н}-1}{R_{н}+1}=\frac{2}{R^{н}+1},$$

откуда $r=1/(R_{н}+1)$ (см. рис. 15.7).

Окружности $X^{н}=\text{const}$ имеют радиусы $r=1/X^{н}$, их центры расположены на горизонтальной прямой, проходящей через нижнюю точку номограммы. Правой половине номограммы соответствуют положительные значения $X^{н}$, а левой — отрицательные (рис. 15.7). Обычно на номограмме линии $|\Gamma|=\text{const}$ и $\varphi=\text{const}$ не изображают, а укрепляют на ней подвижную шкалу с нанесенными значениями $|\Gamma|$ и $k_{ст}$. На внешней окружности номограммы располагается шкала фазы коэффициента отражения, проградуированная в $\Delta z/\lambda_g$ начиная с верхней точки.

Для вычисления нормированной проводимости $Y^{н}=G^{н}+iB^{н}$ напряжение и ток в формуле для $Z^{н}$ необходимо поменять местами. На круговой номограмме это соответствует перемещению из точки $Z^{н}$ в диаметрально противоположную точку (см. рис. 15.5). Таким образом, круговая номограмма полных сопротивлений является одновременно и номограммой полных проводимостей.

С помощью круговой номограммы легко вычислять нормированные сопротивления и проводимости в различных сечениях линии передачи. Так как точность таких расчетов невысока, они используются в основном для качественных оценок. Пусть, например, известно входное сопротивление отрезка линии передачи $Z_{вх}$, его длина $l$, фазовая постоянная $\beta$ и волновое сопротивление $Z_{в}$. Требуется определить проводимость нагрузки $Y_{н}$. Для решения задачи вычисляем $Z^{н}_{вх}=Z_{вх}/Z_{в}$ и электрическую длину отрезка $\varphi=2\beta l=4\pi l/\lambda_g$. От точки $A$, изображающей $Z^{н}_{вх}=R^{н}_{вх}+iX^{н}_{вх}$ (рис. 15.7) по окружности $|\Gamma|=\text{const}$, проходящей через эту точку, перемещаемся против часовой стрелки (к нагрузке) на угол $\varphi$ в точку $B$, соответствующую нормированному сопротивлению нагрузки. Диаметрально противоположная точка

$C$, лежащая на той же окружности $|\Gamma|=\text{const}$, позволяет найти нормированные значения активной и реактивной составляющих проводимости $Y^{н}_{н}$. Поделив их на волновое сопротивление линии передачи, определим искомый результат.

Полное сопротивление (полная проводимость) многих неоднородностей (нагрузок) зависит от частоты. Отметив на номограмме точки, соответствующие $Z^{н}_{н}(f_1)$, $Z^{н}_{н}(f_2)$, ..., и соединив их линией, получим *годограф* полного сопротивления (проводимости), наглядно изображающий, как изменяется эта величина (ее активная и реактивная составляющие) при изменении частоты (кривая $DE$ на рис. 15.7).

## § 15.4. ОСНОВНЫЕ РЕЖИМЫ РАБОТЫ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

Как установлено в § 15.3, коэффициент отражения в линии передачи, т. е. режим ее работы, зависит от соотношения между сопротивлением нагрузки $Z_{н}$ и волновым сопротивлением линии передачи $Z_{в}$. Рассмотрим следующие характерные случаи:

1) $Z_{н}=Z_{в}(Z^{н}_{н}=1)$. Согласно (15.22) и (15.16), в этом случае $\Gamma=0$, $k_{ст}=1$, т. е. в линии передачи существует только бегущая (падающая) волна, распределение амплитуд напряжения и тока которой показано на рис. 15.8, *а*. В соответствии с (15.24) входное сопротивление линии передачи не зависит от координаты $z$ и равно ее волновому сопротивлению (рис. 15.8, *б*). Такой режим работы линии передачи называется *режимом согласования*. Ему соответствует точка, расположенная в центре круговой номограммы;

2) $Z_{н}=0$. При этом коэффициент отражения $\Gamma=-1$, коэффициент стоячей волны $k_{ст}=\infty$, т. е. в линии передачи существует стоячая волна, распределение амплитуд напряжения и тока

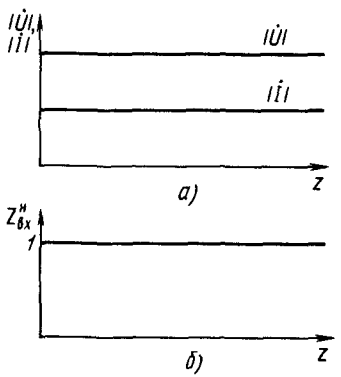



Рис. 15.8. Зависимости напряжения, тока (*а*) и нормированного входного сопротивления (*б*) линии передачи от координаты $z$ в режиме согласования

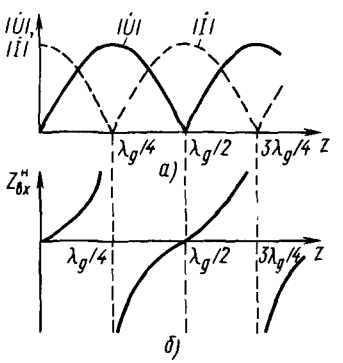



Рис. 15.9. Зависимости напряжения, тока (*а*) и нормированного входного сопротивления (*б*) короткозамкнутой линии передачи от координаты $z$

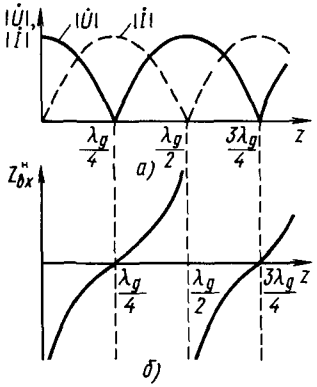



Рис. 15.10. Зависимости напряжения, тока (*а*) и нормированного входного сопротивления (*б*) разомкнутой линии передачи от координаты $z$

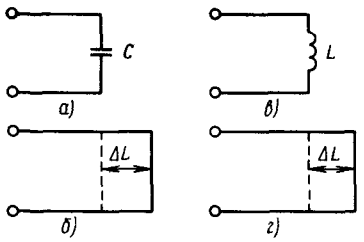



Рис. 15.11. Отрезок линии, нагруженный на емкостный (*а*), индуктивный (*в*) элементы и эквивалентные им разомкнутые (*б*) и короткозамкнутые (*г*) отрезки линий

которой представлено на рис. 15.9, *а*. По выражению (15.24) входные сопротивление и проводимость линии передачи определяются формулами

$$Z^{н}_{вх} = i\,\mathrm{tg}\,k_z l; \quad Y^{н}_{вх} = -i\,\mathrm{ctg}\,k_z l. \tag{15.26}$$

В линии без потерь ($k_z = \beta$) $Z_{вх}$ и $Y_{вх}$ — мнимые величины. Их зависимость от координаты $z$ показана на рис. 15.9, *б*. Так как $Z_н = 0$, описанный режим работы линии передачи называют *режимом короткого замыкания*. Ему соответствует верхняя точка единичной окружности номограммы полных сопротивлений и нижняя — номограммы полных проводимостей;

3) $Y_н = 0$ $(Z_н = \infty)$. Из соотношения (15.23) следует, что $\Gamma = 1$, $k_{ст} = \infty$, т. е. в линии также существует стоячая волна (рис. 15.10, *а*). Зависимость входного сопротивления и входной проводимости от координаты $z$ описывается выражениями

$$Z^{н}_{вх} = -i\,\mathrm{ctg}\,k_z l; \quad Y^{н}_{вх} = i\,\mathrm{tg}\,k_z l. \tag{15.27}$$

В линии без потерь это чисто реактивные величины. На рис. 15.10, *б* представлена зависимость $Z^{н}_{вх}$ от координаты $z$. Так как при $z = 0$ $\dot{I} = 0$, описываемый режим получил название режима холостого хода (нижняя точка на единичной окружности круговой номограммы полных сопротивлений). Сравнив выражения (15.26) и (15.27), видим, что входное сопротивление разомкнутой линии равно входному сопротивлению короткозамкнутой линии, имеющей на $\lambda_g/4$ большую длину;

4) $Z^{н}_{н} = iX^{н}_{н}$ (чисто реактивная нагрузка). По формуле (15.22) найдем

$$|\Gamma_н| = \frac{|iX_н^н - 1|}{|iX_н^н + 1|} = \frac{(X_н^н)^2 + 1}{(X_н^н)^2 + 1} = 1,$$

т. е. в линии также устанавливается стоячая волна. Пусть сопротивление нагрузки линии передачи имеет емкостный характер ($X_н < 0$, рис. 15.11, *а*). Отключим от линии эту нагрузку и подключим вместо нее отрезок разомкнутой линии передачи, подобрав его длину $\Delta l$ так, чтобы входное сопротивление отрезка $Z_{вх}^н = -i \operatorname{ctg} \beta \Delta l = iX_н^н$ (рис. 15.11, *б*). Входное сопротивление линии при такой замене не изменится. Следовательно, отрезок линии передачи, нагруженный емкостным элементом, эквивалентен разомкнутому отрезку линии большей длины. Этот элемент, подключенный к концу отрезка линии передачи, называют *укорачивающей емкостью*. Аналогично доказывается, что отрезок линии передачи, нагруженный индуктивным элементом (рис. 15.11, *в*), эквивалентен короткозамкнутому отрезку линии передачи большей длины (рис. 15.11, *г*).

## § 15.5. СОГЛАСОВАНИЕ В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ

Рассмотрим систему передачи СВЧ-энергии, состоящую из генератора, линии передачи длиной $l$ и нагрузки. Мощность $P_н$, рассеиваемая в нагрузке, связана с мощностью $P_0$, отдаваемой генератором, следующим соотношением:

$$P_н = P_0 e^{-2\alpha l}(1 - |\Gamma_н|^2), \qquad (15.28)$$

в котором экспоненциальный множитель учитывает затухание падающей волны, а член в круглых скобках — частичное отражение волны от нагрузки. КПД линии передачи

$$\eta = \frac{P_н}{P_0} = (1 - |\Gamma_н|^2) e^{-2\alpha l}$$

принимает максимальное значение при $|\Gamma_н| \approx 0$.

Максимальное напряжение в линии передачи $U_{max} = |\dot{U}_{пад}|(1 + |\Gamma_н| e^{-2\alpha l})$, где $\dot{U}_{пад}$ — напряжение падающей волны, связанное с мощностью, отдаваемой генератором, соотношением $P_0 = |\dot{U}_{пад}|^2/(2Z_в)$. Выразив отсюда $|U_{пад}|$ с учетом (15.28), найдем

$$U_{max} = \sqrt{2Z_в P_н}\, e^{\alpha l} \frac{(1 + |\Gamma_н|) e^{-2\alpha l}}{\sqrt{1 - |\Gamma_н|^2}}.$$

Из этого выражения следует, что максимальное напряжение в линии, необходимое для передачи в нагрузку заданной мощности $P_н$, возрастает с увеличением модуля коэффициента отражения. Так как максимальное напряжение не может превышать пробивное, наибольшую мощность в нагрузку при наибольшем

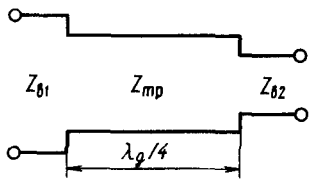



Рис. 15.12. Четвертьволновый трансформатор

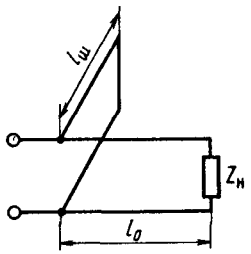



Рис. 15.13. Одношлейфный трансформатор полных сопротивлений

КПД можно передать при нулевом коэффициенте отражения. Таким образом, с энергетической точки зрения режим согласования является оптимальным режимом работы линии передачи.

Если сопротивление нагрузки не равно волновому сопротивлению линии передачи, то режим согласования можно обеспечить, включая в линию дополнительные неоднородности, создающие отраженную волну, равную по значению и противоположную по фазе волне, отраженной от нагрузки. Эти неоднородности, называемые *согласующими устройствами* или *трансформаторами полных сопротивлений*, должны располагаться вблизи нагрузки, с тем чтобы основная часть линии передачи работала в режиме бегущей волны. Так как амплитуды и фазы волн, отраженных от нагрузки и согласующего устройства, по-разному зависят от частоты, их взаимная компенсация возможна только в ограниченном частотном диапазоне (диапазоне согласования). Различают *устройства узкополосного согласования*, обеспечивающие минимум КСВ на одной частоте (ширина полосы согласования не контролируется), и *устройства широкополосного согласования*, проектирование которых осуществляется исходя из заданной ширины полосы согласования и качества согласования в ней.

Рассмотрим некоторые устройства узкополосного согласования в линиях передачи.

*Четвертьволновый трансформатор* представляет собой отрезок регулярной линии передачи, имеющий длину $l=\lambda_в/4$ и волновое сопротивление $Z_{тр}$ (рис. 15.12). Из выражений (15.24) следует, что входное сопротивление четвертьволнового трансформатора $Z_{вх}=Z_{тр}^2/Z_н$. При согласовании это сопротивление должно быть равно волновому сопротивлению линии передачи $Z_{в1}$. Тогда волновое сопротивление трансформатора $Z_{тр}=\sqrt{Z_{в1}Z_н}$. Следовательно, это устройство может согласовывать только нагрузку с активным сопротивлением $Z_н$. Наиболее часто оно употребляется для согласования двух линий передачи с различными волновыми сопротивлениями $Z_{в1}$ и $Z_{в2}$.

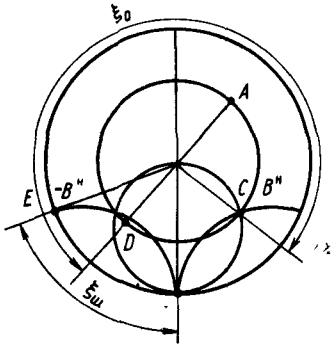



Рис. 15.14. Определение параметров одношлейфного трансформатора полных сопротивлений

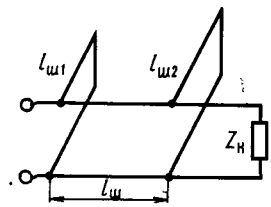



Рис. 15.15. Двухшлейфный трансформатор полных сопротивлений

Одношлейфный трансформатор представляет собой регулируемый реактивный элемент $Y^{н}_{ш}=iB^{н}_{ш}$, включенный параллельно в линию передачи на расстоянии $l_0$ от нагрузки $Z_н$. В качестве такого элемента обычно используется отрезок короткозамкнутой или разомкнутой линии передачи (шлейф) регулируемой длины $l_ш$ (рис. 15.13). Реактивный элемент помещается в такое сечение линии передачи, в котором ее входная проводимость $Y^{н}_{вх}(l_0)=1+iB^{н}$ (активная составляющая входной проводимости равна единице). Если теперь подобрать проводимость шлейфа из условия $B^{н}_{ш}+B^{н}=0$, основная линия передачи окажется нагруженной на согласованный элемент проводимостью $Y^{н}=Y^{н}_{вх}(l_0)+Y_ш=1$.

Параметры трансформатора $l_0$, $B_ш$ (или $l_ш$) удобно определять с помощью круговой номограммы полных сопротивлений (рис. 15.14). Для этого из точки $A$, изображающей нагрузку линии передачи $Z^{н}_{н}=R^{н}_{н}+iX^{н}_{н}$, перемещаемся в диаметрально противоположную точку $D$, соответствующую проводимости нагрузки $Y^{н}_{н}$. Далее находим точку пересечения окружности $|\Gamma|=\text{const}$ с окружностью $G^{н}=1$ (точка $C$ на рис. 15.14). В этой точке $Y^{н}_{вх}=1+B^{н}$. Поэтому подключение к линии в сечении, соответствующем этой точке, реактивного элемента проводимостью $B^{н}_{ш}=-B^{н}$ компенсирует эту проводимость и позволяет попасть в центр диаграммы. Расстояние от нагрузки до шлейфа $l_0=\lambda_g\xi_0/4\pi$, где $\xi_0$ — угол поворота от точки $D$ к точке $C$ (рис. 15.14). Если в качестве реактивного элемента используется короткозамкнутый шлейф, то его длина определяется по углу $\xi_ш$ между радиусами, проведенному через точку короткого замыкания и точку $E$, в которой $B^{н}_{ш}=-B^{н}$.

Необходимость перемещения шлейфа вдоль линии передачи создаст трудности при конструировании одношлейфных трансформаторов. Более удобны *двухшлейфные трансформаторы*, содер-

жащие две реактивности, расположенные на фиксированном расстоянии $l_ш$ друг от друга (рис. 15.15). В этом случае значение первой реактивной проводимости $B_{ш1}$ подбирается так, чтобы в месте расположения второй неоднородности $Y^н_{вх}=1+iB^н$. Подобрав значение реактивной проводимости $B^н_{ш2}=-B^н$, обеспечиваем согласование линии передачи. Анализ показывает, что наиболее широкий диапазон значений $Z_н$, которые можно согласовать таким способом, получается при $l_ш=\lambda_g/8$ [11].

### Контрольные вопросы

1. Поясните физический смысл эквивалентного напряжения и тока в линии передачи.
2. Поясните физический смысл волнового сопротивления линии передачи. В чем его отличие от характеристического?
3. Дайте определения коэффициентов отражения по напряжению и току. Поясните связь между этими величинами.
4. Как зависит коэффициент отражения от длины линии передачи? Поясните физический смысл коэффициента отражения нагрузки.
5. Дайте определение входного сопротивления линии передачи. Как оно связано с сопротивлением нагрузки?
6. Покажите на векторной диаграмме, как изменяются ток и напряжение в линии передачи при перемещении вдоль нее.
7. Поясните связь между комплексными плоскостями коэффициента отражения и полного сопротивления.
8. Найдите с помощью круговой номограммы сопротивление нагрузки по заданному входному сопротивлению, длине и постоянной фазы отрезка линии передачи.
9. Перечислите основные режимы работы линии передачи. Чем отличаются входные сопротивления короткозамкнутой и разомкнутой линии передачи?
10. Поясните принцип действия четвертьволнового трансформатора.
11. Поясните принцип действия шлейфных трансформаторов полных сопротивлений.

## ГЛАВА 16

# МЕТОДЫ АНАЛИЗА МНОГОПОЛЮСНИКОВ СВЧ

### § 16.1. ВОЛНОВЫЕ МАТРИЦЫ

*Многополюсником* (многоплечим устройством) СВЧ называется сочленение нескольких линий передачи (рис. 16.1, *а*). Внутренняя структура сочленения может содержать различные проводники, диэлектрики, магнетики и т. п. При возбуждении многополюсника со стороны одной или нескольких линий передачи внутри сочленения возникает сложное электромагнитное поле, которое может быть вычислено путем решения соответствующей электродинамической задачи или определено экспериментально. Однако в большинстве случаев наибольший интерес представляет не электромагнитное поле внутри сочленения, а распределение мощности источников возбуждения между отдельными линиями передачи сочленения и типами волн в них. С этой точки зрения многополюсник рассматривается как «черный ящик», свойства которого описываются системой формальных параметров.

Рассмотрим сочленение $M$ линий передачи. Зафиксируем в каждой линии плоскость поперечного сечения *(плоскость отсчета фаз)*, расположив ее на расстоянии $l_m$ от центра сочленения, $m = 1, 2, \ldots, M$ (рис. 16.1, *а*). Из условий единственности решения внутренней задачи электродинамики следует, что электромагнитное поле внутри сочленения полностью характеризуется поперечными составляющими электрического или маг-

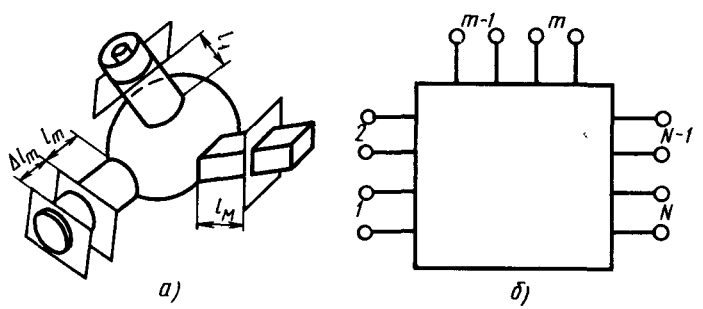



Рис. 16.1. Сочленение линий передачи (*а*) и его эквивалентная схема (*б*)

нитного поля в плоскостях отсчета, которые удобно представлять в виде разложения по собственным волнам. Так как эти волны независимы, число плеч (волновых каналов) многополюсника $N=\sum_{m=1}^{M} D_m$, где $D_m$ — число типов волн, учитываемых в $m$-й плоскости отсчета.

Если на частоте возбуждения в каждой линии передачи может распространяться только один тип волны, расстояния $l_m$ можно выбрать так, чтобы амплитуды высших типов волн в плоскостях отсчета были пренебрежимо малы. В этом, так называемом одномодовом приближении, которое часто используется на практике, число плеч равно числу линий передачи, входящих в состав многополюсника.

Согласно материалу гл. 15, каждое плечо (волновой канал) в плоскости отсчета можно заменить эквивалентной двухпроводной линией, представив многоплечее устройство в виде эквивалентной схемы — многоплюсника, содержащего $2N$ полюсов (рис. 16.1, *б*).

Введем в плоскости отсчета каждого плеча нормированные амплитуды напряжений и токов падающих и отраженных волн: $\dot{u}_m^+ = \dot{U}^{\text{н}}_{m\,\text{пад}}(l_m)$; $\dot{i}_m^+ = \dot{I}^{\text{н}}_{m\,\text{пад}}(l_m)$; $\dot{u}_m^- = \dot{U}^{\text{н}}_{m\,\text{отр}}(l_m)$; $\dot{i}_m^- = \dot{I}^{\text{н}}_{m\,\text{отр}}(l_m)$. Здесь и далее *падающими* называются волны, распространяющиеся в сторону сочленения, а *отраженными* — волны, выходящие из сочленения. В соответствии с (15.6) мощность падающей волны в плече $m$ $P_m^+ = |\dot{u}_m^+|^2 = |\dot{i}_m^+|^2$, а мощность отраженной волны $P_m^- = |\dot{u}_m^-|^2 = |\dot{i}_m^-|^2$.

Возбудим многополюсник со стороны $n$-го плеча, подключив к нему генератор, а к остальным плечам — согласованные нагрузки. Так как коэффициент отражения от согласованной нагрузки равен нулю, в остальные плечи энергия не поступает: $\dot{u}_m^+ = \dot{i}_m^+ = 0$, $m = 1, 2, \ldots, n-1, n+1, \ldots, N$. Под действием генератора в сочленении возникает электромагнитное поле, возбуждающее в плечах отраженные (выходящие из сочленения) волны. Амплитуды этих волн связаны с амплитудой падающей волны:

$$\dot{u}_m^- = s_{mn}\dot{u}_n^+, \quad m = 1, 2, \ldots, N. \tag{16.1}$$

Коэффициенты $s_{mn}$ зависят от внутренней структуры сочленения, положения плоскостей отсчета и, возможно, амплитуды напряжения падающей волны $u_n^+$. Аналогичные соотношения можно записать и при возбуждении многополюсника со стороны любого другого плеча (при условии согласования остальных плеч).

Пусть многополюсник возбуждается со стороны всех плеч ($\dot{U}_m^+ \neq 0$, $m = 1, 2, ..., N$). Если коэффициенты $s_{mn}$ не зависят от амплитуд падающих волн, т. е. если многополюсник является линейным, то для него справедлив принцип суперпозиции, в соответствии с которым

$$\begin{aligned}
&\dot{u}_1^- = s_{11}\dot{u}_1^+ + s_{12}\dot{u}_2^+ + ... + s_{1m}\dot{u}_m^+ + ... + s_{1N}\dot{u}_N^+;\\
&\dot{u}_2^- = s_{21}\dot{u}_1^+ + s_{22}\dot{u}_2^+ + ... + s_{2m}\dot{u}_m^+ + ... + s_{2N}\dot{u}_N^+;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\
&\dot{u}_m^- = s_{m1}\dot{u}_1^+ + s_{m2}\dot{u}_2^+ + ... + s_{mn}\dot{u}_m^+ + ... + s_{mN}\dot{u}_N^+;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\
&\dot{u}_N^- = s_{N1}\dot{u}_1^+ + s_{N2}\dot{u}_2^+ + ... + s_{Nm}\dot{u}_m^+ + ... + s_{NN}\dot{u}_N^+.
\end{aligned}$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений позволяет найти амплитуды волн, отраженных от многополюсника, если известны амплитуды возбуждающих его (падающих) волн. В матричном виде эта система уравнений записывается следующим образом:

$$\boxed{\dot{\mathbf{U}}^- = \mathbf{S}\dot{\mathbf{U}}^+,} \qquad (16.2)$$

где

$$\dot{\mathbf{U}}^- = \begin{bmatrix} \dot{u}_1^- \\ \dot{u}_2^- \\ \vdots \\ \dot{u}_N^- \end{bmatrix}; \qquad \dot{\mathbf{U}}^+ = \begin{bmatrix} \dot{u}_1^+ \\ \dot{u}_2^+ \\ \vdots \\ \dot{u}_N^+ \end{bmatrix}$$

— $N$-мерные векторы-столбцы нормированных амплитуд напряжения отраженных и падающих волн,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \ldots\ldots s_{1N} \\ s_{21} & s_{22} \ldots\ldots s_{2N} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_{N1} & s_{N2} \ldots\ldots s_{NN} \end{bmatrix}$$

— квадратная матрица порядка $N$, называемая *матрицей рассеяния*. Как следует из уравнения (16.2), она полностью описывает свойства многополюсника на данной частоте возбуждения, так как позволяет найти распределение (рассеяние) энергии между его плечами при произвольном возбуждении.

Выясним физический смысл коэффициентов матрицы рассеяния. Из выражения (16.1) следует, что

$$s_{nn} = \dot{u}_n^- / \dot{u}_n^+ = \Gamma_n, \qquad (16.3)$$

где $\Gamma_n$ — коэффициент отражения в плоскости отсчета $n$-го плеча. Таким образом, диагональные элементы матрицы рассеяния есть коэффициенты отражения в соответствующих плечах при условии, что все остальные плечи согласованы. Для недиагональных элементов по формуле (16.1) получим

$$s_{mn} = \dot{u}_m^- / \dot{u}_n^+, \qquad (16.4)$$

т. е. матричный элемент $s_{mn}$ равен коэффициенту передачи по напряжению из плеча $n$ в плечо $m$ при условии, что к плечу $n$ подключен генератор, а все остальные плечи согласованы. Эти определения указывают и способ измерения элементов матрицы **s**.

Наряду с матрицей рассеяния для описания свойств многополюсника используют и другие матрицы. Так, введя в плоскости отсчета каждого плеча нормированные напряжения и токи

$$\dot{u}_m=\dot{u}_m^+ + \dot{u}_m^-;\quad \dot{i}_m=\dot{i}_m^+ + \dot{i}_m^-, \tag{16.5}$$

определим связь между этими величинами с помощью систем линейных уравнений

$$\dot{u}_1=z_{11}\dot{i}_1+z_{12}\dot{i}_2+\ldots+z_{1N}\dot{i}_N;$$

$$\dot{u}_2=z_{21}\dot{i}_1+z_{22}\dot{i}_2+\ldots+z_{2N}\dot{i}_N;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dot{u}_N=z_{N1}\dot{i}_1+z_{N2}\dot{i}_2+\ldots+z_{NN}\dot{i}_N;$$

$$\dot{i}_1=y_{11}\dot{u}_1+y_{12}\dot{u}_2+\ldots+y_{1N}\dot{u}_N;$$

$$\dot{i}_2=y_{21}\dot{u}_1+y_{22}\dot{u}_2+\ldots+y_{2N}\dot{u}_N;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dot{i}_N=y_{N1}\dot{u}_1+y_{N2}\dot{u}_2+\ldots+y_{NN}\dot{u}_N.$$

В матричной записи эти системы уравнений имеют вид

$$\boxed{\dot{\mathbf{U}}=\mathbf{Z}\dot{\mathbf{I}};} \tag{16.6}$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{I}}=\mathbf{Y}\dot{\mathbf{U}},} \tag{16.7}$$

где $\dot{\mathbf{U}}$, $\dot{\mathbf{I}}$ — $N$-мерные векторы-столбцы нормированных напряжений и токов в плечах; $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Y}$ — *квадратные нормированные матрицы сопротивлений и проводимостей* порядка $N$. По форме уравнения (16.6) и (16.7) такие же, как для классических многополюсников, однако, поскольку нормированные токи и напряжения имеют одинаковую размерность ($\sqrt{\text{Вт}}$), нормированные матрицы $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Y}$ безразмерны.

Для выяснения физического смысла элементов матрицы сопротивлений положим $\dot{i}_m=0$, $m\neq n$. Тогда из уравнения (16.6) найдем

$$z_{mn}=\dot{u}_m/\dot{i}_n, \tag{16.8}$$

т. е. элемент матрицы сопротивлений $z_{mn}$ равен отношению напряжения в $m$-м плече к току $n$-го плеча при условии, что все плечи, кроме $n$-го, работают в режиме холостого хода в плоскостях отсчета. Аналогично, положив в (16.7) все $\dot{u}_m=0$, $m\neq n$, вычислим

$$y_{mn}=\dot{i}_m/\dot{u}_n, \tag{16.9}$$

т. е. элемент матрицы проводимостей $y_{mn}$ равен отношению тока $m$-го плеча к напряжению в $n$-м плече при условии, что все плечи, кроме $n$-го, работают в режиме короткого замыкания в своих плоскостях отсчета.

