А. М. ФЕДОРЧЕНКО

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

КЛАССИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Допущено Министерством
высшего и среднего
специального образования УССР
в качестве учебного пособия
для студентов
физических специальностей вузов

КИЕВ
ГОЛОВНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ
«ВЫЩА ШКОЛА»
1988

Часть I

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Глава 1

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

§ 1. Закон Кулона. Принцип суперпозиции

В основе любой физической теории лежат фундаментальные законы, которые могут быть установлены только экспериментальным путем и не являются следствием других законов. Как правило, эти законы можно записывать в виде математических соотношений, которые являются теоретической основой для объяснения наблюдаемых явлений или предсказания новых.

Одним из фундаментальных законов классической электродинамики является закон Кулона, полученный путем обобщения опытных фактов и касающийся электрической силы взаимодействия между заряженными телами. В отличие от гравитационной силы, действующей между любыми телами, электрическая сила проявляется только после некоторого процесса электризации, в результате которого тела начинают взаимодействовать между собой. Необходимо отметить, что при электризации тело приобретает электрический заряд, т. е. способность притягиваться или отталкиваться от другого наэлектризованного тела. Простейший процесс электризации, известный еще с древних времен, заключается в натирании шелком или фланелью стеклянных шариков. Опыт показывает, что два наэлектризованных таким путем шарика отталкиваются друг от друга. Силу отталкивания можно измерить, подвесив два шарика на некотором расстоянии друг от друга (рис. 1) и измерив угол отклонения линии подвеса AC от вертикали AB. Связь между электрической силой F и углом отклонения α можно найти так. На шарик C действует сила тяжести mg, электрическая сила F со стороны шарика C_1, а также сила реакции натяжения нити R. Из условия равновесия находим

$$R\cos\alpha = mg, \quad R\sin\alpha = F.$$

Исключая из этих уравнений силу реакции, получаем

$$F = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Итак, измерив угол α и зная вес шарика mg, можно определить электрическую силу F. Такой метод не является достаточно точным и совершенным, но указывает на принципиальную возможность количественного измерения этой силы.

Опыт показывает, что при неизменном расстоянии между зарядами C и C_1 электрическая сила зависит от степени электризации заряда C,

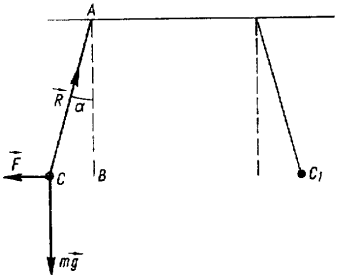


Рис. 1.

которую можно изменять, варьируя, например, время электризации. Если теперь один из зарядов выбрать в качестве эталона, то всем другим можно приписать значение электрического заряда, во сколько раз большее (или меньшее), чем заряд эталона, во сколько раз больше (или меньше) электрическая сила F, действующая на них со стороны фиксированного заряда C_1. Таким образом, сила F пропорциональна степени электризации тела. Можно характеризовать ее некоторым числом q, которое назовем электрическим зарядом.

Электрический заряд — это новая фундаментальная физическая величина, которую нельзя определить через другие величины (длину, время, массу, силу и др.), поэтому ее определение требует введения эталона.

На основании опыта, условия которого были подобраны так, чтобы расстояние между различными зарядами каждый раз было одинаковым, экспериментально установлен следующий факт. Если обозначить через F_{kl} силу взаимодействия между зарядами q_k и q_l, то опыт показывает, что $F_{13} : F_{23} = q_1 : q_2$, $F_{14} : F_{24} = q_1 : q_2$, ... Следовательно, $\frac{F_{1l}}{q_1} = \frac{F_{2l}}{q_2}$. Следовательно, отношение двух электрических зарядов может быть определено путем измерения их сил взаимодействия с любым третьим зарядом. Другими словами, это отношение не зависит от значения третьего заряда, что математически можно выразить равенством

$$q_i : q_j = F_{ik} : F_{jk}. \tag{1.1}$$

Из формулы (1.1) следует, что отношение зарядов q_j и q_l можно определить из любого количества независимых измерений и каждый раз получится один и тот же результат. Совпадение результатов этих измерений означает, что каждому заряженному телу может быть приписано постоянное число q, которое мы назвали электрическим зарядом.

Из равенства (1.1)

$$\frac{F_{ik}}{q_i} = \frac{F_{jk}}{q_j}, \quad \frac{F_{jk}}{q_k} = \frac{F_{jl}}{q_l},$$

что эквивалентно

$$\frac{F_{ik}}{q_i q_k} = \frac{F_{jk}}{q_j q_k} = \frac{F_{ij}}{q_i q_j}.$$

Таким образом, отношение силы взаимодействия двух заряженных частиц, находящихся на фиксированном расстоянии друг от друга, к произведению их зарядов одинаково для любой пары частиц, и, следовательно, это отношение может зависеть только от расстояния между ними:

$$F_{ij} = q_i q_j \cdot f(r_{ij}).$$

На рис. 1 изображен случай, когда заряды отталкиваются, однако между зарядами существуют также и силы притяжения. Причем опыт показывает, что если два заряда притягиваются к третьему, то, в отличие от гравитационного взаимодействия, они обязательно отталкиваются друг от друга. Это означает, что, в отличие от гравитационных масс, существуют электрические заряды противоположных знаков.

Считая электрический заряд C_1 положительным, в случае, изображенном на рис. 1, второму заряду C следует приписать также положительный заряд. Если же какой-то другой заряд притягивается к заряду C_1, то опыт показывает, что он будет притягиваться и к заряду C и поэтому его электрический заряд следует считать отрицательным.

Измеряя зависимость электрической силы от расстояния между двумя фиксированными зарядами, Ш. Кулон установил (1785 г.), что эта сила обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними

$$f(r_{ij}) = \frac{\varkappa}{r_{ij}^2}.$$

Сформулировать *закон Кулона* можно так: между двумя заряженными частицами в вакууме действует сила притяжения или отталкивания, пропорциональная произведению их зарядов и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними:

$$\vec{F}_{ij} = \varkappa \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2}. \tag{1.2}$$

Здесь $\varkappa = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. Численное значение *электрической постоянной* ε_0 зависит от выбора заряда и будет определено в § 6.

Формула (1.2) не указывает направления сил. Если учесть что эти силы должны удовлетворять третьему закону Ньютона, то получим

$$\vec{F}_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} = -\frac{dU}{dr_{ij}} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} = -\vec{\nabla}_i U, \tag{1.3}$$

где $U(r_{ij}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2}$ — потенциальная энергия взаимодействия двух зарядов.

Из формулы (1.3) следует, что электрическую силу, которая является векторной величиной и поэтому задается тремя функциями координат, можно задать с помощью одной скалярной функции $U(\vec{r})$.

Определим *электрический потенциал* $\varphi_i(\vec{r})$, создаваемый точечной частицей с зарядом q_i, находящейся в некоторой точке пространства

$\vec{r}_i$, формулой

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}, \qquad (1.4)$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки пространства, которую принято называть *точкой наблюдения*. Электрический потенциал зависит только от значения данного заряда и его положения в пространстве и не зависит от присутствия других зарядов.

Если в точке наблюдения $\vec{r}$ поместить точечный заряд q (пробный заряд), то тогда потенциальная энергия взаимодействия зарядов q и q_i выразится формулой

$$U(\vec{r}) = q\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}.$$

При этом сила, действующая на пробный заряд q, согласно (1.3),

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -q\vec{\nabla}\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}. \qquad (1.5)$$

Если имеется N заряженных частиц, то сила, с которой эти частицы действуют на пробный заряд q, помещенный в точку наблюдения $\vec{r}$, как и в классической механике, равна сумме всех сил, действующих со стороны отдельных частиц:

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} \equiv q\vec{E}. \qquad (1.6)$$

Вектор $\vec{E}$ в формуле (1.6) определяется следующим образом:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\vec{\nabla}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} = -\vec{\nabla}\varphi$$

и называется *напряженностью электрического поля*.

Таким образом, напряженность электрического поля, создаваемого произвольной системой заряженных частиц, равна сумме напряженностей, создаваемых отдельными частицами. Это утверждение, называемое *принципом суперпозиции*, находится в согласии с экспериментальными фактами и является одним из фундаментальных законов классической механики и электродинамики, которым мы неоднократно будем пользоваться в дальнейшем.

Очевидно, что вектор $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\operatorname{rot}\vec{\nabla}\varphi = 0, \qquad (1.7)$$

и поэтому электрическое поле, создаваемое неподвижным зарядом, называют потенциальным, так как его можно выразить через скалярный потенциал φ. В дальнейшем (§ 7) мы обнаружим, что электрическое поле

может быть создано также переменным магнитным полем. В этом случае оно уже будет удовлетворять не условию (1.7), а уравнению (7.4).

В соответствии с принципом суперпозиции, потенциал системы заряженных частиц также может быть представлен в виде суммы потенциалов отдельных зарядов (1.4):

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}. \qquad (1.8)$$

Если число частиц N достаточно велико, а расстояния между ними достаточно малы, то в формуле (1.8) можно перейти от суммы к интегралу. Для этого необходимо все пространство, занимаемое зарядами, разбить на малые объемы ΔV_i, заряды которых равны $\Delta q_i = \rho_i \Delta V_i$, где ρ_i — плотность заряда в объеме ΔV_i. Тогда получим

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{\Delta V_i\to 0}\sum_i\frac{\rho_i\Delta V_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r})\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \qquad (1.9)$$

Заметим, что при использовании ЭВМ для вычисления интегралов совершается обратный переход от интеграла к сумме. Естественно, что при переходе от суммы к интегралу допускается ошибка, которая уменьшается по мере увеличения числа заряженных частиц N при фиксированном объеме, занимаемом этими частицами, но при условии, что точка наблюдения $\vec{r}$ не совпадает ни с одной точкой пространства, в которой находится заряженная частица. Переход от дискретного распределения заряженных частиц к непрерывному распределению зарядов означает, что система многих частиц заменяется моделью сплошной среды. Следует отметить, что такая замена требует своего обоснования и в некоторых случаях может оказаться неоправданной.

Аналогичный переход от суммирования к интегрированию можно произвести и в других формулах. Вычислим, например, силу, действующую со стороны электрического поля $\vec{E}(\vec{r})$ на систему зарядов с объемной плотностью $\rho(\vec{r})$. Разбив систему зарядов с плотностью $\rho(\vec{r})$ на бесконечно малые заряды $\Delta q_i = \rho_i \Delta V_i$, найдем полную силу, действующую на эту систему:

$$\vec{F} = \sum_i \Delta q_i \vec{E}(\vec{r}_i) = \sum_i \rho(\vec{r}_i)\vec{E}(\vec{r}_i)\Delta V_i.$$

Переходя от суммирования к интегрированию, получаем

$$\vec{F} = \int \rho(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})\,dV. \qquad (1.10)$$

Величина $\vec{f} = \rho\vec{E}$ называется *объемной плотностью электрической силы*, действующей на объем, по которому производится интегрирование.

§ 2. Теорема Гаусса. Уравнение Пуассона

Рассмотрим интеграл по замкнутой поверхности от скалярного произведения вектора напряженности $\vec{E}$ на внешнюю нормаль $\vec{n}$ к этой

поверхности

$$\int \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int E_n dS. \qquad (2.1)$$

Величину $E_n dS$ принято называть потоком вектора $\vec{E}$ через поверхность dS по аналогии с потоком вектора массы в гидродинамике. Интеграл по замкнутой поверхности (2.1) с помощью теоремы Остроградского можно преобразовать в интеграл по объему, заключенному внутри этой поверхности:

$$\int E_n dS = \int \operatorname{div} \vec{E} dV.$$

Подставим в эту формулу напряженность электрического поля заряженной частицы

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3},$$

где φ определяется формулой (1.4), в которой положено $\vec{r}_i = 0$, так как заряд помещен в начало координат. Выберем сначала замкнутую поверхность, по которой производится интегрирование, так, чтобы она не содержала внутри себя начала координат ($\vec{r} \neq 0$), другими словами, заряд q находится вне этой поверхности. Тогда в любой точке внутри выбранного объема

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\operatorname{div}\vec{r}}{r^3} + \vec{r}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{r^3} - \vec{r}\cdot\frac{3\vec{r}}{r^5}\right) = 0, \qquad (2.2)$$

и поэтому при интегрировании по поверхности, ограничивающей этот объем,

$$\int E_n dS = \int \operatorname{div} \vec{E} dV = 0 \qquad (2.3)$$

независимо от вида поверхности.

Пусть теперь замкнутая поверхность охватывает начало координат, т. е. содержит заряд q внутри себя. Тогда в точке $\vec{r} = 0$ равенство (2.2) может не иметь места, так как при $\vec{r} \to 0$ оно представляет собой неопределенность типа $\infty - \infty$. В этом случае с целью вычисления интеграла $\int \operatorname{div} \vec{E} dV$ разобьем его на сумму интегралов, а именно: интеграл по объему V_R шара радиусом R с центром в точке $r = 0$ и интеграл по оставшемуся объему V_1:

$$\int E_n dS = \int \operatorname{div} \vec{E} dV = \int_{V_R} \operatorname{div} \vec{E} dV + \int_{V_1} \operatorname{div} \vec{E} dV.$$

Согласно (2.3), последний интеграл в этом выражении равен нулю, так как в объеме V_1 заряда нет. Интеграл по объему шара запишем в

виде интеграла по поверхности сферы:

$$\int_{V_R} \operatorname{div} \vec{E} dV = \int E_n dS.$$

В случае сферы $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$, $dS = r^2 d\Omega$, а $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$ для точечного заряда. Поэтому, учитывая, что на поверхности сферы $r = R$, имеем

$$\int_{V_R} \operatorname{div} \vec{E} dV = \int E_n dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\right) r^2 d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Таким образом,

$$\int E_n dS = \int \operatorname{div} \vec{E} dV = 0,$$

если замкнутая поверхность не содержит внутри себя заряда q, и

$$\int E_n dS = \int \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

если заряд находится внутри замкнутой поверхности.

Используя принцип суперпозиции, находим, что вектор напряженности электрического поля, создаваемого произвольной системой точечных зарядов, удовлетворяет интегральному соотношению

$$\int E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \qquad (2.4)$$

где $Q = \sum_{i=1}^{N} q_i = \int \rho(\vec{r}) dV$ — полный заряд, который находится внутри замкнутой поверхности S, хотя поле, напряженность $\vec{E}$ которого входит в левую часть формулы (2.4), создается всеми зарядами.

Соотношение (2.4), которое называется теоремой Гаусса, справедливо для произвольной замкнутой поверхности и произвольного распределения зарядов внутри этой поверхности.

Перепишем формулу (2.4) в виде

$$\int E_n dS = \int \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho(\vec{r}) dV, \qquad (2.5)$$

где $\rho(\vec{r})$ — плотность зарядов внутри поверхности. Так как равенство (2.5) справедливо для произвольного объема, то

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \qquad (2.6)$$

Это уравнение является дифференциальной формой интегрального соотношения (2.4).

Кроме того, ранее было показано (формула (1.7)), что вектор $\vec{E}$ в стационарных условиях удовлетворяет условию

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0. \qquad (2.7)$$

Этому дифференциальному уравнению также можно придать интегральную форму, если воспользоваться теоремой Стокса:

$$\int (\vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{E})\, dS = \oint_L (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = 0,$$

где L — произвольный замкнутый контур, который является границей поверхности S; $\vec{n}$ — положительная нормаль [1] к ней. Поскольку $\vec{F} = q\vec{E}$, то из этой формулы следует, что работа по перемещению заряда в электростатическом поле по любому замкнутому контуру равна нулю.

Уравнения (2.6) и (2.7) при заданном распределении зарядов $\rho(\vec{r})$ и соответствующих граничных условиях дают возможность определить напряженности электрического поля, создаваемого этими зарядами в любой точке пространства. Уравнению (2.7) можно удовлетворить, если положить $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$. Подставив это выражение в формулу (2.6), получим *уравнение Пуассона*:

$$\operatorname{div} \vec{\nabla}\varphi \equiv \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \qquad (2.8)$$

В области пространства, где заряды отсутствуют ($\rho = 0$), потенциал φ удовлетворяет *уравнению Лапласа*:

$$\Delta\varphi = 0.$$

В тех случаях, когда во всем пространстве нет других источников электрического поля, кроме зарядов с плотностью $\rho(\vec{r})$, решение уравнения Пуассона (2.8) дается формулой (1.9). Однако во многих случаях проще непосредственно решать дифференциальное уравнение (2.8), чем вычислять интеграл в правой части формулы (1.9).

В дальнейшем часто будем пользоваться трехмерной δ-функцией, которую можно определить так: рассмотрим $\delta(\vec{R}) = -\frac{1}{4\pi}\Delta\frac{1}{R}$, где $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$. Из формулы (2.2) следует, что во всех точках, где $\vec{R} \neq 0$, $\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = 0$, а следовательно, функция $\delta(\vec{R}) = 0$. Однако интеграл по любому объему, включающему точку $\vec{R}$,

$$\int \delta(\vec{R})\, dV = \frac{1}{4\pi}\int \Delta\left(\frac{1}{R}\right) dV = 1,$$

т. е. отличен от нуля и равен единице. Следовательно, функция $\delta(\vec{R})$ обладает несбычными свойствами: во всех точках, где $\vec{R} \neq 0$, она равна нулю, а в точке $\vec{R} = 0$ ей следует приписать бесконечное значение, чтобы интеграл по объему от нее был равен единице. Существенным здесь является то, что интеграл от произведения δ-функции на произвольную функцию $f(\vec{r}')$ равен $f(\vec{r})$:

$$\int f(\vec{r}')\, \delta(\vec{r} - \vec{r}')\, dV' = f(\vec{r}).$$

В заключение покажем, что формулу для силы (1.10) можно преобразовать в интеграл по поверхности и выразить её через вектор электрического поля. Для этого, используя уравнение (2.6), выразим в ней плотность заряда через напряженность электрического поля:

$$\vec{F} = \varepsilon_0 \int \vec{E} \operatorname{div} \vec{E}\, dV \equiv \varepsilon_0 \int \vec{E} \frac{\partial E_i}{\partial x_i}\, dV.$$

Поскольку $\frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{E}E_i) = \vec{E}\frac{\partial E_i}{\partial x_i} + E_i\frac{\partial \vec{E}}{\partial x_i}$, то

$$\vec{F} = \varepsilon_0 \int \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{E}E_i) - E_i\frac{\partial \vec{E}}{\partial x_i}\right] dV.$$

Воспользовавшись формулой векторного анализа $E_i\frac{\partial \vec{E}}{\partial x_i} \equiv (\vec{E} \cdot \vec{\nabla})\vec{E} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}E^2 - [\vec{E}, \operatorname{rot}\vec{E}]$ и учитывая, что $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$, имеем

$$\vec{F} = \varepsilon_0 \int \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(E_i\vec{E}) - \frac{1}{2}\vec{\nabla}E^2\right] dV.$$

Теперь, применив теорему Остроградского, получим

$$\vec{F} = \varepsilon_0 \int \left[(n\vec{E})\vec{E} - \frac{1}{2}\vec{n}E^2\right] dS. \qquad (2.9)$$

С помощью тензора механических напряжений [12, § 45], который мы определим как

$$p_{ij} = \varepsilon_0\left(E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right),$$

предыдущую формулу можно переписать в следующем виде:

$$F_i = \int p_{ij}n_j\, dS. \qquad (2.10)$$

Если в формуле (2.9) поле с напряженностью $\vec{E}(\vec{r})$ создается теми же зарядами с плотностью $\rho(\vec{r})$, на которые действует сила $\vec{F}$, то интеграл в (1.10) по всему объему, занимаемому зарядами $\rho(\vec{r})$, должен равняться нулю, так как, согласно классической механике, сумма всех внутренних сил изолированной системы равна нулю. Действительно, для вычисления суммарной силы в формуле (1.10) необходимо интегрировать по всему объему, а в формуле (2.10) — по замкнутой поверхности, содержащей в себе все заряды и достаточно удаленной от системы зарядов, так что в точках на этой поверхности $\vec{E}(\vec{r}) = 0$, и поэтому тензор p_{ij}, а следовательно, и интеграл в правой части (2.10) равны нулю.

[1] Положительной нормалью называется нормаль, которая образует с направлением обхода контура L правовинтовую систему, т. е. если смотреть с конца вектора $\vec{n}$, то обход контура должен происходить против часовой стрелки.

Итак, на основании закона Кулона, показано, что электрическое поле, создаваемое зарядами с плотностью $\rho(\vec{r})$, в каждой точке пространства может быть исчерпывающим образом охарактеризовано некоторой векторной функцией $\vec{E}(\vec{r})$, которая называется напряженностью электрического поля и удовлетворяет уравнениям (2.6) и (2.7). С таким же успехом это поле может быть описано с помощью скалярной функции φ, которая называется потенциалом электрического поля и удовлетворяет уравнению Пуассона (2.8). Связь $\vec{E}$ с φ осуществляется формулой $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$. Сила, действующая на тело с произвольным распределением заряда $\rho(\vec{r})$, вычисляется по формуле (1.10) или эквивалентной ей формуле (2.9). Потенциал точечного заряда, находящегося в точке $\vec{r}'$, удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

где $\rho(R) = q\delta(R)$, причем

$$\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = -4\pi\delta(\vec{R}). \qquad (2.11)$$

Здесь $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$.

§ 3. Разложение скалярного потенциала по мультиполям. Электрический диполь. Квадруполь

Рассмотрим электрические поля простейших систем, которые играют важную роль при описании физических свойств вещества. На рис. 2 схематически изображена система из двух противоположно заряженных точечных частиц, находящихся на расстоянии l друг от друга. Потенциал, который они создают в окружающем пространстве,

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{|\vec{r} - \vec{l}/2|} - \frac{q}{|\vec{r} + \vec{l}/2|}\right).$$

Для расстояний $r \gg l$ величину $|\vec{r} \pm \vec{l}/2|^{-1} = (r^2 \pm (\vec{r}\cdot\vec{l}) + l^2/4)^{-1/2}$ можно приближенно записать так:

$$\left|\vec{r} \pm \frac{\vec{l}}{2}\right|^{-1} = \frac{1}{r}\left(1 \pm \frac{(\vec{l}\cdot\vec{r})}{r^2} + \frac{l^2}{4r^2}\right)^{-1/2} \simeq \frac{1}{r}\left(1 \mp \frac{(\vec{r}\cdot\vec{l})}{2r^2}\right).$$

Поэтому при $r \gg l$

$$\varphi(\vec{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r}\left(1 + \frac{(\vec{r}\cdot\vec{l})}{2r^2}\right) - \frac{q}{r}\left(1 - \frac{(\vec{r}\cdot\vec{l})}{2r^2}\right)\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^3}, \qquad (3.1)$$

где $\vec{p} = q\cdot\vec{l}$ — *дипольный момент* системы из двух противоположно заряженных частиц. Если нас интересует поле на достаточно большом

расстоянии от частиц, то эту систему можно рассматривать как одну частицу (диполь), обладающую дипольным моментом $\vec{p}$.

Найдем напряженность электрического поля, создаваемого диполем:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{p}) - \vec{p}]\frac{1}{r^3}, \qquad (3.2)$$

где $\vec{n} = \vec{r}/r$.

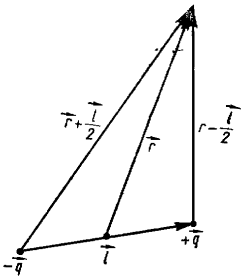


Рис. 2

Вычислим момент сил, действующих на диполь со стороны внешнего электрического поля (рис. 2). По определению, он равен

$$\vec{N} = -q\left[-\frac{\vec{l}}{2}, \vec{E}\right] + q\left[\frac{\vec{l}}{2}, \vec{E}\right] = [\vec{p}, \vec{E}]. \qquad (3.3)$$

Здесь мы полагаем, что электрическое поле мало изменяется на расстояниях порядка размеров диполя, поэтому $\vec{E}(-\vec{l}/2) \approx \vec{E}(\vec{l}/2) \approx \approx \vec{E}(0)$.

Этот момент сил вызывает вращение диполя. Из формулы (3.3) следует, что во внешнем электрическом поле диполь стремится повернуться так, чтобы его момент $\vec{p}$ был параллелен полю, тогда $\vec{N} = 0$. Момент сил, действующих на диполь со стороны электрического поля, равен нулю и при антипараллельной ориентации векторов $\vec{p}$ и $\vec{E}$, но это положение равновесия неустойчиво.

Найдем потенциальную энергию диполя во внешнем электрическом поле

$$U = -q\varphi(\vec{r} - \vec{l}/2) + q\varphi(\vec{r} + \vec{l}/2) \simeq q\vec{l}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{r}} = -(\vec{p}\cdot\vec{E}). \qquad (3.4)$$

Очевидно, что

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = \vec{\nabla}(\vec{p}\cdot\vec{E}) = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}. \qquad (3.5)$$

Эта сила вызывает поступательное движение диполя в неоднородном поле. Из формулы (3.5) следует, что в однородном электрическом поле на диполь силы не действуют.

Воспользовавшись формулами (3.2) и (3.4), найдем энергию взаимодействия двух диполей (так называемое диполь-дипольное взаимодействие)

$$U_{12} = -(\vec{p}_1\cdot\vec{E}_2) = -(\vec{p}_2\cdot\vec{E}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2)}{r_{12}^3} - \frac{3(\vec{p}_1\cdot\vec{r}_{12})(\vec{p}_2\cdot\vec{r}_{12})}{r_{12}^5}\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[(\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2) - 3(\vec{p}_1\cdot\vec{n})(\vec{p}_2\cdot\vec{n})]\frac{1}{r_{12}^3}, \qquad (3.6)$$

где $\vec{n} = \vec{r}_{12}/r_{12}$.

Оценим значение энергии электрического диполь-дипольного взаимодействия для двух атомов или молекул, обладающих дипольным моментом и находящихся в кристаллической решетке. Так как, согласно формуле (3.6), $U \sim \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(p_1 \cdot p_2)}{a^3}$, а для атомов $p \approx 10^{-29}$ Кл · м, расстояние между ними $a \approx 10^{-9}$ м, отсюда $U \approx 10^{-2}$ эВ.

Сила, действующая на диполь $\vec{p}_1$ со стороны диполя $\vec{p}_2$,

$$\vec{F}_{12} = -\vec{\nabla}_1 U_{12} = (\vec{p}_1 \cdot \vec{\nabla}_1)\vec{E}_2 = \frac{3}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{p}_1(\vec{r}_{12}\cdot\vec{p}_2)+\vec{p}_2(\vec{r}_{12}\cdot\vec{p}_1)}{r_{12}^5} + \right.$$

$$\left. + (\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2)\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^5} - \frac{5(\vec{p}_1\cdot\vec{r}_{12})(\vec{p}_2\cdot\vec{r}_{12})\vec{r}_{12}}{r_{12}^7}\right].$$

Эта сила удовлетворяет условию $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, но не является центральной, т. е. зависит не только от расстояния r_{12}, но также и от взаимной ориентации диполей. Это объясняется тем, что диполи не являются точечными частицами. По этой же причине не выполняется условие $\vec{F}_{12} \parallel \vec{r}_{12}$.

Рассмотрим теперь систему частиц, у которой не только заряд, но и дипольный момент равны нулю. Пусть это будет система, состоящая из двух диполей, суммарный дипольный момент которых равен нулю: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$. Потенциал, создаваемый системой, состоящей из двух диполей, находящихся на расстоянии $\vec{l}$,

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(\vec{r}-\vec{l}/2)\cdot\vec{p}_1}{|\vec{r}+\vec{l}/2|^3} + \frac{(\vec{r}+\vec{l}/2)\cdot\vec{p}_2}{|\vec{r}+\vec{l}/2|^3}\right).$$

Вычислим этот потенциал на расстоянии $r \gg l$. Тогда

$$|\vec{r} \pm \vec{l}/2|^{-3} \approx \frac{1}{r^3}\left(1 \mp \frac{3(\vec{l}\cdot\vec{r})}{2r^2}\right)$$

и, обозначив $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}$, $\vec{n} = \vec{r}/r$, получим

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})(\vec{l}\cdot\vec{r})}{r^2} - (\vec{p}\cdot\vec{l})\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{ij}n_i n_j}{2r^3}.$$

Величина

$$Q_{ij} = 3(p_i l_j + p_j l_i) - 2(\vec{p}\cdot\vec{l})\,\delta_{ij}$$

называется тензором *квадрупольного момента* рассматриваемой системы, а сама система — квадруполем.

Из определения тензора квадрупольного момента следует, что он симметричен ($Q_{ij} = Q_{ji}$) и, кроме того, обладает свойством $\sum_{i=1}^{3} Q_{ii} = 0$. А так как любой симметричный тензор может быть приведен к диагональному виду, то, очевидно, только два из трех собственных значений тензора Q_{ij} являются независимыми. С помощью тождества $\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3x_i x_j}{r^5} - \delta_{ij}\frac{1}{r^3}$, учитывая, что $\sum_{i=1}^{3} Q_{ii} = 0$, потенциал квадруполя можно записать в виде

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{ij}n_i n_j}{2r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}Q_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right), \qquad (3.7)$$

где $\vec{n} = \vec{r}/r$.

Таким образом, согласно формуле (3.7), потенциал квадруполя убывает с расстоянием как $1/r^3$.

Рассмотрим теперь потенциал произвольной системы зарядов, расположенных в пространстве с плотностью $\rho(\vec{r})$,

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')\,dv'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad (3.8)$$

на больших расстояниях от этой системы.

Предположим, что линейные размеры области, занимаемой зарядами, могут быть охарактеризованы некоторым числом d. Это означает, что плотность заряда $\rho(\vec{r})$ практически равна нулю, если $r' \geqslant d$. Тогда в формуле (3.8) $r' \leqslant d$. Рассмотрим потенциал $\varphi(\vec{r})$ на больших расстояниях от системы зарядов: $r \gg d$. В этом случае $r' \ll r$ и выражение $|\vec{r}-\vec{r}'|^{-1}$ может быть разложено в ряд по r':

$$|\vec{r}-\vec{r}'| \simeq \frac{1}{r} + \frac{(\vec{n}\cdot\vec{r}')}{r^2} + \frac{1}{2r^3}[3(\vec{n}\cdot\vec{r}')^2 - (r')^2] + \cdots,$$

здесь и далее $\vec{n} = \vec{r}/r$. Подставляя это разложение в формулу (3.8), получаем

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\int\rho dV' + \frac{\vec{r}}{r^3}\int\vec{r}'\rho dV' + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2r^3}\int\rho[3(\vec{n}\cdot\vec{r}')^2 - (r')^2]\,dV' + \cdots\right]. \qquad (3.9)$$

Введем обозначения: $q = \int\rho dV$ — заряд, $\vec{p} = \int\vec{r}\rho dV$ — дипольный момент,

$$Q_{ij} = \int\rho(3x_i x_j - r^2\delta_{ij})\,dV \qquad (3.10)$$

— квадрупольный момент системы зарядов. С учетом этих обозначений формула (3.9) запишется в виде

$$\varphi(\vec{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r} + \frac{(\vec{p}\cdot\vec{n})}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{Q_{ij}n_i n_j}{r^3} + \cdots\right]. \qquad (3.11)$$

Первое слагаемое в этом выражении представляет собой потенциал точечного заряда q, второе слагаемое — диполя (3.1), третье — квадруполя (3.7). Из формулы (3.11) следует, что эти потенциалы убывают с расстоянием соответственно как $1/r$, $1/r^2$, $1/r^3$ и т. д. Это разложение может быть продолжено. Члены этого ряда, начиная со второго, называются мультиполями: диполь, квадруполь, октуполь и т. д.

§ 4. Закон Био—Савара—Лапласа—Ампера—Эрстеда. Магнитное поле. Вектор магнитной индукции

Наряду с электрическими силами, действующими между заряженными телами, еще в глубокой древности были известны и другие силы. Их действие проявлялось между некоторыми телами, которые называли магнитами. В 1600 г. У. Гильберт сформулировал два существенных свойства магнитов: 1) любой магнит имеет два противоположных полюса, условно названных им положительным и отрицательным, причем одноименные полюса отталкиваются, а разноименные — притягиваются; 2) невозможно получить магнит с одним полюсом. Последнее свойство является существенным признаком, по которому магнитные силы качественно отличаются от электрических.

Природу и законы магнитного взаимодействия не удавалось установить до тех пор, пока А. Вольта (1800) не изобрел устройство, которое теперь называют гальваническим элементом, создающее на своих полюсах разность потенциалов. При соединении полюсов этого элемента металлическим проводником через него проходил ток, природа которого в то время была неизвестна, но его можно было обнаружить по нагреванию проводника. В 1820 г. Х. Эрстед обнаружил, что при подключении проводника к гальваническому элементу стрелка компаса, находящегося вблизи него, устанавливалась перпендикулярно проводнику. Не зная природы тока, Эрстед предположил, что проводник намагничивается, и поэтому между ним и стрелкой компаса возникает магнитная сила.

В том же 1820 г. А. Ампер установил фундаментальный факт, связанный с прохождением тока через проводник. Он обнаружил, что между проводниками, по которым проходят электрические токи, возникают силы взаимодействия, зависящие от расположения проводников. Эти силы взаимодействия можно определить обычными методами измерения механических сил.

Рассмотрим опыты Ампера подробнее. В случаях, изображенных на рис. 3, *а* и 3, *б*, два параллельных проводника с током отталкиваются, и соответственно притягиваются, что можно обнаружить по их прогибу, если выбрать проводники достаточно тонкими. Опыт показывает, что два параллельных проводника с током, которые отталкиваются от третьего, между собой притягиваются, в то время как два электрических заряда, отталкивающиеся от третьего, отталкиваются и друг от друга. Математически этот экспериментальный факт можно учесть, считая токи, проходящие по двум отталкивающимся проводникам, противоположными по знаку (именно так обстоит дело в случае гравитационной массы, с той существенной разницей, что частиц с отрицательной гравитационной массой в природе до сих пор не обнаружено, хотя опыты по определению знака гравитационных масс некоторых элементарных частиц проводились). При этом не имеет значения, какому из токов приписывать положительный, а какому отрицательный знаки. Можно условиться считать положительным ток, направленный от металлического к графитовому электроду гальванического элемента заданной конструкции. После того как было установлено, что ток — это движение частиц, обладающих зарядом, оказалось, что положительным было выбрано направление тока, совпадающее с направлением скорости движения положительно заряженных частиц.

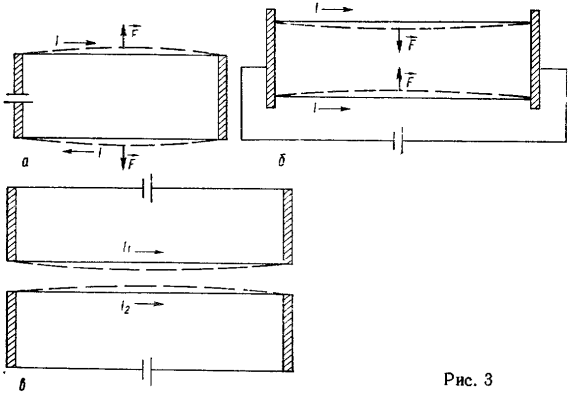


Рис. 3

Выше мы рассмотрели случай параллельных проводников. Если проводники расположить под прямым углом друг к другу, то опыт показывает, что сила взаимодействия изменится. Следовательно, она зависит также и от ориентации проводников. Как же будет изменяться сила взаимодействия, если постепенно изменять взаимную ориентацию проводников? Из экспериментов следует, что прогиб участков проводников, находящихся на минимальном расстоянии друг от друга, будет наибольшим при параллельных токах (рис. 3, *а*), равным нулю при перпендикулярных, и изменив знак, снова станет максимальным при параллельных токах (рис. 3, *б*). Это изменение происходит по закону косинуса.

Из опытов также следует, что если один из проводников подключать к разным гальваническим элементам (рис. 3, *в*), то сила взаимодействия между проводниками изменяется. Исходя из этого опытного факта, можно, даже не зная природы электрического тока, дать ему количественную характеристику. Для этого необходимо измерить силу взаимодействия двух проводников с током с каким-нибудь третьим. Будем считать, что в одном из проводников ток во столько раз больше, чем в другом, во сколько раз больше сила его взаимодействия с третьим. Таким образом, отношение силы взаимодействия двух данных провод-

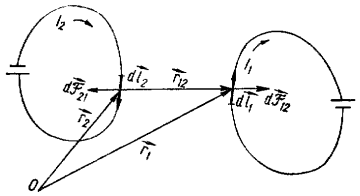


Рис. 4

ников с токами с любым третьим проводником равно отношению сил токов, и, как показывает эксперимент, это отношение не зависит от силы тока в третьем проводнике:

$$F_{13} : F_{23} = I_1 : I_2,$$
$$F_{1i} : F_{2i} = I_1 : I_2.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{F_{12}}{I_1} = \frac{F_{23}}{I_2}, \quad \frac{F_{23}}{I_2} = \frac{F_{34}}{I_4}, \quad \frac{F_{13}}{I_1 I_3} = \frac{F_{23}}{I_2 I_3} = \frac{F_{34}}{I_3 I_4} = \dots$$

Другими словами, отношение $F_{ij}/I_i I_j$ не зависит от силы токов и поэтому можно утверждать, что сила взаимодействия двух проводников пропорциональна произведению сил токов в обоих проводниках: $F_{ij} = aI_iI_j$, причем величина a зависит только от расстояния между проводниками и их взаимной ориентации.

Этот способ задания численной характеристики тока на основе измерения сил взаимодействия аналогичен способу задания численной характеристики заряда (§ 1), а также гравитационной массы в законе всемирного тяготения.

Поскольку длина и форма проводников могут быть различными, то закон взаимодействия двух линейных токов удобно сформулировать через взаимодействия отдельных элементов проводника с током между собой. Разобьем каждый проводник с исчезающе малым сечением на малые элементы длиной $d\vec{l}$ так, чтобы вектор $d\vec{l}$ имел такое же направление, как и ток (рис. 4). Тогда, согласно результатам эксперимента, сила взаимодействия между двумя бесконечно тонкими элементами проводников $d\vec{l}_1$ и $d\vec{l}_2$

$$d\vec{\mathcal{F}}_{12} = -d\vec{\mathcal{F}}_{21} = -kI_1I_2\frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} = kI_1I_2(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)\vec{\nabla}_1\frac{1}{r_{12}}. \quad (4.1)$$

Здесь учтено, что в случае отталкивания элементы тока $d\vec{l}_1$ и $d\vec{l}_2$ следует считать антипараллельными (рис. 4).

Формула (4.1) является математической записью фундаментального закона (Био — Савара — Лапласа — Эрстеда — Ампера) классической электродинамики. В этой формуле отражены основные закономерности взаимодействия элементов линейных токов, полученные экспериментальным путем: сила взаимодействия пропорциональна произведению токов I_1I_2 и зависит от их взаимной ориентации по закону $\cos\Theta$, так как $(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) = dl_1dl_2\cos\Theta$. Кроме того, она удовлетворяет только двум из трех условий третьего закона Ньютона: $d\vec{\mathcal{F}}_{12} = -d\vec{\mathcal{F}}_{21}$, $d\vec{\mathcal{F}}_{12} \parallel \vec{r}_{12}$. В отличие от электростатической силы эта сила зависит не только от расстояния между элементами тока, но также и от их взаимной ориентации. Поэтому силу (4.1) уже нельзя представить как

градиент от некоторой скалярной функции, как это имеет место для силы Кулона (1.3). Зависимость от расстояния в формуле (4.1) фактически постулирована, потому что в эксперименте по необходимости измеряются силы взаимодействия не отдельных элементов, а замкнутых токов, так как для прохождения электрического тока цепь проводников должна быть замкнута. Впоследствии мы убедимся, что все выводы, вытекающие из формулы (4.1), полностью согласуются с опытом.

Коэффициент пропорциональности k в формуле (4.1) в дальнейшем будем записывать в виде $k = \mu_0/(4\pi)$, выделив для удобства множитель $1/(4\pi)$. Величина μ_0 называется *магнитной постоянной*, ее численное значение зависит от выбора единицы измерения тока (или заряда) и будет определено в § 8.

Вычислим силу $d\vec{F}_{12}$, которая действует на элемент тока $d\vec{l}_1$ со стороны всего проводника с током I_2:

$$d\vec{F}_{12} = \oint_{L_2} d\vec{\mathcal{F}}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi}I_1I_2\oint_{L_2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2). \quad (4.2)$$

В этой формуле интегрирование производится по замкнутому контуру L_2, по которому проходит ток I_2.

Перепишем формулу (4.2) в более удобной форме. Для этого предварительно покажем, что

$$\oint_{L_2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \cdot d\vec{l}_2 = 0.$$

Действительно, так как $\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = \vec{\nabla}_2\left(\frac{1}{r_{12}}\right)$, то, воспользовавшись теоремой Стокса, получим

$$\oint_{L_2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \cdot d\vec{l}_2 = \oint_{L_2} d\vec{l}_2 \cdot \vec{\nabla}_2\left(\frac{1}{r_{12}}\right) = \int_S \vec{n} \cdot \mathrm{rot}_2\left[\vec{\nabla}_2\left(\frac{1}{r_{12}}\right)\right] dS = 0.$$

Здесь S — поверхность, границей которой является контур L_2; n — положительная нормаль к поверхности S.

Добавим в правую часть формулы (4.2) слагаемое $\frac{\mu_0}{4\pi}I_1I_2d\vec{l} \times \times \oint_{L_2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}d\vec{l}_2$, равное, как мы только что показали, нулю, и перепишем ее в виде

$$d\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi}I_1I_2\int_{L_2}\frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)\vec{r}_{12} - d\vec{l}_1(\vec{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}^3}.$$

Воспользовавшись формулой векторной алгебры $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$, имеем

$$d\vec{F}_{12} = -\frac{\mu}{4\pi}I_1I_2\oint_{L_2}\frac{[d\vec{l}_2, [\vec{r}_{12}, d\vec{l}_1]]}{r_{12}^3}.$$

Сила, действующая на весь проводник с током I_1 со стороны проводника с током I_2,

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{L_1}\oint_{L_2} \frac{[d\vec{l}_2, [\vec{r}_{12}, d\vec{l}_1]]}{r_{12}^3}.$$

Согласно третьему закону Ньютона, такая же сила, но с противоположным знаком, действует на контур L_2 с током I_2 со стороны контура L_1 с током I_1:

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{L_1}\oint_{L_2} \frac{[d\vec{l}_2, [\vec{r}_{12}, d\vec{l}_1]]}{r_{12}^3}. \qquad (4.3)$$

Рассмотрим вектор

$$\vec{B}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 \oint_{L_1} \frac{[\vec{r}_{12}, d\vec{l}_1]}{r_{12}^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{L_1} \left[\vec{\nabla}_2\left(\frac{1}{r_{12}}\right), d\vec{l}_1\right], \qquad (4.4)$$

зависящий от вида контура L_1 с током I_1, а также от точки наблюдения $\vec{r}_2$, так как $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Тогда формулу (4.3) с помощью вектора $\vec{B}$, который определяется формулой (4.4), можно записать следующим образом:

$$\vec{F}_{21} = I_2 \oint_{L_2} [d\vec{l}_2, \vec{B}(\vec{r}_2)].$$

Вектор $\vec{B}$ называется *вектором магнитной индукции*. Формулу (4.4) называют законом Био — Савара — Лапласа (1820), хотя по существу это не закон, а определение вектора индукции магнитного поля.

Учитывая, что $\vec{\nabla}_2\left(\frac{1}{r_{12}}\right) = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$ и, следовательно, $\frac{1}{r_{12}^3}[\vec{r}_{12}, d\vec{l}_1] = \left[\vec{\nabla}_2\left(\frac{1}{r_{12}}\right), d\vec{l}_1\right] = \mathrm{rot}_2\left(\frac{d\vec{l}_1}{r_{12}}\right)$, перепишем формулу (4.4), заменив в ней $\vec{r}_2 \to \vec{r}$, $\vec{r}_1 \to \vec{r}'$, $\vec{r}_{12} = -\vec{R}$, где $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, в виде

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{[\vec{R}, d\vec{l}]}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \mathrm{rot} \oint_L \frac{d\vec{l}}{R} \equiv \mathrm{rot}\,\vec{A}, \qquad (4.5)$$

где $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_l \frac{d\vec{l}}{R}$. Здесь $\vec{r}$ — точка наблюдения, $\vec{r}'$ — точка на контуре проводника. Интегрирование производится по замкнутому контуру L с током I.

Сила, с которой магнитное поле $\vec{B}(\vec{r})$ действует на контур L с током I,

$$\vec{F} = I \oint_L [d\vec{l}, \vec{B}]. \qquad (4.6)$$

Эта формула выражает собой *закон Ампера* для линейных проводников.

С помощью формулы (4.5) можно вычислить индукцию магнитного поля, создаваемого проводником с током, а с помощью формулы (4.6) — силу, действующую со стороны этого магнитного поля на другой проводник с током.

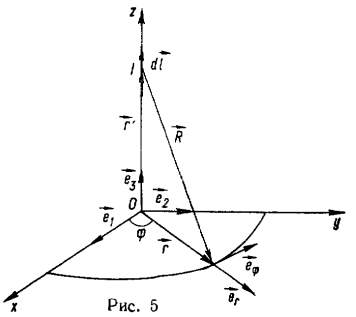


Рис. 5

В качестве примера определим с помощью формулы (4.5) вектор индукции магнитного поля, создаваемого бесконечно длинным проводником ($L \to \infty$) с током I. Пусть проводник совпадает с осью z (рис. 5.) Магнитное поле не должно зависеть от координаты z, поскольку проводник считается бесконечно длинным. Поэтому достаточно вычислить индукцию магнитного поля в плоскости xOy. Так как $d\vec{l} = \vec{e}_3 dz'$, где $\vec{e}_3$ — единичный вектор оси z, а $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 - z'\vec{e}_3$, то $[d\vec{l}, \vec{R}] = (x\vec{e}_2 - y\vec{e}_1)\,dz'$. Кроме того, $R^2 = \rho^2 + z'^2$, где $\rho^2 = x^2 + y^2$ — квадрат расстояния от проводника до точки наблюдения. Подставляя эти выражения в формулу (4.5), имеем

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\vec{e}_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} - \vec{e}_3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\,dz}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}}\right] =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}(\vec{e}_2 \cos\varphi - \vec{e}_3 \sin\varphi) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{e}_\varphi,$$

где $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_2 \cos\varphi - \vec{e}_3 \sin\varphi$ — единичный вектор касательной к окружности [1] (рис. 5).

Таким образом, вектор индукции магнитного поля длинного прямого проводника с током в каждой точке пространства направлен касательно к концентрическим окружностям, центры которых расположены на проводнике, а значение его обратно пропорционально расстоянию от проводника:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}.$$

С помощью формулы (4.6) вычислим силу взаимодействия между двумя бесконечно длинными и тонкими параллельными проводниками,

[1] Здесь вместо общепринятых обозначений ортов декартовой системы координат $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ будем пользоваться обозначениями $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

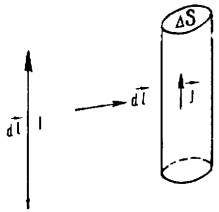


Рис. 6

расстояние между которыми равно a:

$$\vec{F} = I_2 \int_{-L/2}^{L/2} dz\,[\vec{e}_3,\ (\vec{e}_2 \cos\varphi - \vec{e}_1 \sin\varphi)]\ \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} =$$

$$= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} L\,(\vec{e}_1 \cos\varphi + \vec{e}_2 \sin\varphi) =$$

$$= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} L\vec{e}_r,$$

где $\vec{e}_r = \vec{e}_1 \cos\varphi + \vec{e}_2 \sin\varphi$ — единичный вектор, направленный вдоль радиуса окружности (рис. 5). Эта сила действует со стороны проводника с током I_1 на проводник с током I_2. Такая же сила, но противоположная по знаку, действует на проводник с током I_2 со стороны проводника с током I_1.

При $L \to \infty$ эта сила стремится к ∞, однако сила, действующая на единицу длины проводника, конечна и численное значение ее

$$\frac{dF}{dL} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{a}. \tag{4.7}$$

Из формулы (4.7) следует, что сила взаимодействия между параллельными проводниками бесконечной длины и исчезающе малого кругового сечения обратно пропорциональна расстоянию между ними. Формула (4.7) хорошо подтверждается экспериментально.

Обобщим уравнения (4.5) и (4.6), справедливые для бесконечно тонких линейных проводников, на проводники конечного сечения. Учтем, что линейный элемент тока $d\vec{l}$ на самом деле имеет конечные поперечные размеры ΔS (рис. 6), и введем *вектор плотности тока*

$$\vec{j} = \frac{I}{\Delta S} \frac{d\vec{l}}{dl} = I \frac{d\vec{l}}{dV},$$

который равен отношению силы тока I к площади поперечного сечения ΔS элемента тока $d\vec{l}$, а по направлению совпадает с направлением вектора $d\vec{l}$. Но $\Delta S \cdot dl = dV$ есть элемент объема проводника и поэтому $\vec{j}dV = Id\vec{l}$.

Будем рассматривать каждый проводник конечного сечения как совокупность большого количества достаточно тонких линейных проводников. Тогда, подставляя в формулу (4.5) вместо $Id\vec{l}$ величину $\vec{j}dV$ и используя принцип суперпозиции, находим

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{R}]}{R^3} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{rot} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} dV'. \tag{4.8}$$

В формуле (4.8) $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ — радиус-вектор, проведенный из точки $\vec{r}'$, через которую проходит ток $\vec{j}(\vec{r}')$, в точку наблюдения $\vec{r}$.