В диапазоне СВЧ понятия тока и напряжения в значительной степени условны. Поэтому элементы матрицы рассеяния экспериментально определяются проще и точнее, чем элементы матриц $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Y}$. Матрицы сопротивлений и проводимостей можно затем вычислить, используя связь между волновыми матрицами. Для этого подставим в (16.6) соотношения (16.5):

$$\dot{\mathbf{U}}^{+}+\dot{\mathbf{U}}^{-}=\mathbf{Z}(\dot{\mathbf{I}}^{+}+\dot{\mathbf{I}}^{-}).$$

С учетом (16.2), а также связи между нормированными токами и напряжениями $\dot{i}_m^{+}=\dot{u}_m^{+}$; $\dot{i}_m^{-}=-\dot{u}_m^{-}$, $m=1, 2, ..., N$, получим

$$(\mathbf{E}+\mathbf{S})\dot{\mathbf{U}}^{+}=\mathbf{Z}(\mathbf{E}-\mathbf{S})\dot{\mathbf{U}}^{+},$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица порядка $N$. Так как это равенство выполняется для любого вектора $\mathbf{U}^{+}$, его можно сократить. Умножив затем обе части равенства справа на $(\mathbf{E}-\mathbf{S})^{-1}$, получим

$$\mathbf{Z}=(\mathbf{E}+\mathbf{S})(\mathbf{E}-\mathbf{S})^{-1}. \tag{16.10}$$

Аналогичным образом найдем

$$\mathbf{Y}=(\mathbf{E}-\mathbf{S})(\mathbf{E}+\mathbf{S})^{-1}. \tag{16.11}$$

Как следует из этих соотношений, матрицы сопротивлений и проводимостей существуют только в тех случаях, когда существуют обратные матрицы $(\mathbf{E}-\mathbf{S})^{-1}$ или $(\mathbf{E}+\mathbf{S})^{-1}$, т. е. если матрицы $(\mathbf{E}-\mathbf{S})$ и $(\mathbf{E}+\mathbf{S})$ не вырождены.

Читателю предоставляется возможность убедиться в том, что матрица $\mathbf{S}$ выражается через $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Y}$ с помощью формул

$$\mathbf{S}=(\mathbf{Z}-\mathbf{E})(\mathbf{Z}+\mathbf{E})^{-1}=(\mathbf{E}-\mathbf{Y})(\mathbf{E}+\mathbf{Y})^{-1}. \tag{16.12}$$

Отметим, что соотношения (16.10), (16.11) и (16.12) по форме аналогичны выражениям (15.20), (15.21), определяющим связь

между коэффициентом отражения и нормированными сопротивлениями и проводимостями нагрузки в линии передачи.

Если для описания электромагнитного поля в плечах многополюсника используются эквивалентные напряжения и токи, то элементы матриц сопротивлений и проводимостей должны иметь размерность. Такие матрицы называются *ненормированными*. С учетом соотношений (15.6) и (15.7) найдем связь между нормированными и эквивалентными токами и напряжениями:

$$\dot{u}_m = \dot{U}_{эк\,m} Y_{в\,m}^{1/2}; \quad i_m = \dot{I}_{эк\,m} Z_{в\,m}^{1/2},$$

где $Z_{в\,m}$, $Y_{в\,m}$ — волновые сопротивления и проводимость $m$-го плеча. Запишем эти соотношения в матричной форме:

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{Y}_в \dot{\mathbf{U}}_{эк}; \qquad \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Z}_в \dot{\mathbf{I}}_{эк},$$

где $\mathbf{Y}_в$, $\mathbf{Z}_в$ — диагональные матрицы порядка $N$, на главной диагонали которых расположены элементы $Y_{в\,m}^{1/2}$ и $Z_{в\,m}^{1/2}$ соответственно.

Подставив эти соотношения в (16.2), (16.6) и (16.7), получим

$$\mathbf{S}^{эк} = \mathbf{Z}_в \mathbf{S} \mathbf{Y}_в; \tag{16.13}$$

$$\mathbf{Z}^{эк} = \mathbf{Z}_в \mathbf{Z} \mathbf{Z}_в; \tag{16.14}$$

$$\mathbf{Y}^{эк} = \mathbf{Y}_в \mathbf{Y} \mathbf{Y}_в, \tag{16.15}$$

где $\mathbf{S}^{эк}$, $\mathbf{Z}^{эк}$ и $\mathbf{Y}^{эк}$ — ненормированные матрицы рассеяния, сопротивлений и проводимостей. Элементы последних имеют размерность ом (Ом) и сименс (См) соответственно.

При анализе цепей, содержащих четырехполюсники, часто используют *матрицу передачи* $\mathbf{T}$, связывающую амплитуды нормированных напряжений на входе и выходе четырехполюсника:

$$\boxed{\dot{\mathbf{U}}_1 = \mathbf{T}\dot{\mathbf{U}}_2,} \tag{16.16}$$

где

$$\dot{\mathbf{U}}_1 = \begin{bmatrix} \dot{u}_1^+ \\ \dot{u}_1^- \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{U}}_2 = \begin{bmatrix} \dot{u}_2^- \\ \dot{u}_2^+ \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим четырехполюсник, составленный из $p$ каскадно соединенных четырехполюсников, имеющих матрицы передачи $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, ..., $\mathbf{T}_p$, (рис. 16.2). Применив к последнему из них уравнение (16.16), найдем

$$\dot{\mathbf{U}}_1^{(p)} = \mathbf{T}_p \dot{\mathbf{U}}_2^{(p)}.$$

Входные напряжения этого четырехполюсника служат выходными для предыдущего:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_2^- \\ \dot{u}_2^+ \end{bmatrix}^{(p-1)} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1^+ \\ \dot{u}_1^- \end{bmatrix}^{p}.$$

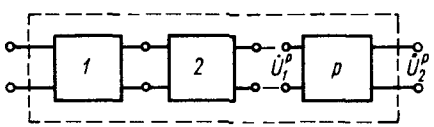



Рис. 16.2. Каскадное соединение четырехполюсников

Отсюда

$$\dot{\mathbf{U}}_1^{(p-1)}=\mathbf{T}_{p-1}\dot{\mathbf{U}}_2^{(p-1)}=\mathbf{T}_{p-1}\mathbf{T}_p\dot{\mathbf{U}}_2^{(p)}.$$

Повторив эту процедуру, получим

$$\dot{\mathbf{U}}_1^{(1)}=\prod_{i=1}^{p}\mathbf{T}_i\dot{\mathbf{U}}_2^{(p)}.$$

Рассматривая каскадное соединение как один четырехполюсник с матрицей передачи $\mathbf{T}$, запишем

$$\dot{\mathbf{U}}_1^{(1)}=\mathbf{T}\dot{\mathbf{U}}_2^{(p)}.$$

Сравнив полученные выражения, видим, что матрица передачи каскадного соединения $p$ различных четырехполюсников равна произведению матриц передачи отдельных каскадов:

$$\mathbf{T}=\prod_{i=1}^{p}\mathbf{T}_i.$$

Это свойство матриц передачи обусловливает их широкое применение при анализе СВЧ-цепей. Преобразуя уравнения (16.2), (16.16), определим связь между элементами матриц рассеяния и передачи:

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s_{21}} & -\dfrac{s_{22}}{s_{21}}\\ \dfrac{s_{11}}{s_{21}} & -\dfrac{\Delta s}{s_{21}}\end{bmatrix};\quad \mathbf{S}=\begin{bmatrix}\dfrac{t_{21}}{t_{11}} & \dfrac{\Delta t}{t_{11}}\\ \dfrac{1}{t_{11}} & -\dfrac{t_{12}}{t_{11}}\end{bmatrix},$$

где $\Delta s=s_{11}s_{22}-s_{12}s_{21}$; $\Delta t=t_{11}t_{22}-t_{12}t_{21}$.

## § 16.2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА МАТРИЦ РАССЕЯНИЯ

Как отмечалось ранее, значения элементов матрицы рассеяния определяются внутренними свойствами сочленения и положением плоскостей отсчета. Рассмотрим, как изменяются эти значения при перемещении плоскостей отсчета. Пусть, например, в плече $m$ плоскость отсчета сдвинута на расстояние $\Delta l_m$ (см. рис. 16.1). Напряжения падающей и отраженной волн в новой плоскости отсчета $S_m$ связаны с напряжениями в старой плоскости соотношениями

$$\dot{u}_m^{+}(S_m')=\dot{u}_m^{+}(S_m)e^{ik_{zm}\Delta l_m};$$

$$\dot{u}_m^{-}(S_m')=\dot{u}_m^{-}(S_m)e^{-ik_{zm}\Delta l_m},$$

где $k_{zm}$ — постоянная распространения волны в плече $m$. Согласно (16.3) и (16.4), найдем элементы матрицы рассеяния $\mathbf{S}'$, соответствующие новому положению плоскости отсчета:

$$s'_{mm}=\frac{\dot{u}_m^-(S'_m)}{\dot{u}_m^+(S'_m)}=s_{mm}e^{-2ik_{zm}\Delta lm};$$

$$s'_{nm}=\frac{\dot{u}_n^-(S_n)}{\dot{u}_m^+(S'_m)}=s_{nm}e^{-ik_{zm}\Delta l_m};$$

$$s'_{mn}=\frac{\dot{u}_m^-(S'_m)}{\dot{u}_n^+(S_n)}=s_{mn}e^{-ik_{zm}\Delta l_m}.$$

При изменении положения сразу нескольких плоскостей отсчета значения элементов новой матрицы рассеяния $\mathbf{S}'$, как следует из полученных выражений, связаны со значениями элементов старой матрицы $\mathbf{S}$ формулами

$$s'_{mn}=s_{mn}e^{-i(k_{zm}\Delta l_m+k_{zn}\Delta l_n)},$$

причем положительные значения $\Delta l$ соответствуют перемещению плоскости отсчета от сочленения. Полученные выражения допускают матричную запись

$$\mathbf{S}'=\mathbf{LSL},$$

где $\mathbf{L}$ — диагональная матрица порядка $N$, ненулевые элементы которой имеют значения $l_{mm}=e^{-ik_{zm}\Delta l_m}$.

Если в линиях передачи, образующих сочленение, затухание не учитывается, изменение положения плоскостей отсчета влияет только на фазы элементов матрицы рассеяния, оставляя неизменными их модули. Очевидно, что можно выбрать положение плоскости отсчета таким образом, чтобы фаза любого элемента матрицы рассеяния обратилась в нуль, т. е. чтобы этот элемент имел действительное значение. Так как в $N$-плечем устройстве имеется $N$ плоскостей отсчета фаз, их можно расположить так, чтобы любые $N$ элементов $\mathbf{S}$-матрицы имели действительные значения.

Рассмотрим свойства взаимных многополюсников. Возбудим плечи такого многополюсника двумя независимыми системами источников, которые создают в нем электромагнитные поля $\dot{\mathbf{E}}^a$, $\dot{\mathbf{H}}^a$ и $\dot{\mathbf{E}}^b$, $\dot{\mathbf{H}}^b$ одной частоты и применим к объему многополюсника, ограниченному плоскостями отсчета $S_p$, $p=1, \ldots, N$, лемму Лоренца (1.50). Так как сторонние токи внутри многополюсника отсутствуют, получим

$$\sum_{p=1}^{N}\int_{S_p}([\dot{\mathbf{E}}_p^a,\ \dot{\mathbf{H}}_p^b]-[\dot{\mathbf{E}}_p^b,\ \dot{\mathbf{H}}_p^a])\,d\mathbf{S}=0,$$

где $\dot{\mathbf{E}}_p$, $\dot{\mathbf{H}}_p$ — поля в плоскости отсчета

Согласно выражению (15.6),

$$\int_{S_p}[\dot{\mathbf{E}}_p,\ \dot{\mathbf{H}}_p]\,d\mathbf{S}=\dot{u}_p\dot{i}_p.$$

Следовательно, для взаимных многополюсников

$$\sum_{p=1}^{N}(\dot{u}_p^a\dot{i}_p^b-\dot{u}_p^b\dot{i}_p^a)=0. \qquad (16.17)$$

Предположим, что все плечи многополюсника, за исключением плеч $m$ и $n$, работают в режиме короткого замыкания. В этом случае выражение (16.17) принимает вид

$$\dot{u}_m^a \dot{i}_m^b - \dot{u}_m^b \dot{i}_m^a + \dot{u}_n^a \dot{i}_n^b - \dot{u}_n^b \dot{i}_n^a = 0. \tag{16.18}$$

В соответствии с формулой (16.7)

$$\dot{i}_m^{a,b} = y_{mm}\dot{u}_m^{a,b} + y_{mn}\dot{u}_n^{a,b};$$

$$\dot{i}_n^{a,b} = y_{nm}\dot{u}_m^{a,b} + y_{nn}\dot{u}_n^{a,b}.$$

Подставив эти равенства в уравнение (16.18) и приведя подобные члены, найдем

$$(\dot{u}_m^a \dot{u}_n^b - \dot{u}_m^b \dot{u}_n^a)(y_{mn} - y_{nm}) = 0.$$

Ввиду произвольности значений напряжений $\dot{u}_m^{a,b}$ и $\dot{u}_n^{a,b}$ $y_{mn} = y_{nm}$, $n, m = 1, 2, \ldots, N$. В матричной форме эти соотношения примут вид

$$\mathbf{Y}^T = \mathbf{Y}. \tag{16.19}$$

Таким образом, матрицы проводимостей взаимных устройств симметричны. Из соотношений (16.12) следует, что симметричны также матрицы сопротивлений и рассеяния взаимных устройств. Верно и обратное утверждение: если матрицы рассеяния, проводимостей или сопротивлений многоплечего устройства симметричны, то устройство взаимно.

При анализе многих устройств СВЧ потерями в них можно пренебречь. Многополюсники, не имеющие потерь, называются *недиссипативными*. Из закона сохранения энергии следует, что сумма мощностей падающих волн в плечах многополюсника должна быть равна сумме мощностей отраженных волн:

$$\sum_{m=1}^{N} |\dot{u}_m^+|^2 = \sum_{m=1}^{N} |\dot{u}_m^-|^2$$

или

$$(\dot{\mathbf{U}}^+)^* \dot{\mathbf{U}}^+ = (\mathbf{U}^-)^* \dot{\mathbf{U}}^-.$$

Преобразуем полученное равенство, используя определение (16.2);

$$(\dot{\mathbf{U}}^+)^* \dot{\mathbf{U}}^+ = (\dot{\mathbf{U}}^+)^* \mathbf{S}^* \mathbf{S} \dot{\mathbf{U}}^+.$$

Вынеся за скобки вектор $(\dot{\mathbf{U}}^+)^*$, получим

$$(\dot{\mathbf{U}}^+)^* (\mathbf{E} - \mathbf{S}^* \mathbf{S}) \dot{\mathbf{U}}^+ = 0,$$

откуда в силу произвольности $\dot{\mathbf{U}}^+$

$$\mathbf{S}^* \mathbf{S} = \mathbf{E}. \tag{16.20}$$

Таким образом, доказано, что матрицы рассеяния недиссипативных устройств унитарны. Читателю предоставляется возможность доказать обратное утверждение: в устройствах, обладающих унитарными матрицами рассеяния, потери энергии

(диссипация) отсутствуют. Отметим, что столбцы унитарной матрицы ортонормированы (см. Приложение 8):

$$\sum_{m=1}^{N} s_{mp}^{*} s_{mn} = \begin{cases} 0, & p \neq n; \\ 1, & p = n;\ p,\ n = 1, \ldots, N \end{cases} \tag{16.21}$$

Симметричные и (или) унитарные матрицы обладают меньшим числом независимых параметров, чем произвольные. Так, если известно, что устройство взаимно, его свойства определяются только $N(N+1)/2$ комплексными числами — элементами матрицы рассеяния, находящимися на главной диагонали и выше нее. Если к тому же устройство недиссипативно, то условия (16.21) позволяют уменьшить число независимых элементов еще в два раза.

## § 16.3. СИММЕТРИЧНЫЕ МНОГОПОЛЮСНИКИ

Часто многоплечие устройства обладают геометрической симметрией, т. е. в результате выполнения над ними некоторых операций совмещаются сами с собой. Номера совмещающихся в результате *этих операций плеч можно переставить, не нарушая матрицы* рассеяния многополюсника. К наиболее простым операциям симметрии относятся поворот вокруг оси на некоторый угол $\alpha$ и отражение относительно плоскости. Если в результате этих операций многополюсник совмещается сам с собой, то считают, что он обладает элементами симметрии — поворотной осью $p$-го порядка, где $p = 2\pi/\alpha$, и (или) зеркальной плоскостью симметрии. Более сложные преобразования симметрии могут быть получены последовательным выполнением указанных двух элементарных операций.

Операцию симметрии можно свести к перенумерации плеч, охарактеризовав ее специальной матрицей симметрии $\mathbf{A}$, связывающей старые и новые векторы нормированных напряжений:

$$\dot{\mathbf{U}}_{\text{нов}} = \mathbf{A}\dot{\mathbf{U}}_{\text{ст}}. \tag{16.22}$$

Из выражения (16.22) следует, что $\mathbf{A}$ — квадратная матрица порядка $N$, в каждой строке которой имеется только один ненулевой элемент. Для плеч, номер которых в результате преобразования симметрии не меняется — это диагональный элемент $a_{jj} = \pm 1$. Нижний знак здесь берется в том случае, когда в результате преобразования изменяется направление вектора напряженности электрического поля в плече. Если номер плеча $m$ в результате преобразования симметрии меняется на $n$, то на пересечении $m$-й строки и $n$-го столбца появляется элемент $a_{mn} = 1$. Так как в каждом столбце матрицы $\mathbf{A}$ стоит только один единичный элемент, она унитарна. Обратное преобразование симметрии описывается матрицей $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{T}$.

Возьмем многополюсник, описываемый матрицей рассеяния $\mathbf{S}$, и применим к нему некоторое преобразование симметрии, определяемое матрицей $\mathbf{A}$. Так как при этом нумерация

отраженных волн изменяется таким же образом, как нумерация падающих волн, справедливо равенство

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{U}}^{-}=\mathbf{S}\mathbf{A}\dot{\mathbf{U}}^{+}.$$

Помножив это равенство слева на $A^{-1}$, получим

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\dot{\mathbf{U}}^{-}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{A}\dot{\mathbf{U}}^{+}.$$

Учитывая, что $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E}$, и сравнивая это равенство с (16.2), найдем

$$\mathbf{S}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{A}$$

или

$$\mathbf{A}\mathbf{S}=\mathbf{S}\mathbf{A}. \tag{16.23}$$

Таким образом, матрица симметрии коммутирует с матрицей рассеяния. Аналогично доказывается, что она коммутирует с матрицами **Z** и **Y**.

Использование свойств симметрии позволяет уменьшить число независимых параметров, которыми характеризуется данный многополюсник. При этом можно предсказать многие свойства симметричного устройства, не производя расчетов или измерений.

### § 16.4. МЕТОД СПЕКТРАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$\dot{\mathbf{U}}^{-}=\mathbf{S}\dot{\mathbf{U}}^{+}=\gamma\dot{\mathbf{U}}^{+}, \tag{16.24}$$

решением которой служит вектор $\mathbf{U}^{+}$, обеспечивающий одинаковые коэффициенты отражения $\gamma$ во всех плечах многополюсника. Запишем выражение (16.24) в виде

$$(\mathbf{S}-\gamma\mathbf{E})\dot{\mathbf{U}}^{+}=0.$$

Эта однородная система линейных алгебраических уравнений имеет ненулевое решение, если ее определитель $D=|\mathbf{S}-\gamma\mathbf{E}|=0$. Полученное уравнение степени $N$ относительно $\gamma$ имеет $N$ корней (собственных чисел) $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N$, каждому из которых соответствует решение $\dot{\mathbf{U}}^{(j)}$, называемое *собственным вектором матрицы* **S**. В дальнейшем считаем все $\gamma_j$ различными.

Составим модальную матрицу **M** порядка $N$, взяв в качестве ее столбцов собственные векторы матрицы **S**:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} \dot{u}_1^{(1)} & \dot{u}_1^{(2)} & \vdots & u_1^{(N)} \\ \dot{u}_2^{(1)} & \dot{u}_2^{(2)} & \vdots & \dot{u}_2^{(N)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dot{u}_N^{(1)} & \dot{u}_N^{(2)} & \vdots & \dot{u}_N^{N} \end{bmatrix}.$$

С ее помощью представим матрицу рассеяния в следующем виде:

$$\mathbf{S}=\mathbf{M}\Gamma\mathbf{M}^{-1}, \tag{16.25}$$

где $\mathbf{\Gamma}$ — диагональная матрица, элементами которой являются собственные числа матрицы $\mathbf{S}$.

Таким образом, матрицу рассеяния $\mathbf{S}$ можно вычислить, если известны ее собственные числа и векторы. Поскольку сама эта матрица подлежит определению, уравнение (16.24) для нахождения этих величин использовать нельзя. Однако известно, что коммутирующие матрицы имеют общую систему собственных векторов. Так как с матрицей $\mathbf{S}$ коммутируют матрицы симметрии, собственные векторы последних можно применить для построения модальной матрицы $\mathbf{M}$.

Каждое из собственных чисел равно коэффициенту отражения в любом плече многополюсника при воздействии на него набора падающих волн с определенным соотношением амплитуд (собственного вектора матриц $\mathbf{S}$ или $\mathbf{A}$). Сложим амплитуды напряжений и токов этих волн в центре сочленения, условно продолжив его плечи внутрь на расстоянии $l_m$:

$$\dot{U}_{\text{н}}^{(j)} = \sum_{m=1}^{N} \dot{\mathbf{u}}_m^{(j)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{zm}z};$$

$$I_{\text{н}}^{(j)} = \sum_{m=1}^{N} \mathbf{i}_m^{(j)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{zm}z}. \qquad (16.26)$$

При сложении величины $\dot{\mathbf{u}}_m^{(j)}$, $\mathbf{i}_m^{(j)}$ необходимо рассматривать как векторы, пространственная ориентация которых зависит от направления поперечных составляющих электрического и магнитного полей в каждом плече.

Так как $\dot{U}_{\text{н}}^{(j)}$ и $\dot{I}_{\text{н}}^{(j)}$ определены в конце плеча, можно найти его нормированное сопротивление нагрузки и коэффициент отражения:

$$Z_{\text{н}}^{(j)} = \dot{U}_{\text{н}}^{(j)} / \dot{I}_{\text{н}}^{(j)}, \quad \gamma_j = (Z_{\text{н}}^{(j)} - 1)/(Z_{\text{н}}^{(j)} + 1).$$

Проделав эти вычисления для всех $N$ собственных векторов, вычислим все собственные числа матрицы $\mathbf{S}$, т. е. матрицу $\mathbf{\Gamma}$. Подставив затем выражения для $\mathbf{M}$ и $\mathbf{\Gamma}$ в (16.25), получим искомую матрицу рассеяния $\mathbf{S}$.

Изложенный способ расчета матрицы $\mathbf{S}$ называют *методом спектрального разложения*. Он позволяет свести анализ $N$-плечного устройства к анализу двухполюсника с $N$ различными сопротивлениями нагрузки.

## § 16.5. АНАЛИЗ УСТРОЙСТВ СВЧ С ПОМОЩЬЮ ЭВМ, МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ

Современные устройства СВЧ часто содержат большое число соединенных между собой элементов сложной формы с неоднородным и (или) анизотропным заполнением. Рассчитать характеристики такого устройства, решив для него единую краевую

задачу электродинамики, в обозримом будущем не представляется возможным. Даже если такая возможность и появится в связи с быстрым совершенствованием вычислительной техники, затраты ресурсов на решение будут слишком высоки, а полученная информация в значительной степени — избыточной.

В связи с отмеченными трудностями анализ сложных СВЧ-устройств, как правило, осуществляется *методом декомпозиции* сложного объекта на отдельные области *(автономные блоки)*, анализ каждой из которых производится независимо аналитическими или численными методами. Каждому автономному блоку ставится в соответствие *дескриптор режимов*, определяющий в рамках используемого приближения отклик автономного блока на любое внешнее воздействие. Таким дескриптором может служить, в частности, матрица рассеяния, сопротивлений или проводимостей, если автономный блок допускает представление в виде многополюсника СВЧ. Существование дескрипторов следует из теоремы единственности решений уравнений электродинамики.

Построив дескрипторы всех автономных блоков, входящих в устройство, и учтя граничные условия на разделяющих их поверхностях, составим декомпозиционную схему, которая определит связи между дескрипторами отдельных блоков устройства. Заключительный этап решения задачи — построение на основе декомпозиционной схемы математической модели устройства в целом т. е. *рекомпозиция* полной модели. Так как при этом используется формальный аппарат преобразования дескрипторов, для рекомпозиции с успехом применяется ЭВМ. Наиболее полно декомпозиционный подход к решению задач электродинамики разработан в трудах В. В. Никольского [12].

Рассмотрим более подробно отдельные этапы описанного метода. Пусть необходимо провести анализ электродинамической системы, изображенной на рис. 16.3. Разобьем ее на автономные блоки, поверхности раздела между которыми обозначим штриховыми линиями. В результате образуются автономные блоки двух типов — *физические*, являющиеся элементами конструкции и отделенные от остальной части системы отрезками реальных линий передачи конечной длины (например, блок 1 на рис. 16.3), и *виртуальные* (остальные блоки на этом рисунке). Можно считать, что виртуальные блоки соединены между собой отрезками линий передачи нулевой длины (виртуальными линиями передачи). Полученная декомпозиционная схема электродинамической системы показана на рис. 16.4.

Каждый автономный блок можно рассматривать как многополюсник, плоскости отсчета в плечах которого совпадают с поверхностями раздела. Так как длина плеч автономного блока может быть сколь угодно малой, для достаточно точного описания его свойств в каждом плече необходимо учитывать

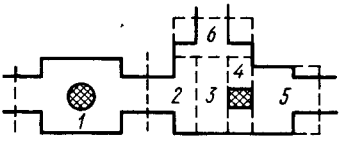



Рис. 16.3. Волноводное устройство

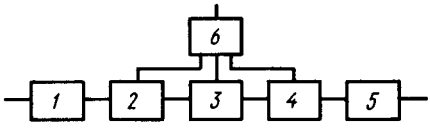



Рис. 16.4. Декомпозиционная схема волноводного устройства

несколько типов волн, т. е. использовать многомодовый дескриптор.

Построим многомодовый дескриптор автономного блока, содержащего $M$ поверхностей раздела, расположенных в реальных или виртуальных линиях передачи. В каждой линии учитываем $Q_n$ типов волн $(n=1, 2, ..., M)$. Зададим в плоскости отсчета плеча 1 касательную составляющую напряженности электрического поля $\dot{\mathbf{E}}_{1\perp}^{q}=\dot{u}_{1q}\dot{\mathbf{E}}_{1\perp}^{q\text{н}}$, где $\dot{u}_{1q}$ — нормированная амплитуда напряжения; $\dot{\mathbf{E}}_{1\perp}^{q\text{н}}$ — нормированная напряженность электрического поля $q$-го типа волны в первом плече. На остальных поверхностях раздела зададим граничные условия типа электрической стенки $(\dot{\mathbf{E}}_{n\perp}=0,\ n=2, ..., M)$. Учитывая соответствующие условия на поверхности автономного блока, получим внутреннюю задачу электродинамики, решение которой, как показано в гл. 1, существует и единственно, так как в реальных автономных блоках всегда имеется затухание или регенерация.

Решив тем или иным методом электродинамическую задачу, найдем касательную составляющую напряженности магнитного поля $\mathbf{H}_{m\perp}$ на всех плоскостях отсчета и представим ее в виде разложения по собственным волнам каждой линии передачи:

$$\dot{\mathbf{H}}_{m\perp}=\sum_{p=1}^{Q_m} i_{mp}\dot{\mathbf{H}}_{m\perp}^{p\text{н}};\ m=1, ..., M,$$

где $\dot{\mathbf{H}}_{m\perp}^{p\text{н}}$ — нормированная амплитуда магнитного поля $p$-й волны в $m$-й плоскости отсчета; $i_{mp}$ — нормированный ток этого типа волны. Отношение $i_{mp}/\dot{u}_{1q}=Y_{1q}^{mp}$ есть элемент многомодовой матрицы проводимостей автономного блока. Чтобы определить все элементы этой матрицы, необходимо решить $N=\sum_{m=1}^{M} Q_m$ задач электродинамики, последовательно задавая электрическое поле каждого типа волны в каждом плече и находя магнитное поле всех учитываемых типов волн во всех остальных плечах. Проведя перенумерацию плеч и элементов, получим многомодовую матрицу проводимостей размерностью $N$-дескриптор автономного блока.

Для описания физических автономных блоков с приемлемой степенью точности достаточно учесть один или несколько типов волн в каждой плоскости отсчета, так как они расположены в реальных линиях передачи, имеющих достаточно большую длину. В то же время эти блоки обладают, как правило, сложной внутренней структурой, требующей использования численных методов для вычисления дескриптора.

Виртуальные автономные блоки соединены с соседними блоками каналами нулевой длины, что требует для достаточно точного описания свойств блока применения многомодовых дескрипторов с большим числом типов волн в каждом канале. Разбиение системы стремятся выполнить таким образом, чтобы виртуальные блоки имели простую регулярную структуру, допускающую решение соответствующей электродинамической задачи аналитическими методами. Часто виртуальный автономный блок представляет собой, например, отрезок регулярной линии передачи.

Электродинамический анализ автономных блоков может производиться путем их дальнейшего разделения на более мелкие блоки (*вторичная декомпозиция*). Такие виртуальные автономные блоки могут представлять собой в пределе объемы с однородным заполнением, ограниченные координатными поверхностями (например, параллелепипеды). Каждая грань такого объема рассматривается как виртуальная многомодовая линия передачи нулевой длины, в которой могут распространяться E-, H- и T-волны.

По мере уменьшения размеров автономного блока спектр критических частот E- и H-волн сдвигается в высокочастотную сторону и при достаточно малых размерах граней на каждой из них достаточно учесть две T-волны с взаимно перпендикулярными направлениями поляризации. Разбиение электродинамической системы на такие *минимальные автономные блоки* (МАБ) можно считать одним из методов дискретизации (см. гл. 14), отличающимся тем, что электромагнитное поле в объеме каждого элемента точно удовлетворяет уравнениям Максвелла [13]. Поэтому число элементов разбиения, требующееся для достижения заданной точности расчета, может быть значительно меньше, чем, например, при дискретизации методом конечных разностей.

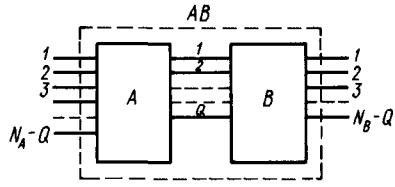



Рис. 16.5. Соединение двух автономных блоков

Построив дескрипторы всех автономных блоков, необходимо выполнить заключительный этап анализа электродинамической системы — ее рекомпозицию, т. е. объединение дескрипторов отдельных автономных блоков в соответствии с декомпозиционной схемой устройства.

Пусть, например, в декомпозиционной схеме имеются блоки $A$ и $B$, соединенные общими каналами (рис. 16.5). Предположим, что блоки описываются матрицами проводимости $\mathbf{Y}^A$ и $\mathbf{Y}^B$. В результате объединения каналы, соединяющие блоки $A$ и $B$, становятся частью внутренней структуры объединенного блока $AB$ и исключаются из дальнейшего рассмотрения. При этом объединенный блок описывается своим дескриптором — матрицей проводимостей $\mathbf{Y}^{AB}$, порядок которой равен числу внешних каналов объединенного блока.

Пусть блоки $A$ и $B$ имеют $N_A$ и $N_B$ плеч (каналов), из которых $Q$ плеч являются общими для обоих блоков. Перенумеруем плечи блоков $A$ и $B$ так, чтобы соединяющие их каналы имели последние номера. Векторы напряжений и токов в плечах каждого блока разобьем на два подвектора:

$$\dot{\mathbf{U}}^A=\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{U}}_1^A\\ \dot{\mathbf{U}}_2^A\end{bmatrix};\ \dot{\mathbf{I}}^A=\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{I}}_1^A\\ \dot{\mathbf{I}}_2^A\end{bmatrix},\ \dot{\mathbf{U}}^B=\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{U}}_1^B\\ \dot{\mathbf{U}}_2^B\end{bmatrix};\ \dot{\mathbf{I}}^B=\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{I}}_1^B\\ \dot{\mathbf{I}}_2^B\end{bmatrix},$$

где $\dot{\mathbf{U}}_1^A$, $\dot{\mathbf{I}}_1^A$ — $(N_A-Q)$-мерные векторы-столбцы напряжений и токов в плечах блока $A$, не соединяющихся с блоком $B$; $U_2^A$, $I_2^A$ — $Q$-мерные векторы-столбцы напряжений и токов в плечах блока $A$, соединяющихся с плечами блока $B$. Аналогичный смысл имеют обозначения, введенные для блока $B$. Напряжения и токи в общих каналах связаны соотношениями, вытекающими из непрерывности касательных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей на границах раздела:

$$\mathbf{U}_2^A=\mathbf{U}_2^B;\ \mathbf{I}_2^A=-\mathbf{I}_2^B. \tag{16.27}$$

Запишем соотношения (16.7) для блоков $A$ и $B$, используя клеточное представление матриц $\mathbf{Y}^A$ и $\mathbf{Y}^B$:

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{I}}_1^A\\ \dot{\mathbf{I}}_2^A\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:c}\mathbf{Y}_{11}^A & \mathbf{Y}_{12}^A\\ \hdashline \mathbf{Y}_{21}^A & \mathbf{Y}_{22}^A\end{array}\right]\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{U}}_1^A\\ \dot{\mathbf{U}}_2^A\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}\dot{\mathbf{I}}_1^B\\ \dot{\mathbf{I}}_2^B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{Y}}_{11}^B & \dot{\mathbf{Y}}_{12}^B\\ \mathbf{Y}_{21}^B & \mathbf{Y}_{22}^B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{U}}_1^B\\ \dot{\mathbf{U}}_2^B\end{bmatrix}.$$

В раскрытой форме эти соотношения приобретают вид

$$\dot{\mathbf{I}}_1^A=\mathbf{Y}_{11}^A\dot{\mathbf{U}}_1^A+\mathbf{Y}_{12}^A\dot{\mathbf{U}}_2^A; \tag{16.28}$$

$$\dot{\mathbf{I}}_2^A=\mathbf{Y}_{21}^A\dot{\mathbf{U}}_1^A+\mathbf{Y}_{22}^A\dot{\mathbf{U}}_2^A; \tag{16.29}$$

$$\dot{\mathbf{I}}_1^B=\mathbf{Y}_{11}^B\dot{\mathbf{U}}_1^B+\mathbf{Y}_{12}^B\dot{\mathbf{U}}_2^B; \tag{16.30}$$

$$\dot{\mathbf{I}}_2^B=\mathbf{Y}_{21}^B\dot{\mathbf{U}}_1^B+\mathbf{Y}_{22}^B\dot{\mathbf{U}}_2^B. \tag{16.31}$$

Исключим из этих уравнений подвекторы напряжений и токов в общих каналах. Для этого с учетом первого уравнения связи (16.27) перепишем (16.30) и (16.31) следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_1^B&=\mathbf{Y}_{11}^B\mathbf{U}_1^B+\mathbf{Y}_{12}^B\mathbf{U}_2^A;\\ \mathbf{I}_2^B&=\mathbf{Y}_{21}^B\mathbf{U}_1^B+\mathbf{Y}_{22}^B\mathbf{U}_2^A.\end{aligned} \tag{16.32}$$

Из второго уравнения связи следует

$$-\mathbf{Y}_{21}^A\dot{\mathbf{U}}_1^A-\mathbf{Y}_{22}^A\dot{\mathbf{U}}_2^A=\mathbf{Y}_{21}^B\dot{\mathbf{U}}_1^B+\mathbf{Y}_{22}^B\dot{\mathbf{U}}_2^A,$$

откуда

$$\dot{\mathbf{U}}_2^A=-(\mathbf{Y}_{22}^A+\mathbf{Y}_{22}^B)^{-1}(\mathbf{Y}_{21}^A\dot{\mathbf{U}}_1^A+\mathbf{Y}_{21}^B\dot{\mathbf{U}}_1^B).$$

Подставив полученное выражение в (16.28) и (16.32), найдем

$$\dot{\mathbf{I}}_1^A=[\mathbf{Y}_{11}^A-\mathbf{Y}_{12}^A(\mathbf{Y}_{22}^A+\mathbf{Y}_{22}^B)^{-1}\mathbf{Y}_{21}^A]\dot{\mathbf{U}}_1^A-\mathbf{Y}_{12}^A(\mathbf{Y}_{22}^A+\mathbf{Y}_{22}^B)^{-1}\mathbf{Y}_{21}^B\dot{\mathbf{U}}_1^B, \tag{16.33}$$

$$\dot{\mathbf{I}}_1^B=-\mathbf{Y}_{12}^B(\mathbf{Y}_{22}^A+\mathbf{Y}_{22}^B)^{-1}\mathbf{Y}_{21}^A\dot{\mathbf{U}}_1^A+[\mathbf{Y}_{11}^B-\mathbf{Y}_{12}^B(\mathbf{Y}_{22}^A+\mathbf{Y}_{22}^B)^{-1}\mathbf{Y}_{21}^B]\dot{\mathbf{U}}_1^B. \tag{16.34}$$

С другой стороны, для объединенного блока $AB$ можно записать

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_1^A \\ \dot{\mathbf{I}}_1^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11}^{AB} \vdots \mathbf{Y}_{12}^{AB} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{Y}_{21}^{AB} \vdots \mathbf{Y}_{22}^{AB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_1^A \\ \dot{\mathbf{U}}_1^B \end{bmatrix}, \tag{16.35}$$

где

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11}^{AB} \vdots \mathbf{Y}_{12}^{AB} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{Y}_{21}^{AB} \vdots \mathbf{Y}_{22}^{AB} \end{bmatrix} = \mathbf{Y}^{AB} \text{—матрица проводимостей блока,}$$

записанная в клеточной форме. Сравнив выражения (16.33), (16.34) и (16.35), найдем связь между матрицами проводимостей отдельных блоков $A$ и $B$ и объединенного блока $AB$:

$$\mathbf{Y}_{11}^{AB} = \mathbf{Y}_{11}^{A} - \mathbf{Y}_{12}^{A}\left(\mathbf{Y}_{22}^{A} + \mathbf{Y}_{22}^{B}\right)^{-1}\mathbf{Y}_{21}^{A};$$

$$\mathbf{Y}_{12}^{AB} = -\mathbf{Y}_{12}^{A}\left(\mathbf{Y}_{22}^{A} + \mathbf{Y}_{22}^{B}\right)^{-1}\mathbf{Y}_{21}^{B};$$

$$\mathbf{Y}_{21}^{AB} = -\mathbf{Y}_{12}^{B}\left(\mathbf{Y}_{22}^{A} + \mathbf{Y}_{22}^{B}\right)^{-1}\mathbf{Y}_{21}^{A};$$

$$\mathbf{Y}_{22}^{AB} = \mathbf{Y}_{11}^{B} - \mathbf{Y}_{12}^{B}\left(\mathbf{Y}_{22}^{A} + \mathbf{Y}_{22}^{B}\right)^{-1}\mathbf{Y}_{21}^{B}.$$

Аналогичные соотношения нетрудно получить и для матриц рассеяния и сопротивлений [13].

В результате последовательного применения операции объединения автономных блоков находится дескриптор всей системы относительно ее внешних каналов. Эта процедура обычно выполняется с помощью ЭВМ. Следует отметить, что операции объединения требуют сравнительно больших затрат машинного времени, которые быстро возрастают с увеличением порядка участвующих в вычислениях матриц. Поэтому в ряде случаев целесообразно использовать менее универсальные, но более экономичные алгоритмы (например, матрицы передачи, если устройство допускает разбиение на каскадно включенные четырехполюсники).

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение многополюсника СВЧ. Как определяется число его плеч и полюсов?
2. Дайте определение матрицы рассеяния многополюсника. Каков физический смысл ее элементов? Для каких многополюсников может быть построена матрица рассеяния?
3. Дайте определения матриц сопротивлений и проводимостей. Как они связаны с матрицей рассеяния? Любые ли многополюсники обладают матрицами сопротивлений и проводимостей?
4. Дайте определение ненормированных матриц. Выведите формулу, связывающую элементы нормированной и ненормированной матриц рассеяния.
5. Дайте определение волновых матриц передачи и поясните особенности их использования.
6. Как изменяется матрица рассеяния при изменении положения плоскостей отсчета?
7. Какими свойствами обладают матрицы рассеяния взаимных устройств?
8. Какими свойствами обладают матрицы рассеяния недиссипативных устройств?
9. Дайте определение операций симметрии. Опишите способ построения матриц симметрии.
10. Перечислите основные свойства матриц симметрии.
11. Поясните физический смысл собственных чисел и векторов матрицы рассеяния.

12. Приведите формулу диагонального представления матрицы рассеяния и поясните, как ее использовать для нахождения матрицы рассеяния симметричного устройства.
13. Перечислите основные этапы анализа сложных электродинамических систем методом декомпозиции.
14. Дайте определение автономного блока и декомпозиционной схемы устройства СВЧ.
15. Поясните процесс построения дескрипторов автономных блоков.
16. Опишите процедуру рекомпозиции декомпозиционной схемы устройства.

## ГЛАВА 17

# ВЗАИМНЫЕ УСТРОЙСТВА СВЧ

### § 17.1. ДВУХПОЛЮСНИКИ

Дескрипторы двухполюсника скалярны, т. е. содержат один элемент $Z$ или $Y$ — его нормированное сопротивление или проводимость. Поэтому эквивалентная схема любого одноплечего устройства имеет вид, показанный на рис. 17.1. Различные двухполюсники отличаются значениями параметров $Z$ или $Y$ и характером их зависимости от частоты.

Одним из наиболее распространенных двухполюсников является *согласованная нагрузка*, поглощающая всю поступающую в нее энергию. Для идеальной нагрузки $Z^{н} = Y^{н} = 1$, коэффициент отражения $\Gamma = S = 0$. Реальные нагрузки характеризуются максимальным значением КСВ $k_{ст\,max}$ в рабочем диапазоне частот $\Delta f$, а также максимально допустимой мощностью рассеяния $P_{max}$. У прецизионных устройств $k_{ст\,max} \leqslant 1{,}01 - 1{,}03$ в полосе частот 30—50%. Основу конструкции согласованной нагрузки составляет плохо проводящий (поглощающий) материал, вводимый в виде керамического вкладыша или пленки в закороченный отрезок линии передачи. Некоторые виды согласованных нагрузок в волноводном, коаксиальном и микрополосковом исполнениях представлены на рис. 17.2.

В отличие от согласованной нагрузки реактивные двухполюсники полностью отражают поступающую на их вход энергию. Нормированные сопротивление $Z^{н} = iX^{н}$ и проводимость $Y^{н} = iB^{н}$

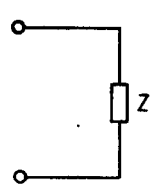



Рис. 17.1. Эквивалентная схема двухполюсника СВЧ

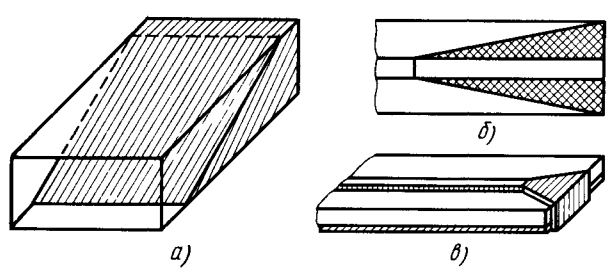



Рис. 17.2. Конструкции согласованных нагрузок: *а* — волноводная; *б* — коаксиальная; *в* — микрополосковая (поглощающий материал заштрихован)

идеальных реактивных двухполюсников — мнимые величины, а модуль коэффициента отражения $|\Gamma|=1$.

Частотная зависимость реактивного сопротивления $X$ и реактивной проводимости $B$ идеального реактивного двухполюсника определяется *теоремой Фостера*, утверждающей, что для любого двухполюсника без потерь

$$\frac{dX}{d\omega}>0;\ \frac{dB}{d\omega}>0. \qquad (17.1)$$

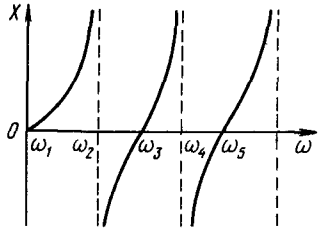



Рис. 17.3. Зависимость входного сопротивления реактивного двухполюсника от частоты

Доказательство этой теоремы приведено в Приложении 7.

Из теоремы Фостера следует, что на нулевой частоте $X(0)$ и $B(0)$ равны либо 0, либо $-\infty$. При увеличении частоты их значения растут; если при конечном значении $\omega$ они обращаются в бесконечность, то при дальнейшем увеличении частоты вновь начинается их рост от $-\infty$ (рис. 17.3). Таким образом, полюсы и нули функций $X(\omega)$ и $B(\omega)$ чередуются. Функции $X(\omega)$ и $B(\omega)$ являются нечетными, так как их производные не отрицательны даже при $\omega=0$. Следовательно, $X(-\omega)=-X(\omega)$, $B(-\omega)=-B(\omega)$.

Рассматривая сопротивление нагрузки $Z(\omega)$ как функцию комплексной переменной, отметим, что две функции, имеющие одинаковые нули и полюсы в некоторой области изменения аргумента, равны с точностью до произвольного множителя. Поэтому функция $f(\omega)=A\omega\frac{(\omega^2-\omega_1^2)(\omega^2-\omega_3^2)\ldots(\omega^2-\omega_{2N-1}^2)}{\omega^2(\omega^2-\omega_2^2)(\omega^2-\omega_4^2)\ldots(\omega^2-\omega_{2N-2}^2)}$, где $\omega_1$, $\omega_3$, ..., $\omega_{2N-1}$ — нули функции $Z(\omega)$; $\omega_2$, $\omega_4$, ..., $\omega_{2N-2}$ — полюсы функции $Z(\omega)$, совпадает с функцией $Z(\omega)$ с точностью до произвольной постоянной $A$.

Из теории функции комплексного переменного следует, что функция $f(\omega)$ и, следовательно, сопротивление нагрузки $X(\omega)$ могут быть представлены в виде ряда

$$X(\omega)=A\omega+\frac{a_0}{\omega}+\frac{2a_2\omega}{\omega^2-\omega_2^2}+\ldots+\frac{2a_{2N-2}\omega}{\omega^2-\omega_{2N-2}^2}, \qquad (17.2)$$

где $a_0$, $a_2$, ..., $a_{2N-2}$ — вычеты функции $f(\omega)$ в полюсах 0, $\omega_2, \ldots, \omega_{2N-2}$. Так как $B=-1/X$, в соответствии с выражением (17.2)

$$B(\omega)=-C\omega+\frac{b_0}{\omega}+\frac{2b_1\omega}{\omega-\omega_1^2}+\ldots+\frac{2b_{2N-1}\omega}{\omega^2-\omega_{2N-1}^2}, \qquad (17.3)$$

где $C$ — постоянная; $b_0$, $b_1, \ldots, b_{2N-1}$ — вычеты функции $1/f(\omega)$ в полюсах 0, $\omega_1$, ..., $\omega_{2N-1}$. Таким образом, полюсы функции $Z(\omega)$ являются нулями функции $Y(\omega)$ и наоборот.

Для вычисления вычетов $a_{2i}$ заметим, что вблизи полюса $\omega_{2i}$

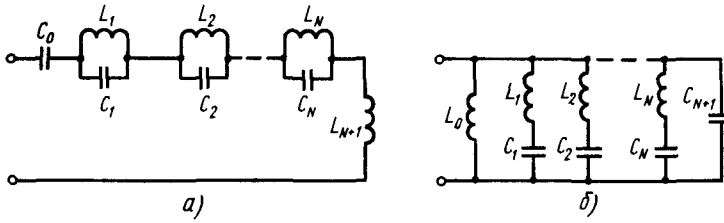



Рис. 17.4. Эквивалентные схемы реактивного двухполюсника: *а* — последовательная; *б* — параллельная

$$X(\omega)\approx\frac{2a_2\omega}{\omega^2-\omega_{2i}^2};\quad B(\omega)=-\frac{\omega^2-\omega_{2i}^2}{2a_{2i}\omega}.$$

Угол наклона кривой $B(\omega)$ в точке $\omega_{2i}$

$$\frac{\mathrm{d}B(\omega_{2i})}{\mathrm{d}\omega}=-\frac{1}{a_{2i}},$$

откуда

$$a_{2i}=-\left(\frac{\mathrm{d}B}{d\omega}\right)^{-1}_{\omega=\omega_{2i}} \tag{17.4}$$

Таким образом, значения вычетов функции $X(\omega)$ могут быть найдены, если известны производные функции $B(\omega)$ в ее нулях.

Выражения (17.2) и (17.3) позволяют представить эквивалентную схему реактивного двухполюсника в виде, представленном на рис. 17.4, *а*, *б*. Для рис. 17.4, *а* (последовательная схема) $C_0=-1/a_0$; $C_i=-1/(2a_i)$; $L_i=1/(\omega_{2i}^2C_i)$; $L_{N+1}=A$. Для рис. 17.4, *б* (параллельная схема) $L_0=-1/b_0$; $L_i=-1/(2b_i)$; $C_i=1/(\omega_{2i-1}^2L_i)$; $C_{N+1}=-1/A$. Вблизи одной из частот, соответствующих полюсам и нулям функции $Z(\omega)$, всеми членами в разложениях (17.2) и (17.3), кроме резонансного, можно пренебречь. Реактивный двухполюсник в этом случае имеет эквивалентную схему в виде параллельного или последовательного колебательного контура.

Реальные двухполюсники всегда имеют потери. Если они невелики, т. е. если энергия, рассеиваемая за период колебаний, мала по сравнению с запасенной в двухполюснике, эквивалентные схемы рис. 17.4 остаются справедливыми, однако в каждый параллельный колебательный контур добавляется активная проводимость $G_i=1/\rho_iQ_i$, а в каждый последовательный — активное сопротивление $R_i=\rho_i/Q_i$, где $\rho_i=(L_i/C_i)^{1/2}$ — волновое сопротивление контура; $Q_i$ — добротность двухполюсника на данной частоте $\omega_i$.

В качестве примера двухполюсника с потерями рассмотрим объемный резонатор, соединенный с коаксиальной линией передачи с помощью петли связи. Электродинамический анализ этой системы приведен в § 12.4, где показано, что вблизи собственной

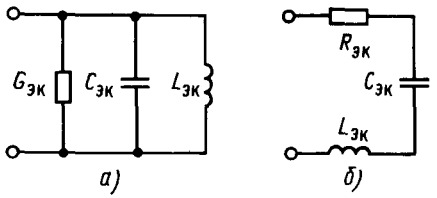



Рис. 17.5. Эквивалентные схемы реактивного двухполюсника вблизи резонансной частоты с учетом потерь: *а* — параллельная; *б* — последовательная

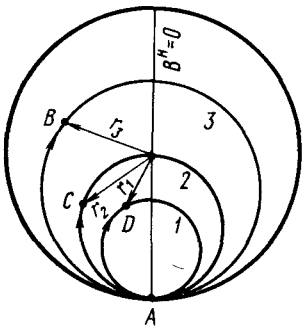



Рис. 17.6. Годографы полной проводимости резонатора: *1* — $\beta<1$; *2* — $\beta=1$; *3* — $\beta>1$

частоты резонатор можно представить эквивалентной схемой в виде параллельного колебательного контура (рис. 17.5) с параметрами $L_{эк}$, $C_{эк}$, $G_{эк}$, значения которых определяются выражением (12.43). Его полная проводимость вблизи резонансной частоты

$$Y_н = G_н + iB_н = \frac{1}{n_п^2 R_{эк}}(1 + i\xi). \qquad (17.5)$$

Собственной индуктивностью петли связи пренебрегаем. Из этого выражения следует, что активная составляющая проводимости резонатора остается постоянной, а реактивная — линейно увеличивается с ростом частоты, переходя через нуль при $\omega = \omega_0$:

$$B_н = \frac{1}{R_{эк} n_п^2}\xi = \frac{Q}{R_{эк} n_п^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \approx \frac{2Q}{R_{эк} n_п^2}\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}.$$

Продифференцировав это выражение по $\omega$ и сравнив результат с (12.43), найдем

$$C_{эк} = \frac{1}{2}\left(\frac{dB_н}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0}. \qquad (17.6)$$

Эта формула соответствует выражению, полученному с помощью теории вычетов.

Соотношение (17.6) позволяет вычислить эквивалентную емкость резонатора по результатам измерения его полной проводимости. Используя известные значения резонансной частоты $\omega_0$ и добротности $Q$, удается рассчитать все эквивалентные параметры резонатора.

На круговой номограмме годограф полной проводимости резонатора изображается в соответствии с формулой (17.5) окружностью $G = \text{const}$, радиус которой зависит от коэффициента

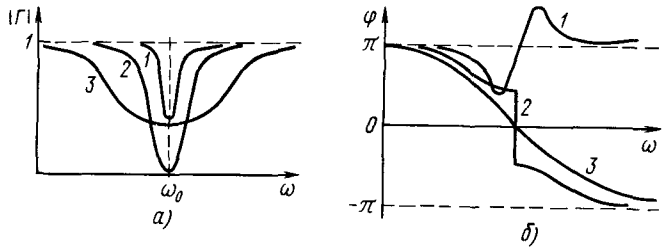



Рис. 17.7. Зависимость модуля (*а*) и фазы (*б*) коэффициента отражения резонатора от частоты:
*1*—$\beta<1$, *2*—$\beta=1$, *3*—$\beta>1$

трансформации петли связи $n_п$. При исчезающе малой площади петли $n_п>0$ и годограф вырождается в точку короткого замыкания $|Y|=\infty$ (точка *A* на рис. 17.6). По мере увеличения $n_п$ радиус годографа растет и при определенном значении $n_п=n_{кр}$ годограф проходит через центр номограммы. Дальнейший рост коэффициента трансформации приводит к соответствующему увеличению радиуса годографа (кривые *1*—*3* на рис. 17.6).

Увеличению частоты возбуждения ω от нуля до бесконечности соответствует полный оборот по часовой стрелке точки $Y_н^н$, изображающей полную проводимость резонатора, по окружности $G=\text{const}$. При этом резонансной частоте $\omega_0$ соответствует положение точки $Y_н^н$ на линии $B^н=0$. Нормированную активную составляющую эквивалентного сопротивления резонатора в этой точке называют коэффициентом связи β:

$$\beta=R_н^н(\omega_0)=1/G_н^н(\omega_0).$$

Связь резонатора с линией передачи меньше критической, если $\beta<1$, равна критической, если $\beta=1$, и больше критической, если $\beta>1$.

Коэффициент отражения от резонатора $-\Gamma$ (со знаком минус, так как используется номограмма полных проводимостей) определяется вектором, проведенным из центра номограммы в точку годографа, соответствующую данной частоте (точки *B*, *C*, *D* на рис. 17.6). С ростом частоты эти точки движутся по окружностям по часовой стрелке и коэффициенты отражения $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$ изменяются. Полученные зависимости модуля и фазы коэффициента отражения от частоты показаны на рис. 17.7, *а*, *б*. При связи больше критической фаза коэффициента отражения меняется монотонно от π до $-\pi$, а модуль имеет широкий минимум при $\omega=\omega_0$. Этот случай соответствует малой нагруженной добротности резонатора. При критической связи модуль коэффициента отражения на резонансной частоте равен нулю, т. е. резонатор на этой частоте согласован с линией передачи. Фаза коэффициента отражения при $\omega=\omega_0$ скачком меняется на π. При связи меньше критической на зависимости $|\Gamma(\omega)|$ наблюда-

ется узкий минимум, что соответствует большой нагруженной добротности, а фаза меняется немонотонно.

Из изложенного следует, что для определения степени связи $\beta$ достаточно измерить $k_{ст\,0}$ на резонансной частоте и установить, является ли зависимость фазы коэффициента отражения от частоты монотонной или нет. В первом случае $\beta = k_{ст\,0}$, во втором $\beta = 1/k_{ст\,0}$.

## § 17.2. ПРОСТЕЙШИЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

Самые разнообразные СВЧ-устройства, например усилитель, можно представить в виде четырехполюсника. В данном параграфе рассматриваются некоторые элементарные четырехполюсники, представляющие интерес с точки зрения применения изложенной в предыдущих главах теории.

Примером диссипативного взаимного четырехполюсника может служить *аттенюатор* — взаимное устройство, ослабляющее электромагнитную волну в заданное число раз. Матрица рассеяния идеального аттенюатора имеет вид

$$S = \begin{bmatrix} 0 & e^{-k} \\ e^{-k} & 0 \end{bmatrix},$$

где $k = L + i\varphi$, $\varphi$ — сдвиг фазы волны в аттенюаторе. Величина $L$ связана с затуханием $A = 10\lg(P_1/P_2)$, где $P_1$, $P_2$ — мощности волны на входе и выходе аттенюатора, соотношением $L = 10^{(A/20)}$. Равенство нулю диагональных элементов матрицы рассеяния означает, что аттенюатор должен быть согласован со стороны обоих плеч. При конструировании реальных аттенюаторов требуется, чтобы затухание $A$ в рабочей полосе частот оставалась постоянным, коэффициенты отражения в плечах $|s_{11}|$ и $|s_{22}|$ не превышали заданных значений, а фаза $\varphi$ была пропорциональна частоте (недисперсионный аттенюатор). Часто требуется плавно регулировать затухание $A$ (переменный аттенюатор). В этом случае сдвиг фазы $\varphi$ должен возможно меньше зависеть от ослабления.

Принцип действия большинства аттенюаторов основан на введении в отрезок линии передачи поглощающих тел (вкладышей) (рис. 17.8, *а*). Перемещение этих вкладышей из области слабого электрического поля в область сильного позволяет изменить затухание. При этом, однако, сильно меняется сдвиг фазы $\varphi$. Используются также поляризационные аттенюаторы, в которых поглощающая пластина расположена в круглом волноводе и поворачивается относительно плоскости поляризации волны типа $H_{11}$, фиксация положения которой осуществляется ребром в стенке волновода (рис. 17.8, *б*).

К недиссипативным (реактивным) четырехполюсникам относятся запредельные аттенюаторы, представляющие собой отрезок

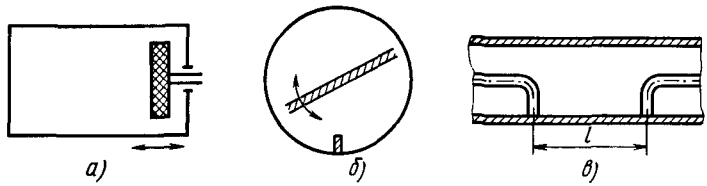



Рис. 17.8. Аттенюаторы:
*а* — с подвижным вкладышем; *б* — поляризационный; *в* — запредельный

запредельной линии передачи регулируемой длины (рис. 17.8, *в*). К достоинствам таких аттенюаторов относится отсутствие необходимости в калибровке, так как постоянная затухания в запредельной линии рассчитывается аналитически, а к недостаткам — отсутствие согласования со стороны обоих плеч.

Другим примером реактивного четырехполюсника служит отрезок линии передачи $l$ с волновым сопротивлением $Z_{в1}$, к которому подключены подводящие линии с волновым сопротивлением $Z_{в2}$ (рис. 17.9). Для определения его матрицы рассеяния подключим к плечу *1* генератор, а к плечу *2* — согласованную нагрузку $Z_н = Z_{в2}$. Используя (16.21), найдем

$$s_{11} = \gamma; \quad s_{21} = \sqrt{1 - |\gamma|^2}\, e^{-i\beta l} = t,$$

где $\gamma$ — коэффициент отражения в первом плече при согласованном втором; $\beta$ — постоянная фазы волны, распространяющейся в отрезке.