Формулу (4.8) можно получить из (4.5) путем замены $I \oint \ldots d\vec{l} \rightleftarrows \int \ldots \vec{j}dV$. В дальнейшем при переходе от линейных токов к объемным (и наоборот) будем пользоваться этим правилом. При этом формула (4.6) для проводников конечного сечения приобретает вид

$$\vec{F} = \int [\vec{j}, \vec{B}]\, dV. \tag{4.9}$$

Таким образом, на среду с плотностью тока $\vec{j}$, находящуюся в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, действует сила $\vec{F}$, объемная плотность которой

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV} = [\vec{j}, \vec{B}].$$

Определим *векторный потенциал магнитного поля* формулой

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')\, dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \tag{4.10}$$

Тогда из (4.8) получаем связь между векторным потенциалом и индукцией магнитного поля:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{rot} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} dV' = \operatorname{rot} \vec{A}, \tag{4.11}$$

из которой очевидно, что вектор магнитной индукции удовлетворяет условию

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \tag{4.12}$$

Как следует из формулы (4.11), векторный потенциал определяется неоднозначно, так как к нему можно добавить слагаемое $\vec{\nabla} f$, где f — произвольная скалярная функция, и при этом вектор индукции магнитного поля не изменяется. Поэтому на три компоненты векторной функции $\vec{A}(\vec{r})$ можно наложить одно дополнительное условие, которое удобно выбрать в виде $\operatorname{div} \vec{A} = 0$. Тогда из (4.10) имеем

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \operatorname{div} \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} \right) dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{R} \right) dV' =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{R} \right) dV'.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\vec{\nabla} \left(\frac{1}{R} \right) = -\vec{\nabla}' \left(\frac{1}{R} \right)$. Далее, используя формулу $\vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{R} \right) = \operatorname{div}' \left(\frac{\vec{j}}{R} \right) - \frac{\operatorname{div}' \vec{j}}{R}$, а также теорему Остроградского, получаем

$$\operatorname{div} \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{(\vec{j} \cdot \vec{n})}{R} dS' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\operatorname{div}' \vec{j}}{R} dV'.$$

Так как интеграл по бесконечно удаленной поверхности равен нулю, то отсюда следует, что условие $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ будет выполнено, если $\operatorname{div} \vec{j} = 0$.

Из (4.10) имеем

$$\Delta \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j} \cdot \Delta \left(\frac{1}{R} \right) dV'.$$

Учитывая, что $\Delta \left(\frac{1}{R} \right) = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$, находим

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}. \tag{4.13}$$

Очевидно, что (4.10) есть решение уравнения (4.13).

Из (4.11) с учетом условия $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ следует

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}. \tag{4.14}$$

Эта формула согласуется с условием $\operatorname{div} \vec{j} = 0$.

Таким образом, согласно (4.13) и (4.14), источником магнитного поля является электрический ток, который, как показывает опыт, создается движущимися зарядами. Позднее мы убедимся, что источником магнитного поля может быть также переменное во времени электрическое поле.

Дифференциальное уравнение (4.14) можно переписать в интегральной форме. Для этого выберем произвольную поверхность S, и пусть $\vec{n}$ — положительная нормаль к этой поверхности, а L — контур, являющийся границей этой поверхности. Тогда, умножив (4.14) скалярно на $\vec{n}$, проинтегрировав по поверхности и воспользовавшись теоремой Стокса, получим

$$\int \vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} dS = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int j_n dS = \mu_0 I,$$

где $I = \int j_n dS$ — полный ток, протекающий через поверхность.

Уравнение (4.12) в интегральной форме имеет вид

$$\int \operatorname{div} \vec{B} dV = \int B_n dS = 0$$

для любой замкнутой поверхности. Величина $\int B_n dS$ называется потоком вектора магнитной индукции через поверхность S. Таким образом, поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Правую часть формулы (4.9), так же, как и в случае электрического поля, можно преобразовать в поверхностный интеграл. Для этого, воспользовавшись уравнением (4.14), перепишем формулу (4.9) в виде

$$\vec{F} = \int [\vec{j}, \vec{B}] dV = -\frac{1}{\mu_0} \int [\vec{B}, \operatorname{rot} \vec{B}] dV.$$

Так как $[\vec{B}, \operatorname{rot} \vec{B}] = \frac{1}{2} \vec{\nabla} B^2 - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$, то находим

$$\vec{F} = -\frac{1}{\mu_0} \int \left[\frac{1}{2} \vec{\nabla} B^2 - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \right] dV.$$

Второе слагаемое в подынтегральном выражении справа запишем в виде $(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = \frac{\partial}{\partial x_l} (B_l \vec{B}) - \vec{B} \operatorname{div} \vec{B}$. Тогда

$$\vec{F} = -\frac{1}{2\mu_0} \int \vec{\nabla} B^2 dV + \frac{1}{\mu_0} \int \frac{\partial}{\partial x_l} (B_l \vec{B}) dV.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\operatorname{div} \vec{B} = 0$. С помощью теоремы Остроградского преобразуем первый и второй интегралы в поверхностные:

$$\vec{F} = \frac{1}{\mu_0} \int \left[-\frac{B^2}{2} \vec{n} + \vec{B} (\vec{n} \cdot \vec{B}) \right] dS.$$

С помощью тензора механических напряжений, который определим как

$$p_{lj} = \frac{1}{\mu_0} \left(B_l B_j - \frac{1}{2} \delta_{lj} B^2 \right), \tag{4.15}$$

предыдущую формулу перепишем в виде

$$F_l = \int p_{lj} n_j dS. \tag{4.16}$$

Если в формуле (4.9) индукция $\vec{B}(\vec{r})$ создается теми же токами с плотностью $\vec{j}(\vec{r})$, на которые действует сила $\vec{F}$, то интеграл в (4.9) по всему объему с плотностью тока $\vec{j}(\vec{r})$ должен равняться нулю, так как, согласно классической механике, сумма всех внутренних сил изолированной системы равна нулю. Действительно, для вычисления суммарной силы в формуле (4.9) необходимо интегрировать по всему объему, а в формуле (4.16) — по замкнутой поверхности, полностью охватывающей все токи и достаточно удаленной от системы токов. Следовательно, на этой поверхности равны нулю индукция $\vec{B}$, тензор p_{lj} и интеграл в правой части (4.16).

Итак, магнитное поле, создаваемое токами $\vec{j}(\vec{r})$, в каждой точке пространства может быть исчерпывающим образом охарактеризовано векторной функцией $\vec{B}(\vec{r})$, носящей название вектора индукции магнитного поля. Вектор $\vec{B}(\vec{r})$ удовлетворяет уравнениям (4.14) и (4.12), которые при заданном распределении токов $\vec{j}(\vec{r})$ дают возможность определить индукцию магнитного поля, создаваемого этими токами, в любой точке пространства.

Магнитное поле может быть охарактеризовано также с помощью векторного потенциала $\vec{A}(\vec{r})$, который удовлетворяет уравнению (4.13) и дополнительному условию $\operatorname{div} \vec{A} = 0$. Связь векторного потенциала с индукцией магнитного поля осуществляется формулой (4.11). Сила, действующая на тело с произвольным распределением тока $\vec{j}(\vec{r})$, вычисляется по формуле (4.9).

§ 5. Разложение векторного потенциала по мультиполям. Магнитный диполь

В § 3 было показано, что электрические свойства системы нейтральных частиц (атомов и молекул) могут быть описаны с помощью модели электрического диполя. Так как внутри атомов и молекул движутся электроны, которые создают в окружающем пространстве магнитное поле, то атомы и молекулы должны обладать также и магнитными свойствами. Покажем, что эти свойства можно описать с помощью модели магнитного дипольного момента. Рассмотрим зависимость векторного потенциала, создаваемого внутриатомными токами, от координат на расстояниях, превышающих размеры атома или молекулы. Другими словами, найдем значение векторного потенциала (4 10), создаваемого токами $\vec{j}(\vec{r})$:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}\,dV' \qquad (5.1)$$

при $r \gg r'$. В этом случае $|\vec{r}-\vec{r}'|^{-1} \simeq \frac{1}{r}\left(1+\frac{(\vec{r}\cdot\vec{r}')}{r^2}\right)$ и формула (5.1) приобретает вид

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{r}\int \vec{j}(\vec{r}')\,dV' + \frac{1}{r^3}\int (\vec{r}\cdot\vec{r}')\,\vec{j}(\vec{r}')\,dV' + \dots\right]. \qquad (5.2)$$

Так как ток удовлетворяет соотношению $\operatorname{div}\vec{j}=0$, то его можно представить в виде

$$\vec{j} = \operatorname{rot}\vec{M}, \qquad (5.3)$$

где $\vec{M}$ — некоторый вектор, физический смысл которого будет установлен ниже. Ток $\vec{j}=\operatorname{rot}\vec{M}$ называется *током намагничения*, а $\vec{M}$ — вектором намагничения Будем считать, что вне системы, где $\vec{j}=0$, $\vec{M}$ тоже равно нулю. Тогда, пользуясь теоремой Остроградского, имеем

$$\int \vec{j}dV = \int \operatorname{rot}\vec{M}dV = \int [\vec{n},\vec{M}]\,dS = 0;$$

здесь $\vec{n}$ — внешняя нормаль к замкнутой поверхности интегрирования, находящейся вне системы. Таким образом, первое слагаемое в формуле (5.2) равно нулю.

Преобразуем второе слагаемое в выражении (5.2), воспользовавшись следующим равенством, справедливым при условии $\operatorname{div}\vec{j}=0$:

$$\int (\vec{a}\cdot\vec{r}')(\vec{r}\cdot\vec{r}')\operatorname{div}'\vec{j}dV' =$$

$$= \int \operatorname{div}'\vec{j}\,(\vec{a}\cdot\vec{r}')(\vec{r}\cdot\vec{r}')]\,dV' - \int \vec{j}\cdot\vec{\nabla}'[(\vec{a}\cdot\vec{r}')(\vec{r}\cdot\vec{r}')]\,dV' = 0;$$

здесь $\vec{a}$ — произвольный постоянный вектор. Первый интеграл в правой части этого выражения с помощью теоремы Остроградского преобразуем в поверхностный, а во втором, воспользовавшись формулами (8) и (11) приложения II, заменим

$$\vec{\nabla}'[(\vec{a}\cdot\vec{r}')(\vec{r}\cdot\vec{r}')] = \vec{a}(\vec{r}\cdot\vec{r}') + \vec{r}(\vec{a}\cdot\vec{r}').$$

В результате получим

$$\int j_n(\vec{a}\cdot\vec{r}')(\vec{r}\cdot\vec{r}')\,dS' = \int (\vec{j}\cdot\vec{a})(\vec{r}\cdot\vec{r}')\,dV' + \int (\vec{a}\cdot\vec{r}')(\vec{j}\cdot\vec{r})\,dV'.$$

Поскольку интеграл по поверхности в левой части этого выражения равен нулю, то вынося постоянный вектор $\vec{a}$ за знак интеграла, имеем

$$\vec{a}\left[\int \vec{j}(\vec{r}\cdot\vec{r}')\,dV' + \int \vec{r}'(\vec{j}\cdot\vec{r})\,dV'\right] = 0.$$

Ввиду произвольности вектора $\vec{a}$ можно записать

$$\int \vec{j}(\vec{r}\cdot\vec{r}')\,dV' = -\int \vec{r}'(\vec{j}\cdot\vec{r})\,dV'.$$

Пользуясь этим соотношением и учитывая, что $\int \vec{j}dV = 0$, перепишем формулу (5.2) в виде

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\int \vec{j}(\vec{r}\cdot\vec{r}')\,dV' = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\frac{1}{2}\int [\vec{j}(\vec{r}\cdot\vec{r}') - \vec{r}'(\vec{j}\cdot\vec{r})]\,dV' =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{2}\frac{\vec{r}}{r^2}, \int [\vec{r}', \vec{j}]\,dV'\right].$$

Введем вектор

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2}\int [\vec{r},\vec{j}]\,dV, \qquad (5.4)$$

который называется дипольным *магнитным моментом* магнитного диполя. Тогда

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\vec{\mu},\vec{r}]}{r^3}. \qquad (5.5)$$

Таким образом, магнитный диполь — это система с током $\vec{j}$, который удовлетворяет условию $\int \vec{j}dV = 0$, но $\int [\vec{r},\vec{j}]\,dV \neq 0$.

Используя формулу (4.11), найдем вектор магнитной индукции магнитного диполя

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}(3\vec{n}(\vec{\mu}\cdot\vec{n}) - \vec{\mu})\frac{1}{r^3}. \qquad (5.6)$$

Покажем теперь, что вектор $\vec{M}$ есть магнитный дипольный момент единицы объема. Для этого рассмотрим выражение

$$\vec{\nabla}(\vec{r}\cdot\vec{M}) = (\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{M} + (\vec{M}\cdot\vec{\nabla})\vec{r} + [\vec{r},\operatorname{rot}\vec{M}] + [\vec{M},\operatorname{rot}\vec{r}].$$

Так как $(\vec{M}\cdot\vec{\nabla})\vec{r} = \vec{M}$; $\operatorname{rot}\vec{r} = 0$, а выражение $(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{M}$ можно преобразовать к виду

$$(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})(\vec{M} = x_l\frac{\partial\vec{M}}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l}(x_l\vec{M}) - \vec{M}\frac{\partial x_l}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l}(x_l\vec{M}) - 3\vec{M},$$

то

$$\vec{\nabla}(\vec{r}\cdot\vec{M}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i\vec{M}) - 2\vec{M} + [\vec{r}, \operatorname{rot}\vec{M}].$$

Проинтегрируем это выражение по всему объему и воспользуемся формулой Остроградского:

$$\int \vec{n}(\vec{r}\cdot\vec{M})\,dS = \int(\vec{n}\cdot\vec{r})\vec{M}dS - 2\int\vec{M}dV + \int[\vec{r}, \operatorname{rot}\vec{M}]\,dV.$$

Поскольку поверхностные интегралы равны нулю, а $\operatorname{rot}\vec{M} = \vec{j}$, то отсюда следует, что

$$\frac{1}{2}\int[\vec{r}, \operatorname{rot}\vec{M}]\,dV = \frac{1}{2}\int[\vec{r}, \vec{j}]\,dV = \vec{\mu} = \int\vec{M}dV.$$

Таким образом, нами установлено, что вектор $\vec{M}$ есть магнитный момент единицы объема.

Рассмотрим поведение магнитного диполя во внешнем магнитном поле. Так как магнитный диполь не имеет электрического заряда, то покоящаяся частица, обладающая магнитным моментом, не взаимодействует с электрическим полем, но взаимодействует с магнитным полем. Вычислим с помощью формулы (4.9) силу, с которой внешнее магнитное поле действует на магнитный диполь:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \int[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{B}(\vec{r}+\vec{r}')]\,dV'.$$

Здесь вектор $\vec{r}'$ отсчитывается от точки $\vec{r}$, где расположен атом (или молекула). Предположим, что вектор $\vec{B}$ мало изменяется на расстояниях порядка размеров системы с током и представим его в виде

$$\vec{B}(r+r') \simeq \vec{B}(r) + \sum_{i=1}\frac{\partial B}{\partial x_i}x_i + \cdots.$$

Тогда

$$\vec{F} = \left[\int\vec{j}(\vec{r}')\,dV, \vec{B}(\vec{r})\right] + \left[\int x_i'\vec{j}(\vec{r}')\,dV', \frac{\partial\vec{B}}{\partial x_i}\right].$$

Знак суммирования $\sum_{i=1}^{3}$, как это принято в тензорной алгебре, опущен.

Так как $\int\vec{j}dV = 0$, то первое слагаемое обращается в нуль. Для вычисления величины $\int x_i\vec{j}dV = \int x_i\operatorname{rot}\vec{M}dV$ преобразуем её к виду

$$\int x_i\vec{j}dV = \int x_i\operatorname{rot}\vec{M}dV = \int\operatorname{rot}(x_i\vec{M})\,dV - \int[\vec{\nabla}x_i, \vec{M}]\,dV.$$

Пользуясь теоремой Остроградского $\int\operatorname{rot}(x_i\vec{M})\,dV = \int x_i[\vec{n}, \vec{M}]\,dS$, находим, что этот интеграл равен нулю, так как вне системы $M = 0$. Кроме того, учитывая, что $\vec{\nabla}x_i = \vec{e}_i$, где $\vec{e}_i$ — орт соответствующей координатной оси, получаем

$$\int x_i\vec{j}dV = \left[\int\vec{M}dV, \vec{e}_i\right] = [\vec{\mu}, \vec{e}_i],$$

где $\vec{\mu} = \int\vec{M}dV$ — магнитный момент системы.

Таким образом, имеем

$$\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x_i}[[\vec{\mu}, \vec{e}_i], \vec{B}] = \vec{e}_i\frac{\partial(\vec{\mu}\cdot\vec{B})}{\partial x_i} - \vec{\mu}\frac{\partial(\vec{B}\cdot\vec{e}_i)}{\partial x_i} = \vec{\nabla}(\vec{\mu}\cdot\vec{B}) - \vec{\mu}\operatorname{div}\vec{B}.$$

Используя уравнение Максвелла $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, получаем

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\mu}\cdot\vec{B}) = (\vec{\mu}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}. \qquad (5.7)$$

Так как $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$, то из формулы (5.7) следует, что потенциальная энергия магнитного диполя $\vec{\mu}$ во внешнем магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ равна

$$U = -(\vec{\mu}\cdot\vec{B}). \qquad (5.8)$$

По виду эта формула совпадает с аналогичной формулой для электрического диполя.

С помощью формулы (5.8) можно вычислить энергию взаимодействия двух магнитных диполей как энергию одного из них в поле другого:

$$U_{12} = -(\vec{\mu}_1\cdot\vec{B}_2) = -(\vec{\mu}_2\cdot\vec{B}_1) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\mu}_1\left(\frac{3\vec{r}_{12}(\vec{\mu}_2\cdot\vec{r}_{12})}{r_{12}^5} - \frac{\vec{\mu}_2}{r_{12}^3}\right) =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{(\vec{\mu}_1\cdot\vec{\mu}_2)}{r_{12}^3} - 3\frac{(\vec{\mu}_1\cdot\vec{r}_{12})(\vec{\mu}_2\cdot\vec{r}_{12})}{r_{12}^5}\right].$$

Это выражение по виду совпадает с формулой для энергии взаимодействия двух электрических диполей (3.6).

Оценим величину энергии магнитного диполь-дипольного взаимодействия для двух магнитных атомов, находящихся в кристаллической решетке. Так как

$$U \sim \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mu_1\mu_2}{a^3},$$

а для атомов $\mu \approx 10^{-23}$ Дж/Тл, расстояние между ними $a \approx 10^{-9}$ м, то $U \approx 10^{-7}$ эВ. Эта величина на нескольких порядков меньше, чем энергия электрического диполь-дипольного взаимодействия (3.6).

Рассмотрим далее момент сил, действующих на систему с током со стороны внешнего магнитного поля:

$$\vec{N} = \int[\vec{r}, \vec{f}]\,dV = \int[\vec{r}, [\vec{j}, \vec{B}]]\,dV.$$

Перепишем эту формулу в виде

$$\vec{N} = \int\vec{j}(\vec{r}\cdot\vec{B})\,dV - \int\vec{B}(\vec{j}\cdot\vec{r})\,dV.$$

Так как размеры области с током считаем малыми, то индукция магнитного поля практически постоянна в этой области, и поэтому ее можно вынести за знак интеграла. В результате, заменяя $\vec{j} = \operatorname{rot} \vec{M}$, получим

$$\vec{N} = \int (\vec{r} \cdot \vec{B}) \operatorname{rot} \vec{M} dV - \vec{B} \int (\vec{r} \cdot \operatorname{rot} \vec{M}) dV = \int \operatorname{rot} [\vec{M} (\vec{r} \cdot \vec{B})] dV +$$
$$+ \int [\vec{M}, \vec{\nabla} (\vec{r} \cdot \vec{B})] dV - B \int \operatorname{div} [\vec{r}, \vec{M}] dV - \vec{B} \int \vec{M} \operatorname{rot} \vec{r} dV.$$

При выводе этого соотношения была использована формула (13) приложения II. Интегралы $\int \operatorname{rot} [\vec{M} (\vec{r} \cdot \vec{B})] dV$, $\int \operatorname{div} [\vec{r}, \vec{M}] dV$ можно преобразовать с помощью теоремы Остроградского в интегралы по поверхности. Эти интегралы равны нулю, если интегрирование производится по всему объему магнетика, вне которого $\vec{M} = 0$. Учитывая, что $\operatorname{rot} \vec{r} = 0$, $\vec{\nabla} (\vec{r} \cdot \vec{B}) = \vec{B}$, окончательно имеем

$$\vec{N} = \left[\int \vec{M} dV, \vec{B} \right] = [\vec{\mu}, \vec{B}]. \qquad (5.9)$$

Таким образом, на магнитный диполь $\vec{\mu}$, помещенный в магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, действует момент сил, равный (5.9), стремящийся ориентировать магнитный момент против поля.

Согласно законам классической механики, производная по времени от момента импульса равна моменту сил. Поэтому для физической системы, обладающей магнитным моментом, имеем

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} = [\vec{\mu}, \vec{B}]. \qquad (5.10)$$

Если учесть, что $\vec{j} = en\vec{v}$, то из формулы (5.4)

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2} \int n [\vec{r}, \vec{v}] dV.$$

Поскольку $m \int n [\vec{r}, \vec{v}] dV = \vec{L}$ — механический момент импульса, обусловленный движением заряженных частиц, то

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m} \vec{L}. \qquad (5.11)$$

Отношение магнитного и механического моментов равно $\mu/L = e/(2m)$ и называется *гиромагнитным отношением*.

Кроме орбитального момента количества движения частицы могут иметь собственный момент импульса (спин), с которым также связан магнитный момент, но с другим гиромагнитным отношением. Например, для электронов это отношение равно e/m, т. е. в два раза больше, чем для орбитального момента.

Так как, согласно (5.11), $\vec{\mu} = \frac{e}{2m} \vec{L}$, то уравнение (5.10) можно записать в виде

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \frac{e}{2m} [\vec{\mu}, \vec{B}]. \qquad (5.12)$$

Это уравнение движения магнитного момента во внешнем магнитном поле. При этом предполагается, что внешнее магнитное поле изменяет только ориентацию магнитного диполя, не изменяя его абсолютной величины (жесткий диполь).

§ 6. Природа электрического поля. Закон сохранения заряда

Единицы измерения длины, времени, массы и силы были выбраны в классической механике. При формулировке закона Кулона (1.2) и закона Био — Савара — Лапласа — Ампера — Эрстеда (4.1) были введены две новые фундаментальные физические величины: заряд q и сила тока I. Если бы эти величины не были связаны между собой, то, выбрав для них единицы измерения, мы тем самым определили бы численные значения коэ фициентов ε_0 и μ_0 в формулах (1.3) и (4.2), а также в формулах, которые из них следуют. Однако опыт показывает, что заряд и ток связаны между собой. Поэтому, выбрав единицу измерения одной из этих величин, мы тем самым выбираем единицу измерения и для другой.

Какие экспериментальные факты дают нам право утверждать, что заряд и ток связаны между собой? Из опыта известно, что ток в проводнике возникает только тогда, когда на его концах создана разность потенциалов. Следовательно, внутри проводника существуют электрическое поле и связанная с ним сила, которая, по-видимому, и приводит в движение имеющуюся в проводнике заряженную жидкость. После открытия заряженной частицы — электрона (Дж.-Дж. Томсон, 1897) стало ясно, что эта жидкость в металлических проводниках состоит из электронов. Рассматривая систему электронов как заряженную жидкость с массовой плотностью ρ_m и используя закон сохранения массы, можно записать уравнения непрерывности для величины ρ_m и плотности потока массы $j_m = \rho_m \cdot \vec{v}$:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_m = 0. \qquad (6.1)$$

Эта формула является следствием закона сохранения массы, который по сути есть закон сохранения числа частиц, записанных в модели сплошной среды.

Уравнение (6.1) можно умножить на любую постоянную величину, поэтому если предположить, что вектор плотности потока массы $\vec{j}_m$, входящий в формулу (6.1), пропорционален вектору плотности электрического тока, входящего в формулу (4.8), то их можно просто отождествить и тогда величину ρ_m в формуле (6.1) можно отождествить с плотностью заряда, входящей в формулу (2.6). Действительно, умножив (6.1) на e/m, где m — масса частиц, e — их заряд, и обозначив $\vec{j} = \frac{e}{m} \vec{j}_m$, $\rho = \frac{e}{m} \rho_m$, получим уравнение непрерывности для электрического тока и заряда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \qquad (6.2)$$

Таким образом, в области физических явлений, не сопровождающихся взаимопревращением частиц, закон сохранения заряда можно рассматривать как следствие сохранения числа частиц.

Вычислив с помощью (4.14)

$$\operatorname{div} \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = 0,$$

обнаружим, что в нестационарном случае, когда $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$, уравнение $\operatorname{div} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ противоречит уравнению непрерывности (6.2). Согласно (2.6) и (6.2), должно выполняться условие

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{}}{\partial t} \right) = 0.$$

Таким образом, для того чтобы уравнение (4.14) не противоречило уравнению (6.2), его необходимо переписать в виде

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \tag{6.3}$$

Следует отметить, что в результате взаимного превращения (рекомбинация, аннигиляция и т. д.) заряженные частицы могут исчезать, превращаясь в другие частицы, причем это исчезновение всегда происходит парами. Исчезают одновременно две противоположно заряженные частицы, превращаясь в нейтральные частицы (т. е. такие, которым приписывают электрический заряд, равный нулю) или в заряженные пары других частиц.

Например, если происходит рекомбинация положительно и отрицательно заряженных частиц, то для каждого сорта в отдельности

$$\frac{\partial \rho_+}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_+ = R, \quad \frac{\partial \rho_-}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_- = -R, \tag{6.4}$$

где R — скорость рекомбинации противоположно заряженных частиц; $\rho_\pm$, $\vec{j}_\pm$ — соответственно плотности и ток положительно и отрицательно заряженных частиц. Из закона сохранения заряда следует, что в уравнениях (6.4) справа должны стоять выражения, одинаковые по абсолютной величине, но противоположные по знаку. Складывая левые и правые части уравнения (6.4), получаем уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0,$$

в котором $\rho = \rho_+ + \rho_-$, $\vec{j} = \vec{j}_+ + \vec{j}_-$.

Поскольку объемные плотности заряда и тока связаны между собой соотношением (6.2), то, полагая $\rho = e \cdot n$, где n — число заряженных частиц в единице объема, из закона сохранения числа заряженных частиц находим: $\vec{j} = \rho \vec{v} = en\vec{v}$. Подставляя это выражение в формулу (4.9), получаем

$$\vec{f} = en [\vec{v}, \vec{B}].$$

Отсюда заключаем, что на одну заряженную частицу, движущуюся со скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле, индукция которого равна $\vec{B}$, действует сила

$$\vec{F} = e [\vec{v}, \vec{B}]. \tag{6.5}$$

Эта сила называется *силой Лоренца*.

Уравнение непрерывности (6.2), проинтегрировав его по некоторому объему, можно записать так:

$$\frac{d}{dt} \int \rho dV = -\int \operatorname{div} \vec{j} dV = -\int j_n dS. \tag{6.6}$$

Так как $\int \rho dv = Q$ — полный заряд в данном объеме, а $I = -\int j_n dS$ — полный ток через поверхность, ограничивающую данный объем, то эту формулу можно представить в виде

$$\frac{dQ}{dt} = I. \tag{6.7}$$

Отсюда следует, что поскольку единица времени уже выбрана, то, выбрав каким-нибудь способом единицу тока, мы тем самым однозначно фиксируем и единицу измерения заряда. И наоборот, произвольно выбрав единицу заряда, определяем и единицу тока. Таким образом, из закона сохранения заряда следует, что нельзя выбирать независимо единицы измерения для тока и заряда. Исходя из практического удобства в СИ в качестве независимой выбрана единица для тока (§ 8), что автоматически определяет единицу заряда.

Опыт показывает, что существуют два вида электрических зарядов, условно названных положительным и отрицательным. При этом заряды всех частиц и тел кратны элементарному (минимальному) заряду, равному $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Кл. Следовательно, зарядовое состояние каждой частицы может быть охарактеризовано целым числом, положительным или отрицательным. Нейтральным частицам приписывается нулевой заряд.

Рассмотрим изолированную систему заряженных частиц и пусть поверхность, по которой происходит интегрирование в формуле (6.6), проходит через точки пространства, где частицы нет. Тогда

$$\frac{dQ}{dt} = I = -\int j_n dS = 0$$

и, следовательно,

$$Q = \sum_{i=1}^{N} eZ_i = \text{const}; \tag{6.8}$$

здесь Z_i — положительные или отрицательные, включая нуль, целые числа, характеризующие зарядовое состояние частиц, N — полное число частиц в изолированной системе.

Разделив (6.8) на постоянное число e, получим закон сохранения заряда в виде

$$\sum_{i=1}^{N} Z_i = \text{const}, \tag{6.9}$$

т. е. *полный электрический заряд замкнутой физической системы, равный сумме зарядов, из которых состоит система элементарных частиц, строго сохраняется во всех взаимодействиях и превращениях частиц этой системы.*

В такой формулировке элементарный заряд e отсутствует. Поэтому, строго говоря, величина e не имеет прямого отношения к закону сохранения заряда (6.2). Фундаментальная константа e — это величина, определяющая, как будет показано ниже, интенсивность взаимодействия заряженных частиц с электромагнитным полем, т. е. интенсивность электромагнитного взаимодействия. Она в равной степени относится как к частицам, так и к электромагнитному полю.

Действительно, слагаемое, описывающее взаимодействие электромагнитного поля с веществом, имеет вид (см. (27.5))

$$\rho(\vec{v}\cdot\vec{A}) - \rho\varphi. \tag{6.10}$$

Обычно величину e включают в определение вектора тока $\vec{j} = \rho\vec{v}$, где $\rho = en$, но можно ее выделить и записать (6.10) в виде

$$e((\vec{j}'\cdot\vec{A}) - \rho'\varphi),$$

где e уже не включено в $\vec{j}' = \vec{n}\vec{v}$ и $\rho' = n$. В этом случае величина e выглядит равноправно по отношению к частицам $(\vec{j}', \rho')$ и электромагнитному полю $(\vec{A}, \varphi)$.

Отметим, что в теории элементарных частиц константой электромагнитного взаимодействия, одного из четырех фундаментальных взаимодействий, является безразмерная величина $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}$, которая называется *постоянной тонкой структуры.*

Закон сохранения заряда был впервые установлен в 1747 г. и в наше время надежно проверен в многочисленных очень точных экспериментах. О точности, с которой выполняется закон сохранения заряда, можно судить по тому, что, как установлено экспериментально, электрон сохраняет свой заряд по крайней мере в течение $5 \cdot 10^{21}$ лет. Другими словами, если он и распадается с нарушением закона сохранения заряда, скажем, на нейтральные частицы, то период полураспада не менее $5 \cdot 10^{21}$ лет. Если же в будущем будет обнаружено, что в результате какого-нибудь слабого взаимодействия электрон распадается на нейтральные частицы, то тогда закон сохранения заряда (6.8) будет рассматриваться как приближенный. Однако такое гипотетическое открытие никак не скажется на величине константы электромагнитного взаимодействия.

Закон сохранения электрического заряда является фундаментальным законом электродинамики. Он непосредственно связан с калибровочной симметрией уравнений электромагнитного поля (§ 27).

§ 7. Закон электромагнитной индукции Фарадея

До сих пор рассмотрение проводилось в рамках классической механики и ограничивалось изучением только сил электрического и магнитного происхождения. Было установлено, что источником электрических сил являются заряды, а магнитных — токи. Используя уравнения (2.6), (2.7) и (4.12), (4.14), можно рассчитать эти силы, а затем с помощью классической механики исследовать движение частиц под их действием. Примером является задача о движении двух заряженных частиц, взаимодействующих по закону Кулона, которая рассматривается в классической механике. Если бы природа ограничилась только этими законами, то их можно было бы включить в классическую механику.

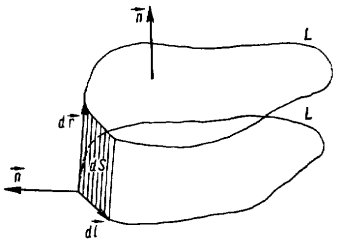


Рис. 7

Качественно новый шаг был сделан в 1831 г. М. Фарадеем, опыты которого привели к открытию нового вида материи — электромагнитного поля, а тем самым — к созданию классической электродинамики. Фарадей экспериментально обнаружил, что при изменении во времени величины магнитного поля в замкнутом проводящем контуре, находящемся в этом поле, возникает электрический ток. Ток возникает также и в том случае, когда магнитное поле постоянно, но проводящий контур движется в этом поле. Последний факт, хотя и был вначале установлен экспериментально, можно получить, исходя из выражения для силы Лоренца (6.5). Формула Лоренца, в свою очередь, является следствием закона Био — Савара — Лапласа — Ампера — Эрстеда и предположения о том, что электрический ток создается движущимися зарядами.

Действительно, сила, действующая на движущийся со скоростью $\vec{v}$ заряд e,

$$\vec{F} = e[\vec{v}, \vec{B}]. \tag{7.1}$$

Если проводящий контур L перемещать в магнитном поле $\vec{B}$ со скоростью $\vec{v}$, то на каждый носитель заряда в проводнике, который движется вместе с этим проводником, будет действовать сила (7.1). Предположим, что этой силе соответствует напряженность электрического поля $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{e} = [\vec{v}, \vec{B}]$. Учитывая, что $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, проинтегрируем это равенство по замкнутому контуру:

$$\oint_L (\vec{E}\cdot d\vec{l}) = \oint_L \frac{[d\vec{r}, \vec{B}]}{dt}\cdot d\vec{l} = \oint_L \frac{[d\vec{l}, d\vec{r}]\cdot\vec{B}}{dt}. \tag{7.2}$$

Здесь в смешанном произведении $[d\vec{r}, \vec{B}]\cdot d\vec{l} = [d\vec{l}, d\vec{r}]\cdot\vec{B}$ выполнена циклическая перестановка векторов. Из рис. 7 видно, что вектор $[d\vec{l}, d\vec{r}]$ равен по модулю элементу площади боковой цилиндрической поверх-

ности dS и направлен по нормали к ней:

$$[d\vec{l}, d\vec{r}] = \vec{n}dS.$$

Таким образом, правую часть в формуле (7.2) можно записать в виде

$$\oint_L \frac{[d\vec{l}, d\vec{r}]\cdot\vec{B}}{dt} = \int_{\text{бок}} \frac{(\vec{B}\cdot\vec{n})\,dS}{dt} = \frac{1}{dt}\int_{\text{бок}} B_n dS = \oint_l (\vec{E}\cdot d\vec{l}).$$

В этой формуле интеграл $\int_{\text{бок}} B_n dS$ равен потоку вектора магнитной индукции через боковую поверхность цилиндра, образованного движением контура L (рис. 7).

Рассмотрим замкнутую поверхность, состоящую из боковой поверхности, а также поверхностей, натянутых на бесконечно близкие контуры L и L', где L' — положение контура L в момент времени $t + dt$ (рис. 7). Для этой замкнутой поверхности из условия $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ получаем

$$\int \operatorname{div}\vec{B}dV = \int B_n dS = \int_{\text{верхн}} B_n dS + \int_{\text{нижн}} B_n dS + \int_{\text{бок}} B_n dS = 0.$$

Очевидно, что $\int_{\text{верхн}} B_n dS = \Phi(t + dt)$ есть поток вектора магнитной индукции через контур L в момент времени $t + dt$, а $\int_{\text{нижн}} B_n dS = -\Phi(t)$ — в момент времени t. Знак «минус» появился из-за того, что внешняя относительно нижней поверхности нормаль направлена противоположно нормали, внешней относительно поверхности, которая натянута на контур L. Таким образом,

$$\int_{\text{бок}} B_n dS = -\int_{\text{верхн}} B_n dS - \int_{\text{нижн}} B_n dS = \Phi(t) - \Phi(t + dt) = -\frac{d\Phi}{dt}dt.$$

В то же время $\oint_l (\vec{E}\cdot d\vec{l}) = \int \frac{[d\vec{l}, d\vec{r}]\,\vec{B}}{dt} = \frac{1}{dt}\int_{\text{бок}} B_n dS$, поэтому $\int \frac{[d\vec{l}, d\vec{r}]\,\vec{B}}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}$. Итак, учитывая (7.2), окончательно получаем закон электромагнитной индукции Фарадея

$$\oint_l (\vec{E}\cdot d\vec{l}) = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{7.3}$$

Обратим внимание на тот факт, что коэффициент пропорциональности между э. д. с. и скоростью изменения магнитного потока в точности равен —1. Если б мы получили формулу (7. 3) экспериментально, то были бы очень удивлены этой случайностью. Последующее развитие электродинамики показало, что это не случайность, а следствие релятивистской инвариантности уравнений Максвелла.

Итак, формула (7.3) является следствием, вытекающим из формулы для силы Лоренца (7.1), которая, в свою очередь, была получена из

закона Био — Савара — Лапласа — Ампера — Эрстеда и предположения о том, что величину $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{e} = [\vec{v}, \vec{B}]$ можно отождествить с электрическим полем. Почему же тогда этот закон относится к фундаментальным законам классической электродинамики? Дело в том, что закон (7.3), как это следует из опытов Фарадея, справедлив не только для движущегося в магнитном поле контура, но и для неподвижного, если при этом поток магнитной индукции через неподвижный контур изменяется со временем. Таким образом, уравнение (7.3), независимо от причины изменения потока магнитной индукции, можно записать в виде

$$\oint_L (\vec{E}\cdot d\vec{l}) = \int \vec{n}\cdot\operatorname{rot}\vec{E}dS = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int\left(\vec{n}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)dS.$$

Здесь использована теорема Стокса для преобразования интеграла по замкнутому контуру в интеграл по поверхности. Ввиду произвольности контура L, а следовательно, и поверхности, натянутой на этот контур, из этого равенства очевидно, что в любой точке пространства

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{7.4}$$

независимо от того, где находится точка — в проводящем контуре или вне его. Проводящий контур необходим лишь для обнаружения электрического поля, создаваемого переменным магнитным полем согласно формуле (7.4). Это поле, как и электрическое поле, создаваемое зарядами, действует на заряженные частицы и поэтому может создавать ток в проводниках. Источником этого поля являются не заряды, а переменное во времени магнитное поле. В этом факте и состоит важное значение формулы (7.4).

Таким образом, экспериментально установленные фундаментальные законы можно было бы записать в виде следующих математических формул:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{7.5}$$

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right), \tag{7.6}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{7.7}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0. \tag{7.8}$$

Уравнение непрерывности (6.2) теперь является следствием уравнений (7.6) и (7.7).

Из уравнения (7.6) следует, что переменное электрическое поле создает вихревое магнитное поле, а согласно уравнению (7.5), переменное магнитное поле создает вихревое электрическое поле. Следовательно, даже в отсутствие внешних источников ($\vec{j} = 0$, $\rho = 0$) в пространстве может существовать переменное электромагнитное поле.

§ 8. Полная система уравнений классической электродинамики. Системы единиц

Путем обобщения экспериментальных фактов было установлено, что система уравнений классической электродинамики, которую принято называть уравнениями Максвелла, так как именно Максвелл придал им такую форму, имеет вид

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{8.1}$$

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right), \tag{8.2}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{8.3}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0. \tag{8.4}$$

Обратим внимание, что только два уравнения Максвелла (8.1) и (8.2) содержат производные по времени. Два других (8.3) и (8.4) можно рассматривать как дополнительные условия или как уравнения связи в классической механике, которым должны удовлетворять векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Причем если эти условия выполняются в какой-то момент времени, то они будут выполняться и в любой другой момент времени. Действительно, из (8.1) следует, что

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\operatorname{div}\vec{B}}{\partial t} = 0.$$

Следовательно, если в начальный момент времени $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, то это условие будет выполняться и в любой другой момент времени. Аналогично, используя (8.2) и уравнение непрерывности, можно показать, что достаточно потребовать выполнения условия (8.3) в какой-то один момент времени. Отсюда следует, что уравнения (8.3) и (8.4), полученные экспериментально для статических зарядов и токов, будут справедливы также и в случае переменных зарядов и токов.

В уравнения (8.1) и (8.4) входят заряд ρ и ток $\vec{j}$, создаваемые частицами, движение которых, в свою очередь, определяется силой Лоренца

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + [\vec{j}, \vec{B}] \tag{8.5}$$

и уравнениями Ньютона. Следовательно, уравнения Максвелла и уравнения Ньютона являются взаимосвязанными и их следует решать совместно.

Уравнения (8.1) — (8.4) содержат две постоянные ε_0 и μ_0, числовые значения которых необходимо определить. Одну из них можно выбрать произвольно за счет единицы измерения (эталона) заряда или тока, а другая должна быть определена экспериментально. Это можно сделать следующим образом. Рассмотрим электромагнитное поле в вакууме, положив в уравнениях (8.1) — (8.4) $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$. Тогда получим

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\vec{E} = 0,$$

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0.$$

Из этих уравнений следует

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = \nabla\operatorname{div}\vec{E} - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{B} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

Так как $\operatorname{div}\vec{E} = 0$, то

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{8.6}$$

Здесь введено новое обозначение

$$\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}. \tag{8.7}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функции вида $\vec{E}(x - ct)$ являются решениями уравнения (8.5). Действительно, обозначив $\xi = x - ct$, находим первые производные

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}; \quad \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} = -c\frac{\partial\vec{E}}{\partial\xi},$$

а затем и вторые производные

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial\xi^2}, \quad \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -c^2\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial\xi^2},$$

поэтому

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Решения вида $\vec{E}(x - ct)$ описывают движение электромагнитной волны в вакууме в направлении оси x со скоростью c. Таким образом, область, в которой существует электромагнитное поле, перемещается в пространстве со скоростью $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. Измерив экспериментально эту величину (она оказалась равной 3 10^8 м/с), находим произведение $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$ Численное значение самих величин ε_0 и μ_0 можно определить путем выбора единицы тока или заряда. Так как ток и заряд связаны уравнением непрерывности, то, выбрав единицу измерения для одной из них, мы тем самым выбираем единицу измерения для другой.

Международная система единиц (СИ). В СИ в качестве основной единицы был выбран ампер (А). Ампер равен силе неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади

поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на участке длиной 1 м силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н.

Полагая в (4.7) $I_1 = I_2 = 1$ А, $a = 1$ м, $\frac{dF}{dL} = 2 \cdot 10^{-7}$ Н/м, получаем $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/А^2. Затем из соотношения (8.7) находим

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ Ф/м}.$$

В современной метрологии в качестве основной величины выбрана сила тока потому, что на практике гораздо легче создать и воспроизвести эталоны для тока, чем для заряда. Так как $Q = It$, то единицу заряда можно определить как заряд, проходящий через поперечное сечение при токе силой 1 А за время 1 с. Эта единица называется *кулоном* (Кл), размерность заряда $\dim Q = TI$.

Уравнения Максвелла в СИ имеют вид (8.1) — (8.4) В этой книге мы будем пользоваться системой СИ.

Система СГСЭ. В этой системе в качестве основной выбрана единица заряда, которая не имеет особого названия и определяется так, чтобы $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi}$. Тогда из формулы (8.7) $\mu_0 = \frac{4\pi}{c^2}$. Определив по-новому вектор индукции магнитного поля $\vec{B}' = \frac{1}{c}\vec{B}$, перепишем уравнения (8.1) — (8.4), а также формулу (8.5) в виде

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho,$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0,$$

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{j}, \vec{B}].$$

В этих уравнениях штрих у вектора $\vec{B}$ опущен.

Если электромагнитное поле стационарно, т. е. $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$, то система уравнений Максвелла (8.1) — (8.4) распадается на систему уравнений электростатики

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \tag{8.8}$$

и магнитостатики:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \tag{8.9}$$

которые можно решать независимо, если ρ и $\vec{j}$ заданы и не зависят от полей.

Глава 2

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 9. Энергия, импульс и момент импульса электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга

В классической механике доказывается, что законы сохранения энергии, импульса и момента импульса изолированной системы вытекают из свойств однородности пространства и времени, а также изотропности пространства. Следует ожидать, что электромагнитное поле, как и любой материальный объект, также обладает энергией, импульсом и моментом импульса. Как и в классической механике, необходимо дать определения этих величин, а также, исходя из уравнений Максвелла, получить законы сохранения для них. Так как электромагнитное поле и заряженные частицы взаимодействуют между собой, то, естественно, сохраняются суммарные значения энергии, импульса и момента импульса частиц и поля.

Система уравнений для электромагнитного поля и частиц имеет вид

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{9.1}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}(\vec{j} + \vec{j}_{\text{вн}}), \tag{9.2}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_{\text{вн}}}{\varepsilon_0}, \tag{9.3}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \tag{9.4}$$

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = e_i\vec{E} + e_i[\vec{v}_i, \vec{B}]. \tag{9.5}$$

Причем если частицы рассматриваются как точечные, то

$$\vec{j} = \sum_{i=1}^{n} e_i\vec{v}_i\delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad \rho = \sum_{i=1}^{n} e_i\delta(\vec{r} - \vec{r}_i).$$

В модели сплошной среды

$$\vec{j} = \rho\vec{v}, \quad \rho = en,$$

где n — число частиц в единице объема. При этом производную по времени в уравнении (9.5) следует понимать так:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{p}.$$

В правых частях уравнений (9.2) и (9.3) добавлены внешние источники поля $\vec{j}_{\text{вн}}$ и $\rho_{\text{вн}}$, не включенные в рассматриваемую физическую систему. В случае изолированной системы следует положить $\vec{j}_{\text{вн}} = 0$ и $\rho_{\text{вн}} = 0$.

Заметим, что только первые два уравнения Максвелла (9.1) и (9.2) являются динамическими, т. е. содержат производные по времени. Два других можно рассматривать как дополнительные условия, налагаемые на электромагнитное поле в какой-то один момент времени. По этой причине все законы сохранения могут быть получены из уравнений (9.1) и (9.2), а также уравнения (9.5), описывающего движение частиц.

Начнем с вывода закона сохранения энергии. Из классической механики известно [12, § 7], что производная по времени от энергии частиц равна мощности внешних сил, в нашем случае электромагнитных:

$$\frac{dU}{dt} = \int (\rho\vec{E} + [\vec{j}, \vec{B}]) \cdot \vec{v} dV.$$

Так как $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$, то эту формулу можно записать в виде

$$\frac{dU}{dt} = \int (\vec{j} \cdot \vec{E}) dV. \qquad (9.6)$$

Преобразуем интеграл в правой части, подставим в него $\vec{j}$ из уравнения (9.2):

$$\int (\vec{j} \cdot \vec{E}) dV = \int \vec{E} \left(\varepsilon_0 c^2 \operatorname{rot} \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{j}_{\text{вн}} \right) dV.$$

Здесь $\vec{j}_{\text{вн}}$ относится к тем частицам, которые не включены в рассматриваемую систему частиц. Для изолированной системы $\vec{j}_{\text{вн}} = 0$. Воспользовавшись формулой (10) приложения II и уравнением Максвелла (9.1), запишем

$$\vec{E} \operatorname{rot} \vec{B} = -\vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \operatorname{div} [\vec{E}, \vec{B}].$$

Таким образом,

$$\int (\vec{j} \cdot \vec{E}) dV = -\varepsilon_0 c^2 \int \operatorname{div} [\vec{E}, \vec{B}] dV -$$

$$- \frac{\varepsilon_0}{2} \int \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + c^2 B^2) dV - \int (\vec{j}_{\text{вн}} \cdot \vec{E}) dV.$$

Вектор

$$\vec{\Pi} = \varepsilon_0 c^2 [\vec{E}, \vec{B}] = \frac{1}{\mu_0} [\vec{E}, \vec{B}] \qquad (9.7)$$

называется *вектором Пойнтинга.*

Выражение

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2} (E^2 + c^2 B^2), \qquad (9.8)$$

как будет показано ниже, есть *объемная плотность энергии электромагнитного поля.* Тогда формулу (9.6), используя определения (9.7) и (9.8), можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \left[U + \frac{\varepsilon_0}{2} \int (E^2 + c^2 B^2) dV \right] = - \int \operatorname{div} \vec{\Pi} dV - \int (\vec{j}_{\text{вн}} \cdot \vec{E}) dV. \qquad (9.9)$$

Применим к первому слагаемому в левой части (9.9) теорему Остроградского:

$$\frac{d}{dt} (U + \int w dV) = - \int \Pi_n dS - \int (\vec{j}_{\text{вн}} \cdot \vec{E}) dV. \qquad (9.10)$$

Из формулы (9.10) следует, что изменение полной энергии электромагнитного поля и частиц за единицу времени в некотором объеме обусловлено: 1) взаимодействием электромагнитного поля с внешними источниками, которое описывается слагаемым $-\int (\vec{j}_{\text{вн}} \cdot \vec{E}) dV$; 2) потоком электромагнитной энергии через поверхность, ограничивающую этот объем, который описывается слагаемым $\int \Pi_n dS$.

Таким образом, вектор Пойнтинга (9.7) характеризует величину и направление потока электромагнитной энергии, переносимой за единицу времени через единицу площади поверхности, перпендикулярной к направлению этого вектора. Модуль вектора Пойнтинга называется интенсивностью электромагнитного поля.

Если изолированная ($\vec{j}_{\text{вн}} = 0$) физическая система, состоящая из поля и частиц, находится в ограниченном объеме, то можно выбрать такую поверхность интегрирования S, чтобы она находилась в области, где поля нет и движущиеся частицы ее не пересекали. Тогда в формуле (9.10) интеграл по поверхности $\int \Pi_n dS = 0$ и

$$U + \frac{\varepsilon_0}{2} \int (E^2 + c^2 B^2) dV = \text{const}.$$

Это и есть закон сохранения энергии для изолированной физической системы «частицы + электромагнитное поле», которым подтверждается наше предположение о том, что энергия электромагнитного поля выражается формулой

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int (E^2 + c^2 B^2) dV$$

и состоит из электрической $W_{\text{эл}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 dV$ и магнитной $W_{\text{магн}} = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \int B^2 dV = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV$ частей.

Следует отметить, что формула (9.10) справедлива, если заряженные частицы при своем движении не пересекают поверхности интегрирования. В противном случае необходимо учитывать в правой части этой формулы поток энергии, обусловленный частицами, которые пересекают эту поверхность. Этот поток в механике сплошной среды описывается вектором Умова [12, § 48].

Отметим, что хотя закон сохранения энергии является важным и универсальным, тем не менее не может считаться фундаментальным законом природы, так как является следствием уравнений движения. Без уравнений Максвелла мы даже бы не знали, что называть энергией электромагнитного поля.