Введя нормированное входное сопротивление отрезка $Z^н_в = Z_{в1}/Z_{в2}$, с помощью формулы (15.24) найдем его нормированное входное сопротивление:

$$Z^н_{вх} = \frac{Z_{вх}}{Z_{в2}} = \frac{1 + iZ^н_в \operatorname{tg}\beta l}{Z^н_в + i\operatorname{tg}\beta l} Z^н_в.$$

Тогда коэффициент отражения

$$\gamma = \frac{Z^н_{вх} - 1}{Z^н_{вх} + 1} = \frac{i(Z^{н2}_в - 1)\operatorname{tg}\beta l}{2Z^н_в + i(Z^{н2}_в + 1)\operatorname{tg}\beta l}. \qquad (17.7)$$

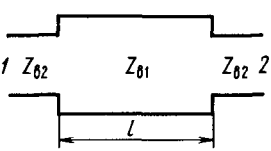
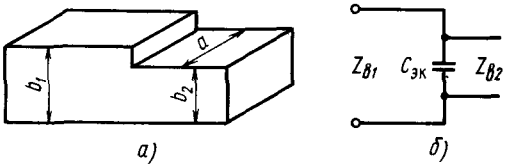



Рис. 17.9. Отрезок линии передачи с волновым сопротивлением $Z_{в1}$, включенный в линию с волновым сопротивлением $Z_{в2}$

Вследствие симметрии четырехполюсника $s_{22} = s_{11}$, а в силу его взаимности $s_{12} = s_{21}$. Таким образом, матрица рассеяния имеет следующий вид:

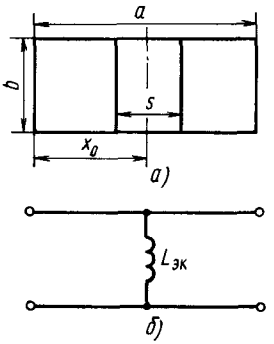
$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \gamma & t \\ t & \gamma \end{bmatrix}. \qquad (17.8)$$

Коэффициент отражения $\gamma$ обращается в нуль при любом $Z^н_в$ и $\beta l = \pi$, что соответствует полуволновому трансформатору.




а) б)

Рис. 17.10. Сочленение волноводов различной высоты (*а*) и его эквивалентная схема (*б*)




а) б)

Рис. 17.11. Индуктивная диафрагма в прямоугольном волноводе (*а*) и ее эквивалентная схема (*б*)

В качестве реактивных четырехполюсников широко применяются отрезки прямоугольных волноводов с установленными в них неоднородностями. Электродинамический анализ подобных структур приведен в гл. 13. Дальнейшие вычисления позволяют построить эквивалентные схемы этих четырехполюсников и найти значения их параметров.

Рассмотрим некоторые часто встречающиеся неоднородности в прямоугольном волноводе, работающем на волне типа $H_{10}$.

1. *Сочленение волноводов* с различными размерами узкой стенки (рис. 17.10, *а*) имеет эквивалентную схему, показанную на рис. 17.10, *б*, где шунтирующая емкость $C_{эк}$ отражает наличие высших нераспространяющихся типов волн в месте сочленения [1]:

$$C_{эк}=\frac{2b_1 a\varepsilon}{b_2^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin^2\dfrac{m\pi b_2}{b_1}}{m^2\pi^2\left(\dfrac{m^2\pi^2}{b_1^2}-k^2\right)^{1/2}}.$$

2. Тонкая *индуктивная диафрагма* (рис. 17.11, *а*) образована металлическими пластинами, примыкающими к узкой стенке волновода. Так как вблизи стенок локализуется магнитное поле волны типа $H_{10}$, диафрагма возмущает преимущественно это поле и ее эквивалентная проводимость имеет индуктивный характер (рис. 17.11, *б*). Эквивалентная индуктивность, определенная путем решения интегрального уравнения (13.41), вычисляется по формуле [2]:

$$L_{эк}=\frac{\mu b}{\pi}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi s}{2a}\left(1+\sec^2\frac{\pi s}{2a}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x_0}{a}\right).$$

3. Тонкая *емкостная диафрагма* показана на рис. 17.12, *а*. Металлические пластины примыкают к широкой стенке волновода

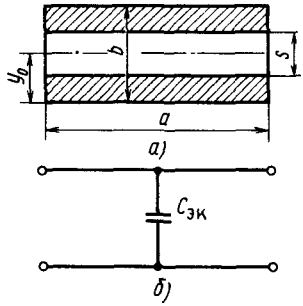



Рис. 17.12. Емкостная диафрагма в прямоугольном волноводе (*а*) и ее эквивалентная схема (*б*)

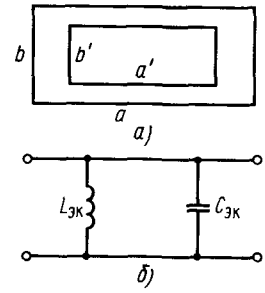



Рис. 17.13. Резонансное окно в прямоугольном волноводе (*а*) и его эквивалентная схема (*б*)

и возмущают преимущественно электрическое поле волны $H_{10}$. Поэтому эквивалентная проводимость диафрагмы имеет емкостный характер (рис. 17.12, *б*). Шунтирующая емкость [2]

$$C_{эк}=\frac{\varepsilon a}{\pi}\frac{\beta^2}{k^2}\ln\left(\csc\frac{\pi s}{2b}\csc\frac{\pi y_0}{b}\right).$$

4. *Резонансное окно* в прямоугольном волноводе (рис. 17.13, *а*) можно рассматривать как наложение двух диафрагм — емкостной и индуктивной. Поэтому эквивалентная схема окна содержит емкостные и индуктивные элементы, включенные в линию передачи параллельно и образующие колебательный контур (рис. 17.13, *б*). На резонансной частоте эквивалентное сопротивление контура обращается в бесконечность, и электромагнитная волна проходит через окно без отражений. Поэтому резонансные окна часто используют для разделения вакуумной и невакуумной частей СВЧ-тракта. В этом случае в отверстие окна впаивается диэлектрическая пластина.

Резонансную длину волны окна можно приближенно определить, приравняв волновые сопротивления основного волновода и отверстия в диафрагме, рассматриваемого как отрезок волновода [12]:

$$\frac{b}{a}\frac{1}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}}=\frac{b'}{a'}\frac{\sqrt{\mu_r/\varepsilon_r}}{\sqrt{1-\lambda/(2a'\varepsilon_r\mu_r)}},$$

где $a'$ и $b'$ — размеры отверстия; $\varepsilon_r$ и $\mu_r$ — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемость пластины. Это уравнение позволяет для заданного размера $a'$ найти размер $b'$. При этом минимальному значению $a_{min}=\lambda/(2\varepsilon_r\mu_r)$ соответствует $b'=0$, а максимальному значению $a'_{max}=a$ — значение $b'_{max}=b$.

5. *Индуктивный штырь* в волноводе расположен параллельно узкой стенке (рис. 17.14, *а*). Падающая волна возбуждает в штыре ток, текущий вдоль его оси (см. гл. 13). Если штырь соединяет широкие стенки, то распределение тока по его длине можно считать равномерным. Ток возбуждает магнитное поле, в котором запасается энергия. Поэтому эквивалентная проводимость штыря имеет индуктивный характер (рис. 17.14, *б*). Используя формулы (13.29) и (13.30), можно получить выражение [2]:

$$L_{эк}=\frac{\mu b}{\pi}\left[\cos^2\frac{\pi x_0}{a}\ln\left(\frac{2a}{\pi r_0}\cos\frac{\pi x_0}{a}\right)-2\right]^{-1}.$$

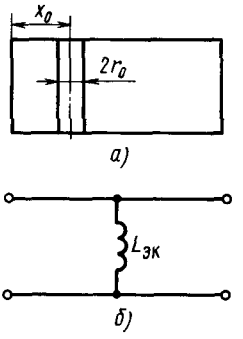



Рис. 17.14. Индуктивный штырь в прямоугольном волноводе (*а*) и его эквивалентная схема (*б*)

## § 17.3. ФИЛЬТРЫ СВЧ

Важный класс реактивных четырехполюсников образуют частотно-селективные устройства — фильтры СВЧ. Идеальный фильтр обеспечивает полное прохождение сигнала с его входа на выход в заданном диапазоне частот (полосе пропускания). Так как полное прохождение сигнала через четырехполюсник можно обеспечить только при отсутствии в нем рассеяния энергии, идеальные фильтры СВЧ не содержат диссипативных элементов. Затухание сигнала вне заданной полосы происходит в них за счет полного отражения от входа четырехполюсника.

Частотно-селективные свойства фильтра СВЧ определяются его амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) — зависимостью затухания фильтра $A=10\lg(P_{вх}/P_{вых})$ от частоты ω. Под мощностью $P_{вх}$ понимается мощность падающей волны на входе фильтра, а под мощностью $P_{вых}$ — мощность волны на его выходе. Согласно (15.6) и (16.5), $A=-20\lg|s_{21}|$.

В соответствии с формой идеальной АЧХ различают фильтры нижних частот (ФНЧ), верхних частот (ФВЧ), полосно-пропускающие (ППФ) и полосно-запирающие (ПЗФ) (рис. 17.15, *а*—*г*).

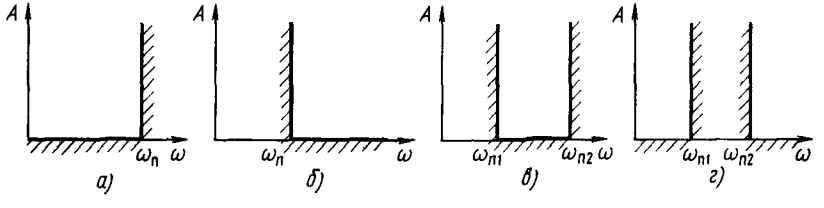



Рис. 17.15. АЧХ идеальных фильтров:
*а* — ФНЧ; *б* — ФВЧ; *в* — ППФ; *г* — ПЗФ

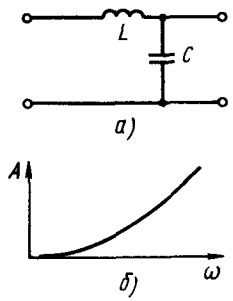



Рис. 17.16. Простейшее частотно-селективное устройство (*а*) и его АЧХ (*б*)

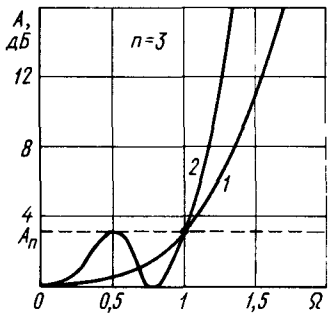



Рис. 17.17. АЧХ ФНЧ: *1* — максимально плоская; *2* — равномерно пульсирующая

Простейшим ФНЧ может служить *LC*-цепь (рис. 17.16, *а*), форма АЧХ которой (рис. 17.16, *б*) далека от идеальной. Увеличивая число элементов $n$ в схеме фильтра и подбирая их параметры, можно приблизить реальную АЧХ фильтра к идеальной.

Обычно используют два способа аппроксимации идеальной АЧХ, позволяющие при данном числе элементов $n$ максимально приблизить реальную характеристику фильтра к идеальной. При первом способе параметры элементов фильтра подбираются таким образом, чтобы получить максимально плоскую АЧХ (характеристику Баттерворта):

$$A(\omega)=10\lg\left[1+\varepsilon\Omega^{2n}\right],$$

где $\Omega=f/f_п$; $\varepsilon=10^{A_п/10}-1$; $f_п$ — граничная частота полосы пропускания, в пределах которой $A\leqslant A_п$ (рис. 17.17).

Эта характеристика называется максимально плоской потому, что затухание монотонно возрастает с ростом частоты, а выражение в квадратных скобках имеет при данном $n$ наибольшее число производных, равных нулю при $\Omega=0$.

При втором способе аппроксимации реализуется *равномерно пульсирующая* характеристика (характеристика Чебышева):

$$A(\Omega)=10\lg\left[1+\varepsilon T_n^2(\Omega)\right],$$

где $T_n(x)$ — полином Чебышева первого рода степени $n$. Эта характеристика наименее отклоняется от идеальной в полосе пропускания фильтра. Как видно из рис. 17.17, при данном числе элементов характеристика Чебышева имеет более крутые склоны, чем характеристика Баттерворта.

АЧХ фильтров других типов могут быть сведены к АЧХ ФНЧ с помощью специального частотного преобразования. Для ФВЧ это преобразование имеет вид $\Omega=-\omega_п/\omega$, а для ППФ — $\Omega=\frac{1}{w}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)$, где $w=(\omega_{п2}-\omega_{п1})/\omega_0$ — относительная ширина по-

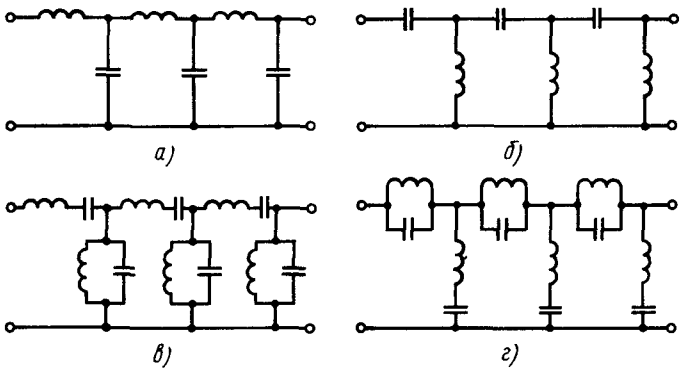



Рис. 17.18. Эквивалентные схемы фильтров-прототипов:
*а* — ФНЧ; *б* — ФВЧ; *в* — ППФ; *г* — ПЗФ

лосы пропускания; $\omega_0 = (\omega_{п1}\omega_{п2})^{1/2}$ — центральная частота. Преобразование характеристики ПЗФ производится путем последовательного применения указанных двух замен частотной переменной. При этом элементы $C$ и $L$ ФВЧ, а также последовательные и параллельные колебательные контуры ППФ и ПЗФ (рис. 17.18) преобразуются в элементы $L$ и $C$ ФНЧ.

Проектирование фильтров СВЧ обычно осуществляется в два этапа. На первом по заданным АЧХ вычисляются число элементов фильтра и их значения, т. е. определяется схема фильтра-прототипа с сосредоточенными параметрами. На втором этапе осуществляется реализация фильтра-прототипа в виде схемы с распределенными параметрами. Вопросы проектирования фильтров СВЧ подробно описаны в литературе [14].

## § 17.4. УСТРОЙСТВА ШИРОКОПОЛОСНОГО СОГЛАСОВАНИЯ

Близкими к фильтрам свойствами обладают устройства широкополосного согласования. При их проектировании ставится задача получения максимально широкой полосы частот, в которой коэффициент стоячей волны не превосходит заданного значения. В другой постановке задачи требуется обеспечить в заданной полосе частот минимальное значение максимального коэффициента $k_{ст}$. В обоих случаях необходимо учитывать зависимость активной и реактивной составляющих полного сопротивления нагрузки от частоты. Этим широкополосное согласование отличается от узкополосного, при котором нужно обеспечить минимальное значение $k_{ст}$ только на одной заданной частоте.

Широкополосное согласование осуществляется преимущественно с помощью недиссипативных (реактивных) устройств, так

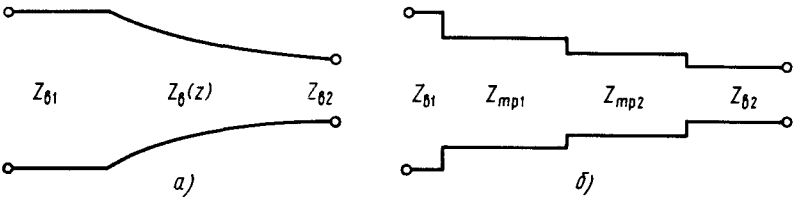



Рис. 17.19. Согласующий переход:
*а* — плавный; *б* — ступенчатый

как они не поглощают энергию. Элементами таких устройств служат отрезки линий передачи, различные неоднородности в них, шлейфы и сосредоточенные реактивности. Качество согласования улучшается при увеличении числа реактивных элементов (степеней свободы) устройства. Существуют, однако, теоретические ограничения на ширину полосы согласования: даже с помощью очень сложного реактивного согласующего устройства (с бесконечно большим числом степеней свободы) невозможно обеспечить идеальное согласование в непрерывной конечной полосе частот и не всякую комплексную нагрузку можно согласовать в заданной полосе частот $\Delta\omega$ с заранее определенным максимально допустимым значением коэффициента стоячей волны $k_{ст\,max}$. Теоретическое значение максимальной ширины полосы согласования определяется теоремой Фано:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0}=\pi\Big/\left(Q\ln\frac{k_{ст\,max}+1}{k_{ст\,max}-1}\right),$$

где $\omega_0$ — центральная частота полосы согласования; $Q$ — добротность нагрузки, пропорциональная отношению запасенной в ней на центральной частоте энергии к мощности рассеяния. Кроме того, согласование невозможно на отдельных частотах запирания, соответствующих бесконечно большим реактивным сопротивлениям или проводимостям нагрузки.

Устройства широкополосного согласования часто применяются для сочленения двух линий передачи с различными волновыми сопротивлениями. В этом случае они выполняются в виде отрезка неоднородной линии передачи с плавным или скачкообразным изменением волнового сопротивления (*плавного* или *ступенчатого перехода*, рис. 17.19). Простейшим переходом является четвертьволновый трансформатор, рассмотренный в § 15.5, который обеспечивает, однако, только узкополосное согласование. Для расширения полосы согласования увеличивают число ступеней (четвертьволновых трансформаторов), подбирая их волновые сопротивления таким образом, чтобы получить максимально плоскую или равномерно пульсирующую зависимость коэффици-

ента отражения от частоты. В первом случае переход называется биномиальным, так как коэффициенты отражения от каждой ступеньки пропорциональны коэффициентам разложения бинома Ньютона степени $n$, где $n$ — число секций (четвертьволновых трансформаторов) перехода. Во втором случае переход называется *чебышевским*.

Плавный переход можно представить как предельный случай ступенчатого при неограниченном увеличении числа ступеней и уменьшении их длины. Задача проектирования такого перехода сводится к выбору закона изменения его волнового сопротивления. Часто используются экспоненциальные переходы, для которых

$$Z_{\text{в}}(z)=\sqrt{Z_{\text{в}1}Z_{\text{в}2}}\exp\left(\frac{2z-L}{2L}\ln\frac{Z_{\text{в}1}}{Z_{\text{в}2}}\right),$$

где $Z_{\text{в}1}$, $Z_{\text{в}2}$ — волновые сопротивления согласуемых линий передачи; $L$ — длина перехода. При значениях $L/\lambda_g>0{,}5$ модуль коэффициента отражения от такого перехода не превышает значения $0{,}1\ln|Z_{\text{в}1}/Z_{\text{в}2}|$.

Сравнение ступенчатых и плавных переходов показывает, что при одинаковых перепадах волновых сопротивлений согласуемых линий и равных допусках на рассогласование в фиксированной полосе частот длина ступенчатого перехода всегда меньше, чем плавного. В то же время ступенчатый переход уступает плавному в электрической прочности.

## § 17.5. ШЕСТИПОЛЮСНИКИ

Сочленения трех линий передачи (шестиполюсники СВЧ) широко используются при необходимости разветвления или соединения СВЧ-трактов. Рассмотрим простейший шестиполюсник — симметричное соединение трех прямоугольных волноводов в плоскости широких стенок (*Y-тройник*), изображенный на рис. 17.20. Штырь $A$, расположенный на оси симметрии тройника, служит для компенсации реактивности, обусловленной возбуждением вблизи стыков волноводов высших нераспространяющихся типов волн.

Для определения матрицы рассеяния тройника согласуем плечи *2* и *3*. Нагрузкой плеча *1* служит параллельное соединение двух одинаковых линий передач: $Z_{\text{н}1}=Z_{\text{в}}/2$, где $Z_{\text{в}}$ — волновое сопротивление плеч. Следовательно, коэффициент отражения в плече *1* $s_{11}=\dfrac{Z_{\text{н}1}-Z_{\text{в}}}{Z_{\text{н}1}+Z_{\text{в}}}=-\dfrac{1}{3}$. Так как соединение симметрично, коэффициенты передачи из плеча *1* в плечи *2* и *3* равны: $s_{31}=s_{21}$. Воспользовавшись свойством унитарности матрицы $\mathbf{S}$, получим $|s_{11}|^2+|s_{21}|^2+|s_{31}|^2=1$, откуда

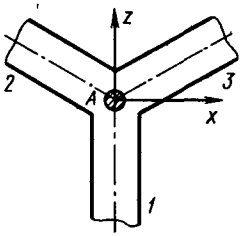


Рис. 17.20. Y-тройник

$$|s_{21}|=|s_{31}|=2/3.$$

Расположим плоскости отсчета таким образом, чтобы коэффициенты $s_{11}$, $s_{21}$, $s_{31}$ были действительными. Тогда, учитывая, что матрица $\mathbf{S}$ симметрична и унитарна, найдем

$$\mathbf{S}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{bmatrix}.$$

Из полученного результата, в частности, следует, что при возбуждении со стороны любого плеча (и при согласовании остальных плеч) $\frac{1}{9}$ часть падающей мощности отражается обратно, а $\frac{8}{9}$ распределяется поровну между плечами *2* и *3*.

Вычислим матрицу рассеяния *Y*-тройника, используя метод спектрального разложения. Для этого запишем его матрицу симметрии, учитывая, что тройник обладает поворотной осью симметрии третьего порядка. При повороте на 120° против часовой стрелки номера плеч меняются в следующем порядке: 1→2, 2→3, 3→1. Следовательно, матрица симметрии $\mathbf{A}_1$ имеет вид

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Кроме того, *Y*-тройник имеет зеркальную плоскость симметрии, проходящую через плечо *1*, которой соответствует матрица

$$\mathbf{A}_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Другие преобразования симметрии, соответствующие повороту на 240 и 360°, а также отражение в плоскостях, проходящих через плечи *2* и *3*, могут быть получены последовательным применением указанных двух преобразований, и, следовательно, соответствующие матрицы симметрии получаются как произведения матриц $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$. Воспользуемся матрицей $\mathbf{A}_1$ для нахождения собственных векторов матрицы рассеяния. Для этого определим сначала ее собственные числа с помощью уравнения

$$|\mathbf{A}_1-\nu\mathbf{E}|=\begin{vmatrix}-\nu & 1 & 0\\ 0 & -\nu & 1\\ 1 & 0 & -\nu\end{vmatrix}=-\nu^3+1=0,$$

откуда $\nu_1=1$, $\nu_{2,3}=e^{\pm 2\pi i/3}$. Решив систему уравнений

$$\mathbf{A}_1\dot{\mathbf{U}}_m^{(j)}=\nu_j\dot{\mathbf{U}}_m^{(j)},\quad m=1,\ 2,$$

найдем

$$\dot{u}_2^{(j)}=\nu_j\dot{u}_1^{(j)};\quad \dot{u}_3^{(j)}=\nu_j\dot{u}_2^{(j)}.$$

Так как собственные векторы вычислены с точностью до постоянного множителя, положив $\dot{u}_1^{(j)}=1/\sqrt{3}$, получим унитарную матрицу

$$\mathbf{M}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & e^{2\pi i/3} & e^{-2\pi i/3}\\ 1 & e^{-2\pi i/3} & e^{2\pi i/3}\end{bmatrix}.$$

Определим собственные числа матрицы **S**. Для этого воспользуемся формулами (16.26), опустив в них в силу симметрии тройника множитель $e^{-ik_{zm}l_m}$:

$$\dot{U}_{\text{н}}^{(j)}=\sum_{m=1}^{3}\dot{\mathbf{u}}_m^{(j)};\ \dot{I}_{\text{н}}^{(j)}=\sum_{m=1}^{3}\mathbf{i}_m^{(j)}.$$

Напряжение и ток связаны с поперечными составляющими напряженности электрического и магнитного полей $\dot{E}_y$ и $\dot{H}_x$. Поэтому, учтя (15.6), определим векторы $\mathbf{u}_m^{(j)}$ и $\mathbf{i}_m^{(j)}$ следующим образом:

$$\dot{\mathbf{u}}_m^{(j)}=M_{mj}\mathbf{e}_y;\ \mathbf{i}_1^{(j)}=M_{1j}\mathbf{e}_z;$$

$$\mathbf{i}_{2,3}^{(j)}=M_{2,3j}(\pm\mathbf{e}_x\sin 2\pi/3+\mathbf{e}_z\cos 2\pi/3).$$

Сложив эти величины, получим

$$\dot{U}_{\text{н}}^{(1)}\neq 0;\ \dot{U}_{\text{н}}^{(2)}=\dot{U}_{\text{н}}^{(3)}=0;\ \dot{I}_{\text{н}}^{(1)}=0;\ \dot{I}_{\text{н}}^{(2)}\neq 0;\ \dot{I}_{\text{н}}^{(3)}\neq 0,$$

откуда

$$Z_{\text{н}}^{(1)}=\infty;\ Z_{\text{н}}^{(2)}=Z_{\text{н}}^{(3)}=0;\ \gamma_1=1;\ \gamma_2=\gamma_3=-1.$$

Таким образом,

$$\mathbf{\Gamma}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

Согласно (16.25), найдем

$$S=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & e^{2\pi i/3} & e^{-2\pi i/3}\\ 1 & e^{-2\pi i/3} & e^{2\pi i/3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & e^{-2\pi i/3} & e^{2\pi i/3}\\ 1 & e^{2\pi i/3} & e^{-2\pi i/3}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{bmatrix},$$

что совпадает с результатом, полученным ранее.

В технике СВЧ часто применяются волноводные сочленения, в которых к основному волноводу присоединяется дополнительная линия передачи. В зависимости от способа соединения волноводов различают Е- и Н-*тройники*. В первом случае соединение происходит по широкой стенке основного волновода (в плоскости силовых линий электрического поля, рис. 17.21, *а*), во втором случае — по узкой стенке (в плоскости силовых линий магнитного поля, рис. 17.21, *б*).

Построим матрицу рассеяния Е-тройника, учитывая, что это взаимное недиссипативное устройство, имеющее зеркальную плоскость симметрии. Пронумеровав его плечи в указанном на рис. 17.21, *а* порядке, запишем матрицу симметрии Е-тройника в виде

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

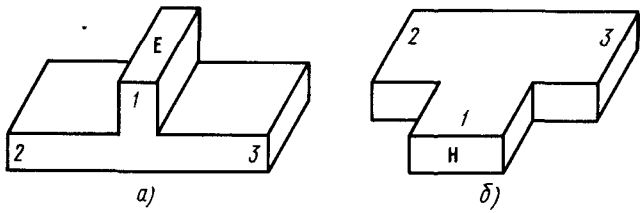



Рис. 17.21. Волноводные тройники:
*а* — Е-тройник; *б* — Н-тройник

Знак минус у элемента $a_{11}$ указывает на то, что при отражении в плоскости симметрии направление силовых линий электрического поля в плече *1* (*E*-плече) меняется на противоположное.

Предположим, что тройник согласован со стороны Е-плеча с помощью установленных в нем реактивных элементов (например, диафрагм). Тогда $s_{11}=0$ и при возбуждении со стороны плеча *1* энергия делится поровну между плечами *2* и *3*. Учитывая симметрию устройства и выбирая положение плоскостей отсчета таким образом, чтобы элементы $s_{21}$ и $s_{31}$ были действительными, запишем матрицу рассеяния в виде

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & a_1 & a_2 \\ -1/\sqrt{2} & a_2 & a_1 \end{bmatrix}.$$

Противоположные знаки у элементов $s_{21}$ и $s_{31}$ показывают, что фазы волн, возбуждаемых в плечах *2* и *3*, сдвинуты на 180°.

Запишем условия (16.21), следующие из унитарности матрицы рассеяния, для $p=2$, $n=2$ и 1:

$$1/2+|a_1|^2+|a_2|^2=1;$$

$$0+\frac{1}{\sqrt{2}}a_1^*-\frac{1}{\sqrt{2}}a_2^*=0.$$

Из этих уравнений следует, что $|a_1|=|a_2|=1/2$. Так как матрица рассеяния содержит три независимых элемента, выбором положения плоскостей отсчета в трех плечах эти элементы можно сделать действительными:

$$\mathbf{S}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогично проводится анализ Н-тройника, однако при возбуждении плеча *1* волны в плечах *2* и *3* оказываются в фазе (рис. 17.21, *б*). В результате матрица рассеяния

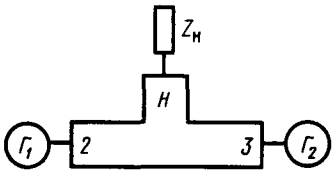



Рис. 17.22. Схема сложения мощностей двух генераторов с помощью Н-тройника

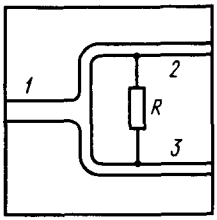



Рис. 17.23. Балансный сумматор мощности

$$\mathbf{S}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

При конструировании сверхвысокочастотных систем часто возникает необходимость сложения мощностей двух генераторов в одной нагрузке. Воспользуемся для этого, например, Н-тройником, подключив к плечам *2* и *3* генераторы, а к Н-плечу — согласованную нагрузку (рис. 17.22). Пусть генераторы создают в плечах *2* и *3* волны с нормированными амплитудами $\dot{u}_2^+$ и $\dot{u}_3^+$. Тогда амплитуды волн, выходящих из плеч тройника, определяются уравнением

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1^- \\ \dot{u}_2^- \\ \dot{u}_3^- \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{u}_2^+ \\ \dot{u}_3^+ \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$\dot{u}_1^-=\frac{\sqrt{2}}{2}(\dot{u}_2^++\dot{u}_3^+);$$

$$\dot{u}_2^-=\frac{1}{2}(-\dot{u}_2^++\dot{u}_3^+);$$

$$u_3^-=\frac{1}{2}(\dot{u}_2^+-\dot{u}_3^-).$$

Из полученных выражений следует, что мощности двух генераторов полностью складываются в нагрузке только в том случае, когда эти генераторы одинаковы ($\dot{u}_2^+=u_3^+$). В противном случае часть мощности отражается в плечи *2* и *3*, что приводит к уменьшению КПД устройства сложения и возникновению нежелательной связи между генераторами.

Нетрудно показать, что идеальное устройство сложения должно иметь матрицу рассеяния вида

$$\mathbf{S}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Это устройство согласовано со стороны трех плеч и обеспечивает отсутствие связи между генераторами при любом соотношении амплитуд напряжений возбуждаемых ими в плечах *2* и *3* волн. Так как матрица **S** симметрична, идеальное устройство сложения должно быть взаимным, однако оно лишено свойства недиссипативности, поскольку эта матрица не унитарна.

Описанные свойства имеет *балансный сумматор мощности* (рис. 17.23), в котором диссипативный элемент (резистор $R$) включен симметрично между плечами *2* и *3*. Так как это взаимное устройство, оно может использоваться также для деления мощности, поступающей в плечо *1*, поровну между плечами *2* и *3*. Подбором волновых сопротивлений плеч и сопротивления резистора $R$ обеспечивается максимальная рабочая полоса частот сумматора, определяемая минимально допустимой развязкой $L=-20\lg|s_{23}|$.

### § 17.6. НАПРАВЛЕННЫЕ ОТВЕТВИТЕЛИ

Важный класс взаимных четырехплечих устройств образуют *направленные ответвители*, осуществляющие передачу мощности из одного плеча устройства в два других. Четвертое плечо при этом остается невозбужденным.

Рассмотрим восьмиполюсник, имеющий горизонтальную и вертикальную плоскости симметрии (рис. 17.24). Так как его плечи физически идентичны, а само устройство взаимно, справедливы следующие соотношения:

$$s_{11}=s_{22}=s_{33}=s_{44}=a;$$

$$s_{12}=s_{21}=s_{34}=s_{43}=b;$$

$$s_{13}=s_{31}=s_{24}=s_{42}=c;$$

$$s_{14}=s_{41}=s_{23}=s_{32}=d.$$

Таким образом, матрица рассеяния симметричного взаимного восьмиполюсника содержит четыре независимых элемента:

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}.$$

Если многополюсник согласовать со стороны одного из плеч, т. е. за счет введения в конструкцию дополнительных элементов, не нарушающих симметрию устройства, добиться равенства нулю коэффициента отражения в одном из плеч (при подключении

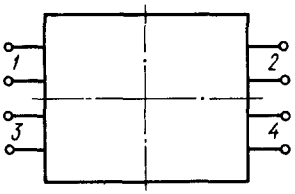



Рис. 17.24. Симметричный восьмиполюсник

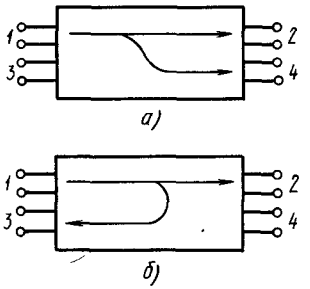



Рис. 17.25. Схемы сонаправленного (*а*) и противонаправленного (*б*) ответвителей

к остальным согласованных нагрузок), то он окажется согласованным со стороны остальных плеч. В этом случае $a=0$.

Будем считать, что при возбуждении со стороны плеча *1* часть энергии поступает в плечо *2*. Тогда, для того чтобы устройство служило направленным ответвителем, энергия не должна поступать в плечо *3* либо в плечо *4*. В первом случае $c=0$ (сонаправленный ответвитель, рис. 17.25, *а*), во втором случае $d=0$ (противонаправленный ответвитель, рис. 17.25, *б*). Матрицы рассеяния этих устройств имеют следующий вид:

$$\mathbf{S}_{\text{с}}=\begin{bmatrix} 0 & b & 0 & d \\ b & 0 & d & 0 \\ 0 & d & 0 & b \\ d & 0 & b & 0 \end{bmatrix};\quad \mathbf{S}_{\text{п}}=\begin{bmatrix} 0 & b & c & 0 \\ b & 0 & 0 & c \\ c & 0 & 0 & b \\ 0 & c & b & 0 \end{bmatrix}.$$

Если потери в ответвителе отсутствуют, то его матрица рассеяния унитарна, что позволяет записать $|b|=\sqrt{1-|d|^2}$ или $|b|=\sqrt{1-|c|^2}$.

Подбирая положение плоскостей отсчета, один из элементов матрицы $\mathbf{S}$, например $d$ или $c$, можно сделать действительным (чтобы не нарушить симметрию устройства, плоскости отсчета во всех плечах необходимо перемещать одновременно на равные расстояния, т. е. этим способом можно подобрать фазу только одного элемента матрицы $\mathbf{S}$). Записав соотношения ортогональности (16.21) для матриц $\mathbf{S}_{\text{с}}$ и $\mathbf{S}_{\text{п}}$, получим $b^*d+d^*b=0$; $b^*c+c^*d=0$, или $\operatorname{Re}(bd)=\operatorname{Re}(bc)=0$. Таким образом, при действительных $c$ и $d$ элемент $b$ должен быть мнимым. Следовательно, матрицы рассеяния идеальных направленных ответвителей имеют вид

$$\mathbf{S}_{\text{с}}=\begin{bmatrix} 0 & \pm\mathrm{i}\sqrt{1-d^2} & 0 & d \\ \pm\mathrm{i}\sqrt{1-d^2} & 0 & d & 0 \\ 0 & d & 0 & \pm\mathrm{i}\sqrt{1-d^2} \\ d & 0 & \pm\mathrm{i}\sqrt{1-d^2} & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{S}_{\text{п}}=\begin{bmatrix} 0 & \pm i\sqrt{1-c^2} & c & d \\ \pm i\sqrt{1-c^2} & 0 & 0 & c \\ c & 0 & 0 & \pm i\sqrt{1-c^2} \\ 0 & c & \pm i\sqrt{1-c^2} & 0 \end{bmatrix},$$

где $d$, $c$ — действительные числа. Таким образом, сигналы в «выходных» плечах ответвителя сдвинуты по фазе на 90°.

Реальные направленные ответвители имеют матрицы рассеяния, в определенном диапазоне частот приближающиеся к идеальным. Они характеризуются следующими основными параметрами (определения приводятся для сонаправленного ответвителя):

переходным ослаблением

$$A=10\lg P_1/P_3=-20\lg d;$$

рабочим затуханием

$$L=10\lg P_1/P_2=-10\lg(1-d^2);$$

направленностью

$$C=10\lg P_4/P_3=-20\lg|s_{41}/s_{31}|;$$

коэффициентом стоячей волны

$$k_{\text{ст}}=(1+|s_{11}|)/(1-|s_{11}|).$$

В рабочем диапазоне частот $\Delta f$ указанные параметры имеют значения не хуже заданных.

Рассмотрим некоторые конструкции направленных ответвителей. Одна из них содержит два одинаковых волновода, соединенных двумя отверстиями в общей стенке (рис. 17.26). При возбуждении устройства со стороны плеча *1* основная часть мощности проходит в плечо *2*, а часть, просачиваясь через отверстия, возбуждает волны во втором волноводе, распространяющиеся в противоположных направлениях. Если отверстия одинаковы и расположены на расстоянии $\lambda_g/4$ друг от друга, то волны, пришедшие от этих отверстий в плечо *4*, имеют одинаковые фазы и амплитуды и складываются. В плече *3* эти волны сдвинуты по фазе на 180°, так как путь волны, прошедшей через

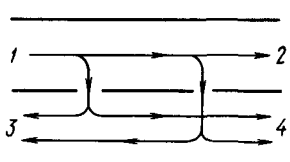



Рис. 17.26. Волноводный направленный ответвитель с двумя отверстиями в общей стенке

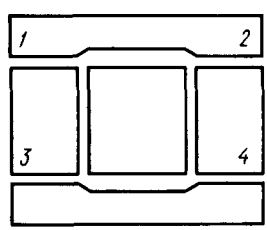



Рис. 17.27. Микрополосковый шлейфный направленный ответвитель

второе отверстие, на половину длины волны в волноводе длиннее, чем путь волны, прошедшей через первое отверстие. Поэтому плечо *4* не возбуждается.

Описанный ответвитель имеет сравнительный узкий рабочий диапазон частот, так как при отклонении частоты от центральной, соответствующей расстоянию между центрами отверстий $l=\lambda_g/4$, полной компенсации волн в плече *4* не происходит. Направленность ответвителя ухудшается также при уменьшении переходного ослабления, так как амплитуды волн, прошедших через первое и второе отверстия, становятся неравными. Для улучшения параметров ответвителей данного типа увеличивают число отверстий, соединяющих линии передачи, одновременно меняя размеры этих отверстий по определенному закону. При этом, однако, увеличивается длина ответвителя.

Аналогом описанного устройства в микрополосковом исполнении служит двухшлейфный ответвитель (рис. 17.27). Функции отверстий, соединяющих волноводы, выполняют шлейфы — отрезки микрополосковых линий длиной $\lambda_g/4$, отстоящие друг от друга также на четверть длины волны. Подбирая волновые сопротивления шлейфов и отрезков линий передачи между ними, можно получить требуемое переходное ослабление. Улучшение параметров ответвителя достигается увеличением числа шлейфов.

Связь между линиями передачи, образующими направленный ответвитель, может быть непрерывной (распределенной). Такие устройства называют *ответвителями на связанных линиях передачи.* Рассмотрим, например, ответвитель, содержащий симметричные полосковые линии (рис. 17.28), связь между которыми осуществляется за счет перекрытия их электромагнитных полей и определяется зазором *s* между полосками. Такое устройство можно рассматривать как трехпроводную линию передачи, в которой могут распространяться четная и нечетная нормальные Т-волны. Силовые линии электрического поля этих волн в поперечном сечении показаны на рис. 17.29.

При симметричном возбуждении в плоскости симметрии ответвителя устанавливаются граничные условия типа магнитной стенки и обмен энергией между линиями передачи не происходит. Поэтому восьмиполюсник можно представить в виде двух одинаковых параллельно включенных четырехполюсников, каждый из которых имеет матрицу рассеяния вида (17.8):

$$\mathbf{S}_e=\begin{bmatrix}\gamma_e & t_e\\ t_e & \gamma_e\end{bmatrix}. \qquad (17.9)$$

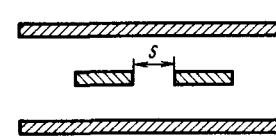



Рис. 17.28. Направленный ответвитель на связанных симметричных полосковых линиях

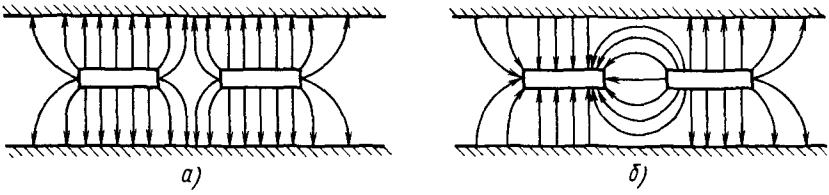



Рис. 17.29. Эпюры силовых линий электрического поля четного (*а*) и нечетного (*б*) типов волн в связанных полосковых линиях

При антисимметричном возбуждении в плоскости симметрии устанавливаются граничные условия типа электрической стенки и восьмиполюсник эквивалентен двум параллельно включенным четырехполюсникам, имеющим матрицы рассеяния:

$$\mathbf{S}_0=\begin{bmatrix}\gamma_0 & t_0\\ t_0 & \gamma_0\end{bmatrix}. \tag{17.10}$$

Представим матрицу рассеяния ответвителя в клеточной форме с размерностью блоков $2\times 2$. Так как устройство взаимно и имеет вертикальную плоскость симметрии, эта матрица имеет вид

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}\mathbf{S}^{(1)} & \mathbf{S}^{(2)}\\ \mathbf{S}^{(2)} & \mathbf{S}^{(1)}\end{bmatrix}.$$

Соотношение (16.2) можно записать следующим образом:

$$\begin{bmatrix}\dot u_1^-\\ \dot u_2^-\end{bmatrix}=\mathbf{S}^{(1)}\begin{bmatrix}\dot u_1^+\\ \dot u_2^+\end{bmatrix}+\mathbf{S}^{(2)}\begin{bmatrix}\dot u_3^+\\ \dot u_4^+\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}\dot u_3^-\\ \dot u_4^-\end{bmatrix}=\mathbf{S}^{(2)}\begin{bmatrix}\dot u_1^+\\ \dot u_2^+\end{bmatrix}+\mathbf{S}^{(1)}\begin{bmatrix}\dot u_3^+\\ \dot u_4^+\end{bmatrix}. \tag{17.11}$$

При симметричном возбуждении $\dot u_3^+=\dot u_1^+$; $\dot u_4^+=\dot u_2^+$. Для этого случая по (17.11)

$$\begin{bmatrix}\dot u_1^-\\ \dot u_2^-\end{bmatrix}=(\mathbf{S}^{(1)}+\mathbf{S}^{(2)})\begin{bmatrix}\dot u_1^+\\ \dot u_2^+\end{bmatrix}.$$

Аналогично, для антисимметричного возбуждения $\dot u_3^+=-u_1^+$; $\dot u_4^+=-\dot u_2^+$. Согласно (17.11),

$$\begin{bmatrix}\dot u_1^-\\ \dot u_2^-\end{bmatrix}=(\mathbf{S}^{(1)}-\mathbf{S}^{(2)})\begin{bmatrix}\dot u_1^+\\ \dot u_2^+\end{bmatrix}.$$

Сравнив полученные выражения с (17.9) и (17.10), видим, что

$$\mathbf{S}_e=\mathbf{S}^{(1)}+\mathbf{S}^{(2)};\ \mathbf{S}_o=\mathbf{S}^{(1)}-\mathbf{S}^{(2)}.$$

Отсюда найдем блоки клеточной матрицы устройства:

$$\mathbf{S}^{(1)}=\frac{1}{2}(\mathbf{S}_e+\mathbf{S}_o);\ \mathbf{S}^{(2)}=\frac{1}{2}(\mathbf{S}_e-\mathbf{S}_o).$$

Подставив в эти выражения (17.9) и (17.10), получим

$$s_{11}^{(1)}=s_{22}^{(1)}=(\gamma_e+\gamma_o)/2;\quad s_{11}^{(2)}=s_{22}^{(2)}=(\gamma_e-\gamma_o)/2;$$
$$s_{21}^{(1)}=s_{12}^{(1)}=(t_e+t_0)/2;\quad s_{21}^{(2)}=s_{12}^{(2)}=(t_e-t_0)/2.$$

Из (8.18) следует, что $Z_{во}^{н}=1/Z_{ве}^{н}$, где $Z_{во}^{н}=Z_{во}/Z_{в}$ и $Z_{ве}^{н}=Z_{ве}/Z_{в}$ — нормированные волновые сопротивления четной и нечетной нормальных волн. Учтя это соотношение, из (17.7) находим $\gamma_o=-\gamma_e$. Отсюда

$$s_{11}^{(1)}=s_{22}^{(1)}=0;\quad s_{11}^{(2)}=s_{22}^{(2)}=\gamma_e;$$
$$s_{21}^{(1)}=s_{12}^{(1)}=t_e;\quad s_{21}^{(2)}=s_{12}^{(2)}=0.$$

Таким образом, матрица рассеяния устройства имеет вид

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}0 & t_e & \gamma_e & 0\\ t_e & 0 & 0 & \gamma_e\\ \gamma_e & 0 & 0 & t_e\\ 0 & \gamma_e & t_e & 0\end{bmatrix}.$$

Следовательно, устройство согласовано со стороны всех плеч и является идеальным противонаправленным ответвителем, переходное затухание которого, согласно выражению (17.7), определяется матричным элементом

$$S_{31}=\gamma_e=\frac{i\left[(Z_{ве}^{н})^2-1\right]\operatorname{tg}kl}{2Z_{ве}^{н}+i\left[(Z_{ве}^{н})^2+1\right]\operatorname{tg}kl}.$$

При $kl=\pi/2$, т. е. при длине области связи $l=(2p-1)\lambda_g/4$, доля передаваемой в плечо *3* мощности максимальна:

$$|s_{31}|^2_{max}=\left(\frac{P_3}{P_1}\right)_{max}=\left[\frac{(Z_{ве}^{н})^2-1}{(Z_{ве}^{н})^2+1}\right]^2=\left|\frac{Z_{ве}-Z_{во}}{Z_{ве}+Z_{во}}\right|^2=|K|^2,$$

где $K$ — коэффициент связи. Если длина области связи $l=m\lambda_g/2$, $m=1, 2, \ldots$, энергия в плечо *3* не передается, а полностью проходит в плечо *2*.

Полученный результат объясняется следующим образом. Предположим, что элемент щели связи длиной $\mathrm{d}z$ возбуждает в плечах *3* и *4* элементарные волны с равными амплитудами $\mathrm{d}U_4(z)=dU_3(z)=\alpha U_1(z)\,\mathrm{d}z$. Полные амплитуды волн в этих плечах найдем, проинтегрировав записанные выражения по длине щели с учетом изменения фаз волн. При этом постоянную связи $\alpha$ полагаем достаточно малой, что позволяет считать амплитуду волны $U_1$ не зависящей от $z$: $U_1(z)=U_{10}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}$, откуда

$$\dot{u}_3(0)=\alpha\dot{U}_{10}\int_0^l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(l-z)}\,\mathrm{d}z=\alpha\dot{U}_{10}l\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kl};$$

$$\dot{U}_4(l)=\alpha\dot{U}_{10}\int_0^l e^{-2ikz}\,dz=\alpha\dot{U}_{10}l\frac{\sin kl}{kl}e^{-ikl}.$$

Следовательно, в плече *3* все элементарные волны складываются в фазе, а в плече *4* их фазы различны, что и определяет параметры устройства:

$$A=20\lg\left|\frac{\dot{U}_{10}}{\dot{U}_3(0)}\right|=-20\lg(\alpha l);$$

$$C=20\lg\left|\frac{\dot{U}_3(0)}{\dot{U}_4(l)}\right|=20\lg\left|\frac{kl}{\sin kl}\right|.$$

При $kl=\pi(p-1/2)$, $p=1, 2, ...$, т. е. при $l=(p-1/2)\lambda_g$, плечо *3* не возбуждается и направленность ответвителя стремится к бесконечности.

Если в связанных линиях передачи распространяются дисперсные волны, то фазовые постоянные нормальных волн $\beta_e$ и $\beta_o$ не равны и формула (8.18) не имеет места. Анализ *показывает [15], что в этом случае энергия также направленно* передается из одной линии передачи в другую, причем

$$s_{21}=\sqrt{1-K^2}\cos(\Delta\beta l)\,e^{-i\beta_0 l},$$

$$s_{31}=-iK\sin(\Delta\beta l)\,e^{-i\beta_0 l},$$

где $\Delta\beta=\beta_e-\beta_0$; $\beta_0=(\beta_e+\beta_0)/2$, однако идеальное согласование и развязка плеч невозможны. Максимальная передача энергии в плечо *3* наблюдается при $\Delta\beta l=\pi/2$ или $l=1/(1/\lambda_{ge}-1/\lambda_{go})$. Коэффициент связи $K$ зависит от конструкции области связи.

## § 17.7. МОСТОВЫЕ УСТРОЙСТВА СВЧ

*СВЧ-мостами* или гибридными устройствами называются направленные ответвители, осуществляющие деление мощности, поступающей в одно из плеч, поровну между двумя другими плечами. Из определения следует, что переходное затухание идеального моста $A=3$ дБ.

Одним из примеров гибридных устройств служит *волноводно-щелевой мост* (рис. 17.30, *а*). Он состоит из двух прямоугольных волноводов, связанных щелью в общей боковой стенке. В области щели связи размеры широких стенок волноводов несколько уменьшены. Так как это устройство обладает двумя плоскостями симметрии, к нему полностью применима теория, изложенная в § 17.6. Проще, однако, рассмотреть работу этого устройства, пользуясь представлением области связи в виде многомодового волновода.

Предположим, что щелевой мост возбуждается со стороны первого плеча. Распределение составляющей напряженности элек-

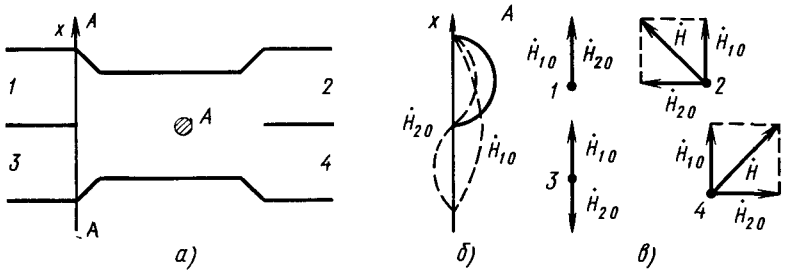



Рис. 17.30. Волноводно-щелевой мост (*а*), распределение электрического поля в плоскости *АА* (*б*) и векторные диаграммы напряженностей поля в плечах моста (*в*)

трического поля $E_y$ в плоскости *АА* показано на рис. 17.30, *б* (сплошная кривая). Это поле возбуждает волны в волноводе, образованном областью связи. Размер поперечного сечения этого волновода допускает распространение в нем только двух типов волн — $H_{10}$ и $H_{20}$, причем в плече *1* электрические поля этих волн находятся в фазе, а в плече *3* — в противофазе (рис. 17.30, *в*). Распространяясь в области связи с различными фазовыми скоростями, эти волны получают сдвиги фаз $\varphi_1$ и $\varphi_2$ и складываются в плечах *2* и *4*. Подобрав соответствующую длину области связи, можно получить условия, при которых волны, возбуждаемые в плечах *2* и *4*, имеют равные амплитуды. При этом их фазы сдвинуты на 90° (рис. 17.30, *в*). Уменьшение ширины стенки в области связи увеличивает разность фазовых скоростей волн $H_{10}$ и $H_{20}$ и позволяет уменьшить длину щели. Согласование плеч моста достигается с помощью штыря регулируемой высоты *А*, расположенного в центре устройства.

Другим примером СВЧ-моста служит двойной волноводный тройник (рис. 17.31). В отличие от рассмотренных ранее устройств он имеет только одну плоскость симметрии. При возбуждении тройника со стороны Е-плеча волна $H_{10}$-типа в Н-плече не

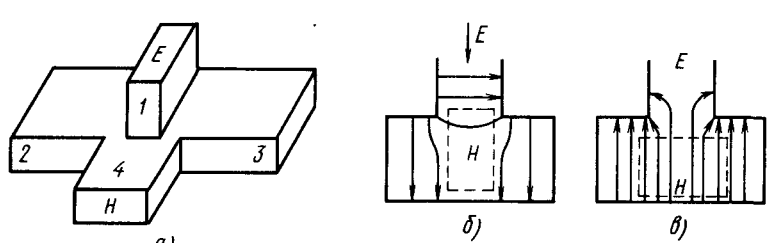



Рис. 17.31. Двойной волноводный тройник (*а*), эпюры силовых линий электрического поля в тройнике при возбуждении со стороны Е- (*б*) и Н- (*в*) плеча

возбуждается, так как вследствие симметрии устройства ее интеграл возбуждения равен нулю (рис. 17.31, *б*). Аналогично, при возбуждении со стороны Н-плеча Е-плечо не возбуждается (рис. 17.31, *в*). Это свойство позволяет согласовать указанные плечи независимо друг от друга. Если такое согласование выполнено, то при возбуждении двойного тройника со стороны Е- и Н-плеч мощность делится поровну (вследствие симметрии) между плечами *2* и *3*, причем фазы волн в этих плечах в первом случае сдвинуты на 180°, а во втором — одинаковы. Учитывая взаимность и недиссипативность устройства, его матрица рассеяния приобретает вид

$$\mathbf{S}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Предположим, что к плечу *1* двойного тройника подключен генератор, к плечам *2* и *3* — нагрузки с коэффициентами отражения $\Gamma_{н2}$ и $\Gamma_{н3}$, а к плечу *4* — индикатор мощности. Найдем мощность, проходящую в плечо *4*. Согласно (16.2),

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1^- \\ \dot{u}_2^- \\ \dot{u}_3^- \\ \dot{u}_4^- \end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_1^+ \\ \dot{u}_2^+ \\ \dot{u}_3^+ \\ \dot{u}_4^+ \end{bmatrix},$$

откуда

$$\dot{u}_4^-=\frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{u}_2^+ + \dot{u}_3^+).$$

Но падающие волны в плечах *2* и *3* есть волны, отраженные от нагрузок:

$$\dot{u}_2^+=\Gamma_{н2}\dot{u}_2^-=\Gamma_{н2}\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{u}_1^+;\ \dot{u}_3^+=\Gamma_{н3}\dot{u}_3^-=-\Gamma_{н3}\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{u}_1^+.$$

Таким образом,

$$P_4=|\dot{u}_4^-|^2=\frac{1}{2}|\dot{u}_1^+|^2\,|\Gamma_{н2}-\Gamma_{н3}|^2.$$

Если коэффициенты отражения от нагрузок одинаковы, из чего следует равенство самих нагрузок, то поступающая в индикатор мощность равна нулю. Таким образом, описанную схему можно использовать для сравнения двух нагрузок — исследуемой и эталонной. Это ее свойство аналогично свойствам низкочастотных мостовых схем, что и объясняет название «СВЧ-мосты».

Разновидность двойного тройника, у которого плечи *2* и *3* имеют общую стенку и расположены параллельно друг другу, называется *модифицированным двойным тройником* (рис. 17.32).

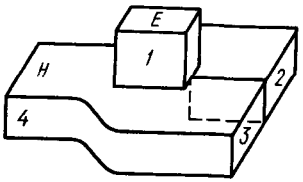



Рис. 17.32. Модифицированный двойной тройник

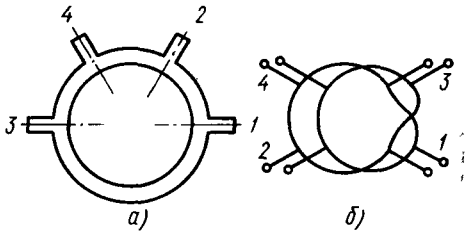



Рис. 17.33. Типы гибридных колец: *а* — простое; *б* — со сдвигом фазы волны на 180°

Такая конструкция более компактна, однако обладает несколько худшими электрическими характеристиками. Аналогичными двойному тройнику характеристиками обладает *гибридное кольцо* (рис. 17.33, *а*), которое особенно удобно применять в интегральных схемах СВЧ. Для анализа работы этого устройства предположим, что оно возбуждено со стороны плеча *1*. При этом в кольце возбуждаются две волны, распространяющиеся в противоположных направлениях. Разность хода этих волн в точках присоединения плеч *2, 3* и *4* составляет $\lambda_g$, 0 и $\lambda_g/2$. Поэтому в плечах *2* и *3* возбуждаются волны с одинаковыми амплитудами и фазами, сдвинутыми на 180°, а плечо *4* не возбуждается. Возбудив кольцо со стороны плеча *4*, таким же образом найдем, что в плечах *2* и *3* возникают волны с одинаковыми амплитудами и фазами, а плечо *4* не возбуждается. Если подбором волновых сопротивлений подводящих линий и кольца согласовать плечи *1* и *4*, то свойства гибридного кольца окажутся аналогичными свойствам согласованного двойного тройника.

Сравнительно большая электрическая длина кольца ($3/2\lambda_g$) приводит к тому, что по ширине рабочего диапазона частот гибридное кольцо значительно уступает двойному волноводному тройнику. Если кольцо выполнено на основе симметричной двухпроводной линии, то этот недостаток можно устранить, перекоммутировав проводники и уменьшив длину кольца на $\lambda_g/2$ (рис. 17.33, *б*).

**Контрольные вопросы**

1. Сформулируйте теорему Фостера для двухполюсников СВЧ и перечислите основные ее следствия.
2. Опишите способ определения степени связи резонатора с линией передачи.
3. Перечислите основные типы аттенюаторов, их параметры и характеристики.
4. Составьте эквивалентные схемы простейших неоднородностей в прямоугольном волноводе. Перечислите свойства резонансного окна в волноводе.
5. Перечислите типы фильтров СВЧ и приведите их АЧХ.
6. Опишите способы аппроксимации АЧХ СВЧ-фильтров.
7. Опишите методы широкополосного согласования СВЧ-устройств, укажите теоретические ограничения на ширину полосы согласования.

8. Перечислите свойства симметричного тройника. Запишите его матрицу рассеяния.
9. Перечислите основные свойства Е и Н-тройников. Выведите их матрицы рассеяния.
10. Укажите назначение и основные свойства балансного сумматора мощности.
11. Объясните принцип действия направленных ответвителей со связью через отверстия и шлейфы.
12. Опишите принцип действия направленного ответвителя на связанных линиях и выведите его матрицу рассеяния.
13. Проанализируйте принцип действия волноводно-щелевого моста и запишите его матрицу рассеяния.
14. Объясните принцип действия двойного волноводного тройника и запишите его матрицу рассеяния.
15. Опишите принцип действия гибридного кольца и запишите его матрицу рассеяния.

## ГЛАВА 18

# ФЕРРИТОВЫЕ УСТРОЙСТВА СВЧ

### § 18.1. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ФЕРРИТОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

Особенности распространения электромагнитных волн в намагниченном феррите, рассмотренные в гл. 3, позволили использовать этот материал для создания ряда взаимных и невзаимных СВЧ-устройств, не имеющих аналогов в низкочастотной электрорадиотехнике. В зависимости от назначения, рабочей частоты и условий эксплуатации в этих устройствах применяются ферритовые материалы с различным химическим составом, кристаллической структурой и технологией изготовления.

Как отмечено в гл. 3, ферритами называются химические соединения оксида железа $Fe_2O_3$ с оксидом некоторых других (характеризующих) металлов. Химический состав феррита определяется формулой

$$(Me^{k+}O^{2-}_{k/2})_m \cdot (Fe^{3+}_2 O^{2-}_3)_n,$$

где Me — характеризующий металл; $k$, $n$, $km/2$ — целые числа.