Если же система находится во внешнем электромагнитном поле, создаваемом внешними источниками $\vec{j}_{\text{вн}}$ и $\rho_{\text{вн}}$, то тогда из формулы

(9.10) следует

$$\frac{dE}{dt} = -\int (\vec{j}_{\text{вн}} \cdot \vec{E})\, dV, \tag{9.11}$$

где $E = W + U$ — полная энергия системы, включающая как энергию частиц, так и энергию поля. Таким образом, изменение со временем полной энергии происходит за счет работы внешних, т. е. не включенных в рассматриваемую систему, источников электромагнитного поля, мощность которых равна

$$-\int (\vec{j}_{\text{вн}} \cdot \vec{E})\, dV.$$

Для того чтобы получить закон сохранения импульса электромагнитного поля, рассмотрим изменение импульса заряженных частиц, обусловленное их взаимодействием с электромагнитным полем. Согласно классической механике [12, § 4], производная по времени от вектора полного импульса системы частиц равна сумме всех внешних сил:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \int \vec{f} dV. \tag{9.12}$$

В этой формуле $\vec{p}$ — импульс всех частиц, находящихся в данном объеме интегрирования, объемная сила $\vec{f}$ определяется формулой (8.5).

С помощью уравнений Максвелла (8.1) — (8.4) плотность электромагнитных сил $\vec{f} = \rho\vec{E} + [\vec{j}, \vec{B}]$ можно выразить через векторы электромагнитного поля. Для этого с помощью уравнений (8.2) и (8.3) перепишем объемную силу в следующем виде:

$$\vec{f} = \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \operatorname{div} \vec{E} + [\vec{j}, \vec{B}]. \tag{9.13}$$

Преобразуем сначала первое слагаемое в формуле (9.13):

$$\vec{E} \cdot \operatorname{div} \vec{E} \equiv \vec{E} \frac{\partial E_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{E} E_i) - E_i \frac{\partial \vec{E}}{\partial x_i}.$$

Так как, согласно формуле (12) приложения II, для любого вектора

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla} a^2 + [\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{a}] = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\, \vec{a} \equiv a_i \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_i}, \tag{9.14}$$

то

$$E_i \frac{\partial \vec{E}}{\partial x_i} = (\vec{E} \cdot \vec{\nabla})\, \vec{E} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} E^2 + \left[\vec{E}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right].$$

Здесь мы воспользовались уравнением Максвелла (9.1). Окончательно имеем

$$\varepsilon_0 \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} = \varepsilon_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} (E_i \vec{E}) - \frac{1}{2} \vec{\nabla} E^2 - \left[\vec{E}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right] \right\}. \tag{9.15}$$

Выполним аналогичные преобразования второго слагаемого в правой части (9.13). Воспользовавшись уравнением Максвелла (8.2),

а также формулой (9.14), запишем

$$[\vec{j}, \vec{B}] = \frac{1}{\mu_0} [\operatorname{rot} \vec{B}, \vec{B}] - \varepsilon_0 \left[\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \vec{B}\right] =$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \left\{ -\frac{1}{2} \vec{\nabla} B^2 + B_i \frac{\partial \vec{B}}{\partial x_i} \right\} - \varepsilon_0 \left[\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \vec{B}\right] =$$

$$= \varepsilon_0 \left\{ c^2 \left[-\frac{1}{2} \vec{\nabla} B^2 + \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{B} B_i) - \vec{B} \frac{\partial B_i}{\partial x_i} \right] \right\} - \varepsilon_0 \left[\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \vec{B}\right].$$

Поскольку $\frac{\partial B_i}{\partial x_i} \equiv \operatorname{div} \vec{B} = 0$ и $\frac{1}{\mu_0} = \varepsilon_0 c^2$, то

$$[\vec{j}, \vec{B}] = \varepsilon_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} (c^2 \vec{B} B_i) - \frac{1}{2} \vec{\nabla} (c^2 B^2) - \left[\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \vec{B}\right] \right\}. \tag{9.16}$$

С учетом полученных равенств (9.15) и (9.16) формула (9.13) запишется так:

$$\vec{f} = \varepsilon_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{E} E_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (c^2 \vec{B} B_i) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \vec{\nabla} E^2 - \frac{1}{2} \vec{\nabla} (c^2 B^2) \right\} - \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_0 [\vec{E}, \vec{B}]. \tag{9.17}$$

Определим вектор

$$\vec{g} = \varepsilon_0 [\vec{E}, \vec{B}] = \frac{\vec{\Pi}}{c^2}, \tag{9.18}$$

который только множителем $1/c^2$ отличается от вектора Пойнтинга (9.7) и, как будет показано ниже, есть *объемная плотность импульса электромагнитного* поля.

Введем также симметричный тензор второго ранга

$$T_{ij} = T_{ji} = \varepsilon_0 \left[\frac{1}{2} (E^2 + c^2 B^2)\, \delta_{ij} - (E_i E_j + c^2 B_i B_j) \right], \tag{9.19}$$

который называется *максвелловским тензором натяжения*. С его помощью и с помощью вектора $\vec{g}$ формулу (9.17) запишем так:

$$f_i = -\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_i}{\partial t}. \tag{9.20}$$

Подставляя (9.20) в (9.12), получаем

$$\frac{dp_i}{dt} + \frac{d}{dt} \int g_i dV = -\int \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV. \tag{9.21}$$

Преобразовав с помощью теоремы Остроградского объемный интеграл в левой части формулы (9.21) в поверхностный, получим

$$\frac{d}{dt} (p_i + p_{fi}) = -\int T_{ij} n_j dS,$$

где $\vec{p}_f = \int \vec{g} dV$ — импульс электромагнитного поля. Если интеграл берется по всему объему, то поверхность интегрирования отодвигается на бесконечность и так как там поле равно нулю, то поверхностный

интеграл также обращается в нуль. В результате получаем закон сохранения импульса для изолированной системы, состоящей из вещества и поля:

$$\vec{p} + \vec{p}_f = \text{const}.$$

Именно тот факт, что сохраняется суммарная величина $\vec{p} + \vec{p}_f$, и дает нам право назвать вектор (9.18) объемной плотностью импульса электромагнитного поля.

Рассмотрим изменение импульса только электромагнитного поля в произвольном объеме. Для этого перепишем формулу (9.21) в виде

$$\frac{d}{dt}\int g_i dV = \int \frac{\partial g_i}{\partial t}\, dV = -\frac{dp_i}{dt} - \int \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV =$$

$$= -\int \left(f_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\right) dV.$$

Так как эта формула справедлива для любого объема, то закон сохранения импульса электромагнитного поля в дифференциальной форме запишется как

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -f_i. \qquad (9.22)$$

Из этой формулы следует, что импульс электромагнитного поля в данной точке может изменяться за счет потока импульса и взаимодействия с частицами.

Аналогичным образом можно получить закон сохранения момента импульса. Согласно классической механике, производная по времени от момента импульса частиц равна сумме моментов всех внешних сил, действующих на частицы со стороны электромагнитного поля:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \int [\vec{r}, \vec{f}]\, dV.$$

Рассмотрим составляющую $\frac{dL_x}{dt}$ этого равенства:

$$\frac{dL_x}{dt} = \int (yf_z - zf_y)\, dV.$$

Воспользовавшись выражением (9.22), перепишем эту формулу в виде

$$\frac{dL_x}{dt} = -\int \left(y\frac{\partial T_{zj}}{\partial x_j} - z\frac{\partial T_{yj}}{\partial x_j}\right) dV - \frac{d}{dt}\int (yg_z - zg_y)\, dV.$$

Так как $\int [\vec{r}, \vec{g}]\, dV = \vec{L}_f$ есть момент импульса электромагнитного поля, то

$$\frac{d(L_x + L_{fx})}{dt} = -\int \frac{\partial}{\partial x_j}(yT_{zj} - zT_{yj})\, dV + \int (T_{zy} - T_{yz})\, dV.$$

Здесь учтено, что $\frac{\partial y}{\partial x_j} = \delta_{yj}$ и $\frac{\partial z}{\partial x_j} = \delta_{zj}$. Поскольку $T_{ij} = T_{ji}$, то последний интеграл в правой части этого выражения равен нулю, а

первый может быть преобразован в интеграл по поверхности. Поэтому

$$\frac{d(\vec{L} + \vec{L}_f)\, x}{dt} = -\int (yT_{zj} - zT_{yj})\, n_j dS. \qquad (9.23)$$

Справа в этой формуле стоит поток вектора момента импульса через поверхность S. Для изолированной системы интеграл по бесконечно удаленной поверхности равен нулю и тогда из этого равенства следует

$$\vec{L}_f + \vec{L} \equiv \varepsilon_0 \int [\vec{r}, [\vec{E}, \vec{B}]]\, dV + \vec{L} = \text{const},$$

что является математическим выражением закона сохранения полного момента импульса изолированной физической системы, состоящей из частиц и электромагнитного поля.

В этом параграфе получены, как следствия из уравнений Максвелла и уравнений классической механики, три закона сохранения, общие как для частиц, так и для поля. Это наводит на мысль о том, что корпускулярные свойства, характерные для частиц, в какой-то мере должны быть присущи и электромагнитному полю. Однако эта идея о единстве волновых и корпускулярных свойств находит наиболее четкое выражение в квантовой теории.

§ 10. Скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля. Калибровочная инвариантность уравнений Максвелла

В гл. 1 на основе экспериментальных фактов сформулированы фундаментальные законы классической электродинамики. Математической формулировкой этих законов являются уравнения Максвелла (8.1) — (8.4). Покажем, что уравнениям электродинамики можно придать другую, эквивалентную математическую форму.

Из уравнения (8.4) следует, что индукция магнитного поля всегда может быть представлена в виде $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$, где векторная функция $\vec{A}(x, y, z, t)$ называется *векторным потенциалом* электромагнитного поля. Подставив выражение $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ в формулу (8.1), получим

$$\operatorname{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что всегда можно записать

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\varphi,$$

где функция φ называется *скалярным потенциалом* электромагнитного поля.

Итак, для описания электромагнитного поля вместо векторов $\vec{B}$ и $\vec{E}$ можно пользоваться векторным и скалярным потенциалами $\vec{A}$ и φ. Связь между векторами $\vec{E}$ и $\vec{B}$, с одной остроны, и величинами $\vec{A}$ и φ

с другой, дается формулами

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \tag{10.1}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \tag{10.2}$$

Очевидно, что этими соотношениями $\vec{A}$ и φ определяются неоднозначно, так как к векторному потенциалу всегда можно добавить градиент любой функции f:

$$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{\nabla} f \tag{10.3}$$

и при этом соотношение (10.1) не изменится. Подставляя выражение (10.3) в формулу (10.2), имеем

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \vec{\nabla}\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Вводя новый скалярный потенциал $\varphi' = \varphi + \frac{\partial f}{\partial t}$, получаем $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}$. Кроме того, $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}'$. Таким образом, преобразование

$$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{\nabla} f, \quad \varphi = \varphi' - \frac{\partial f}{\partial t}, \tag{10.4}$$

где f — произвольная скалярная функция, не ведет к изменению значений векторов электромагнитного поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Это свойство уравнений электромагнитного поля называют *калибровочной инвариантностью* (или *калибровочной симметрией*). Так как вид уравнений (8.1) и (8.4) не зависит от наличия частиц, то это свойство электромагнитного поля, как и соотношения (10.1) и (10.2) имеет место всегда.

Представляя $\vec{E}$ и $\vec{B}$ через потенциалы $\vec{A}$ и φ, согласно формулам (10.1) и (10.2), мы тем самым автоматически удовлетворяем уравнениям (8.1) и (8.4). Два других уравнения Максвелла (8.2) и (8.3) могут быть использованы для нахождения уравнений, связывающих потенциалы $\vec{A}$ и φ с токами и зарядами. Подставляя (10.1) и (10.2) в (8.2) и (8.3), получаем

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\left(\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = -\mu_0 \vec{j}, \tag{10.5}$$

$$\Delta\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div} \vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{10.6}$$

Благодаря калибровочной инвариантности уравнений электромагнитного поля на потенциалы $\vec{A}$ и φ можно наложить дополнительное условие с тем, чтобы упростить уравнения (10.5) и (10.6). Выберем это условие в виде

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{10.7}$$

Тогда уравнения (10.5) и (10.6) примут вид

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}, \tag{10.8}$$

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{10.9}$$

Соотношение (10.7), налагаемое на потенциалы, называется *калибровкой Лоренца*. Как будет показано в § 25, условие (10.7) инвариантно относительно преобразования Лоренца и поэтому часто используется в релятивистской квантовой теории.

Покажем, что используя калибровочную инвариантность (10.4), всегда можно добиться того, чтобы потенциалы удовлетворяли калибровке Лоренца (10.7). Действительно, предположим, что какие-то конкретные потенциалы $\vec{A}$ и φ не удовлетворяют условию (10.7). Тогда с помощью калибровочного преобразования (10.4) перейдем к новым потенциалам $\vec{A}'$ и φ'. Для них имеем

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Выбирая функцию f так, чтобы она удовлетворяла уравнению

$$\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \tag{10.10}$$

приходим к новым потенциалам $\vec{A}'$ и φ', которые уже удовлетворяют условию Лоренца (10.7). Из (10.10) следует, что потенциалы, удовлетворяющие условию калибровки Лоренца (10.7), все еще допускают калибровочное преобразование (10.4), но при условии, что функция f удовлетворяет уравнению

$$\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Такое калибровочное преобразование называется *градиентным преобразованием второго рода*.

Часто используется калибровка

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0, \tag{10.11}$$

называемая *кулоновской*, или *поперечной, калибровкой*. При кулоновской калибровке уравнения (10.5) и (10.6) принимают вид

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \tag{10.12}$$

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{10.13}$$

Так как скалярный потенциал при этом удовлетворяет уравнению Пуассона (2.8), то его решение может быть записано в виде (1.9)

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, dV'.$$

Из других калибровок назовем еще калибровку Гамильтона, которая состоит в том, что в уравнениях (10.5) и (10.6) полагают $\varphi = 0$, причем в этом случае они приобретают вид

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\operatorname{div}\vec{A} = -\mu_0 \vec{j},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

В тех областях, где нет заряженных частиц ($\vec{j} = 0$, $\rho = 0$), из второго уравнения получается, что $\operatorname{div}\vec{A}$ не зависит от времени и так как в начальный момент, до прихода в данную точку электромагнитных волн, $\operatorname{div}\vec{A} = 0$, то это же равенство будет соблюдаться в любой момент времени. Таким образом, в вакууме электромагнитное поле удовлетворяет уравнениям

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{A} = 0. \tag{10.14}$$

При этом

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}.$$

Итак, состояние электромагнитного поля можно описать с помощью двух векторных функций координат и времени $\vec{E}$ и $\vec{B}$ или одной векторной функцией $\vec{A}$ и одной скалярной φ. Зная начальное состояние электромагнитного поля, т. е. значение этих функций в начальный момент времени, с помощью уравнений Максвелла (8.1) — (8.4) или уравнений (10.8) и (10.9) можно предсказать состояние электромагнитного поля в любой последующий момент времени (*принцип причинности* в классической электродинамике).

§ 11. Запаздывающие и опережающие потенциалы

В § 2 было показано, что в случае неподвижных зарядов скалярный потенциал удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon_0$, а его решение имеет вид (1.9): $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')\,dV'}{R}$. Если плотность заряда ρ зависит от времени, то, очевидно, и создаваемый этими зарядами потенциал также должен зависеть от времени. При калибровке Лоренца этот потенциал удовлетворяет уравнению (10.9), которое отличается от уравнения (2.8) наличием второй производной по времени. Попытаемся построить решение уравнения (10.9) с помощью физических соображений, а затем проверим его правильность путем подстановки в это уравнение.

Пусть в точке $\vec{r}_i$ находится заряд ΔQ_i, величина которого зависит от времени. Тогда потенциал, создаваемый этим зарядом в точке наблюдения $\vec{r}$, равен

$$\varphi_i(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta Q_i(t - R/c)}{R},$$

где $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$.

Таким образом, полагаем, что значение потенциала φ в точке $\vec{r}$ в момент времени t определяется значением заряда в точке $\vec{r}_i$ в предыдущий момент $\tau = t - R/c$. Это связано с тем, что время распространения электромагнитного поля от точки $\vec{r}_i$ до точки наблюдения $\vec{r}$ равно R/c.

Представляя величину ΔQ_i в виде

$$\Delta Q_i\left(t - \frac{R}{c}\right) = \rho\left(\vec{r}_i, t - \frac{R}{c}\right)\Delta V_i,$$

где ρ — объемная плотность заряда, и используя принцип суперпозиции, получаем

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{\rho\left(\vec{r}_i, t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_i|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}\Delta V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}', \tau)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}dV', \tag{11.1}$$

где $\tau = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} = t - \frac{R}{c}$.

Приведенный вывод не является строгим в математическом отношении, поэтому необходимо прямой подстановкой выражения (11.1) в уравнение (10.9) убедиться в том, что действительно это правильное решение. Для его проверки сначала вычислим вторую производную по времени от потенциала (11.1):

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{R}\frac{\partial^2\rho}{\partial\tau^2}dV'. \tag{11.2}$$

Затем находим

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}\vec{\nabla}\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\operatorname{div}\int \vec{\nabla}\left(\frac{\rho}{R}\right)dV' =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\operatorname{div}\int\left[\rho\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{1}{R}\vec{\nabla}\rho\right]dV'.$$

Используя формулу (7) приложения II, получим

$$\Delta\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left\{\operatorname{div}\left[\rho\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right)\right] + \operatorname{div}\left(\frac{1}{R}\vec{\nabla}\rho\right)\right\}dV' =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[\rho\Delta\left(\frac{1}{R}\right) + 2\vec{\nabla}\rho\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{1}{R}\Delta\rho\right]dV'. \tag{11.3}$$

Следует обратить внимание на то, что в выражении (11.3) дифференцирование под знаком интеграла должно производиться по точке наблюдения (нештрихованные координаты), а интегрирование — по штрихованым координатам.

Вычислим также

$$\vec{\nabla}\tau = \frac{\partial\tau}{\partial R}\vec{\nabla}R = -\frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}, \quad \vec{\nabla}\rho = \frac{\partial\rho}{\partial\tau}\vec{\nabla}\tau = -\frac{1}{c}\frac{\partial\rho}{\partial\tau}\frac{\vec{R}}{R}.$$

Далее находим

$$\Delta\rho = \operatorname{div}\vec{\nabla}\rho = -\frac{1}{c}\operatorname{div}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\tau}\frac{\vec{R}}{R}\right) = -\frac{1}{c}\left[\frac{\vec{R}}{R}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\tau}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\rho}{\partial\tau}\operatorname{div}\left(\frac{\vec{R}}{R}\right)\right] = -\frac{1}{c}\left[\left(\frac{\vec{R}}{R}\cdot\vec{\nabla}\tau\right)\frac{\partial^2\rho}{\partial\tau^2}+\left(\frac{3}{R}-\frac{1}{R}\right)\frac{\partial\rho}{\partial\tau}\right] =$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial\tau^2}-\frac{2}{cR}\frac{\partial\rho}{\partial\tau}. \qquad (11.4)$$

Затем, подставляя (11.4) в (11.3), получаем

$$\Delta\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int\rho\Delta\left(\frac{1}{R}\right)dV' + \frac{1}{c^2}\int\frac{1}{R}\frac{\partial^2\rho}{\partial\tau^2}dV' - \right.$$

$$\left. -\frac{2}{c}\int\frac{1}{R^2}\frac{\partial\rho}{\partial\tau}dV' - \frac{2}{c}\int\frac{\partial\rho}{\partial\tau}\frac{\vec{R}}{R}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right)dV'\right].$$

Учитывая (11.2) и то, что $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\vec{R}}{R^3}$ (при этом два последние слагаемые сокращаются), имеем

$$\Delta\varphi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int 4\pi\rho(\vec{r})\,\delta(\vec{r}-\vec{r})\,dV'.$$

Используя далее формулу

$$\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}'),$$

окончательно получаем

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

что совпадает с (10.9).

Итак, полученное из физических соображений решение (11.1) удовлетворяет неоднородному волновому уравнению (10.9).

Потенциал в виде (11.1) называется *запаздывающим потенциалом*, так как в нем учтено, во-первых, запаздывание в процессе распространения электромагнитных волн, связанное с конечностью скорости распространения электромагнитных волн, а во-вторых,— тот факт, что волны уходят от источника.

Отметим, что уравнение (10.9) совершенно не изменится, если в нем заменить c на $-c$, но решение (11.1) при этом будет иметь вид

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}', t+R/c)}{R}dV'.$$

Это решение, которое называется *опережающим потенциалом*, не сводится к (11.1) и поэтому является независимым решением уравнения (10.9). В большинстве задач пользуются именно запаздывающим потенциалом (11.1), так как опережающие потенциалы соответствуют электромагнитным волнам, распространяющимся из бесконечности. Если источников поля на бесконечности нет, то следует выбирать только решения в виде запаздывающих потенциалов.

В некоторых задачах опережающие потенциалы все-таки используются. Например, в одномерном случае всегда существуют два решения однородного уравнения (вдали от источников, где $\rho = 0$):

$$\varphi\left(t-\frac{x}{c}\right) \text{ и } \varphi\left(t+\frac{x}{c}\right).$$

Эти решения соответствуют волнам, распространяющимся в противоположных направлениях, и если одно из них считать опережающим, то другое будет запаздывающим.

Необходимо иметь в виду, что решение (11.1) есть частное решение неоднородного линейного уравнения (10.9). Для получения полного решения к любому частному решению надо добавить общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\Delta\varphi_0 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial t^2} = 0$$

и тогда общее решение волнового уравнения (10.9) примет вид

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\left(\vec{r}', t-\frac{R}{c}\right)}{R}dV'.$$

Функция φ_0 учитывает наличие источников электромагнитного поля, расположенных вне объема интегрирования. Если, например, решается задача о рассеянии электромагнитной волны системой зарядов с плотностью ρ, то необходимо выбирать решения уравнения (10.9) так, чтобы на больших расстояниях от системы зарядов функция φ_0 описывала падающую волну, источник которой расположен достаточно далеко (на бесконечности) от рассеивающих зарядов.

Так как волновое уравнение для векторного потенциала имеет такую же структуру (10.8), как и уравнение для скалярного потенциала (10.9), то очевидно, что его решение будет

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t-\frac{R}{c}\right)}{R}dV'. \qquad (11.5)$$

К решению (11.5), в случае необходимости, также следует добавить векторную функцию $\vec{A}_0(\vec{r}, t)$, удовлетворяющую однородному волновому уравнению, которая учитывает наличие источников электромагнитного поля, расположенных вне объема интегрирования.

Строго говоря, формулы (11.1) и (11.5) являются решениями волновых уравнений только в том случае, если ρ и $\vec{j}$ можно считать заданными. Если же ρ и $\vec{j}$ сами зависят от полей, то эти уравнения становятся интегральными уравнениями.

§ 12. Спектральное разложение. Комплексное представление физических величин

Любое электромагнитное поле можно представить в виде интеграла (суммы) монохроматических волн. Математически это соответствует разложению функций, описывающих электромагнитное поле, в инте

грал Фурье. Это разложение имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, e^{-i\omega t} d\omega. \qquad (12.1)$$

Обратное преобразование представляется формулой

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t} dt.$$

Комплексная функция $f(\omega) = |f(\omega)|\, e^{i\varphi(\omega)}$ характеризует спектральный состав некоторого физического процесса (в частности, изменение электромагнитного поля со временем), описываемого функцией $f(t)$.

Если функция $f(t)$ вещественна, то

$$f^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt = f(-\omega). \qquad (12.2)$$

Следовательно, $\mathrm{Re}\, f(\omega) = \mathrm{Re}\, f(-\omega)$ и $\mathrm{Im}\, f(\omega) = -\mathrm{Im}\, f(-\omega)$, и поэтому достаточно знать функцию $f(\omega)$ только для положительных частот.

Так как $f(\omega) = |f(\omega)|\, e^{i\varphi(\omega)}$, то из формулы (12.2) следует, что $|f(\omega)| = |f(-\omega)|$ и $\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$. Другими словами, модуль функции фурье-образа вещественной функции $f(t)$ есть четная функция частоты, а фаза — нечетная.

Запишем формулу (12.1) в виде интеграла только по положительным частотам. Для этого разобьем интеграл по частотам на два интеграла:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} f(\omega)\, e^{-i\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} f(\omega)\, e^{-i\omega t} d\omega.$$

Выполнив в последнем интеграле замену $\omega \to -\omega$, воспользуемся свойством (12.2). В результате получим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \left(f(\omega)\, e^{-i\omega t} + f^*(\omega)\, e^{i\omega t}\right) d\omega.$$

В дальнейшем функциями вида $f(t) = \frac{1}{2}\left(Ae^{-i\omega t} + A^* e^{i\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(Ae^{-i\omega t}\right)$ будем пользоваться для описания монохроматических колебательных или волновых процессов.

Рассмотрим далее следующий интеграл от квадрата функции $f(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, e^{-i\omega t} d\omega.$$

Здесь мы воспользовались формулой (12.1). Изменив порядок интегрирования, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t)\, e^{-i\omega t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) f(-\omega)\, d\omega.$$

С учетом соотношения (12.2) находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) f^*(\omega)\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |f(\omega)|^2 d\omega. \qquad (12.3)$$

Здесь учтено, что $|f(\omega)|^2$ — четная функция ω.

Таким образом, несмотря на то что в разложение Фурье (12.1) входят как положительные, так и отрицательные частоты, интеграл (12.3) свелся к интегрированию только по положительным частотам. Этим объясняется тот факт, что экспериментаторы представляют свои результаты только для положительных частот.

Можно получить формулу, аналогичную (12.3) для интеграла от произведения двух различных вещественных функций:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) f_j(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt f_i(t) \int_{-\infty}^{\infty} f_j(\omega)\, e^{-i\omega t} d\omega.$$

Изменим в правой части этого выражения порядок интегрирования:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) f_j(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega f_j(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t)\, e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_j(\omega) f_i^*(\omega)\, d\omega.$$

Слева стоит вещественная величина, поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) f_j(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_i(\omega) f_j^*(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_i^*(-\omega) f_j(-\omega)\, d\omega.$$

Взяв полусумму обоих выражений, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) f_j(t)\, dt = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[f_i^*(\omega) f_j(\omega) + f_i^*(-\omega) f_j(-\omega)\right] d\omega.$$

Под интегралом стоит четная функция частоты, поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) f_j(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \left[f_i^*(\omega) f_j(\omega) + f_i^*(-\omega) f_j(-\omega)\right] d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \left[f_i^*(\omega) f_j(\omega) + f_i(\omega) f_j^*(\omega)\right] d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \mathrm{Re}\left[f_i^*(\omega) f_j(\omega)\right] d\omega. \qquad (12.4)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $f^*(-\omega) = f(\omega)$. При $i = j$ формула (12.4) сводится к формуле (12.3).

Разложение векторных функций времени в интеграл Фурье имеет вид, аналогичный (12.1):

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\omega)\, e^{-i\omega t} d\omega.$$

Тогда, согласно формуле (12.3),

$$\int_{-\infty}^{\infty} E^2(t)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |E(\omega)|^2 d\omega.$$

Так как интенсивность есть поток энергии за единицу времени через единицу площади поверхности, то полная энергия, излученная через некоторую поверхность, содержащую внутри себя источник электромагнитных волн, за все время излучения выражается через вектор Пойнтинга (9.7) следующим образом:

$$W = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int (\vec{\Pi}(t) \cdot \vec{n})\, dS = \varepsilon_0 c^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int ([\vec{E}, \vec{B}] \cdot \vec{n})\, dS.$$

Здесь $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S.

Воспользовавшись формулой (12.4), получим

$$W = \varepsilon_0 c^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int ([\vec{E}, \vec{B}] \cdot \vec{n})\, dS = \frac{\varepsilon_0 c^2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} d\omega \int \mathrm{Re}\,([\vec{E}_\omega, \vec{B}_\omega^*] \cdot \vec{n})\, dS. \quad (12.5)$$

В формуле (12.5) интегрирование удобно производить по поверхности сферы достаточно большого радиуса R, полностью включающей в себя источник излучения. В этом случае $dS = R^2 d\Omega$ и поэтому $\frac{dW}{d\omega} = \frac{\varepsilon_0 c^2}{\pi} \int \mathrm{Re}\,([\vec{E}_\omega, \vec{B}_\omega^*] \cdot \vec{n})\, R^2 d\Omega$, а энергия излучения в данной полосе частот (спектральная плотность энергии) в данный телесный угол (угловое распределение излучения) равна

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = \frac{\varepsilon_0 c^2}{\pi} \mathrm{Re}\,([\vec{E}_\omega, \vec{B}_\omega^*] \cdot \vec{n})\, R^2. \quad (12.6)$$

Таким образом, с помощью формулы (12.6) угловое и спектральное распределение энергии излучения можно выразить через фурье-компоненты векторов электромагнитного поля. Эта формула играет большую роль в электродинамике, так как непосредственно связывает теоретические результаты с экспериментальными (слева в формуле (12.6) — экспериментально измеряемая, справа — теоретически вычисляемая величины).

В дальнейшем величины, зависящие от времени, будем разлагать в интеграл (или ряд) Фурье и все вычисления проводить для одной фурье-компоненты. Это значительно упростит математические выкладки. Например, в случае калибровки Лоренца векторный и скалярный потенциалы выражаются соответственно через токи и заряды с помощью формул (11.1) и (11.5):

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right) dV'}{R}, \quad (12.7)$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right) dV'}{R}. \quad (12.8)$$

Пусть $\vec{j}(\vec{r}, t) = j_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$, $\rho(\vec{r}, t) = \rho_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$. Тогда из (12.7) и (12.8) следует, что электромагнитное поле также может быть записано в виде монохроматической волны:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \varphi_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t}, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t},$$

где

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_\omega(\vec{r}')\, e^{\frac{i\omega}{c} R}}{R} dV', \quad (12.9)$$

$$\varphi_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho_\omega(\vec{r}')\, e^{\frac{i\omega}{c} R}}{R} dV', \quad (12.10)$$

а колибровка Лоренца (10.7) приобретает вид $-\frac{i\omega}{c^2}\varphi_\omega + \mathrm{div}\,\vec{A}_\omega = 0$. В эти формулы время уже не входит.

Используя (10.8) и (10.9), можно показать, что фурье-компоненты $\vec{A}_\omega$ и φ_ω удовлетворяют неоднородным уравнениям

$$\Delta\vec{A}_\omega + k^2\vec{A}_\omega = -\mu_0\vec{j}_\omega, \quad (12.11)$$

$$\Delta\varphi_\omega + k^2\varphi_\omega = -\frac{\rho_\omega}{\varepsilon_0}, \quad (12.12)$$

где $k^2 = \omega^2/c^2$. Уравнения такого типа в математической физике называются уравнениями Гельмгольца.

Если ввести функцию

$$G_\omega(|\vec{r} - \vec{r}'|) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \equiv \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (12.13)$$

то формулы (12.9) и (12.10) можно записать как

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \mu_0 \int G_\omega(|\vec{r} - \vec{r}'|)\, \vec{j}_\omega(\vec{r}')\, dV',$$
$$\varphi_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int G_\omega(|\vec{r} - \vec{r}'|)\, \rho_\omega(\vec{r}')\, dV'. \quad (12.14)$$

Функция (12.13) удовлетворяет уравнению

$$\Delta G_\omega + k^2 G_\omega = -\delta(\vec{R}) \quad (12.15)$$

и является запаздывающей функцией Грина для неоднородного уравнения Гельмгольца $\Delta f + k^2 f = \varphi$.

Уравнения Максвелла (8.1) — (8.4) для фурье-компонент имеют вид

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}_\omega = i\omega\vec{B}_\omega, \quad \mathrm{rot}\,\vec{B}_\omega = \mu_0\vec{j} - \frac{i\omega}{c^2}\vec{E}_\omega,$$
$$\mathrm{div}\,\vec{E}_\omega = \frac{\rho_\omega}{\varepsilon_0}, \quad \mathrm{div}\,\vec{B}_\omega = 0 \quad (12.16)$$

и содержат только пространственные производные. Решение уравнений (12.16) для фиксированной частоты ω

$$\vec{E} = \frac{1}{2}(\vec{E}_\omega e^{-i\omega t} + \vec{E}_\omega^* e^{i\omega t}) = \mathrm{Re}\,\{\vec{E}_\omega e^{-i\omega t}\},$$
$$\vec{B} = \frac{1}{2}(\vec{B}_\omega e^{-i\omega t} + \vec{B}_\omega^* e^{i\omega t}) \quad (12.17)$$

называется монохроматической волной (или колебанием).

В выражениях (12.17) $\vec{E}_\omega$ и $\vec{B}_\omega$ — комплексные величины ($\vec{E}_\omega = \vec{e}e^{-i\varphi}$, $\vec{B}_\omega = \vec{b}e^{-i\varphi}$), поэтому $\vec{E}_\omega = \vec{e}\cos(\omega t + \varphi)$, $\vec{B}_\omega = \vec{b}\cos(\omega t + \varphi)$.

Вычислим среднее по времени значение вектора Пойнтинга для монохроматической волны. Для такой волны среднее по времени можно вычислить как среднее за один период $T = 2\pi/\omega$:

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon_0 c^2 [\vec{E}, \vec{B}]\, dt.$$

Подставляя в эту формулу выражения (12.17), получаем

$$\vec{\Pi} = \frac{\varepsilon_0 c^2}{4T}\int_0^T \{[\vec{E}_\omega, \vec{B}_\omega^*] + [\vec{E}_\omega^*, \vec{B}_\omega] + [\vec{E}_\omega, \vec{B}_\omega]e^{-2i\omega t} + [\vec{E}^*, \vec{B}^*]e^{2i\omega t}\}\, dt.$$

Так как $\int_0^T e^{\pm 2i\omega t} dt = 0$, то для среднего по времени значения вектора Пойнтинга находим

$$\vec{\Pi} = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\operatorname{Re}[\vec{E}_\omega, \vec{B}_\omega^*].$$

Проинтегрировав это выражение по поверхности сферы, получаем полную мощность излучения

$$\frac{dE}{dt} = P = \int (\vec{\Pi}\cdot\vec{n})\, dS = \int (\vec{\Pi}\cdot\vec{n})\, R^2 d\Omega,$$

где $\vec{n}$ — нормаль к поверхности сферы, E — излучаемая энергия.

Угловое распределение мощности излучения дается формулой

$$\frac{dE}{dt\,d\Omega} = \frac{dP}{d\Omega} = (\vec{\Pi}\cdot\vec{n})\, R^2 = IR^2, \qquad (12.18)$$

где $I = (\vec{\Pi}\cdot\vec{n})$ — интенсивность излучения. Радиус сферы R предполагается при этом гораздо большим, чем размеры источника излучения.

§ 13. Плоская монохроматическая электромагнитная волна

Замечательной особенностью уравнений Максвелла в вакууме является наличие решений этих уравнений в виде распространяющихся электромагнитных волн, переносящих энергию излучения из одной точки пространства в другую. Впервые существование электромагнитных волн было предсказано Дж. Максвеллом на основе сформулированных им уравнений (8.1) — (8.4). Экспериментальное подтверждение этому предсказанию было получено в 1888 г. Г. Герцем.

Наиболее простым видом электромагнитных волн, обладающих этим свойством, является плоская монохроматическая волна. Изучим свойства решения уравнений Максвелла в виде плоских монохроматических волн, распространяющихся в вакууме. Уравнение для электромагнитного поля в вакууме вдали от источников можно получить,

используя калибровку Гамильтона (§ 10). В этой калибровке уравнения для электромагнитного поля в вакууме имеют вид (10.14)

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0, \qquad (13.1)$$

причем $\operatorname{div}\vec{A} = 0$. Решив это уравнение, найдем векторы электромагнитного поля

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}.$$

Решение уравнения (13.1) будем искать в виде

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{-i(\omega t - \vec{\kappa}\cdot\vec{r})}. \qquad (13.2)$$

Частное решение (13.2) уравнения (13.1) называется *плоской монохроматической волной*. Рассмотрим физический смысл этого решения. Если зафиксировать какую-нибудь точку пространства $\vec{r}$, то, согласно (13.2), электрическое поле в этой точке изменяется со временем по гармоническому закону с частотой ω, или с периодом $T = 2\pi/\omega$. С этим свойством решения (13.2) связано и название «монохроматическая волна», т. е. волна с определенной частотой. Если же зафиксировать время, т. е. рассматривать электромагнитное поле в пространстве в определенный момент времени, перемещаясь в направлении волнового вектора $\vec{\kappa}$, то из (13.2) следует, что поле будет изменяться вдоль этого направления периодически.

Найдем геометрическое место точек, в которых векторный потенциал имеет одно и то же значение. Для этого положим

$$(\vec{\kappa}\cdot\vec{r}) - \omega t = \kappa r\cos\alpha - \omega t = \text{const}; \quad (\vec{\kappa}\cdot\vec{r}) = \text{const} + \omega t,$$

где α — угол между векторами $\vec{\kappa}$ и $\vec{r}$. Мы получили уравнение плоскости, что и отражено в названии волны. Ориентация этой плоскости характеризуется направлением волнового вектора $\vec{\kappa}$, а ее расстояние до начала координат, которое можно вычислить с помощью методов аналитической геометрии,

$$l = r\cos\alpha = \frac{\omega}{\kappa}t + \frac{\text{const}}{\kappa}.$$

Из этой формулы следует, что плоскость одинаковой фазы, которая называется *фронтом плоской волны,* движется в направлении вектора κ с фазовой скоростью $v = \omega/\kappa$. Так как функция e^{iz} периодична с периодом 2π, то в плоскости

$$(\vec{\kappa}\cdot\vec{r}) - \omega t + 2\pi = \text{const}$$

векторный потенциал будет иметь те же значения, что и в плоскости $(\vec{\kappa}\cdot\vec{r}) - \omega t = \text{const}$. Расстояние этой плоскости до начала координат

$$l_1 = \frac{\omega}{\kappa}t - \frac{2\pi}{\kappa} + \frac{\text{const}}{\kappa},$$

а расстояние между соседними плоскостями одинаковой фазы $l - l_1 = 2\pi/\kappa$ и называется длиной волны: $\lambda = 2\pi/\kappa$.

Покажем, что частота ω и волновой вектор $\vec{\kappa}$ связаны между собой некоторым соотношением. Подставляя (13.2) в (13.1), получаем

$$\left(-\kappa^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{A}_0 = 0, \tag{13.3}$$

где $\kappa^2 = \kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2$. Отсюда следует, что $\vec{A}_0 \neq 0$ только при

$$-\kappa^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0. \tag{13.4}$$

Таким образом, (13.2) будет решением уравнения (13.1) при условии, что частота и волновой вектор связаны между собой соотношением (13.4). Уравнение типа (13.4), связывающее волновой вектор плоской монохроматической волны с ее частотой, называется *дисперсионным уравнением*. Дисперсионное уравнение (13.4) всегда можно получить из волнового уравнения (13.1), а зная дисперсионное уравнение для плоских волн, можно восстановить волновое уравнение, которое допускает решение в виде плоских волн. Для этого в уравнении (13.4) нужно выполнить замену

$$\omega = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{\kappa} = -i\vec{\nabla}.$$

Из условия $\operatorname{div}\vec{A} = 0$ имеем $(\vec{\kappa}\cdot\vec{A}_0) = 0$. Это условие означает, что вектор $\vec{A}$ всегда перпендикулярен волновому вектору $\vec{\kappa}$. В связи с этим говорят, что электромагнитные волны — поперечные.

Ориентацию вектора $\vec{A}_0$ относительно волнового вектора $\vec{\kappa}$ будем характеризовать следующим образом. Для каждого волнового вектора $\vec{\kappa}$ зададим два таких единичных взаимно перпендикулярных орта $\vec{e}_{\vec{\kappa}1}$ и $\vec{e}_{\vec{\kappa}2}$, которые вместе с вектором $\vec{\kappa}$ образуют тройку взаимно ортогональных векторов: $(\vec{\kappa}\cdot\vec{e}_{\vec{\kappa}s}) = 0$, $s = 1,2$. Векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ (у которых опустим индекс $\vec{\kappa}$) определяют состояние *поляризации* плоской монохроматической волны с данным волновым вектором $\vec{\kappa}$. Разложим вектор $\vec{A}_0$, входящий в формулу (13.2), по единичным ортам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$: $\vec{A}_0 = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2$. Тогда решение (13.1) можно записать в виде

$$\vec{A} = (A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2)\,e^{-i(\omega t - \vec{\kappa}\cdot\vec{r})}. \tag{13.5}$$

Напомним, что величины A_1 и A_2 являются комплексными и поэтому их можно представить в виде $A_1 = |A_1|e^{i\delta_1}$, $A_2 = |A_2|e^{i\delta_2}$. Введем также следующие величины: $A = \sqrt{|A_1|^2 + |A_2|^2}$, $\cos\beta = \frac{|A_1|}{A}$, $\sin\beta = \frac{|A_2|}{A}$, причем $0 \leqslant \beta \leqslant \pi/2$. Тогда формулу (13.5) можно записать в виде

$$\vec{A} = A\vec{e}e^{-i\varphi}, \tag{13.6}$$

где $\varphi = \omega t - (\vec{\kappa}\cdot\vec{r}) + \delta_1$, $\delta = \delta_2 - \delta_1$, $\vec{e} = \cos\beta\vec{e}_1 + e^{i\delta}\sin\beta\vec{e}_2$ — единичный комплексный вектор поляризации, удовлетворяющий соотношению $(\vec{e}\cdot\vec{e}^*) = 1$.

Рассмотрим несколько частных случаев. Если положить $\delta = 0$, то тогда $\vec{e} = \vec{e}_1\cos\beta + \vec{e}_2\sin\beta$, и из формулы (13.6) следует, что в процессе распространения плоской монохроматической волны вектор $\vec{A}$ не изменяет своего направления в пространстве и направлен вдоль вектора $\vec{e}$. Такие волны называются *плоскополяризованными* или *линейно поляризованными*. При заданной частоте и направлении волнового вектора $\vec{\kappa}$ всегда существуют две взаимно перпендикулярные ($\beta = 0$ и $\beta = \pi/2$) линейно поляризованные волны. Волну с любой другой линейной поляризацией можно представить как суперпозицию этих двух волн.

Найдем электромагнитное поле линейно поляризованной плоской монохроматической волны:

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = i\omega A\vec{e}e^{-i\varphi} = \vec{E}_0 e^{-i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)},$$
$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = i[\vec{\kappa}, \vec{e}]\,Ae^{-i\varphi} = \vec{B}_0 e^{-i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}, \tag{13.7}$$

здесь $\vec{E}_0 = \omega A\vec{e}$, $\vec{B}_0 = [\vec{\kappa}, \vec{e}]A$, причем $(\vec{\kappa}\cdot\vec{E}_0) = 0$, $(\vec{\kappa}\cdot\vec{B}_0) = 0$, $(\vec{E}_0\cdot\vec{B}_0) = 0$. Из этих соотношений вытекает, что векторы $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ и $\vec{\kappa}$ в этой волне составляют правовинтовую тройку взаимно перпендикулярных векторов.

Так как $E_0 = \omega A$, $B_0 = \kappa A$, то, используя дисперсионное уравнение (13.4), откуда следует, что $\kappa = \omega/c$, получим

$$E_0 = cB_0.$$

Выше мы пользовались комплексным представлением плоских монохроматических волн, хотя сами векторы $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{A}$ — вещественны. Комплексное представление физических величин (13.7) облегчает математические расчеты, особенно при вычислении производных по времени и координате. Но поскольку любую комплексную величину можно представить в виде линейной комбинации двух вещественных величин $x + iy$, а уравнение для векторного потенциала (13.1) линейно, то как вещественная, так и мнимая часть, каждая в отдельности, являются решением этого уравнения. В качестве решения будем выбирать вещественную часть от выражений (13.2) и (13.7), тогда

$$\vec{E} = \vec{E}_0\sin(\omega t - \vec{\kappa}\cdot\vec{r}), \quad \vec{B} = \vec{B}_0\sin(\omega t - \vec{\kappa}\cdot\vec{r}).$$

Учитывая, что для плоской монохроматической волны $(\vec{E}\cdot\vec{B}) = 0$, $B = \frac{1}{c}[\vec{n}, \vec{E}]$, где $\vec{n} = \vec{\kappa}/\kappa$, вектор Пойнтинга можно выразить через

вектор электрического поля следующим образом:

$$\vec{\Pi} = \varepsilon_0 c^2 [\vec{E}, \vec{B}] = \varepsilon_0 c [\vec{E}, [\vec{n}, \vec{E}]] = \varepsilon_0 c E^2 \vec{n}.$$

Следовательно, поток энергии плоской монохроматической волны направлен вдоль волнового вектора $\vec{\kappa}$, а средняя за период $T = 2\pi/\omega$ интенсивность плоской монохроматической волны равна

$$I = \varepsilon_0 c \frac{1}{T} \int_0^T E^2 dt = \varepsilon_0 c E^2 \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 (\omega t - \vec{\kappa} \cdot \vec{r})\, dt = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}. \quad (13.8)$$

Эту формулу можно было бы получить также, используя формулу (12.18).

Пользуясь формулами (9.8) и (9.18), найдем связь между энергией и импульсом плоской монохроматической волны. Учитывая, что для плоской монохроматической волны $cB = E$, выразим ее энергию через напряженность электрического поля:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int [E^2 + c^2 B^2]\, dV = \varepsilon_0 \int E^2 dV.$$

Аналогично для импульса плоской монохроматической волны имеем

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \int [\vec{E}, \vec{B}]\, dV = \frac{\varepsilon_0}{c\kappa} \int [\vec{E}, [\vec{\kappa}, \vec{E}]]\, dV = \frac{\vec{\kappa}}{\omega} \varepsilon_0 \int E^2 dV.$$

Отсюда искомая связь между энергией и импульсом

$$\vec{P} = \frac{\vec{\kappa}}{\omega} W, \quad W = cP. \quad (13.9)$$

Согласно гипотезе Планка, вещество излучает электромагнитную энергию дискретно (квантами). Энергия этих квантов связана с частотой излучаемой электромагнитной волны соотношением $\varepsilon = \hbar\omega$. Если считать, что излучаемое электромагнитное поле состоит из фотонов, то тогда $W = N\varepsilon$, $\vec{P} = N\vec{p}$, где N — количество фотонов в плоской монохроматической волне, $\vec{p}$ — импульс одного фотона.

С помощью (13.9) находим

$$\vec{p} = \frac{\hbar\omega}{c} \vec{n},$$

или, используя дисперсионное уравнение (13.4) и учитывая, что $\vec{n} = \frac{\vec{\kappa}}{\kappa}$, $\vec{p} = \hbar\vec{\kappa}$.

Следовательно, если плоской волне с частотой ω приписать энергию $\varepsilon = \hbar\omega$, то ей необходимо также приписать импульс $\vec{p} = \hbar\vec{\kappa}$, пропорциональный волновому вектору $\vec{\kappa}$.

Таким образом, в этом смысле плоские монохроматические волны с частотой ω и волновым вектором $\vec{\kappa}$ эквивалентны частицам с энергией $\varepsilon = \hbar\omega$ и импульсом $\vec{p} = \hbar\vec{\kappa}$. Поэтому часто в квантовой теории плоским монохроматическим волнам сопоставляют частицы, которые называют фотонами. Отсюда следует дискретный характер электромагнитного поля, который проявляется при малых интенсивностях и больших частотах.

Решение (13.2) есть частное решение уравнения (13.1). Очевидно, что полное решение этого уравнения можно представить как суперпозицию плоских монохроматических волн

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \iiint \vec{A}(\vec{k})\, e^{-i(\omega t - \vec{\kappa}\cdot\vec{r})} d^3\vec{\kappa}$$

с законом дисперсии $\omega^2 = c^2\kappa^2$; $d^3\vec{\kappa} = d\kappa_x d\kappa_y d\kappa_z$.

Это есть не что иное, как разложение решения уравнения (13.1) в интеграл Фурье по координатам. При этом так как $\vec{A}(\vec{r}, t)$ — вещественная функция, то $A^*(\vec{\kappa}) = \vec{A}(-\vec{\kappa})$.

Рассмотрим суперпозицию плоских волн с одинаковым направлением волновых векторов $\vec{k}$. Выберем это направление за ось x. Тогда решение уравнения (13.1) будет иметь вид

$$\vec{A}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{A}(\vec{\kappa})\, e^{i\kappa(x - ct)} d\kappa = \vec{A}(x - ct).$$

Это означает, что если в какой-то момент времени, скажем $t = 0$, известно распределение поля в пространстве, т. е. $\vec{A}(x, 0)$, то в последующие моменты времени это распределение будет перемещаться в пространстве со скоростью c без изменения формы.

Таким образом, постоянная $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ имеет смысл скорости распространения электромагнитных волн в вакууме. Эксперимент дает следующее численное значение этой величины: $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Рассмотрим теперь *круговую поляризацию*. Для этого положим $\delta = \pm\pi/2$, а $\beta = \pi/4$. Тогда векторный потенциал (13.6) примет вид

$$\vec{A} = A\vec{e}e^{-i\varphi},$$

где вектор поляризации

$$\vec{e}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1 \pm i\vec{e}_2)$$

соответствует левой (знак «+») или правой (знак «—») круговой поляризации. Действительно, в этом случае

$$A_x = \operatorname{Re} A_1 = \frac{A}{\sqrt{2}} \cos\varphi, \quad A_y = \operatorname{Re} A_2 = \pm \frac{A}{\sqrt{2}} \sin\varphi. \quad (13.10)$$

Здесь $\varphi = \omega t - (\vec{\kappa}\cdot\vec{r}) - \delta_1$, A_1 и A_2 — проекции вектора $\vec{A}$ (13.6) на орты $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Из формулы (13.10) следует, что вектор $\vec{A}$ вращается против часовой стрелки (знак «+») или по часовой стрелке (знак «—»), если смотреть со стороны волнового вектора $\vec{\kappa}$. Такие волны называют *циркулярно поляризованными*.

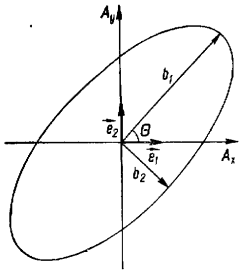


Рис. 8

При всех других значениях параметров δ и β имеем общий случай эллиптической поляризации:

$$A_x = A\cos\beta\cos\varphi = a\cos\varphi,$$
$$A_y = A\sin\beta\cos(\varphi - \delta) = d\cos(\varphi - \delta).$$

Здесь $\varphi = \omega t - (\vec{\kappa}\cdot\vec{r}) - \delta_1$, $\delta = \delta_1 - \delta_2$, $a = A\cos\beta$, $d = A\sin\beta$.