В зависимости от состава различают *феррошпинели* (Me = Ni, Co, Mn, Mg, Zn и др., $k=2$, $m=1$, $n=1$), *феррогранаты* (Me = It, Gd, Ln и др., $k=3$, $m=6$, $n=5$) и *гексаферриты* (Me = Pb, Ba, $k=2$, $m=1$, $n=6$). Для получения нужных свойств в состав феррита вводят несколько характеризующих металлов в определенных пропорциях.

Ферриты представляют собой твердые кристаллические вещества. Феррогранаты и феррошпинели имеют кубическую элементарную ячейку, а гексаферриты — гексагональную.

Основную массу ферритовых изделий изготавливают методом спекания. Для этого тонко помолотые порошки оксидов соответствующих металлов смешивают со связующим веществом и из получившейся массы прессуют заготовки нужной формы. Затем заготовки обжигают при высокой температуре. При этом связующее вещество выгорает, а оксиды вступают в химическое соединение. После обжига заготовки при необходимости подвергают механической обработке — резке и шлифованию. Получающийся по такой технологии керамический материал имеет

поликристаллическую структуру. Размер ее зерен (кристаллитов) и число пор между зернами (плотность) определяются режимом прессования, температурой, длительностью обжига и некоторыми другими факторами. Зерна в поликристаллическом феррите имеют размер $10^{-3}—10^{-1}$ мм и представляют собой монокристаллы, ориентированные в произвольных направлениях (хаотически).

При спекании феррита в постоянном магнитном поле образуются текстурованные ферриты, зерна которых ориентированы таким образом, что направление одной из кристаллографических осей кристаллитов совпадает с направлением магнитного поля. Поэтому текстурованные ферриты обладают анизотропными свойствами и после снятия внешнего поля.

Монокристаллические ферриты изготавливают известными методами выращивания монокристаллов (вытягивания из расплава, зонной плавки и т. п.). Для придания нужной формы монокристаллы режут, шлифуют и полируют.

Существенное влияние на качество феррита оказывает его электропроводность, определяемая в основном содержанием закиси железа FeO, которая возникает при восстановлении оксида $Fe_2O_3$ в процессе обжига. Поэтому обжиг ведут в окислительной атмосфере.

Магнитные свойства ферритов обусловлены наличием в их составе «магнитных» атомов — атомов, имеющих нескомпенсированные спиновые магнитные моменты электронов. Магнитные атомы включены в состав двух кристаллических подрешеток, причем магнитные моменты атомов, находящихся в различных подрешетках, имеют противоположные направления. Результирующий магнитный момент феррита равен разности магнитных моментов двух подрешеток. Вещества, обладающие описанными свойствами, называются *ферримагнетиками.*

Наличие у ферритов двух подрешеток определяет зависимость их магнитных свойств от температуры, оно практически не проявляется при взаимодействии феррита с электромагнитным полем СВЧ. Поэтому в гл. 3 и далее наличие в ферритах двух подрешеток не учитывается.

В ненамагниченном состоянии каждый кристаллит или монокристаллический образец феррита содержит одну или несколько областей (доменов), в которых магнитные моменты всех атомов ориентированы в одном и том же направлении. Однако сами домены ориентированы таким образом, что при наличии нескольких доменов в образце его результирующий магнитный момент равен нулю. Такое состояние соответствует минимуму энергии внутреннего магнитного поля.

Вследствие взаимодействия между спиновыми и орбитальными моментами электронов энергия магнитного атома зависит от ориентации его магнитного момента относительно кристаллографических осей. Существует направление (ось легкого намагничивания), при ориентации спинового момента вдоль которого атом имеет минимальную энергию. Ориентация спинов в пер-

пендикулярном направлении соответствует максимальной магнитной энергии. Разность этих энергий, отнесенная к единице объема, называется *константой анизотропии* $K_1$ (это определение не вполне строго, но достаточно точно для дальнейшего изложения). Константу $K_1$ можно рассматривать как энергию внутреннего поля анизотропии $H_a = K_1/M_s$, направленного по оси легкого намагничивания. Наибольшее значение константы анизотропии $|K_1| = (2-6)\cdot 10^6$ Дж/м$^3$ имеют некоторые гексаферриты, наименьшую — гранаты ($|K_1| \approx 5\cdot 10^2$ Дж/м$^3$).

Феррит, помещенный в магнитное поле напряженностью $\mathbf{H}_0$ намагничивается, т. е. приобретает магнитный момент $\mathbf{M}$, совпадающий по направлению с подмагничивающим полем. По мере увеличения напряженности внешнего поля процесс намагничивания проходит три стадии. В слабых полях границы между доменами смещаются. При этом увеличивается объем доменов, магнитные моменты которых имеют составляющую, ориентированную по полю за счет доменов с противоположной ориентацией. В более сильных полях магнитные моменты оставшихся доменов ориентируются по полю (происходит вращение доменов). Когда этот процесс заканчивается, наступает насыщение ферромагнетика. Насыщение наблюдается в поле $H_s$ (поле насыщения) и характеризуется магнитным моментом $M_s$ (*намагниченностью насыщения*). Дальнейшее увеличение напряженности магнитного поля приводит к слабому росту магнитного момента за счет ориентации спиновых моментов атомов решетки. Этот процесс получил название *парамагнитного*.

В гл. 3 показано, что при воздействии на ферритовый образец постоянного магнитного поля напряженностью $\mathbf{H}_=$ и перпендикулярного к нему высокочастотного магнитного поля круговой поляризации напряженностью $\mathbf{H}$ возникает явление ферромагнитного резонанса на частоте $\omega_c = 2\pi\gamma H_0$, где $H_0$ — напряженность внутреннего поля в феррите, определяемая с учетом поля анизотропии и размагничивающих факторов.

Учет взаимодействия между спинами соседних магнитных атомов (обменного взаимодействия) приводит к тому, что уравнение движения вектора намагниченности (3.1) наряду с решением, соответствующим однородной (не зависящей от координат) прецессии вектора намагниченности с угловой частотой $\omega_c$, имеет и другие решения. Эти решения описывают *неоднородную прецессию*, когда фаза вращения вектора $\mathbf{M}$ зависит от координаты по гармоническому закону: $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mathbf{M}(0)\, e^{i\mathbf{k}_s\mathbf{r}}$ (рис. 18.1). Такие решения описывают волны намагниченности (*спиновые волны*), распространяющиеся в феррите в направлении волнового вектора $\mathbf{k}_s$. Дисперсионное уравнение спиновых волн в неограниченной среде имеет вид [16]:

$$\omega^2 = (\omega_c + 2\pi\gamma H_e a^2 k_s^2)(\omega_c + 2\pi\gamma H_e a^2 k_s^2 + \omega_M \sin^2\theta_s), \qquad (18.1)$$

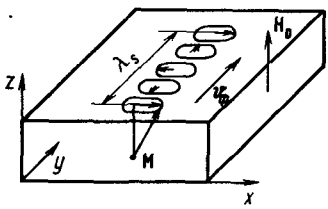



Рис. 18.1. Неоднородная прецессия (спиновая волна) в феррите

где $H_e$ — напряженность обменного поля (для большинства ферритов $H_e = 10^8 - 10^9$ А/м); $a$ — постоянная кристаллической решетки; $\theta_s$ — угол между волновым вектором $\mathbf{k}_s$ и вектором $\mathbf{H}_0$. Из выражения (18.1) следует, что $\omega$ нелинейно зависит от $k_s$, т. е. спиновые волны обладают дисперсией.

На рис. 18.2, *а* показаны дисперсионные характеристики спиновых волн для $\theta_s = 0$ и $\theta_s = \pi$ при $M_s = 0{,}014$ Тл; $H_0 = 7 \cdot 10^4$ А/м; $2\pi\gamma H_e a^2 = 0{,}1$. Характеристики, соответствующие промежуточным значениям углов $\theta_s$, занимают положение между указанными кривыми, так что для данного $k_s$ спектр спиновых волн занимает целую полосу частот от $\omega_{min}$ до $\omega_{max}$. Для больших $k_s$, т. е. для спиновых волн с малой длиной волны, $\lambda_s = 2\pi/k_s$, $\omega \approx g k_s^2$, где $g$ — постоянная. Их фазовая и групповая скорости $v_ф = \omega/k_s = g k_s$; $v_{гр} = d\omega/dk_s = 2gk_s$ прямо пропорциональны волновому вектору. Спиновые волны большой длины ($\lambda_s \gg 2\pi a\sqrt{H_e/H_0}$) характеризуются малой зависимостью частоты $\omega$ от волнового вектора $k_s$. Их фазовая скорость $v_ф \approx \omega_c(\omega_c + \omega_M \sin^2\theta_s)/k_s$ обратно пропорциональна волновому числу, а групповая $v_{гр} = d\omega/dk_s$ близка к нулю (рис. 18.2, *б*).

При малых $k_s$ изменение вектора намагниченности в пространстве при переходе от одной точки к другой происходит медленно и в уравнениях Максвелла можно положить $\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 0$. В этом случае уравнения электродинамики, описывающие спиновые волны, переходят в уравнения магнитостатики, а спиновые волны с малыми $k_s$ называют *магнитостатическими волнами* (МСВ). Граница между МСВ и спиновыми волнами соответствует значению $k_s \approx 40$ см$^{-1}$.

Взаимодействие между спинами и кристаллической решеткой феррита (спин-спиновое и спин-решеточное взаимодействия) при-

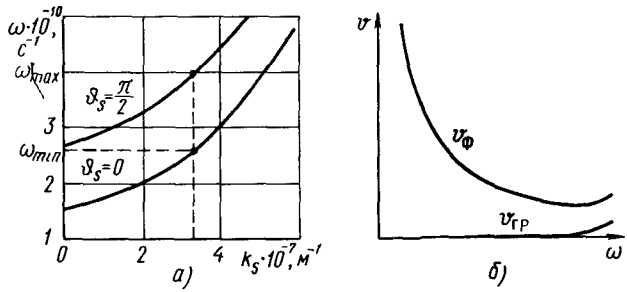



Рис. 18.2. Дисперсионные характеристики спиновых волн в иттрий-железном гранате (*а*) и зависимости фазовой и групповой скоростей спиновых волн от частоты (*б*)

водит к диссипации магнитной энергии в феррите. Типичная зависимость тангенса угла магнитных потерь $\operatorname{tg}\delta_M = \mu''/\mu'$ от напряженности подмагничивающего поля в феррите показана на рис. 18.3. Пик поглощения при напряженности поля $H_0 = f/\gamma$, где $f$ — частота переменного магнитного поля, обусловлен ферромагнитным резонансом (ФМР). Рост поглощения в слабых полях связан с естественным ферромагнитным резонансом в полях, существующих в феррите за счет анизотропии, неоднородности его строения, наличия пор и т. п. В еще более слабых полях, не намагничивающих феррит до насыщения, начинают играть роль такие механизмы потерь, как колебания границ доменов, вращение доменов и т. д. Естественный ФМР определяет нижнюю границу рабочего диапазона ферритовых устройств СВЧ, которая лежит в области дециметровых волн.

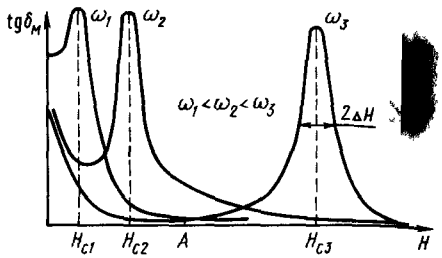


Рис. 18.3. Зависимость тангенса угла магнитных потерь $\operatorname{tg}\delta_M$ в феррите от $H_0$

Важной характеристикой ферритового образца является ширина кривой ферромагнитного резонанса $2\Delta H$, которая зависит от химического состава феррита, структуры, формы образца и качества обработки его поверхности, ориентации подмагничивающего поля относительно кристаллографических осей и частоты. Наименьшим значением $2\Delta H = 40-80$ А/м обладают монокристаллы иттрий-железных гранатов (ИЖГ). Поликристаллические ферриты имеют ширину резонансной кривой 2500—80 000 А/м [15].

На ширину резонансной кривой большое влияние оказывает взаимодействие между однородной прецессией и спиновыми волнами, возникающее вследствие нелинейности уравнения движения вектора намагниченности, записанного с учетом потерь. Это взаимодействие, интенсивность которого возрастает с увеличением амплитуды высокочастотного магнитного поля в феррите, приводит к росту магнитных потерь и расширению резонансной кривой. Наряду с магнитными ферриты обладают и диэлектрическими потерями, связанными с конечной электропроводностью материалов. В высококачественных ферритах $\operatorname{tg}\delta_\varepsilon \leqslant 10^{-4}$, что существенно меньше, чем тангенс угла магнитных потерь. При этом действительная часть диэлектрической проницаемости ферритов имеет значения $(14—19)\,\varepsilon_0$.

## § 18.2. ФАЗОВРАЩАТЕЛИ

Принцип действия фазовращателей основан на зависимости фазовой скорости волны, распространяющейся в линии передачи, частично заполненной намагниченным ферритом, от направления распространения и напряженности домагничивающего поля.

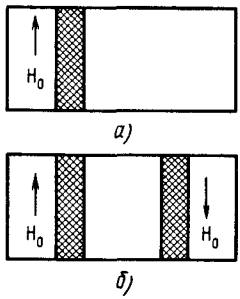



Рис. 18.4. Невзаимный волноводный фазовращатель

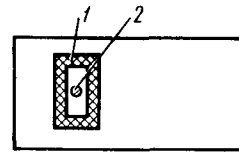



Рис. 18.5. Управляемый невзаимный фазовращатель

Идеальный *невзаимный фазовращатель* представляет собой четырехполюсник, пропускающий энергию в обоих направлениях без затухания, но с разным фазовым сдвигом. Его матрица рассеяния имеет вид

$$\mathbf{S}=\begin{vmatrix} 0 & e^{-i\varphi_1} \\ e^{-i\varphi_2} & 0 \end{vmatrix}.$$

Реальный невзаимный фазовращатель характеризуется следующими основными параметрами:

— невзаимным фазовым сдвигом $\Delta\varphi=|\varphi_1-\varphi_2|$;

— вносимыми потерями $A=10\lg(P_{вх}/P_{вых})$;

— коэффициентом стоячей волны входа $k_{ст}$;

— рабочей полосой частот $\Delta f$, в которой значение $\Delta\varphi$ лежит в допустимых пределах, а значения остальных параметров не хуже заданных.

Одна из конструкций невзаимного фазовращателя показана на рис. 18.4, *а*. Поперечно-намагниченная ферритовая пластина (вкладыш) помещена в стандартный прямоугольный волновод параллельно его узкой стенке. Концы вкладыша заострены для уменьшения коэффициента стоячей волны. Пластина помещена в той области поперечного сечения волновода, где поляризация магнитного поля волны типа $H_{10}$ близка к круговой. Напряженность подмагничивающего поля выбирается меньше резонансной, так что в рабочей полосе частот $\mu_c''$, $\mu_a''$ малы, но действительные части эффективной магнитной проницаемости для право- и левополяризованных волн различны. Поэтому различными оказываются и фазовые постоянные $\beta^+$ и $\beta^-$ волн, распространяющихся в волноводе в противоположных направлениях. Разность $\Delta\varphi=(\beta^+-\beta^-)\,l$, где $l$ — длина вкладыша, есть невзаимный фазовый сдвиг. К недостаткам этого фазовращателя относится трудность его согласования в широкой полосе частот вследствие отличия структур поля в волноводе с ферритом и в пустом волноводе.

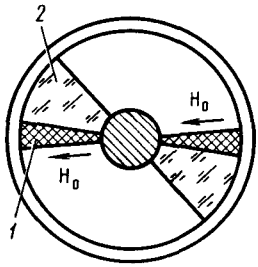



Рис. 18.6. Невзаимный коаксиальный фазовращатель

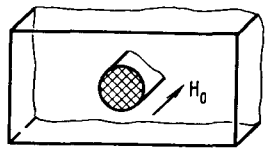



Рис. 18.7. Управляемый взаимный фазовращатель

Лучшие параметры имеют фазовращатели с двумя ферритовыми вкладышами, намагниченными в противоположных направлениях (рис. 18.4, *б*). Такая структура обеспечивает вдвое больший невзаимный фазовый сдвиг на единицу длины и сохраняет симметрию поля волновода относительно его продольной оси, что облегчает согласование фазовращателя.

Подмагничивающее поле создается постоянными магнитами, расположенными снаружи волновода. Однако магнитное поле может создаваться и путем намагничивания ферритовых вкладышей *1*, имеющих тороидальную форму и прямоугольную петлю гистерезиса (рис. 18.5). Перемагничивание производится с помощью импульсов тока, пропускаемых по специальному проводнику *2*. Такие *управляемые фазовращатели* (с магнитной памятью) позволяют изменять фазу проходящей через них волны дискретно на определенные углы. Благодаря применению тороидальных ферритов удается значительно снизить массу и габариты фазовращателя.

В коаксиальной линии передачи области с круговой поляризацией магнитного поля Т-волны отсутствуют. Поэтому для создания невзаимных фазовращателей наряду с ферритовыми пластинами *1* используются диэлектрические вкладыши *2* (рис. 18.6), на поверхности которых создается продольная составляющая магнитного поля. (см. гл. 6), сдвинутая по фазе относительно поперечной на 90°. Поляризация поля становится эллиптической, что и обеспечивает работу устройства.

На рис. 18.7 показан *управляемый взаимный фазовращатель*, состоящий из прямоугольного волновода и ферритового стержня, расположенного вдоль его оси. Стержень намагничен в продольном направлении магнитным полем, создаваемым катушкой, расположенной снаружи волновода. При определенном поперечном сечении вкладыша скорость распространения волны в волноводе сильно зависит от напряженности подмагничивающего поля. Так как плоскость поляризации волны фиксирована волноводом, эффект Фарадея не возникает и создаваемый

фазовращателем фазовый сдвиг взаимен. Достоинством такого фазовращателя является малое управляющее магнитное поле, которое создается соленоидом без магнитопровода. Это позволяет осуществлять плавное изменение фазы с высокой скоростью путем изменения тока в соленоиде.

Невзаимный фазовый сдвиг неуправляемых фазовращателей обычно составляет 90 или 180°, а управляемых меняется дискретно от 0 до 360° с определенным шагом. Для взаимных фазовращателей диапазон плавного изменения фазы лежит в пределах $0 \; -360°$ или $0 \; -720°$. Рабочее затухание составляет 0,5—1 дБ, КСВ 1,1—1,5. Фазовращатели конструируются для работы во всем диапазоне СВЧ — от дециметровых до миллиметровых волн.

### § 18.3. ВЕНТИЛИ

*Идеальным вентилем* называется линейный невзаимный четырехполюсник, пропускающий СВЧ-энергию без поглощения в одном направлении и не пропускающий в обратном. Матрица рассеяния идеального вентиля

$$S = e^{-i\varphi} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Реальный вентиль характеризуется:

— вносимыми потерями $A = -20 \lg |s_{21}|$;

— затуханием $L = -20 \lg |s_{12}|$;

— коэффициентом стоячей волны $k_{ст1}$, $k_{ст2}$;

— рабочей полосой частот $\Delta f$, в которой значения указанных параметров не хуже заданных.

Наиболее простую конструкцию, по существу совпадающую с конструкцией невзаимных фазовращателей (см. рис. 18.4, 18.6), имеют *резонансные* волноводные и коаксиальные вентили. Отличие заключается в значении напряженности подмагничивающего поля, которое выбирается таким образом, чтобы на рабочей частоте наблюдалось явление поперечного ферромагнитного резонанса. При распространении волны в одном из направлений ее затухание резко увеличивается и при достаточно большой длине вкладыша она почти полностью поглощается в феррите. Для отвода теплоты в вентилях высокого уровня мощности ферритовые вкладыши припаивают к стенкам волновода, которые охлаждают водой или воздухом. Резонансные вентили имеют сравнительно узкую рабочую полосу частот (15—20%) при затухании $L = 15 \div 20$ дБ, вносимых потерях $A = 0{,}5$—1 дБ и $k_{ст} = 1{,}1 \div 1{,}3$. Расширение полосы пропускания до 30—50% достигается введением в конструкцию устройства наряду с ферритовыми диэлектрических вкладышей.

Существенным недостатком резонансных вентилей является необходимость использования сильных полей подмагничивания,

особенно в коротковолновой части диапазона СВЧ, что увеличивает массу и габариты магнитной системы. Один из путей устранения этого недостатка основан на применении в качестве материала вкладыша текстурованных гексаферритов, обладающих большими внутренними полями анизотропии. В ряде случаев использование этих материалов позволяет отказаться от внешней магнитной системы. В настоящее время вентили на гексаферритах конструируются в основном для работы в миллиметровом диапазоне.

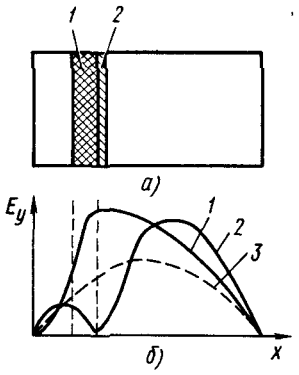


Рис. 18.8. Вентиль со смещением поля (*а*); распределение электрического поля прямой и обратной волны в вентиле (*б*)

Другой тип вентилей, широко применяемый в технике СВЧ, называют *вентилем со смещением поля*. Его действие основано на зависимости структуры поля волны, распространяющейся в частично заполненном ферритом волноводе (рис. 18. 8, *а*), от направления распространения. Подбирая размеры ферритового вкладыша *1*, его положение в волноводе и напряженность подмагничивающего поля, можно получить распределение поперечной составляющей электрического поля волны $H_{10}$, показанное на рис. 18.8, *б*. Такое распределение возникает вследствие разной оптической плотности (показателя преломления) ферритовой пластины для двух направлений распространения. В первом случае (обратная волна) эффективная магнитная проницаемость $\mu_{эф} > \mu_0$ и пластина работает как диэлектрический волновод, в котором распространяется поверхностная волна (кривая *1*). Во втором случае (прямая волна) $\mu_{эф} < \mu_0$ и волна «выталкивается» из пластины (кривая *2*). Для сравнения на рис. 18.8, *б* показано распределение электрического поля в невозмущенном волноводе (кривая *3*). Описанный характер распределения достигается в подмагничивающем поле, напряженность которого в несколько раз меньше резонансной, что позволяет существенно снизить массу и габариты устройства.

Для получения вентильного эффекта на поверхность вкладыша, обращенную к плоскости симметрии волновода, необходимо нанести поглощающую пленку *2* из плохо проводящего материала (рис. 18.8, *а*). При распространении волны в прямом направлении вносимые потери складываются из потерь в феррите и пленке. Потери в пленке малы, так как напряженность электрического поля в месте ее расположения близка к нулю и ток в пленке не наводится. Для уменьшения потерь в феррите ширина его кривой ФМР должна быть достаточно узкой, чтобы ее «хвосты» не достигали рабочей точки *А* (см. рис. 18.3). При распространении волны в обратном направлении пленка сильно поглощает

ее энергию, так как находится в максимуме электрического поля. Вентили описанного типа имеют рабочее затухание $L=18\div20$ дБ, вносимые потери $A=0{,}3\div0{,}8$ дБ, $k_{ст}=1{,}1\div1{,}3$, они выпускаются в волноводном и коаксиальном исполнениях для использования в основном в дециметровом и сантиметровом диапазонах. По максимальной мощности рассеяния они уступают резонансным вентилям, так как условия охлаждения пленки хуже, чем условия охлаждения массивного ферритового вкладыша.

### § 18.4. ЦИРКУЛЯТОРЫ

Циркулятором называется невзаимный многополюсник, плечи которого можно пронумеровать таким образом, что волна из плеча с номером $n$ проходит только в плечо $n+1$, а из последнего плеча — только в первое. Таким образом, матрица рассеяния идеального трехплечего циркулятора

$$S=e^{-i\varphi}\begin{vmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}.$$

Эта матрица унитарна и, следовательно, циркулятор является недиссипативным устройством.

К основным параметрам реального циркулятора относятся:

— вносимое затухание $A=-20\lg|s_{21}|$;

— развязка между каналами $L=-20\lg|s_{12}|$;

— коэффициент стоячей волны $k_{ст}$;

— рабочая полоса частот $\Delta f$.

Рассмотрим широко распространенный волноводный трехплечий цикулятор *мостового типа* (*Y*-циркулятор), изображенный на рис. 18.9, *а*. Основу его конструкции составляет симметричный *Y*-тройник, на оси симметрии которого помещен ферритовый вкладыш *4* с диэлектрической втулкой *5*, которая необходима для улучшения согласования и расширения рабочей полосы частот устройства. Подмагничивающее поле создается постоянными магнитами, расположенными снаружи сочленения.

Подбирая размеры шайбы, втулки и напряженность подмагничивающего поля, можно создать условия, при которых электромагнитное поле в сочленении при возбуждении со стороны плеча *1* имеет пучность в области плеча *2* и узел в области плеча *3*, так что возбуждается только плечо *2*. Качественно объяснить этот эффект можно следующим образом: волна, поступающая в сочленение из плеча *1*, делится на две части. Путь первой из них проходит в изотропных материалах, в результате чего она возбуждает в плечах *2* и *3* волны с одинаковыми амплитудами и фазами (вследствие симметрии устройства). Путь второй волны частично проходит в ферритовом вкладыше, при этом скорости ее распространения в плечо

*2* (против часовой стрелки) и плечо *3* (по часовой стрелке) оказываются различными. При соответствующих условиях волны в плече *2* оказываются в одинаковых фазах и складываются, а в плече *3* — в противоположных фазах и гасят друг друга.

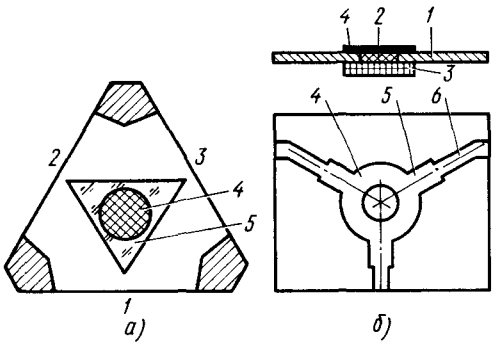



Рис. 18.9. Мостовой трехплечий циркулятор в волноводном (*а*) и микрополосковом (*б*) исполнениях

Аналогичную конструкцию имеют *Y*-циркуляторы в микрополосковом исполнении (рис. 18.9, *б*). В керамическую подложку *1* врезан ферритовый вкладыш *2*, подмагниченный постоянным магнитом *3*. Нанесенный на подложку металлический пленочный диск *4* обеспечивает необходимую структуру электромагнитного поля. Четвертьволновые трансформаторы *5* служат для согласования циркулятора с внешними линиями передачи *6*. Простота этой конструкции, малые габариты и масса, достаточно хорошие электрические параметры ($A = 0{,}2 \div 0{,}5$ дБ; $L = 20 \div 25$ дБ; $k_{ст} = 1{,}1 \div 1{,}3$; $\Delta f / f_0 = 20 \div 50\%$) обусловили ее широкое распространение. В то же время циркуляторы мостового типа трудно сконструировать на высокий уровень мощности из-за малых размеров ферритового вкладыша и трудности его охлаждения.

Отмеченного недостатка лишен *фазовый циркулятор* (рис. 18.10). Он содержит волноводно-щелевой мост ВЩМ, два невзаимных фазовращателя $ФВ_1$ и $ФВ_2$, обеспечивающих фазовый сдвиг 90° и включенных в противоположных направлениях, и модифицированный двойной волноводный тройник МВТ. Рассмотрим прохождение волн в этом устройстве при возбуждении его со стороны плеча *1* (*H*-плечо модифицированного двойного тройника), рис. 18.11, *а*. Плечо *3* в данном случае не возбуждается и энергия поровну делится между плечами *2'* и *4'* тройника, причем волны поступают в невзаимные фазовращатели $ФВ_1$ и $ФВ_2$ с одинаковыми фазами и амплитудами. Пройдя фазовращатели, они возбуждают ВЩМ, причем энергия каждой волны поровну делится между выходными плечами *2* и *4*. Учитывая

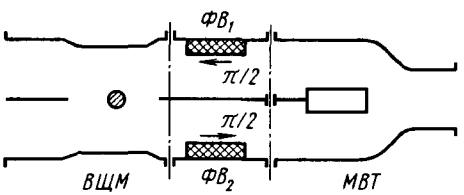



Рис. 18.10. Фазовый волноводный четырехплечий циркулятор

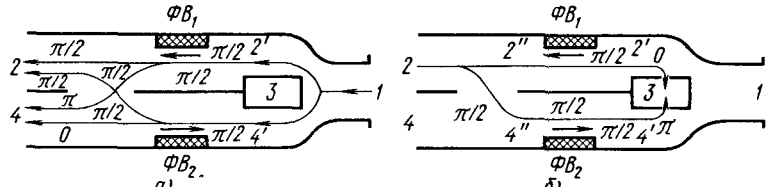



Рис. 18.11. Прохождение энергии в фазовом циркуляторе при возбуждении его со стороны плеч *1* (*а*) и *2* (*б*)

невзаимный фазовый сдвиг $\pi/2$, который получает волна в фазовращателе $ФВ_1$, и свойства волноводно-щелевого моста (см. § 17.6), находим, что в плече *2* обе волны, поступающие из фазовращателей $ФВ_1$ и $ФВ_2$, складываются, а в плече *4* — вычитаются. Так как эти волны вследствие симметрии устройства имеют одинаковые амплитуды, энергия из плеча *1* полностью проходит в плечо *2* (за исключением потерь в волноводах и фазовращателях), а плечи *3* и *4* не возбуждаются.

При возбуждении второго плеча (рис. 18.11, *б*) энергия делится поровну между плечами *2″* и *4″* ВЩМ, причем волна в плече *4″* получает дополнительный фазовый сдвиг $\pi/2$. В фазовращателе $ФВ_2$ эта волна также получает фазовый сдвиг $\pi/2$. В результате плечи *2′* и *4′* модифицированного двойного тройника возбуждаются волнами с одинаковыми амплитудами и противоположными фазами. При таком возбуждении энергия полностью проходит в Е-плечо тройника (плечо *3* циркулятора). Аналогично можно показать, что из плеча *3* энергия передается в плечо *4*, а из плеча *4* — в плечо *1*.