Из этих формул следует, что вектор $\vec{A}$ электромагнитной волны в каждой точке пространства со временем описывает эллипс (рис. 8), полуоси которого b_1 и b_2 равны

$$b_{1,2} = A[(1 + \sin\delta\sin 2\beta)^{1/2} \pm (1 - \sin\delta\sin^2\beta)^{1/2}],$$

а их наклон Θ определяется следующим соотношением:

$$\operatorname{tg} 2\Theta = \operatorname{tg} 2\beta\cos\delta.$$

Направление вращения вектора $\vec{A}$ зависит от знака $\sin\delta$.

§ 14. Электромагнитное поле как совокупность гармонических осцилляторов

Интересным является тот факт, что электромагнитное поле может быть представлено как совокупность бесконечно большого числа гармонических осцилляторов. Чтобы показать это, представим решения уравнения (13.1) в виде суперпозиции плоских волн:

$$\vec{A} = \sum_{\vec{\kappa}} \vec{q}_{\vec{\kappa}}(t)\, e^{i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}}, \qquad (14.1)$$

что эквивалентно разложению векторного потенциала в интеграл Фурье, если в (14.1) под суммой по $\vec{\kappa}$ понимать интеграл.

Так как $\operatorname{div} A = 0$, то $(\vec{\kappa}\cdot\vec{q}_{\vec{\kappa}}) = 0$, следовательно, вектор $\vec{q}_{\vec{\kappa}}$ можно разложить по двум ортам $\vec{e}_{\vec{\kappa}s}$ ($s = 1,2$), составляющим вместе с волновым вектором тройку взаимно перпендикулярных векторов:

$$\vec{q}_{\vec{\kappa}}(t) = \sum_{s=1}^{2} q_{\vec{\kappa}s}(t)\,\vec{e}_{\vec{\kappa}s}.$$

Орты $\vec{e}_{\vec{\kappa}s}$ характеризуют поляризацию плоской волны с волновым вектором $\vec{\kappa}$ и обладают следующим свойством: $\vec{e}_{-\vec{\kappa}1} = \vec{e}_{\vec{\kappa}2}$, $\vec{e}_{-\vec{\kappa}2} = \vec{e}_{\vec{\kappa}1}$. Учитывая это, представим (14.1) в виде

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{s,\vec{\kappa}} q_{\vec{\kappa}s}\,\vec{e}_{\vec{\kappa}s}\, e^{i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}}. \qquad (14.2)$$

Из условия вещественности $\vec{A}$ имеем

$$\vec{A} = \sum_{s,\vec{\kappa}} q^{*}_{\vec{\kappa}s}\,\vec{e}_{\vec{\kappa}s}\, e^{-i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}}.$$

Выполнив в этом выражении замену $\vec{\kappa} \to -\vec{\kappa}$, получаем

$$\vec{A} = \sum_{s,\vec{\kappa}} q^{*}_{-\vec{\kappa}s}\,\vec{e}_{\vec{\kappa}s}\, e^{i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}}.$$

Сравнивая эту формулу с (14.2), находим $q_{-\vec{\kappa}s} = q^{*}_{\vec{\kappa}s}$.

Подставив (14.2) в волновое уравнение (13.1), получим

$$c^2\Delta\vec{A} - \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\sum_{\vec{\kappa}s}(\ddot{q}_{\vec{\kappa}s} + \omega^2 q_{\vec{\kappa}s})\,\vec{e}_{\vec{\kappa}s}\, e^{i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}} = 0.$$

Это равенство должно выполняться в любой точке пространства, поэтому все коэффициенты при выражении $\vec{e}_{\vec{\kappa}s}\, e^{i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}}$ должны равняться нулю.

Таким образом, коэффициенты $q_{\vec{\kappa}s}$ в сумме (14.2) удовлетворяют уравнению для гармонического осциллятора

$$\ddot{q}_{\vec{\kappa}s} + \omega_\kappa^2 q_{\vec{\kappa}s} = 0, \qquad (14.3)$$

где $\omega_\kappa = c^2\kappa^2$.

Следует помнить, что величины $q_{\vec{\kappa}s}$ комплексные:

$$q_{\vec{\kappa}s} = q'_{\vec{\kappa}s} + iq''_{\vec{\kappa}s}, \quad q^{*}_{\vec{\kappa}s} = q'_{\vec{\kappa}s} - iq''_{\vec{\kappa}s}$$

и поскольку уравнения (14.3) линейны, то как вещественная $q'_{\vec{\kappa}s}$, так и мнимая $q''_{\vec{\kappa}s}$ части величины $q_{\vec{\kappa}s}$ также удовлетворяют уравнениям (14.3) с той же частотой: $\omega_\kappa^2 = c^2\kappa^2$. Из условия $q_{-\vec{\kappa}s} = q^{*}_{\vec{\kappa}s}$ следует, что $q'_{-\vec{\kappa}s} = q'_{\vec{\kappa}s}$, а $q''_{-\vec{\kappa}s} = -q''_{\vec{\kappa}s}$. Поэтому независимыми обобщенными координатами осцилляторов поля будем считать величины $q_{\vec{\kappa}s}$ только с положительными [1] волновыми векторами $\vec{\kappa}$.

Представим (14.2) в виде двух слагаемых по положительным и отрицательным $\vec{\kappa}$:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{s,\vec{\kappa}>0} \vec{e}_{\vec{\kappa}s}\, q_{\vec{\kappa}s}\, e^{i(\vec{\kappa}\cdot\vec{r})} + \sum_{s,\vec{\kappa}<0} \vec{e}_{\vec{\kappa}s}\, q_{\vec{\kappa}s}\, e^{i(\vec{\kappa}\cdot\vec{r})}.$$

[1] Деление на положительные и отрицательные $\vec{\kappa}$ имеет следующий смысл. Выберем любое направление в пространстве волновых векторов $\vec{\kappa}$. В зависимости от знака проекции $\vec{\kappa}$ на это направление будем делить их на положительные и отрицательные.

Выполним во второй сумме замену $\vec{\kappa} \to -\vec{\kappa}$ и воспользуемся тем, что $q_{-\vec{\kappa}s} = q^*_{\vec{\kappa}s}$. Тогда получим

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{s,\vec{\kappa}>0} \vec{e}_{\vec{\kappa}s} (q_{\vec{\kappa}s} e^{i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}} + q^*_{\vec{\kappa}s} e^{-i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}}). \tag{14.4}$$

Здесь суммирование производится только по положительным значениям вектора $\vec{\kappa}$.

Из классической механики известно, что системе уравнений гармонических осцилляторов (14.3) соответствует следующая функция Гамильтона:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{s,\vec{k}>0} \left\{ \alpha (p'^2_{\vec{\kappa}s} + p''^2_{\vec{\kappa}s}) + \frac{\omega^2_\kappa}{\alpha} (q'^2_{\vec{\kappa}s} + q''^2_{\vec{\kappa}s}) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s,\vec{\kappa}>0} \left(\alpha p_{\vec{\kappa}s} p^*_{\vec{\kappa}s} + \frac{\omega^2_\kappa}{\alpha} q_{\vec{\kappa}s} q^*_{\vec{\kappa}s} \right). \tag{14.5}$$

Используя функцию Гамильтона (14.5), запишем уравнения Гамильтона:

$$\dot{p}'_{\vec{\kappa}s} = -\frac{\partial H}{\partial q'_{\vec{\kappa}s}} = -\frac{\omega^2_\kappa}{\alpha} q'_{\vec{\kappa}s}, \quad \dot{q}'_{\vec{\kappa}s} = \frac{\partial H}{\partial p'_{\vec{\kappa}s}} = \alpha p'_{\vec{\kappa}s},$$

$$\ddot{q}'_{\vec{\kappa}s} + \omega^2_\kappa q'_{\vec{\kappa}s} = 0, \tag{14.6}$$

$$\dot{p}''_{\vec{\kappa}s} = -\frac{\partial H}{\partial q''_{\vec{\kappa}s}} = -\frac{\omega^2_\kappa}{\alpha} q''_{\vec{\kappa}s}, \quad \dot{q}''_{\vec{\kappa}s} = \frac{\partial H}{\partial p''_{\vec{\kappa}s}} = \alpha p''_{\vec{\kappa}s},$$

$$\ddot{q}''_{\vec{\kappa}s} + \omega^2_\kappa q''_{\vec{\kappa}s} = 0.$$

Величину α подберем так, чтобы функция Гамильтона (14.5) совпадала с энергией электромагнитного поля. Для этого необходимо выразить энергию электромагнитного поля через $p_{\vec{\kappa}s}$ и $q_{\vec{\kappa}s}$. Используя (14.6) и (14.4), выразим векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ через координаты и импульсы осцилляторов поля:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = i \sum_{s,\vec{\kappa}>0} [\vec{k}, \vec{e}_{\vec{\kappa}s}] (q_{\vec{\kappa}s} e^{i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}} - q^*_{\vec{\kappa}s} e^{-i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}}),$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\sum_{s,\vec{\kappa}>0} \vec{e}_{\vec{\kappa}s} (\dot{q}_{\vec{\kappa}s} e^{i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}} + \dot{q}^*_{\vec{\kappa}s} e^{-i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}}) = \tag{14.7}$$

$$= -\alpha \sum_{s,\vec{\kappa}>0} \vec{e}_{\vec{\kappa}s} (p_{\vec{\kappa}s} e^{i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}} + p^*_{\vec{\kappa}s} e^{-i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}}).$$

В выражении для электрического поля производные по времени от координат $q_{\vec{\kappa}s}$ заменены на импульсы, так как, согласно (14.6), $\dot{q}_{\vec{\kappa}s} = \alpha p_{\vec{\kappa}s}$.

Используя формулы (14.7), выразим энергию электромагнитного поля

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int (E^2 + c^2 B^2)\, dV$$

через обобщенные координаты и импульсы осцилляторов поля. Вычислим сначала

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{s,\vec{\kappa}>0} \sum_{s',\vec{\kappa}'>0} \alpha^2 \vec{e}_{\vec{\kappa}s} \vec{e}_{\vec{\kappa}'s'} \Big[p_{\vec{\kappa}s} p_{\vec{\kappa}'s'} \int e^{i(\vec{\kappa}+\vec{\kappa}')\cdot\vec{r}} dV +$$

$$+ p_{\vec{\kappa}s} p^*_{\vec{\kappa}'s'} \int e^{i(\vec{\kappa}-\vec{\kappa}')\cdot\vec{r}} dV + p^*_{\vec{\kappa}s} p_{\vec{\kappa}'s'} \int e^{-i(\vec{\kappa}-\vec{\kappa}')\cdot\vec{r}} dV +$$

$$+ p^*_{\vec{\kappa}s} p^*_{\vec{\kappa}'s'} \int e^{-i(\vec{\kappa}+\vec{\kappa}')\cdot\vec{r}} dV \Big].$$

Используя формулу

$$\int e^{\pm i(\vec{\kappa}-\vec{\kappa}')\cdot\vec{r}} dV = V \delta_{\vec{\kappa},\vec{\kappa}'}$$

и то, что $\vec{e}_{\vec{\kappa}s} \cdot \vec{e}_{\vec{\kappa}s'} = \delta_{ss'}$, а $\int e^{\pm i(\vec{\kappa}+\vec{\kappa}')\cdot\vec{r}} dV = 0$ (так как $\vec{\kappa} + \vec{\kappa}' \neq 0$), получаем

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 dV = \varepsilon_0 V \sum_{s,\vec{\kappa}>0} \alpha^2 p_{\vec{\kappa}s} p^*_{\vec{\kappa}s}.$$

Аналогично находим

$$\frac{\mu_0 c^2}{2} \int H^2 dV = \varepsilon_0 c^2 V \sum_{s,\vec{\kappa}>0} \kappa^2 q_{\vec{\kappa}s} q^*_{\vec{\kappa}s} = \varepsilon_0 V \sum_{s,\vec{\kappa}>0} \omega^2_\kappa q_{\vec{\kappa}s} q^*_{\vec{\kappa}s}.$$

Таким образом, окончательно получаем выражение для энергии осцилляторов электромагнитного поля

$$W = \varepsilon_0 V \sum_{s,\vec{\kappa}>0} (\alpha^2 p_{\vec{\kappa}s} p^*_{\vec{\kappa}s} + \omega^2_\kappa q_{\vec{\kappa}s} q^*_{\vec{\kappa}s}). \tag{14.8}$$

Для того чтобы (14.5) и (14.8) совпали, необходимо положить $\alpha = \frac{1}{2\varepsilon_0 V}$.

Итак, уравнениям Максвелла можно придать форму уравнений Гамильтона, что указывает на глубокую общность фундаментальных законов физики, в данном случае классической механики и электродинамики.

Чтобы выяснить физический смысл введенных нами обобщенных координат и импульсов осцилляторов электромагнитного поля, рассмотрим случай, когда возбужден один из осцилляторов поля, скажем $q'_{\vec{\kappa}s} \neq 0$, а обобщенные координаты остальных осцилляторов равны нулю. Тогда из (14.4) находим

$$\vec{A} = 2\vec{e}_{\vec{\kappa}s} q'_{\vec{\kappa}s}(t) \cos(\vec{\kappa} \cdot \vec{r}),$$

и из уравнений (14.6) имеем $q'_{\vec{\kappa}s}(t) = \frac{1}{2} q_0 \cos(\omega t + \varphi')$.

Если же возбудить осциллятор с координатой $q''_{\vec{\kappa}s}$, то

$$\vec{A} = 2\vec{e}_{\vec{\kappa}s} q''_{\vec{\kappa}s}(t) \sin(\vec{\kappa}\cdot\vec{r}),$$

где $q''_{\vec{\kappa}s}(t) = \frac{1}{2} q''_0 \cos(\omega t + \varphi'')$, а $q'_0/2$, $q''_0/2$ и φ', φ'' — постоянные интегрирования.

Таким образом, комплексная координата $q_{\vec{\kappa}s}$ с фиксированной поляризацией s и волновым вектором $\vec{\kappa}$ соответствует двум стоячим электромагнитным волнам, причем вещественная часть $q'_{\vec{\kappa}s}$ соответствует четному, а мнимая $q''_{\vec{\kappa}s}$ — нечетному (относительно преобразования $\vec{r} \to -\vec{r}$) векторному потенциалу стоячей волны.

Так как электромагнитное поле можно представить как совокупность независимых осцилляторов, то далее будем рассматривать только два осциллятора с фиксированными волновым вектором $\vec{\kappa}$ и поляризацией s'. Окончательный результат будем записывать в виде суммы по s' и $\vec{\kappa}$.

С помощью канонического преобразования [12, § 39] можно перейти к таким новым нормальным координатам осцилляторов поля, чтобы каждый осциллятор соответствовал не стоячей, а бегущей плоской монохроматической волне, распространяющейся в направлении волнового вектора $\vec{\kappa}$. Производящую функцию такого канонического преобразования выберем в виде

$$V = aq''_{\vec{\kappa}s} Q_{-\vec{\kappa}s} - bp'_{\vec{\kappa}s} Q_{-\vec{\kappa}s} - cq''_{\vec{\kappa}s} Q_{\vec{\kappa}s} - dp'_{\vec{\kappa}s} Q_{\vec{\kappa}s},$$

где a, b, c, d — пока что произвольные постоянные. Связь между старыми обобщенными координатами поля $q'_{\vec{\kappa}s}$, $q''_{\vec{\kappa}s}$ и новыми $Q_{\vec{\kappa}s}$, $Q_{-\vec{\kappa}s}$ выражается формулами:

$$\begin{aligned}
q'_{\vec{\kappa}s} &= -\frac{\partial V}{\partial p'_{\vec{\kappa}s}} = bQ_{-\vec{\kappa}s} + dQ_{\vec{\kappa}s},\\
p''_{\vec{\kappa}s} &= \frac{\partial V}{\partial q''_{\vec{\kappa}s}} = aQ_{-\vec{\kappa}s} - cQ_{\vec{\kappa}s},\\
\mathcal{P}_{\vec{\kappa}s} &= -\frac{\partial V}{\partial Q_{\vec{\kappa}s}} = cq''_{\vec{\kappa}s} + dp'_{\vec{\kappa}s},\\
\mathcal{P}_{-\vec{\kappa}s} &= -\frac{\partial V}{\partial Q_{-\vec{\kappa}s}} = -aq''_{\vec{\kappa}s} + bp'_{\vec{\kappa}s}.
\end{aligned} \tag{14.9}$$

Заметим, что новые обобщенные координаты $Q_{\vec{\kappa}s}$ и $Q_{-\vec{\kappa}s}$ являются независимыми переменными и их количество равно количеству старых обобщенных координат $q'_{\vec{\kappa}s}$, $q''_{\vec{\kappa}s}$ ($\vec{\kappa} > 0$). Из двух последних уравнений находим

$$q''_{\vec{\kappa}s} = \frac{1}{\Delta}(b\mathcal{P}_{\vec{\kappa}s} - d\mathcal{P}_{-\vec{\kappa}s}), \quad p'_{\vec{\kappa}s} = \frac{1}{\Delta}(a\mathcal{P}_{\vec{\kappa}s} + c\mathcal{P}_{-\vec{\kappa}s}), \tag{14.10}$$

где $\Delta = ad + bc$. Далее, используя равенства (14.9) и (14.10), находим

$$\begin{aligned}
q_{\vec{\kappa}s} &= q'_{\vec{\kappa}s} + iq''_{\vec{\kappa}s} = dQ_{\vec{\kappa}s} + bQ_{-\vec{\kappa}s} + \frac{i}{\Delta}(b\mathcal{P}_{\vec{\kappa}s} - d\mathcal{P}_{-\vec{\kappa}s}),\\
p_{\vec{\kappa}s} &= p'_{\vec{\kappa}s} + ip''_{\vec{\kappa}s} = \frac{1}{\Delta}(a\mathcal{P}_{\vec{\kappa}s} + c\mathcal{P}_{-\vec{\kappa}s}) - i(cQ_{\vec{\kappa}s} - aQ_{-\vec{\kappa}s}).
\end{aligned} \tag{14.11}$$

Положим в формулах (14.11)

$$b = d = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}, \quad a = c = \frac{\omega}{\sqrt{2\alpha}}, \quad \alpha = \frac{1}{2\varepsilon_0 V}.$$

При этом $\Delta = ad + bc = \omega$ и формулы (14.10) принимают вид

$$\begin{aligned}
q_{\vec{\kappa}s} &= \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\left[(Q_{\vec{\kappa}s} + Q_{-\vec{\kappa}s}) + \frac{i}{\omega}(\mathcal{P}_{\vec{\kappa}s} - \mathcal{P}_{-\vec{\kappa}s})\right],\\
p_{\vec{\kappa}s} &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}[(\mathcal{P}_{\vec{\kappa}s} + \mathcal{P}_{-\vec{\kappa}s}) - i\omega(Q_{\vec{\kappa}s} - Q_{-\vec{\kappa}s})].
\end{aligned} \tag{14.12}$$

Подставляя (14.12) в (14.5), находим функцию Гамильтона в новых переменных

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\sum_{s,\vec{\kappa}>0}\left(\alpha p_{\vec{\kappa}s} p^*_{\vec{\kappa}s} + \frac{\omega^2}{\alpha} q_{\vec{\kappa}s} q^*_{\vec{\kappa}s}\right) = \frac{1}{2}\sum_{s,\vec{\kappa}>0}[\omega^2(Q^2_{\vec{\kappa}s} + Q^2_{-\vec{\kappa}s}) +\\
&+ (\mathcal{P}^2_{\vec{\kappa}s} + \mathcal{P}^2_{-\vec{\kappa}s})] = \frac{1}{2}\sum_{s,\vec{\kappa}}(\mathcal{P}^2_{\vec{\kappa}s} + \omega^2 Q^2_{\vec{\kappa}s}).
\end{aligned} \tag{14.13}$$

Так как

$$q_{\vec{\kappa}s} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 V}}\left[(Q_{\vec{\kappa}s} + Q_{-\vec{\kappa}s}) + \frac{i}{\omega}(\mathcal{P}_{\vec{\kappa}s} - \mathcal{P}_{-\vec{\kappa}s})\right], \tag{14.14}$$

то, подставив $q_{\vec{\kappa}s}$ из формулы (14.14) в (14.4), найдем векторный потенциал в новых канонических переменных:

$$\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\sum_{s,\vec{\kappa}}\vec{e}_{\vec{\kappa}s}\left[Q_{\vec{\kappa}s}\cos(\vec{\kappa}\cdot\vec{r}) - \frac{\mathcal{P}_{\vec{\kappa}s}}{\omega}\sin(\vec{\kappa}\cdot\vec{r})\right]. \tag{14.15}$$

В последней сумме формулы (14.13), а также в сумме (14.15) и последующих формулах суммирование производится как по положительным, так и по отрицательным значениям вектора $\vec{\kappa}$.

Для электрического и магнитного полей, подставляя значения $q_{\vec{\kappa}s}$ и $p_{\vec{\kappa}s}$ из формул (14.12) в (14.7), имеем

$$\vec{E} = \frac{-1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\sum_{s,\vec{\kappa}}\vec{e}_{\vec{\kappa}s}[\omega Q_{\vec{\kappa}s}\sin(\vec{\kappa}\cdot\vec{r}) + \mathcal{P}_{\vec{\kappa}s}\cos(\vec{\kappa}\cdot\vec{r})],$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\sum_{s,\vec{\kappa}}[\vec{e}_{\vec{\kappa}s}\vec{\kappa}]\left[Q_{\vec{\kappa}s}\sin(\vec{\kappa}\cdot\vec{r}) + \frac{\mathcal{P}_{\vec{\kappa}s}}{\omega}\cos(\vec{\kappa}\cdot\vec{r})\right].$$

Рассмотрим случай, когда возбужден один из осцилляторов поля, скажем $Q_{\vec{\kappa}s} \neq 0$, а обобщенные координаты остальных осцилляторов равны нулю. Тогда из формулы (14.15) находим

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{e}_{\vec{\kappa}s}}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\left(Q_{\vec{\kappa}s}\cos(\vec{\kappa}\cdot\vec{r}) - \frac{\dot{\mathcal{P}}_{\vec{\kappa}s}}{\omega}\sin(\vec{\kappa}\cdot\vec{r})\right). \quad (14.16)$$

Уравнения движения осцилляторов поля имеют вид

$$\dot{Q}_{\vec{\kappa}s} = \frac{\partial H}{\partial \mathcal{P}_{\vec{\kappa}s}} = \mathcal{P}_{\vec{\kappa}s}, \quad \dot{\mathcal{P}}_{\vec{\kappa}s} = -\frac{\partial H}{\partial Q_{\vec{\kappa}s}} = -\omega^2 Q_{\vec{\kappa}s},$$

$$\ddot{Q}_{\vec{\kappa}s} + \omega^2 Q_{\vec{\kappa}s} = 0,$$

а их решение —

$$Q_{\vec{\kappa}s} = Q_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad \mathcal{P}_{\vec{\kappa}s} = \dot{Q}_{\vec{\kappa}s} = \omega Q_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Подставляя его в (14.16), получаем

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{Q_0 \vec{e}_{\vec{\kappa}s}}{\sqrt{\varepsilon_0 V}}\sin(\omega t - \vec{\kappa}\cdot\vec{r} + \varphi).$$

Таким образом, возбуждение одного из осцилляторов поля соответствует линейно поляризованной плоской монохроматической волне, распространяющейся в направлении волнового вектора $\vec{\kappa}$.

Глава 3

ИЗЛУЧЕНИЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 15. Электрическое дипольное излучение

Важными для практики являются задачи классической электродинамики на вычисление электромагнитного поля, создаваемого системой заряженных частиц. С точки зрения математики решение большинства таких задач чрезвычайно сложно и, как правило, требует применения вычислительной техники. Если же рассматривать электромагнитное поле на расстояниях от источника гораздо больших, чем размеры системы ($r \gg d$), и при этом обратным влиянием излучения на движение зарядов пренебречь, другими словами, считать состояние источников излучения заданным, то решение задачи значительно упрощается.

Рассмотрим электромагнитное поле, создаваемое системой заданных зарядов и токов, на расстояниях r от системы гораздо больших, чем ее размеры d, т. е. $r \gg d$. В общем случае векторный и скалярный потенциалы монохроматического излучения выражаются через заданные токи и заряды с помощью формул (12.9) и (12.10). Вычислим значение

этих потенциалов в точках пространства, где $r \gg r'$. Так как в соответствии с постановкой задачи переменная интегрирования в этих формулах $r' \leqslant d \ll r$, то выражения $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ и $1/R$ можно разложить в ряд по r'/r:

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = r\left(1 - \frac{2(\vec{r}\cdot\vec{r}')}{r^2} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)^{1/2} = r - (\vec{n}\cdot\vec{r}') + \frac{r'}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - \frac{r}{2}\left(\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}'}{r}\right)^2 + \cdots,$$

$$\frac{1}{R} = |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} = \frac{1}{r} + \frac{(\vec{n}\cdot\vec{r}')}{r^2} - \frac{1}{2r}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \frac{3}{2}\frac{(\vec{n}\cdot\vec{r}')^2}{r^3} + \cdots \quad (15.1)$$

Здесь единичный вектор $\vec{n} = \vec{r}/r$ определяет направление, в котором наблюдается излучение.