Фазовые циркуляторы, имея сравнительно большую массу и габариты, обладают в то же время хорошими электрическими параметрами ($A = 0{,}25 \div 0{,}5$ дБ, $L = 20 \div 25$ дБ, $k_{ст} = 1{,}1 \div 1{,}3$) и высоким допустимым уровнем мощности (до 150 кВт средней и 30 МВт импульсной мощности в десятисантиметровом диапазоне).

### § 18.5. УПРАВЛЯЕМЫЕ ФИЛЬТРЫ

Явление ферромагнитного резонанса, при котором резко возрастает амплитуда прецессии намагниченности и увеличивается накопленная в ферритовом образце энергия высокочастотного магнитного поля, может быть использовано для создания ферритовых резонаторов, размеры которых не связаны с длиной волны колебаний, а собственная частота под воздействием внешнего подмагничивающего поля изменяется в широких пределах. Такие резонаторы служат основой для создания управляемых фильтров СВЧ.

Типичный ферритовый резонатор представляет собой шар или цилиндр диаметром 0,5÷1,5 мм. Высота цилиндра обычно много меньше его диаметра. В литературе такие резонаторы называют *сферическими* и *дисковыми*. Собственная добротность резонатора определяется шириной кривой ФМР и напряженностью внутреннего магнитного поля: $Q_0 = H_0/(2\Delta H)$. Для резонатора сферической формы это равенство принимает вид

$$Q_0 = \frac{H_{вн} - (1/3)\,M_s}{2\Delta H},$$

где $H_{вн}$ — напряженность внешнего подмагничивающего поля. Так как напряженность $H_0$ пропорциональна частоте, а $2\Delta H$ мало зависит от нее, добротность резонаторов растет с увеличением их собственной частоты и обращается в нуль на частоте $f_{min}$, соответствующей значению $H_{вн} = (1/3)\,M_s$. Для иттрий-железного граната $f_{min} = 1{,}6$ ГГц, т. е. использование этого материала для создания резонаторов с собственной частотой менее 2 ГГц невозможно.

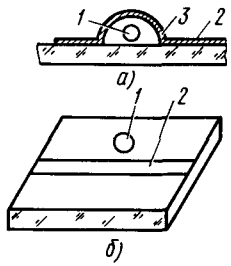



Рис. 18.12. Связь ферритового резонатора с линией передачи с помощью петли (*а*) и краевого поля линии (*б*)

Основной путь увеличения добротности ферритовых резонаторов — применение образцов с малыми потерями. Наилучшие результаты получаются при использовании шаров из монокристаллов иттрий-железного граната, тщательной их полировке и ориентации оси легкого намагничивания параллельно подмагничивающему полю. Добротность таких резонаторов достигает 5000 в трехсантиметровом диапазоне длин волн.

Связь ферритового резонатора *1* с линией передачи *2* осуществляется с помощью петли *3* (рис. 18.12, *а*), а также при размещении резонатора непосредственно в электромагнитном поле линии передачи (рис. 18.12, *б*).

В устройствах, изображенных на рис. 18.12, *а*, *б*, на резонансной частоте энергия из линии передачи «отсасывается» в резонатор и там рассеивается. Поэтому такие устройства можно рассматривать как режекторные (полосно-заграждающие) фильтры. Для создания полосно-пропускающих фильтров необходимо с помощью ферритового резонатора связать между собой две линии передачи, связь между которыми в обычных условиях отсутствует. Одна из конструкций такого фильтра показана на рис. 18.13.

Фильтр состоит из двух взаимно перпендикулярных петель *2* и *3*, соединенных одним концом с входной и выходной линиями передачи, а другим — с контактной площадкой *3*, обеспечивающей короткое замыкание концов петель.

При отсутствии ферритовой сферы *4* связь между линиями отсутствует, так как магнитное поле одной петли не пересекает плоскость второй петли и не наводит в ней ЭДС. Вблизи

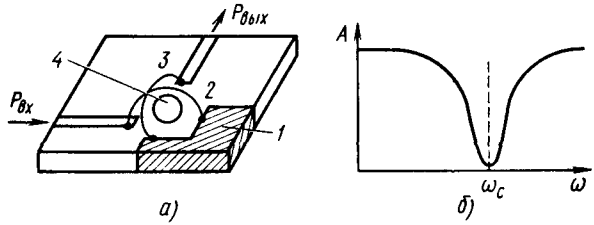



Рис. 18.13. Полосно-пропускающий ферритовый фильтр (*а*) и его АЧХ (*б*)

ферромагнитного резонанса в ферритовом резонаторе возникает магнитное поле круговой поляризации, благодаря которому возникает взаимная связь между петлями. В результате АЧХ фильтра принимает вид, показанный на рис. 18.13, *б*. Улучшения характеристик ферритовых фильтров добиваются, увеличивая в них число звеньев (ферритовых резонаторов).

## § 18.6. УСТРОЙСТВА НА МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ

Сравнительно малые фазовая и групповая скорости магнитостатических волн в феррите и возможность их изменения в широких пределах путем регулировки подмагничивающего поля создают возможность построения разнообразных устройств обработки сигналов (функциональных устройств) СВЧ — бездисперсионных и дисперсионных линий задержки, фильтров, линий задержки с отводами, полосовых фильтров.

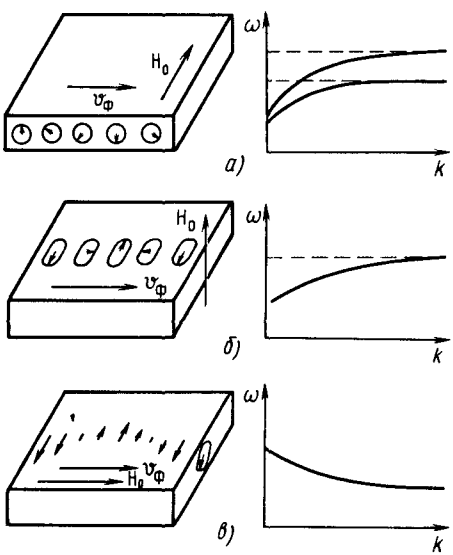



Рис. 18.14. Типы магнитостатических волн в ферромагнитных пленках и их дисперсионные характеристики: *а* — ПМСВ; *б* — ПОМСВ, *в* — ООМСВ

В настоящее время для построения функциональных устройств используются в основном магнитостатические волны в тонких пленках из иттрий-железного граната (ИЖГ), эпитаксиально выращенных на подложке из галлий-гадолиниевого граната (ГГГ), который не обладает ферромагнитными свойствами. Толщина пленок в зависимости от их назначения колеблется от 0,1 до 200 мкм.

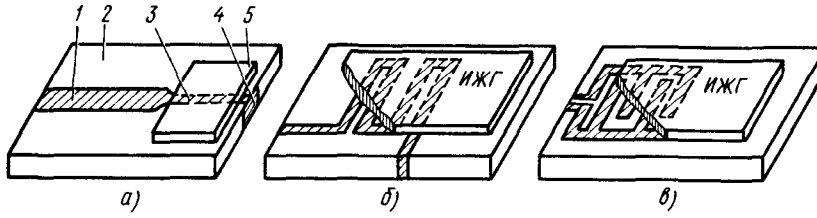



Рис. 18.15 Преобразователи (антенны) МСВ

Распространение МСВ в пленках, толщина которых сравнима с длиной магнитостатической волны, имеет ряд особенностей. В зависимости от взаимной ориентации пленки, подмагничивающего поля и направления распространения различают поверхностные (ПМСВ), прямые объемные (ПОМСВ) и обратные объемные (ООМСВ) магнитостатические волны (рис. 18.14, *а — в*). Затухание МСВ зависит от ширины кривой ферромагнитного резонанса. Его можно вычислить по приближенной формуле $A = 2\Delta H$ (дБ/мкс). Таким образом, при времени задержки около 100 нс и ширине резонансной кривой $2\Delta H = 40$ А/м затухание не превышает нескольких децибел.

Характеристики любого устройства на МСВ во многом определяются входящими в его конструкцию преобразователями электромагнитных волн в магнитостатические и обратно (передающими и приемными антеннами МСВ). Одним из простейших является микрополосковый преобразователь (рис. 18.15, *а*). На подложку *2* наносится подводящая линия передачи *1*, переходящая в антенну *3*, которая соединена с основанием короткозамыкающей перемычкой *4*. Сверху на подложку и проводники наносится монокристаллическая пленка ИЖГ *5*, в которой и возбуждается МСВ. Такой преобразователь обладает достаточно большой широкополосностью, которая увеличивается с уменьшением его ширины.

Для частотно-селективного возбуждения МСВ (например, при построении фильтров) используются меандровые либо многоэлементные преобразователи (рис. 18.15, *б, в*). Период структуры такого преобразователя должен быть меньше длины магнитостатической волны. В трехсантиметровом диапазоне длина штырей составляет единицы миллиметров, ширина — десятки микрометров, число штырей — 4—10. Они наносятся на подложку методом фотолитографии.

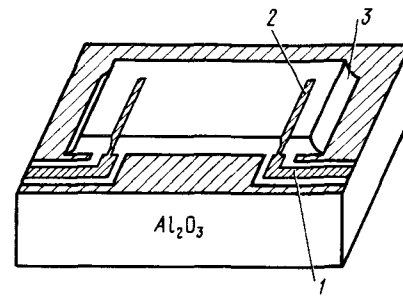



Рис. 18.16. Конструкция линии задержки на МСВ

На рис. 18.16 показана конструкция линии задержки с линейной дисперсией на поверхностных

МСВ. В качестве подводящих линий передачи в ней использованы компланарные волноводы *1*, соединенные с микрополосковыми преобразователями *2*, которые нанесены на стеклянную мезаструктуру *3* толщиной 20 мкм. Сверху к стеклу прижимается пленка ИЖГ на подложке из ГГГ. Размеры пленки — $5 \times 25$ мм, ее толщина — 20 мкм. В трехсантиметровом диапазоне устройство обеспечивает задержку 50—240 нс при ширине полосы 1 ГГц и уровне вносимых потерь 40 дБ.

**Контрольные вопросы**

1. Назовите основные типы СВЧ-ферритов, их химический состав и кристаллическую структуру.
2. Перечислите основные свойства спиновых волн и приведите их дисперсионные характеристики. Какие волны называются магнитостатическими?
3. Перечислите основные типы невзаимных фазовращателей и сопоставьте их параметры.
4. Опишите конструкцию и принцип действия взаимных ферритовых фазовращателей.
5. Перечислите основные типы ферритовых вентилей и проведите их сравнение.
6. Дайте определение идеального циркулятора и приведите его матрицу рассеяния. Опишите конструкцию мостовых циркуляторов.
7. Поясните конструкцию и принцип работы фазовых циркуляторов.
8. Опишите свойства и конструкцию ферритовых резонаторов.
9. Опишите принцип работы простейших ферритовых фильтров СВЧ.
10. Перечислите особенности распространения магнитостатических волн в тонких пленках.
11. Опишите принцип действия и конструкцию линии задержки на МСВ.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные направления развития электродинамики и техники СВЧ в настоящее время определяются прежде всего теми требованиями, которые предъявляются к перспективным сверхвысокочастотным радиоэлектронным системам и их элементам. Эти системы должны обеспечивать существенное увеличение скорости передачи и обработки информации, КПД, стабильности и надежности радиоэлектронных средств при одновременном уменьшении их массы, габаритов и трудоемкости изготовления. Необходимо увеличить энергетический потенциал СВЧ-установок, используемых для ускорения заряженных частиц и в технологических целях.

Для решения указанных задач требуется освоение миллиметрового, субмиллиметрового и оптического диапазонов, переход на новую элементную базу, увеличение уровня интеграции аппаратуры, создание новых принципов построения радиоэлектронных устройств и систем.

Электродинамике и технике СВЧ принадлежит определяющая роль в достижении этих целей. К основным направлениям ее развития в настоящее время можно отнести:

1) разработку новых типов линий передачи и СВЧ-устройств, пригодных для изготовления в интегральном исполнении и имеющих высокие электродинамические параметры. В связи с этим интенсивно развивается теория распространения электромагнитных волн в слоистых и анизотропных средах при наличии металлических проводников;

2) изучение высших типов волн и видов колебаний в волноводах и резонаторах, разработку способов селекции мод и разрежения спектра собственных (критических) частот. Результаты этих работ позволят существенно увеличить характерные размеры электродинамических систем по сравнению с длиной волны и тем самым повысить выходную мощность и КПД приборов и устройств миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов. К этому же направлению относится развитие теории и конструирование квазиоптических СВЧ-устройств;

3) исследование условий существования и свойств медленных электромагнитных волн, создание новых типов замедляющих систем с улучшенными электродинамическими и теплофизическими параметрами с целью увеличения полосы пропускания, мощности и КПД электронных приборов СВЧ и линейных ускорителей;

4) развитие теории функциональных СВЧ устройств, их конструирование, основанное на использование особенностей распространения электромагнитных, магнитостатических, акустоэлектрических и других волн в активных и пассивных средах;

5) развитие теории и техники измерений на СВЧ, повышение точности и скорости измерений, создание автоматизированных измерительных комплексов. В настоящее время техника измерений на СВЧ уже превратилась в самостоятельную отрасль, которая изучается в специальных курсах.

Особое значение для успешного развития всех перечисленных направлений имеет разработка численных методов решения сложных электродинамических задач, в первую очередь трехмерных. Перспективны поиски алгоритмов решения обратных задач электродинамики, позволяющих производить синтез системы по заданному электромагнитному полю, алгоритмов структурной и параметрической оптимизации устройств СВЧ, создание систем их автоматизированного проектирования.

## Приложение 1

## Некоторые сведения из векторного анализа

**Дифференциальные операции в криволинейных ортогональных координатах.** Рассматриваются операции над векторными $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ и скалярными $\varphi(\mathbf{r})$ функциями точки (векторными и скалярными полями) в криволинейной ортогональной системе координат $x_1$, $x_2$, $x_3$ с метрическими коэффициентами (коэффициентами Ламэ) $h_1$, $h_2$, $h_3$ и единичными векторами (ортами) $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. В декартовой системе координат $x_1=x$; $x_2=y$; $x_3=z$; $h_1=h_2=h_3=1$; в цилиндрической $x_1=r$; $x_2=\theta$; $x_3=z$; $h_1=1$; $h_2=r$; $h_3=1$.

Градиент

$$\operatorname{grad}\varphi\equiv\nabla\varphi=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\mathbf{e}_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\mathbf{e}_2+\frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\mathbf{e}_3. \tag{П.1}$$

Дивергенция

$$\operatorname{div}\mathbf{u}\equiv\nabla\mathbf{u}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2h_3u_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3h_1u_2)+\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1h_2u_3)\right]. \tag{П.2}$$

Ротор

$$\operatorname{rot}\mathbf{u}\equiv[\nabla,\,\mathbf{u}]=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{h_1\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3u_3)-\frac{\partial}{\partial x_3}(h_2u_2)\right]\mathbf{e}_1+h_2\left[\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1u_1)-\frac{\partial}{\partial x_1}(h_3u_3)\right]\mathbf{e}_2+\right.$$
$$\left.+h_3\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2u_2)-\frac{\partial}{\partial x_2}(h_1u_1)\right]\mathbf{e}_3\right\}. \tag{П.3}$$

Скалярный оператор Лапласа

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi\equiv\Delta\varphi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)\right]. \tag{П.4}$$

**Формулы дифференцирования.** Дифференцирование произведения функций:

$$\operatorname{grad}(\varphi,\,\psi)=\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\varphi; \tag{П.5}$$

$$\operatorname{div}(\varphi\mathbf{u})=\mathbf{u}\operatorname{grad}\varphi+\varphi\operatorname{div}\mathbf{u}; \tag{П.6}$$

$$\operatorname{div}[\mathbf{u},\,\mathbf{v}]=\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{u}-\mathbf{u}\operatorname{rot}\mathbf{v}; \tag{П.7}$$

$$\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{u})=[\operatorname{grad}\varphi,\,\mathbf{u}]+\varphi\operatorname{rot}\mathbf{u}; \tag{П.8}$$

**Дифференциальные операции второго порядка:**

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi=0; \tag{П.9}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{u}=0; \tag{П.10}$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}+\nabla^2\mathbf{u}. \tag{П.11}$$

**Формулы интегрирования.** Теорема Остроградского — Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{u}\, dV = \oint_S \mathbf{u}\, d\mathbf{S}. \tag{П.12}$$

Теорема Стокса:

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{u}\, d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{u}\, d\mathbf{l}; \tag{П.13}$$

$$\oint_V \operatorname{rot} \mathbf{u}\, dV = -\oint_S [\mathbf{u}, d\mathbf{S}], \tag{П.14}$$

где $d\mathbf{S} = dS\mathbf{e}_n$ — элемент поверхности $S$; $d\mathbf{l} = dl\mathbf{e}_\tau$ — элемент дуги контура $L$; $\mathbf{e}_n$ — орт внешней нормали к поверхности $S$; $\mathbf{e}_\tau$ — орт касательной к контуру $L$.

**Формулы Грина.** Справедливы следующие соотношения:

$$\int_V \varphi \Delta\psi\, dV = \oint_S \varphi \Delta\psi\, dS - \int_V \nabla\varphi \nabla\psi\, dV; \tag{П.15}$$

$$\int_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\, dV = \oint_S (\varphi\Delta\psi - \psi\nabla\varphi)\, d\mathbf{S}; \tag{П.16}$$

$$\int_V \Delta\varphi\, dV = \oint_S \nabla\varphi\, d\mathbf{S}.$$

Обобщенная формула Грина для $m$-мерного оператора **Штурма — Лиувилля** $\mathscr{L} = \sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)$:

$$\int_V \psi \mathscr{L}\varphi\, dV = \oint_S \psi \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(\mathbf{e}_n \mathbf{e}_i)\, dS - \int_V \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\partial\psi}{\partial x_i} dV. \tag{П.17}$$

## Приложение 2

## Некоторые сведения из функционального анализа

**Функциональные пространства и последовательности функций.** Рассмотрим множество $R$ векторных или скалярных комплексных функций точки $u(\mathbf{r})$, определенных в некоторой области $V$ и удовлетворяющих определенным однородным условиям на ее границе $S$. Предположим, что все функции множества квадратично суммируемы в $V$:

$$\int_V uu^*\, dV < \infty. \tag{П.18}$$

Очевидно, что сумма двух функций и произведение функции $u$ на любое число $\mu$ также принадлежит множеству $R$. Такое множество называется *линейным*.

Подставим в соответствие каждой паре функций множества $R$, $u$ и $v$ число $(u, v)$, называемое *скалярным произведением* и определяемое следующим образом:

$$(u, v) = \int_V uv^*\, dV \tag{П.19}$$

Интеграл (П.19) существует, так как $|uv^*| \leqslant 0{,}5(|u|^2 + |v|^2)$. Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

$$(u, v) = (v, u)^*;\ (\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2, v) = \mu_1 (u_1, v) + \mu_2 (u_2, v);\ (u, u) \geqslant 0.$$

Произведение $(u, u) = 0$ только для одного элемента множества $R$, называемого нулевым. Множество функций $R$ с введенным на нем скалярным произведением называется *функциональным гильбертовым пространством* $\mathscr{L}_2(V)$.

Неотрицательное число $N \equiv \|u\| = (u, u)^{1/2}$ называется *нормой функции* $u$. Функцию, норма которой равна единице, называют *нормированной*.

**Линейные функционалы и операторы.** Если каждому элементу $u$ на множестве $D \subset \mathscr{L}_2$ поставлено в соответствие некоторое число $F(u)$, то считают, что на множестве $D$ определен функционал $F$. Функционал называется линейным, если $D$ — линейное множество и $F(\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2) = \mu_1 F(u_1) + \mu_2 F(u_2)$.

Аналогично, если каждой функции $u$ из множества $D_A$ поставлена в соответствие одна и только одна функция $v \in \mathscr{L}_2$, то считают, что на множестве определен оператор $A$: $v = Au$. Множество $D_A$ называется *областью определения оператора* $A$, а множество $R_A$ всех функций $v$ — *областью значений этого оператора*. Таким образом, понятие оператора включает алгоритм преобразования $u$ в $v$ и область определения $D_A$, т. е. совокупность условий (в том числе граничных), которым должны удовлетворять функции $u$. Оператор $A$ считается линейным, если $D_A$ — линейное множество, и $A(\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2) = \mu_1 A u_1 + \mu_2 A u_2$. Оператор называется ограниченным, если он линейный, и

$$\|Au\| \leqslant C\|u\|, \quad C = \text{const}, \tag{П.20}$$

для всех $u \in D_A$. Наименьшее значение $C$, удовлетворяющее неравенству (П.20), называется *нормой ограниченного оператора* $A$ и обозначается $|A|$. Так как функция $v = Au$ принадлежит гильбертову пространству $\mathscr{L}_2$, можно составить скалярное произведение $(v, w)$, где $w \in L_2$. Оператор $\tilde{A}$, сопряженный с оператором $A$, вводится с помощью равенства

$$(Au, w) = (u, \tilde{A}w), \tag{П.21}$$

причем если функции $u \in D_A$ удовлетворяют граничным условиям $A_S u = F_S$, то функции $w \in D_{\tilde{A}}$ удовлетворяют сопряженным краевым условиям $\tilde{A}_S w = \tilde{F}_S$. Оператор $A$ называется *самосопряженным*, если $A = \tilde{A}$ и $D_A = D_{\tilde{A}}$. Из (П.21) следует, что коммутатор самосопряженного оператора $C_A = (Au, v) - (u, Av) = 0$ для всех $u$, $v \in D_A$, а скалярное произведение $(Au, u)$ вещественно.

Самосопряженный оператор $A$ считается положительным, если $(Au, u) \geqslant 0$, причем знак равенства имеет место только для нулевой функции, и положительно-определенным, если $(Au, u) \geqslant \gamma(u, u)$, где $\gamma > 0$ — постоянная, общая для всех $u \in D_A$. Аналогично вводятся понятия отрицательного и отрицательно-определенного операторов. Очевидно, если $A$ — отрицательный оператор, то $A' = \mu A$, где $\mu = -1$ — положительный оператор. Поэтому свойства отрицательных и положительных (отрицательно- и положительно-определенных) операторов одинаковы. Для них часто используется общее название — знакоопределенные операторы.

Нетривиальные решения уравнения (обобщенной задачи на собственные значения)

$$Au = \lambda G u, \tag{П.22}$$

где $G$ — весовая функция, называются *собственными функциями оператора* $A$, а соответствующие значения $\lambda$ — *собственными значениями*. Если оператор $A$ — самосопряженный, а функция $G$ действительна, то все его собственные значения действительны, а собственные функции ортогональны с весом $G$:

$$(G u_i u_j) = \int_V G u_i u_j \, dV = 0, \quad i \neq j.$$

## Приложение 3

## Уравнения силовых линий электромагнитного поля в регулярном волноводе

Для вывода уравнений силовых линий вектора **E** Е-волны в регулярном волноводе воспользуемся соотношением (6.20):

$$\frac{h_1^2 \, dx_1}{\partial \psi / \partial x_1} = \frac{h_2^2 \, dx_2}{\partial \psi / \partial x_2},$$

или

$$\frac{h_1^2}{h_2^2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\mathrm{d}x_1=\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\mathrm{d}x_2. \qquad (\text{П.23})$$

Представим функции $\psi$ и $h_1/h_2$ в виде произведения двух функций, зависящих только от координат $x_1$ и $x_2$:

$$\psi(x_1, x_2)=X_1(x_1)X_2(x_2);\ h_1/h_2=H_1(x_2)H_2(x_2).$$

Подставив эти выражения в (П.23), разделим переменные в этом уравнении. В результате получим

$$H_1^2H_2^2X_1X_2'\mathrm{d}x_1=X_1'X_2\mathrm{d}x_2$$

или

$$H_1^2\frac{X_1}{X_1'}\mathrm{d}x_1=H_2^{-2}\frac{X_2}{X_2'}\mathrm{d}x_2.$$

Решение полученного уравнения имеет вид

$$\int H_1^2\frac{X_1}{X_1'}\mathrm{d}x_1-\int H_2^{-2}\frac{X_2}{X_2'}\mathrm{d}x_2=C_1. \qquad (\text{П.24})$$

Чтобы получить другое уравнение, перейдем в выражениях (6.8) и (6.10) от комплексных амплитуд к мгновенным значениям и положим $\alpha=0$:

$$E_1=\frac{\beta}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\sin(\omega t-\beta z);$$

$$E_z=k_c^2\psi\cos(\omega t-\beta z).$$

Отсюда

$$\frac{h_1\mathrm{d}x_1}{\frac{\beta}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\sin(\omega t-\beta z)}=\frac{\mathrm{d}z}{k_c^2\psi\cos(\omega t-\beta z)}.$$

Разделив переменные в полученном равенстве, найдем

$$\frac{k_c^2}{\beta}h_1^2\frac{\psi\mathrm{d}x_1}{\partial\psi/\partial x_1}=\mathrm{tg}(\omega t-\beta z)\,\mathrm{d}z. \qquad (\text{П.25})$$

Проинтегрировав это соотношение, получим второе уравнение силовой линии

$$k_c^2\int\frac{h_1^2\psi}{\partial\psi/\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\ln\cos(\omega t-\beta z)=C_2. \qquad (\text{П.26})$$

Система уравнений (П.24), (П.26) описывает семейство пространственных кривых, перемещающееся вдоль оси $z$ со скоростью $v_\phi=\omega/\beta$, равной фазовой скорости волны.

Воспользовавшись свойством перестановочной двойственности, легко показать, что эта же система уравнений описывает силовые линии вектора **H** Н-волны.

## Приложение 4

## Стандартные прямоугольные волноводы

| Обозначение* волновода | Размеры поперечного сечения, мм² | Рабочий диапазон частот, ГГц | Обозначение* волновода | Размеры поперечного сечения, мм² | Рабочий диапазон частот, ГГц |
|---|---|---|---|---|---|
| $R_5$ | 457×229 | 0,41—0,625 | $R_{12}$ | 196×98 | 0,96—1,45 |
| $R_6$ | 381×191 | 0,49—0,75 | $R_{14}$ | 165×83 | 1,12—1,7 |
| $R_8$ | 292×146 | 0,64—0,96 | $R_{18}$ | 131×65 | 1,45—2,2 |
| $R_9$ | 248×124 | 0,75—1,12 | $R_{22}$ | 109×55 | 1,7—2,6 |

| Обозначение* волновода | Размеры поперечного сечения, мм² | Рабочий диапазон частот, ГГц | Обозначение* волновода | Размеры поперечного сечения, мм² | Рабочий диапазон частот, ГГц |
|---|---|---|---|---|---|
| $R_{26}$ | $86\times43$ | 2,2—3,3 | $R_{180}$ | $13\times5,8$ | 15—22 |
| $R_{32}$ | $72\times34$ | 2,6—3,95 | $R_{220}$ | $11\times4,3$ | 18—26,5 |
| $R_{40}$ | $59\times29$ | 3,3—4,9 | $R_{260}$ | $8,6\times4,3$ | 22—33 |
| $R_{48}$ | $48\times22$ | 3,95—5,85 | $R_{320}$ | $7,1\times3,6$ | 26,5—40 |
| $R_{58}$ | $40\times20$ | 4,9—7,05 | $R_{400}$ | $5,7\times2,9$ | 33—50 |
| $R_{70}$ | $35\times16$ | 5,85—8,2 | $R_{500}$ | $4,8\times2,4$ | 40—60 |
| $R_{84}$ | $29\times13$ | 7,05—10,0 | $R_{620}$ | $3,8\times1,9$ | 50—75 |
| $R_{100}$ | $23\times10$ | 8,2—12,4 | $R_{740}$ | $3,1\times1,6$ | 60—90 |
| $R_{120}$ | $19\times9,5$ | 10—15 | $R_{900}$ | $2,4\times1,3$ | 75—110 |
| $R_{140}$ | $16\times7,9$ | 12,4—18,0 | $R_{1200}$ | $2,0\times1,0$ | 90—140 |

* Обозначения Международной электротехнической комиссии.

## Приложение 5

## Некоторые сведения о функциях Бесселя

Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''+z^{-1}y'+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)y=0 \qquad (\text{П.27})$$

называется уравнением Бесселя. Его общее решение записывается в виде

$$y=A_1J_\nu(z)+A_2N_\nu(z), \qquad (\text{П.28})$$

где $J_\nu(z)$ и $N_\nu(z)$ — функции Бесселя первого и второго рода порядка $\nu$. Они определяются следующим образом:

$$J_\nu(z)=\frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{iz}{2}\right)^{2k};$$

$$N_\nu(z)=\frac{1}{\sin\nu\pi}\left[J_\nu(z)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(z)\right],$$

если $\nu$ — нецелое число;

$$N_m(z)=\lim_{\nu\to m}N_\nu=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(z)-(-1)^m\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(z)\right]_{\nu=m},$$

если $m$ — целое число.

В этих выражениях $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера.

Графики функций $J_m(x)$ и $N_m(x)$ для целых значений $m$ и действительного аргумента $(z=x)$ показаны на рис. П.1.

Линейные комбинации функций Бесселя

$$H_\nu^{(1)}(z)=J_\nu(z)+iN_\nu(z);$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=J_\nu(z)-iN_\nu(z)$$

называются *функциями Бесселя третьего рода* или *функциями Ганкеля*. Они также удовлетворяют уравнению (П.27). Для больших $z(|z|\gg1)$ справедливы асимптотические представления:

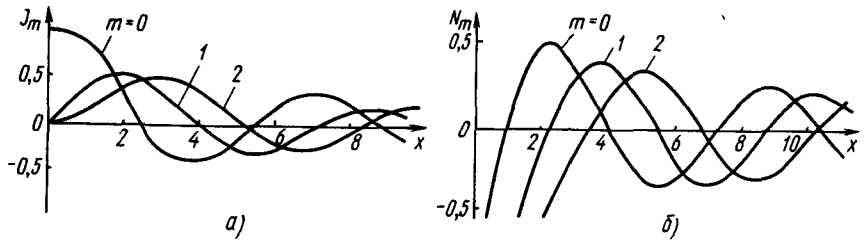



Рис. П.1. Графики функции Бесселя первого (*а*) и второго (*б*) рода

$$H_\nu^{(1)}(z)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}; \tag{П.29}$$

$$H_\nu^{(2)}(z)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}. \tag{П.30}$$

Функции Бесселя обладают следующими свойствами:

$$Z_{-m}(z)=(-1)^m Z_m(z),\ \text{если } m\text{—целое число}$$

$$zZ_{\nu-1}(z)-zZ_{\nu+1}(z)=2\nu Z_\nu(z);$$

$$Z_{\nu-1}(z)-Z_{\nu+1}(z)=2Z'_\nu(z);$$

$$Z'_\nu(z)=-\frac{\nu}{z}Z_\nu(z)+Z_{\nu-1}(z)=\frac{\nu}{z}Z_\nu(z)-Z_{\nu+1}(z);$$

$$Z'_0(z)=-Z_1(z);\ Z'_1(z)=Z_0(z); \tag{П.31}$$

$$\int z|Z_\nu(\alpha z)|^2\,dz=\frac{z^2}{2}\left[|Z_\nu(\alpha z)|^2-Z_{\nu-1}(\alpha z)Z_{\nu+1},\ (\alpha z)\right], \tag{П.32}$$

где $Z_\nu$—любая из функций Бесселя или Ганкеля.

Функции Бесселя от мнимого аргумента

$$I_\nu(z)=e^{-\nu\frac{\pi}{2}i}J_\nu(iz);$$

$$K_\nu(z)=-\frac{\pi i}{2}e^{\nu\frac{\pi}{2}i}H_\nu^{(1)}(iz)$$

называют *модифицированными функциями Бесселя первого и второго рода.* Функцию $K_\nu(z)$ называют также функцией Макдональда. Эти функции удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$z^2y''+zy'-(z^2+\nu^2)y=0.$$

Для действительного $z$ $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ принимают действительные значения. Графики этих функций показаны на рис. П.2.

Для модифицированных функций Бесселя справедливы следующие соотношения:

$$I_{\nu-1}(z)-I_{\nu+1}(z)=\frac{2\nu}{z}I_\nu(z);$$

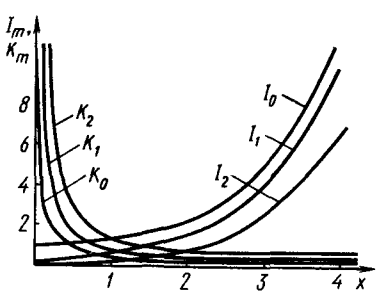



Рис. П.2. Графики модифицированных функций Бесселя первого и второго рода

$$K_{\nu-1}(z)-K_{\nu+1}(z)=-\frac{2\nu}{z}K_\nu(z);$$

$$2I'_\nu(z)=I_{\nu-1}(z)+I_{\nu+1}(z);$$

$$-2K'_\nu(z)=K_{\nu-1}(z)+K_{\nu+1}(z);$$

$$I'_0(z)=I_1(z);\quad K'_0(z)=-K_1(z);$$

$$\int z|I_\nu(\alpha z)|^2\,dz=\frac{z^2}{2}\left[|I_\nu(\alpha z)|^2+I_{\nu-1}(\alpha z)\,I_{\nu+1}(\alpha z)\right].$$

## Приложение 6

### Расчет индуктивности петли связи

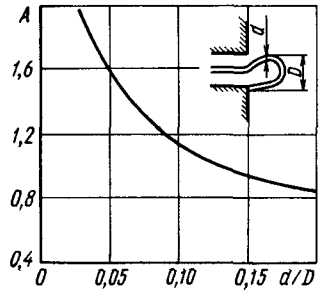



Рис. П.3. График для расчета индуктивности петли связи

Индуктивность [нГн] круглого витка (петли) диаметром $D$, выполненного из круглого проводника диаметра $d$, $L=0{,}19+4{,}6\lg D/d$, $D>16d$. Индуктивность такого же витка, установленного в резонаторе вблизи его стенки, $L=AD$, где $A$ — коэффициент, зависящий от отношения $D/d$ (рис. П.3); $D$ — в мм; $L$ — в нГн.

## Приложение 7

### Теорема Фостера

Рассмотрим двухполюсник без потерь, возбуждаемый электромагнитными колебаниями с круговой частотой ω (см. рис. 17.1). Его электромагнитное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}=-i\omega\mu\dot{\mathbf{H}};\qquad(\text{П.33})$$

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}^*=-i\omega\varepsilon\dot{\mathbf{E}}^*\qquad(\text{П.34})$$

(так как потери отсутствуют, ε и μ — действительные величины).

Пусть круговая частота получит малое приращение dω, что приведет к соответствующим изменениям $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$. На новой частоте уравнения (П.33) и (П.34) примут вид

$$\operatorname{rot}(\dot{\mathbf{E}}+d\dot{\mathbf{E}})=-i(\omega+d\omega)\mu(\dot{\mathbf{H}}+d\dot{\mathbf{H}});$$

$$\operatorname{rot}(\dot{\mathbf{H}}^*+d\dot{\mathbf{H}}^*)=-i(\omega+d\omega)\varepsilon(\dot{\mathbf{E}}^*+d\dot{\mathbf{E}}^*).$$

Вычтя из этих уравнений соотношения (П.33), (П.34) и пренебрегая членами второго порядка малости, получим

$$\operatorname{rot}d\dot{\mathbf{E}}=-i\omega\mu d\dot{\mathbf{H}}^*-i\mu\dot{\mathbf{H}}^*d\omega;$$

$$\operatorname{rot}d\dot{\mathbf{H}}^*=-i\omega\varepsilon d\dot{\mathbf{E}}^*-i\varepsilon\dot{\mathbf{E}}^*d\omega.$$

Умножим скалярно первое из этих уравнений на $\dot{\mathbf{H}}^*$, а второе — на $\dot{\mathbf{E}}$:

$$\dot{\mathbf{H}}^*\operatorname{rot}d\dot{\mathbf{E}}=-i\omega\mu\dot{\mathbf{H}}^*d\dot{\mathbf{H}}-i\mu\dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{H}}^*d\omega;\qquad(\text{П.35})$$

$$\dot{\mathbf{E}}\operatorname{rot}d\dot{\mathbf{H}}^*=-i\omega\varepsilon\dot{\mathbf{E}}d\dot{\mathbf{E}}^*-i\varepsilon\dot{\mathbf{E}}\dot{E}^*d\omega.\qquad(\text{П.36})$$

Аналогично умножим равенство (П.33) на $d\dot{\mathbf{H}}^*$, а (П.34) на $d\dot{\mathbf{E}}$:

$$d\dot{\mathbf{H}}^*\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}=-i\omega\mu\dot{\mathbf{H}}d\dot{\mathbf{H}}^*;\qquad(\text{П.37})$$

$$d\dot{\mathbf{E}}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}^*=-i\omega\varepsilon\dot{\mathbf{E}}^*d\dot{\mathbf{E}}.\qquad(\text{П.38})$$

Вычислим разность выражений (П.35) и (П.38)

$$\dot{\mathbf{H}}^*\operatorname{rot}d\dot{\mathbf{E}}-d\dot{\mathbf{E}}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}^*=-i\omega\mu\dot{\mathbf{H}}^*d\dot{\mathbf{H}}-i\mu\dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{H}}^*d\omega+i\omega\varepsilon\dot{\mathbf{E}}^*d\dot{\mathbf{E}}.$$

Вычтем уравнение (П.37) из (П.36). В результате получим

$$\dot{\mathbf{E}}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{d}\dot{\mathbf{H}}^{*}-\mathrm{d}\dot{\mathbf{H}}^{*}\,\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{E}}=-\mathrm{i}\omega\varepsilon\dot{\mathbf{E}}\mathrm{d}\dot{\mathbf{E}}^{*}-\mathrm{i}\varepsilon\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{E}}^{*}\mathrm{d}\omega+\mathrm{i}\omega\mu\dot{\mathbf{H}}\mathrm{d}\dot{\mathbf{H}}^{*}.$$

Сложим эти соотношения, преобразуем левую часть полученного равенства с помощью (П.7) и проинтегрируем его по объему $V$. Использовав теорему Гаусса (П.12) и учтя, что на металле $\mathbf{E}_{\tau}=0$, запишем

$$\int_{S}\left([\dot{\mathbf{E}},\mathrm{d}\dot{\mathbf{H}}^{*}]-[\mathrm{d}\dot{\mathbf{E}},\dot{\mathbf{H}}^{*}]\right)\mathrm{d}\mathbf{S}=\mathrm{i}\mathrm{d}\omega\int_{V}\left(\mu|\dot{\mathbf{H}}|^{2}+\varepsilon|\dot{\mathbf{E}}|^{2}\right)\mathrm{d}V, \qquad (\text{П.39})$$

где $S$ — площадь поперечного сечения (плоскость отсчета фаз) линии передачи, соединяющей двухполюсник с внешней цепью; $\mathrm{d}\mathbf{S}$ — элемент площади поперечного сечения линии передачи, направленный из двухполюсника, т. е. в сторону отрицательных значений оси $z$.

Учитывая (15.3), поставим в соответствие напряженности электрического поля $\dot{\mathbf{E}}$ напряжение $\dot{U}$, а напряженности магнитного поля $\dot{\mathbf{H}}$ — ток $\dot{I}$. Используя (15.7), запишем

$$\int_{S}[\dot{\mathbf{E}},\mathrm{d}\dot{\mathbf{H}}^{*}]\mathrm{d}\mathbf{S}=-\dot{U}\mathrm{d}\dot{I}^{*};$$

$$\int_{S}[\mathrm{d}\dot{\mathbf{E}},\dot{\mathbf{H}}^{*}]\mathrm{d}\mathbf{S}=-\mathrm{d}\dot{U},\ \dot{I}^{*}.$$

Знак минус в правой части этих выражений обусловлен направлением вектора $\mathrm{d}\mathbf{S}$. Подставив записанные выражения в (П.39), получим

$$\dot{U}\mathrm{d}\dot{I}^{*}-\mathrm{d}\dot{U}\dot{I}^{*}=-4\mathrm{i}W\mathrm{d}\omega,$$

где $W$ — энергия, запасенная в двухполюснике. По определению,

$$\dot{U}=Z\dot{I};\quad \mathrm{d}\dot{U}=\mathrm{d}Z\dot{I}+Z\mathrm{d}\dot{I}.$$

Отсюда

$$Z\dot{I}\mathrm{d}\dot{I}^{*}-\mathrm{d}Z\dot{I}\dot{I}^{*}-Z\dot{I}^{*}\mathrm{d}\dot{I}=-4\mathrm{i}W\mathrm{d}\omega,$$

или

$$|\dot{I}|^{2}\mathrm{d}Z=4\mathrm{i}W\mathrm{d}\omega. \qquad (\text{П.40})$$

Входное сопротивление двухполюсника без потерь — чисто реактивная величина: $Z=\mathrm{i}X$. Таким образом, из (П.40) следует, что $\mathrm{d}X/\mathrm{d}\omega=4W/|I|^{2}$. Так как величины, стоящие в правой части этого равенства, положительны, из него следует, что $\mathrm{d}X/\mathrm{d}\omega>0$, что и требовалось доказать.

## Приложение 8

## Некоторые сведения из матричной алгебры

Матрицей

$$\mathbf{A}=[a_{ik}]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1} & a_{m2}\ldots a_{mn}\end{bmatrix}$$

называют прямоугольную таблицу из действительных или комплексных чисел $a_{ik}$, с которой можно производить математические действия по определенным правилам. Числа $a_{ik}$, $i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, n$ называются *элементами матрицы* $\mathbf{A}$. Элемент $a_{ik}$ расположен на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца. Считают, что матрица $\mathbf{A}$ имеет размер $m\times n$, где $m$ — число строк, а $n$ — число столбцов. Матрица

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix},$$

имеющая один столбец, называется *вектором-столбцом*, а матрица

$$\mathbf{Y}=[y_1, y_2, \ldots, y_n],$$

имеющая одну строку,—*вектором-строкой*.

Матрица, имеющая размерность $m \times m$, называется *квадратной*. Если у квадратной матрицы все элементы $a_{ik}=0$, $i \neq k$, то она называется *диагональной*.

Определены следующие действия над матрицами.

1. Матрица $\mathbf{C}$ является суммой матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ ($\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$), если ее элементы $c_{ik}=a_{ik}+b_{ik}$. Оба слагаемых должны иметь одинаковую размерность, равную размерности суммы.

2. *Произведением матрицы* $\mathbf{A}$ *на скаляр* $\alpha$ называют матрицу $\mathbf{C}=\alpha\mathbf{A}$, элементы которой вычисляются по правилу $c_{ik}=\alpha a_{ik}$. Очевидно, что матрицы $\mathbf{C}$ и $\mathbf{A}$ имеют одинаковую размерность.

3. *Произведением матрицы* $\mathbf{A}$ *размерностью* $m \times n$ *на матрицу* $\mathbf{B}$ *размерностью* $n \times p$ называется матрица $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$ размерностью $m \times p$, элементы которой $c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$, т. е. элемент $c_{ik}$ произведения равен сумме произведений элементов $i$-й строки матрицы $\mathbf{A}$ на соответствующие элементы $k$-го столбца матрицы $\mathbf{B}$. При этом размерности матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ должны быть согласованными (число столбцов первого сомножителя должно быть равно числу строк второго). Из существования произведения $\mathbf{AB}$ не следует существование произведения $\mathbf{BA}$.

Для квадратных матриц существуют оба произведения $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{BA}$. Их разность $\mathbf{AB}-\mathbf{BA}=\mathbf{C}_{\mathbf{AB}}$ — называют *коммутатором матриц* $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Если $\mathbf{C}_{\mathbf{AB}}=0$, то эти матрицы называют коммутирующими.

*Единичной* называется диагональная матрица $\mathbf{E}$, ненулевые элементы которой равны единице:

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Справедливы следующие равенства: $\mathbf{AE}=\mathbf{EA}=\mathbf{A}$.

Матрица $\mathbf{A}^T$ называется *транспонированной* по отношению к $\mathbf{A}=[a_{ik}]$, если ее столбцы совпадают со строками матрицы $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}^T=[a_{ki}]$. Квадратные матрицы, для которых $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$, называются *симметричными* (симметрическими).

*Сопряженная* (эрмитово-сопряженная) к $\mathbf{A}=[a_{ik}]$ матрица $\mathbf{A}^*$ определяется выражением $\mathbf{A}^*=[\overline{a_{ki}}]$, т. е. для получения сопряженной матрицы необходимо у исходной заменить строки столбцами и все элементы их комплексно-сопряженными значениями. Матрицы, для которых $\mathbf{A}^*=\mathbf{A}$, называются *эрмитовыми* (*самосопряженными*).

Квадратная матрица $\mathbf{A}$ называется *невырожденной*, если она имеет обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$, определяемую из условия $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$.

Если $\mathbf{A}\mathbf{A}^*=\mathbf{E}$, т. е. $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^*$, матрица $\mathbf{A}$ называется *унитарной*. Элементы унитарных матриц удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\overline{a_{ik}}=\delta_{jk}, \quad j, \ k=1, \ldots, \ m.$$

Матрицу $\mathbf{A}$ размерностью $m \times n$ можно разбить на подматрицы:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{A}_{ik}$ — прямоугольные матрицы меньших размеров. Такую матрицу называют *клеточной*. Действия над клеточными матрицами подчиняются тем же правилам, что и действия над обычными матрицами, если в качестве элементов клеточных матриц рассматривать подматрицы.

*Собственными числами квадратной матрицы* **A** называются те значения скалярного параметра $\lambda$, при которых матрица $\mathbf{B}=\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}$ является вырожденной. Совокупность собственных чисел образует *спектр матрицы* **A**. У матрицы порядка $m$ спектр содержит $m$ собственных чисел, некоторые из которых могут быть одинаковыми.

*Собственными векторами квадратной матрицы* **A** называются нетривиальные решения уравнения

$$\mathbf{AX}=\lambda_i\mathbf{X},$$

где $\lambda_i$, $i=1, \ldots, m$ — собственные числа; **X** — вектор-столбец. Каждому собственному числу $\lambda_i$ соответствует собственный вектор $\mathbf{X}_i$. Коммутирующие матрицы имеют общую систему собственных векторов.

Квадратная матрица **M**, столбцами которой служат собственные векторы матрицы **A**, называется *модальной*. Если все собственные числа матрицы **A** различны, то справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{D}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM};\quad \mathbf{A}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{DM},$$

где **D** — диагональная матрица, ненулевыми элементами которой служат собственные числа матрицы **A**.

## Приложение 9

### Диапазоны радиочастот по международному регламенту

| Номер диапазона | Границы по частоте и длине волны | Названия |
|---|---|---|
| 4 | 3 — 30 кГц | Очень низкие частоты (ОНЧ) |
| | 100 — 10 км | Мириаметровые волны |
| 5 | 30 — 300 кГц | Низкие частоты (НЧ) |
| | 10 — 1 км | Километровые волны |
| 6 | 300 — 3000 кГц | Средние частоты (СЧ) |
| | 1000 — 100 м | Гектометровые волны |
| 7 | 3 — 30 МГц | Высокие частоты (ВЧ) |
| | 100 — 10 м | Декаметровые волны |
| 8 | 30 — 300 МГц | Очень высокие частоты (ОВЧ) |
| | 10 — 1 м | Метровые волны |
| 9 | 300 — 3000 МГц | Ультравысокие частоты (УВЧ) |
| | 100 — 10 см | Дециметровые волны |
| 10 | 3 — 30 ГГц | Сверхвысокие частоты (СВЧ) |
| | 10 — 1 см | Сантиметровые волны |
| 11 | 30 — 300 ГГц | Крайне высокие частоты (КВЧ) |
| | 10 — 1 мм | Миллиметровые волны |
| 12 | 300 — 3000 ГГц | Гипервысокие частоты (ГВЧ) |
| | 1 — 0,1 мм | Децимиллиметровые волны |

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В.** Электромагнитные поля и волны.— М.: Советское радио, 1971.
2. **Левин Л.** Теория волноводов: Пер. с англ. / Под ред. В. И. Вольмана.— М.: Радио и связь, 1981.
3. **Волноводы** сложных сечений / Г. Ф. Заргано, В. П. Ляпин, В. С. Михалевский и др.— М.: Радио и связь, 1986.
4. **Справочник** по расчету и конструированию СВЧ полосковых устройств / С. И. Бахарев, В. И. Вольман, Ю. Н. Либ и др.; Под ред. В. И. Вольмана.— М.: Радио и связь, 1982.
5. **Семенов Н. А.** Техническая электродинамика.— М.: Связь, 1973.
6. **Глазер В.** Световодная техника: Пер. с нем. / Под ред. И. И. Гроднева.— М.: Энергоатомиздат, 1985.
7. **Силин Р. А., Сазонов В. П.** Замедляющие системы.— М.: Советское радио, 1966.
8. **Григорьев А. Д., Явкевич В. Б.** Резонаторы и резонаторные замедляющие системы СВЧ. Численные методы расчета и проектирования.— М.: Радио и связь, 1984.
9. **Диэлектрические** резонаторы / М. Е. Ильченко, В. Ф. Взятышев, Л. Г. Гассанов и др.; Под ред. М. Е. Ильченко.— М.: Радио и связь, 1989.
10. **Марчук Г. И.** Методы вычислительной математики.— М.: Наука, 1980.
11. **Сазонов Д. М., Гридин А. Н., Мищустин Б. А.** Устройства СВЧ.— М.: Высшая школа, 1981.
12. **Никольскяй В. В., Никольская Т. И.** Декомпозиционный подход к задачам электродинамики.— М.: Наука, 1983.
13. **Автоматизированное** проектирование устройств СВЧ / В. В. Никольский, В. П. Орлов, В. Г. Феоктистов и др.; Под ред. В. В. Никольского.— М.: Радио и связь, 1982.
14. **Малорацкий Л. Г., Явич Л. Р.** Проектирование и расчет СВЧ элементов на полосковых линиях.— М.: Советское радио, 1972.
15. **Хелзайн Дж.** Пассивные и активные цепи СВЧ: Пер. с англ.; Под ред. А. С. Галина.— М.: Радио и связь, 1981.
16. **Гуревич А. Г.** Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках.— М.: Наука, 1973.
17. **Вайнштейн Л. А.** Электромагнитные волны.— М.: Радио и связь, 1988.

## ОГЛАВЛЕНИЕ


Предисловие ..... 3
Введение ..... 5

**Часть первая**

**ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ**

**Глава 1. Основные уравнения классической электродинамики** ..... 8

§ 1.1. Уравнение Максвелла ..... 8
§ 1.2. Электромагнитные свойства сред ..... 10
§ 1.3. Граничные условия ..... 13
§ 1.4. Энергия и мощность электромагнитного поля ..... 15
§ 1.5. Уравнения Максвелла в комплексной форме ..... 17
§ 1.6. Баланс энергии гармонических колебаний электромагнитного поля ..... 19
§ 1.7. Лемма Лоренца и теорема взаимности ..... 21
§ 1.8. Задачи электродинамики и условия единственности их решения ..... 22

**Глава 2. Плоские электромагнитные волны** ..... 26

§ 2.1. Общие свойства плоских однородных волн ..... 26
§ 2.2. Поляризация волн ..... 30
§ 2.3. Стоячие волны ..... 32
§ 2.4. Волны с произвольным направлением распространения ..... 33
§ 2.5. Отражение и преломление электромагнитных волн ..... 34
§ 2.6. Полное внутреннее отражение ..... 37
§ 2.7. Распространение электромагнитных волн в поглощающих средах ..... 38

**Глава 3. Электромагнитные волны в гиротропных средах** ..... 42

§ 3.1. Анизотропные среды. Гиротропия ..... 42
§ 3.2. Продольное распространение электромагнитных волн в гиротропной среде ..... 45
§ 3.3. Поперечное распространение электромагнитных волн в гиротропной среде ..... 48

**Глава 4. Излучение электромагнитных волн** ..... 52

§ 4.1. Электродинамические потенциалы и векторы Герца ..... 52
§ 4.2. Общие свойства поля излучения. Излучение электрического диполя ..... 55

**Часть вторая**

**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ЭЛЕМЕНТОВ И УСТРОЙСТВ СВЧ**

**Глава 5. Распространение электромагнитных волн в направляющих системах** ..... 60

§ 5.1. Классификация линий передачи ..... 60

§ 5.2. Распространение волн между двумя параллельными плоскостями ... 61
§ 5.3. Скалярные уравнения Гельмгольца для линии передачи ... 64
§ 5.4. Общее решение трехмерного уравнения Гельмгольца ... 65
§ 5.5. Дисперсия в линиях передачи. Явление отсечки ... 68

**Глава 6. Электромагнитное поле свободных волн в линии передачи** ... 72

§ 6.1. Общие свойства электромагнитного поля в линии передачи ... 72
§ 6.2. Передаваемая мощность ... 75
§ 6.3. Условия на границе раздела сред ... 76
§ 6.4. Затухание электромагнитных волн в линии передачи ... 79
§ 6.5. Ортогональность волн в линии передачи ... 82

**Глава 7. Односвязные закрытые линии передачи** ... 87

§ 7.1. Прямоугольный волновод ... 87
§ 7.2. Круглый волновод ... 94
§ 7.3. Волноводы со сложной формой поперечного сечения ... 98

**Глава 8. Многосвязные линии передачи** ... 102

§ 8.1. Основные свойства Т-волн ... 102
§ 8.2. Нормальные Т-волны ... 106
§ 8.3. Передаваемая мощность и затухание ... 108
§ 8.4. Двухпроводная симметричная линия передачи ... 110
§ 8.5. Коаксиальная линия передачи ... 111
§ 8.6. Радиальная линия передачи ... 115
§ 8.7. Полосковые линии передачи ... 116
§ 8.8. Щелевые полосковые линии передачи ... 119

**Глава 9. Открытые линии передачи** ... 122

§ 9.1. Общие свойства диэлектрических волноводов ... 122
§ 9.2. Плоский диэлектрический волновод ... 124
§ 9.3. Круглый диэлектрический волновод ... 129
§ 9.4. Структура и параметры диэлектрических волноводов. Световоды ... 132
§ 9.5. Квазиоптические линии передачи ... 135

**Глава 10. Замедляющие системы** ... 137

§ 10.1. Основные свойства медленных волн ... 137
§ 10.2. Распространение волн в периодических структурах. Пространственные гармоники ... 140
§ 10.3. Характеристики и параметры замедляющих систем ... 144
§ 10.4. Основные типы замедляющих систем ... 147

**Глава 11. Объемные резонаторы** ... 162

§ 11.1. Основные типы объемных резонаторов ... 162
§ 11.2. Общие свойства свободных колебаний в резонаторе ... 166
§ 11.3. Параметры объемных резонаторов ... 169
§ 11.4. Закрытые волноводные резонаторы ... 172
§ 11.5. Закрытые аксиально-симметричные резонаторы ... 182
§ 11.6. Открытые диэлектрические резонаторы ... 188
§ 11.7. Открытые волноводные резонаторы ... 190
§ 11.8. Открытые зеркальные резонаторы ... 195

**Глава 12. Вынужденные колебания и волны в резонаторах и линиях передачи** ... 198

§ 12.1. Возбуждение волн в волноводах ... 198
§ 12.2. Элементы возбуждения ... 200
§ 12.3. Возбуждение колебаний в объемных резонаторах ... 203

§ 12.4. Расчет вынужденных волн (колебаний) в линиях передачи и резонаторах ... 207

**Глава 13. Нерегулярные электродинамические системы** ... 212

§ 13.1. Теория возмущений ... 212
§ 13.2. Неоднородности в линиях передачи ... 217

**Глава 14. Численные методы решения внутренних краевых задач электродинамики** ... 223

§ 14.1. Постановка задач и основные этапы их решения ... 223
§ 14.2. Основные классы внутренних задач электродинамики и их математическая формулировка ... 225
§ 14.3. Методы дискретизации и решения матричных задач ... 228
§ 14.4. Расчет электромагнитного поля и параметров регулярных волноводов и аксиально-симметричных резонаторов ... 234
§ 14.5. Программы численного решения внутренних задач электродинамики ... 236

## Часть третья

## ОСНОВНЫЕ ТЕОРИИ СВЧ-ЦЕПЕЙ

**Глава 15. Эквивалентные линии передачи** ... 240

§ 15.1. Эквивалентные параметры линии передачи ... 240
§ 15.2. Коэффициенты отражения и стоячей волны. Входное сопротивление линии передачи ... 243
§ 15.3. Круговая номограмма полных сопротивлений ... 246
§ 15.4. Основные режимы работы линии передачи ... 250
§ 15.5. Согласование в линиях передачи ... 252

**Глава 16. Методы анализа многополюсников СВЧ** ... 256

§ 16.1. Волновые матрицы ... 256
§ 16.2. Основные свойства матриц рассеяния ... 262
§ 16.3. Симметричные многополюсники ... 265
§ 16.4. Метод спектрального разложения ... 266
§ 16.5. Анализ устройств СВЧ с помощью ЭВМ. Метод декомпозиции ... 267

**Глава 17. Взаимные устройства СВЧ** ... 274

§ 17.1. Двухполюсники ... 274
§ 17.2. Простейшие четырехполюсники ... 279
§ 17.3. Фильтры СВЧ ... 283
§ 17.4. Устройства широкополосного согласования ... 285
§ 17.5. Шестиполюсники ... 287
§ 17.6. Направленные ответвители ... 292
§ 17.7. Мостовые устройства СВЧ ... 298

**Глава 18. Ферритовые устройства СВЧ** ... 303

§ 18.1. Магнитные свойства ферритовых материалов ... 303
§ 18.2. Фазовращатели ... 307
§ 18.3. Вентили ... 310
§ 18.4. Циркуляторы ... 312
§ 18.5. Управляемые фильтры ... 314
§ 18.6. Устройства на магнитостатических волнах ... 316

Заключение ... 319

Приложения ... 321

Приложение 1. Некоторые сведения из векторного анализа ... 321

Приложение 2. Некоторые сведения из функционального анализа ..... 322
Приложение 3. Уравнения силовых линий электромагнитного поля в регулярном волноводе ..... 323
Приложение 4. Стандартные прямоугольные волноводы ..... 324
Приложение 5. Некоторые сведения о функциях Бесселя ..... 325
Приложение 6. Расчет индуктивности петли связи ..... 327
Приложение 7. Теорема Фостера ..... 327
Приложение 8. Некоторые сведения из матричной алгебры ..... 328
Приложение 9. Диапазон радиочастот по международному регламенту ... 330
Список литературы ..... 331

*Учебное издание*

**Григорьев** Андрей Дмитриевич

**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И ТЕХНИКА СВЧ**

Заведующий редакцией В И Трефилов
Редактор Е М Романчук
Младший редактор С А Пацева
Художественный редактор Т М Скворцова
Технический редактор З В Нуждина
Корректор Г Н Буханова

ИБ № 8220

Изд № ЭР-507 Сдано в набор 29 12 89 Подп в печать 06 09 90 Формат $60 \times 88^{1}/_{16}$
Бум офс № 2 Гарнитура таймс Печать офсетная Объем 20,58 усл печ л
20,58 усл кр-отт 18,94 уч-изд л Тираж 15000 экз Зак № 3539 Цена 95 коп

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул, д 29/14

Отпечатано с диапозитивов ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» Государственного комитета СССР по печати 113054, Москва, Валовая, 28 в Московской типографии № 4 Государственного комитета СССР по печати, 129041, Москва, Б Переяславская, 46 Зак N 611