Рассмотрим поведение функции Грина $G_\omega = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{i\kappa R}}{R}$ при $r \gg d$. Используя разложения (15.1), находим

$$G_\omega = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{i\kappa|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{4\pi}\frac{e^{i\kappa r}}{r}e^{-i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}'}e^{i\frac{\kappa r}{2}\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - \left(\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}'}{r}\right)^2 + \cdots\right]} \times \left(1 + \frac{(\vec{n}\cdot\vec{r}')}{r} + \cdots\right),$$

где $\vec{\kappa} = \kappa\vec{n}$, причем $\kappa = \omega/c$.

Будем считать, что $\kappa r\left(\frac{d}{r}\right)^2 \ll 1$, тогда в этом выражении экспоненту $e^{i\frac{\kappa r}{2}\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - \left(\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}'}{r}\right)^2\right]}$ можно приближенно заменить единицей и в результате получим

$$\frac{1}{4\pi}\frac{e^{i\kappa|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{4\pi}\frac{e^{i\kappa r}}{r}e^{-i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}'}\left(1 + \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}'}{r} + \cdots\right). \quad (15.2)$$

При $d/r \ll 1$ вторым слагаемым в скобках (15.2) можно пренебречь и тогда формулы (12.9) и (12.10) приобретают вид

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{i\kappa r}}{r}\int \vec{j}_\omega(\vec{r}')\,e^{-i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}'}dV',$$

$$\varphi_\omega(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{i\kappa r}}{r}\int \rho_\omega(\vec{r}')\,e^{-i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}'}dV'.$$

Выражения

$$\vec{j}_\omega(\vec{\kappa}) = \int \vec{j}_\omega(\vec{r}')\,e^{-i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}'}dV',$$

$$\rho_\omega(\vec{\kappa}) = \int \rho_\omega(\vec{r}')\,e^{-i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}'}dV' \quad (15.3)$$

есть пространственные фурье-компоненты соответственно плотностей тока и заряда. Так как в формулах (15.3) $\vec{\kappa} = \kappa \frac{\vec{r}}{r}$, то величины $\vec{j}_\omega(\vec{\kappa})$ и $\rho_\omega(\vec{\kappa})$ зависят от направления наблюдения и поэтому определяют угловое распределение излучения.

Таким образом, окончательно имеем

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}_\omega(\vec{\kappa}) \frac{e^{i\kappa r}}{r}, \qquad \varphi_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \rho_\omega(\vec{\kappa}) \frac{e^{i\kappa r}}{r} = \frac{c^2(\vec{\kappa} \cdot \vec{A}_\omega)}{\omega}. \tag{15.4}$$

Здесь мы учли, что величины $\vec{j}_\omega(\vec{\kappa})$ и $\rho_\omega(\vec{\kappa})$ связаны между собой уравнением непрерывности, которое для фурье-компонент имеет вид

$$\omega\rho_\omega(\vec{\kappa}) = \vec{\kappa} \cdot \vec{j}_\omega(\vec{\kappa}).$$

Из формул (15.4), которые справедливы при $r \gg d$ и $\kappa d \frac{d}{r} = \kappa r \left(\frac{d}{r}\right)^2 \ll 1$, следует, что электромагнитные потенциалы $\vec{A}_\omega(r)$ и $\varphi_\omega(\vec{r})$ на больших расстояниях от источника имеют вид расходящихся сферических волн.

Используя выражение (15.4), вычислим векторы $\vec{B}_\omega(\vec{r})$ и $\vec{E}_\omega(\vec{r})$ при условии $\kappa r \gg 1$ (это эквивалентно условию $r \gg \lambda$, где λ — длина излучаемой волны), а d и λ находятся в произвольном соотношении:

$$\vec{B}_\omega(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{A}_\omega(\vec{r}) \approx i\kappa \frac{\mu_0}{4\pi} [\vec{n}, \vec{j}_\omega(\vec{\kappa})] \frac{e^{i\kappa r}}{r},$$
$$\vec{E}_\omega(\vec{r}) = \frac{ic^2}{\omega} \operatorname{rot} \vec{B}_\omega(\vec{r}) \approx -\frac{i\kappa c^2}{\omega} \frac{\mu_0}{4\pi} \times \tag{15.5}$$
$$\times [\vec{n}, [\vec{n}, \vec{j}_\omega(\vec{\kappa})]] \frac{e^{i\kappa r}}{r} = c[\vec{B}_\omega, \vec{n}].$$

Последнее уравнение представляет собой уравнение Максвелла (8.2), записанное для временных фурье-компонент в точках пространства вне излучающей системы, где $\vec{j}(\vec{r}, t) = 0$.

При выводе формулы (15.5) учтено, что если $\kappa r \gg 1$, то

$$\vec{\nabla}\left(\frac{e^{i\kappa r}}{r}\right) = i\kappa\left(1 - \frac{1}{i\kappa r}\right)\vec{n} \frac{e^{i\kappa r}}{r} \approx i\kappa\vec{n} \frac{e^{i\kappa r}}{r}.$$

Необходимо также иметь в виду, что в формулах (15.4) множители, стоящие перед выражением $e^{i\kappa r}/r$, также зависят от направления радиуса-вектора $\vec{r}$, так как $\vec{\kappa} = \kappa\vec{n}$, а $\vec{n} = \vec{r}/r$. Однако поскольку $\frac{\partial n_i}{\partial x_i} \sim \frac{1}{r}$, то в приближении $\kappa r \gg 1$ этими производными можно пренебречь, т. е. считать множители, стоящие в формулах (15.4) перед выражением $e^{i\kappa r}/r$, постоянными.

Из (15.5) следует, что

$$\vec{E}_\omega = c[\vec{B}_\omega, \vec{n}], \quad \vec{B}_\omega = -\frac{\kappa}{\omega}[\vec{E}_\omega, \vec{n}] = -\frac{1}{c}[\vec{E}_\omega, \vec{n}].$$

Кроме того, так как $\kappa = \omega/c$, то $\omega^2 = c^2\kappa^2$, как и в случае плоских волн. Это означает, что на больших расстояниях от источника расходящиеся от него монохроматические волны в сравнительно небольших объемах пространства можно считать плоскими (§ 13).

С помощью формулы (12.6), учитывая, что $\vec{n} = \vec{\kappa}/\kappa$, вычислим энергию электромагнитного излучения в данном интервале частот $d\omega$ в единицу телесного угла $d\Omega$:

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = \frac{\varepsilon_0 c^2}{\pi} \operatorname{Re}\{[\vec{E}_\omega, \vec{B}_\omega^*] \cdot \vec{n}\} r^2 =$$
$$= \frac{\varepsilon_0 c^2}{\pi} \operatorname{Re}\{[\vec{n}, \vec{E}_\omega] \cdot \vec{B}_\omega^*\} r^2 = \frac{\varepsilon_0 c^2}{\pi} |B_\omega|^2 r^2.$$

Из этой формулы следует, что вклад в энергию излучения дают только те слагаемые в (15.2), которые при $r \to \infty$ изменяются как $1/r$. Подставляя в это выражение вектор магнитной индукции (15.5), находим

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = \kappa^2 \frac{\varepsilon_0 c^2}{\pi} \frac{\mu_0^2}{(4\pi)^2} |[\vec{n}, \vec{j}_\omega(\vec{\kappa})]|^2. \tag{15.6}$$

Формула (15.6) определяет угловое и спектральное распределение электромагнитного излучения. Так как $\vec{\kappa} = \kappa\vec{n}$, то очевидно, что величина $\vec{j}_\omega(\vec{\kappa})$ зависит от направления, в котором наблюдается электромагнитное излучение. Поэтому измеряя угловое распределение излучения, можно восстановить распределение токов в излучающей системе (обратная задача электродинамики).

На основе полученных формул рассмотрим частный случай, когда длина волны излучения гораздо больше размеров излучающей системы: $\kappa d \ll 1$ *(дипольное приближение)*. В этом случае в формуле (15.3) приближенно можно положить $e^{-i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}'} \approx 1$ и тогда $\vec{j}_\omega(\vec{\kappa}) \simeq \vec{j}_\omega(0) = \int \vec{j}_\omega(\vec{r}')\, dV$. С помощью уравнения непрерывности $\vec{j}_\omega(0)$ можно выразить через дипольный момент излучающей системы. Для этого рассмотрим выражение

$$\operatorname{div}(x\vec{j}_\omega) = (j_\omega)_x + x \operatorname{div} \vec{j}_\omega = (j_\omega)_x + ix\omega\rho_\omega.$$

Здесь мы воспользовались уравнением непрерывности $-i\omega\rho_\omega + \operatorname{div}\vec{j}_\omega = 0$. Проинтегрируем это выражение по всему объему системы и воспользуемся теоремой Остроградского $\int \operatorname{div}(x\vec{j}_\omega)\, dV = \int x\,(j_\omega)_n\, dS$. В результате получим

$$\int x\,(j_\omega)_n\, dS = \int (j_\omega)_x\, dV + i\omega \int x\rho_\omega dV.$$

Если выбирать объем интегрирования так, чтобы ограничивающая его поверхность проходила вне излучающей системы, то $\int x\,(j_\omega)_n\,dS = 0$, и поэтому

$$\int \vec{j}_\omega dV = -i\omega \int \vec{r}\rho_\omega dV = -i\omega\vec{p}_\omega,$$

где $\vec{p}_\omega$ — фурье-компонента дипольного момента излучающей системы.

Таким образом, в дипольном приближении

$$\vec{j}_\omega(\kappa) \approx \vec{j}_\omega(0) = \int \vec{j}_\omega(\vec{r})\,dV = -i\omega\vec{p}_\omega, \quad \vec{j}(t) = \frac{\partial\vec{p}}{\partial t}. \qquad (15.7)$$

Подставляя (15.7) в (15.6), получаем

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = \frac{\omega^4}{16\pi^3\varepsilon_0 c^3}\,|[\vec{n}, \vec{p}_\omega]|^2. \qquad (15.8)$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда дипольный момент системы изменяется со временем по гармоническому закону $\vec{p}(t) = \vec{p}_0\cos\omega_0 t$. Согласно (12.2), его фурье-компонента равна

$$\vec{p}_\omega = \vec{p}_0\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega_0 t e^{i\omega t}dt = \pi\vec{p}_0[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)].$$

Так как в формуле (12.5) интегрирование производится по положительным частотам, то в выражении для $\vec{p}_\omega$ следует оставить только первое слагаемое:

$$\vec{p}_\omega = \pi\vec{p}_0\,\delta(\omega-\omega_0) = \frac{\vec{p}_0}{2}\lim_{\tau\to\infty}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{i(\omega-\omega_0)t}dt.$$

Таким образом, $|[\vec{n}, \vec{p}_\omega]|^2$ можно представить в виде

$$|[\vec{n}, \vec{p}_\omega]|^2 = \frac{\pi}{2}|[\vec{n}, \vec{p}_0]|^2\,\delta(\omega-\omega_0)\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{i(\omega-\omega_0)t}dt =$$

$$= \frac{\pi p_0^2}{2}\,\tau\sin^2\Theta\,\delta(\omega-\omega_0).$$

Здесь Θ — угол между вектором $\vec{p}_0$ и направлением наблюдения $\vec{n} = \vec{r}/r$. Подставляя это выражение в формулу (15.8), получаем

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{2}p_0^2\tau\,\frac{\omega^4}{(4\pi)^2\varepsilon_0 c^3}\sin^2\Theta\,\delta(\omega-\omega_0).$$

Эта формула описывает спектральное и угловое распределение излучения электрического диполя, колеблющегося с частотой ω_0. Разделив это выражение на время излучения τ и проинтегрировав по всем частотам, вычислим электромагнитную энергию, излучаемую диполем за единицу времени в единицу телесного угла:

$$\frac{dW}{d\tau d\Omega} = \frac{1}{\tau}\int_0^\infty d\omega\,\frac{dW}{d\omega d\Omega} = \frac{\omega_0^4 p_0^2}{2(4\pi)^2\varepsilon_0 c^3}\sin^2\Theta. \qquad (15.9)$$

Отсюда следует, что угловое распределение дипольного излучения определяется множителем $\sin^2\Theta$.

Полную энергию, излучаемую диполем за единицу времени, можно получить, проинтегрировав выражение (15.9) по всему телесному углу $d\Omega$:

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{\omega_0^4 p_0^2}{2(4\pi)^2\varepsilon_0 c^3}\int\int\sin^2\Theta d\Omega = \frac{\omega_0^4 p_0^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}. \qquad (15.10)$$

Таким образом, мощность излучения диполя пропорциональна четвертой степени частоты и квадрату амплитуды колебаний. Это означает, что если токи достаточно медленно изменяются со временем (квазистационарные токи, гл. 7), то это излучение мало и в некоторых случаях им можно пренебречь.

Рассмотрим теперь случай, когда по-прежнему $d/r \ll 1$, $\kappa d \ll 1$, но kr произвольно. В этом случае, воспользовавшись формулой (15.7), полученной в дипольном приближении ($\lambda \gg d$), фурье-компоненту векторного потенциала (15.4) можно представить в виде

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{i\kappa r}}{r}\int\vec{j}_\omega(\vec{r}')\,dV' = -i\omega\vec{p}_\omega\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{i\kappa r}}{r}. \qquad (15.11)$$

Следует подчеркнуть, что формула (15.11) справедлива везде вне излучающей системы, т. е. при $r \gg d$, но при любых значениях произведения κr. Напряженность $\vec{E}$ и индукцию $\vec{B}$ поля вычислим по формулам (15.5), подставляя в них (15.11). В результате получим

$$\vec{B}_\omega(\vec{r}) = \kappa^2\frac{\mu_0 c}{4\pi}[\vec{n}, \vec{p}_\omega]\frac{e^{i\kappa r}}{r}\left(1-\frac{1}{i\kappa r}\right), \qquad (15.12)$$

$$\vec{E}_\omega(\vec{r}) = \frac{\kappa^2}{4\pi\varepsilon_0}\left\{[[\vec{n}, \vec{p}_\omega], \vec{n}] + [3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{p}_\omega) - \vec{p}_\omega]\left(\frac{1}{i\kappa r}+\frac{1}{\kappa^2 r^2}\right)\right\}\frac{e^{i\kappa r}}{r}. \qquad (15.13)$$

На больших расстояниях от излучающей системы (в дальней, так называемой волновой или радиационной зоне, где $\kappa r \gg 1$) формулы (15.12) и (15.13) приобретают вид

$$\vec{B}_\omega(\vec{r}) = \kappa^2\frac{\mu_0 c}{4\pi}[\vec{n}, \vec{p}_\omega]\frac{e^{i\kappa r}}{r},$$

$$\vec{E}_\omega(\vec{r}) = \kappa^2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[[\vec{n}, \vec{p}_\omega], \vec{n}]\frac{e^{i\kappa r}}{r}.$$

Если учесть, что $\vec{j}_\omega = -i\omega\vec{p}_\omega$, то очевидно, что эти формулы совпадают с выражениями (15.4). Поэтому излучаемая энергия будет определяться формулой (15.8).

Переходя от фурье-компонент к функциям времени, получаем

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{1}{r}\left[\vec{n}, \int_{-\infty}^{\infty}\vec{p}_\omega\omega^2 e^{-i\omega t + i\omega\frac{r}{c}}d\omega\right] = \frac{1}{4\pi c}[\ddot{\vec{p}}, \vec{n}]\frac{1}{r},$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}[[\ddot{\vec{p}}, \vec{n}], \vec{n}]\frac{1}{r}.$$

В этих формулах все величины вычисляются в момент времени $\left(t - \frac{r}{c}\right)$.

В ближней зоне, где $\kappa r = \frac{\omega r}{c} \ll 1$, но по-прежнему $r \gg d$, в формулах (15.12) и (15.13) следует оставить слагаемые с самыми большими степенями r в знаменателе, а также считать $e^{i\kappa r} \approx 1$. Тогда получим

$$\vec{B}_\omega = \frac{\mu_0}{4\pi}[-i\omega\vec{p}_\omega, \vec{n}]\frac{1}{r^2}, \quad \vec{B}(t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\dot{\vec{p}}, \vec{n}]}{r^2},$$

$$\vec{E}_\omega = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{p}_\omega) - \vec{p}_\omega]\frac{1}{r^3},$$

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{p}) - \vec{p}]\frac{1}{r^3}.$$

Из этих формул следует, что в ближней зоне электрическое поле совпадает с полем статического электрического диполя (3.2). Выражение для магнитного поля совпадает с формулой (4.8), если заменить в ней элемент тока $Id\vec{l}$ на $\dot{\vec{p}}$. Действительно, так как, согласно (15.7), ток $\vec{j} = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$, где $\vec{P}$ — дипольный момент единицы объема, а $\vec{p}$ — полный дипольный момент, то $\vec{j} = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} = \frac{\dot{\vec{p}}}{dSdl}$, и поэтому

$$\vec{j}dSdl = Id\vec{l} = \frac{\partial\vec{p}}{\partial t} \to -i\omega\vec{p}_\omega.$$

Приближение $\omega r/c \ll 1$ называется квазистационарным и более подробно будет рассмотрено в гл. 7. Это приближение дает правильный результат в ближней зоне, где $\kappa r \ll 1$. Выше было показано, что для вычисления излучаемой электромагнитной энергии необходимо знать электромагнитное поле в дальней (волновой зоне), где $r \gg \lambda$, поэтому с помощью квазистатического приближения нельзя вычислить излучаемую энергию.

§ 16. Электрическое квадрупольное и магнитное дипольное излучение

В тех случаях, когда дипольный момент равен нулю, а это означает, что и $\int \vec{j}_\omega(0)\,dV = 0$, необходимо учесть в выражении (15.2) следующие члены разложения экспоненты $e^{-i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}'} \approx (1 - i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}' + \ldots)$ по степеням $\vec{\kappa}\cdot\vec{r}'$. Тогда

$$\frac{e^{i\kappa|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{e^{i\kappa r}}{r}e^{-i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}'}\left(1 + \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}'}{r}\right) \simeq \frac{e^{i\kappa r}}{r}(1 - i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}')\left(1 + \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}'}{r}\right) \simeq$$

$$\simeq \frac{e^{i\kappa r}}{r}\left[1 - i\kappa(\vec{n}\cdot\vec{r}')\left(1 - \frac{1}{i\kappa r}\right)\right] \simeq \frac{e^{i\kappa r}}{r}\left[1 - i\kappa\left(1 - \frac{1}{i\kappa r}\right)(\vec{n}\cdot\vec{r}')\right].$$

Тогда векторный потенциал (12.9) при $\kappa d \ll 1$, $r \gg d$, но любых κr будет иметь вид

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}i\kappa\frac{e^{i\kappa r}}{r}\left(1 - \frac{1}{i\kappa r}\right)\int(\vec{n}\cdot\vec{r}')\vec{j}_\omega dV'. \qquad (16.1)$$

Покажем, что интеграл в этой формуле можно выразить через квадрупольный и магнитный дипольный моменты системы. Для этого воспользуемся тождеством

$$\int(\vec{n}\cdot\vec{r}')\vec{j}_\omega dV' = \frac{1}{2}\int[(\vec{n}\cdot\vec{r}')\vec{j}_\omega + (\vec{n}\cdot\vec{j}_\omega)\vec{r}']\,dV' + \frac{1}{2}\int[[\vec{r}', \vec{j}_\omega], \vec{n}]\,dV'.$$

Последнее слагаемое можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\int[[\vec{r}', \vec{j}_\omega], \vec{n}]\;dV' = [\vec{\mu}, \vec{n}],$$

где $\vec{\mu} = \frac{1}{2}\int[\vec{r}', \vec{j}_\omega]\,dV'$ — магнитный дипольный момент системы (§ 5). Первое слагаемое обозначим

$$\vec{q} = \frac{1}{2}\int[(\vec{n}, \vec{r}')\vec{j}_\omega + (\vec{n}, \vec{j}_\omega)\vec{r}']\,dV'.$$

Таким образом, $\int\vec{j}_\omega(\vec{n}\cdot\vec{r})\,dV = [\vec{\mu}, \vec{n}] + \vec{q}$, и поэтому векторный потенциал (16.1) можно записать в виде двух слагаемых:

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \vec{A}^{(1)}_\omega(\vec{r}) + \vec{A}^{(2)}_\omega(\vec{r}),$$

где $\vec{A}^{(1)}_\omega(\vec{r}) \quad i\kappa\frac{\mu_0}{4\pi}[\vec{n}, \vec{\mu}]\frac{e^{i\kappa r}}{r}\left(1 - \frac{1}{i\kappa r}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\vec{\nabla}\left(\frac{e^{i\kappa r}}{r}\right), \vec{\mu}\right]$

— векторный потенциал, связанный с магнитным дипольным моментом системы;

$$\vec{A}^{(2)}_\omega(\vec{r}) = -i\kappa\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{q}\,\frac{e^{i\kappa r}}{r}\left(1 - \frac{1}{i\kappa r}\right) \qquad (16.2)$$

— векторный потенциал, связанный, как будет показано ниже, с электрическим квадрупольным моментом излучающей системы.

Электромагнитное поле, создаваемое магнитным дипольным моментом, находится по формулам

$$\vec{B}_\omega = \mathrm{rot}\,\vec{A}^{(1)}_\omega = \kappa^2\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{[[\vec{n}, \vec{\mu}], \vec{n}]\frac{e^{i\kappa r}}{r} + \right.$$

$$\left. + [3\vec{n}(\vec{\mu}\cdot\vec{n}) - \vec{\mu}]\left(\frac{1}{\kappa^2 r^2} + \frac{1}{i\kappa r}\right)\frac{e^{i\kappa r}}{r}\right\}, \qquad (16.3)$$

$$\vec{E}_\omega = \frac{ic^2}{\omega}\mathrm{rot}\,\vec{B}_\omega = -\frac{\mu_0\kappa^2 c}{4\pi}[\vec{n}, \vec{\mu}]\frac{e^{i\kappa r}}{r}\left(1 - \frac{1}{i\kappa r}\right). \qquad (16.4)$$

Из (16.4) следует, что электрический вектор магнитного дипольного излучения, который характеризует поляризацию этого излучения, перпендикулярен плоскости, содержащей векторы $\vec{n}$ и $\vec{\mu}$.

Сравнивая формулы (16.3) и (16.4) с формулами (15.12) и (15.13), видим, что они совпадают, с точностью до замены $\vec{p} \to \mu/c$, $\vec{E}_\omega \to c\vec{B}_\omega$, $c\vec{B}_\omega \to -\vec{E}_\omega$. Поэтому как угловое распределение, так и выражение для полной излучаемой мощности совпадут с выражением (15.9), если заменить в нем $\vec{p}$ на μ/c. Отношение мощностей излучений по порядку величины равно

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{м.д}} \Big/ \left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{э.д}} = \frac{\mu^2}{c^2 p^2} \sim \frac{(rev)^2}{c^2 (er)^2} \sim \frac{v^2}{c^2}.$$

Следовательно, мощность магнитодипольного излучения в $\frac{v^2}{c^2}$ раз меньше дипольного электрического.

Рассмотрим теперь излучение, связанное с электрическим квадрупольным моментом. Интеграл $\vec{q} = \frac{1}{2}\int [(\vec{n}\cdot\vec{r})\,\vec{j}_\omega + (\vec{n}\cdot\vec{j}_\omega)\,\vec{r}]\,dV$, входящий в формулу (16.2), можно преобразовать к более простому виду. Для этого рассмотрим равенство

$$i\omega \int \rho_\omega (\vec{a}\cdot\vec{r})(\vec{\kappa}\cdot\vec{r})\,dV = \int (\vec{a}\cdot\vec{r})(\vec{\kappa}\cdot\vec{r})\,\operatorname{div}\vec{j}_\omega dV,$$

которое получено путем умножения уравнения непрерывности $-i\omega\rho_\omega + \operatorname{div}\vec{j}_\omega = 0$ на выражение $(\vec{a}\cdot\vec{r})(\vec{\kappa}\cdot\vec{r})$, где $\vec{a}$ — произвольный постоянный вектор. Правую часть этого равенства можно записать следующим образом:

$$\int (\vec{a}\cdot\vec{r})(\vec{\kappa}\cdot\vec{r})\,\operatorname{div}\vec{j}_\omega dV =$$

$$= \int \operatorname{div}[\vec{j}_\omega (\vec{a}\cdot\vec{r})(\vec{\kappa}\cdot\vec{r})]\,dV - \int \vec{j}_\omega\cdot\vec{\nabla}\,[(\vec{a}\cdot\vec{r})(\vec{\kappa}\cdot\vec{r})]\,dV =$$

$$= -\int [(\vec{a}\cdot\vec{j}_\omega)(\vec{\kappa}\cdot\vec{r}) + (\vec{a}\cdot\vec{r})(\vec{\kappa}\cdot\vec{j}_\omega)]\,dV + \int j_{\omega n}(\vec{a}\cdot\vec{r})(\vec{\kappa}\cdot\vec{r})\,dS.$$

Поскольку интеграл по поверхности равен нулю, а $\vec{a}$ — постоянный вектор, то

$$\int (\vec{a}\cdot\vec{r})(\vec{\kappa}\cdot\vec{r})\,\operatorname{div}\vec{j}_\omega dV = -\vec{a}\cdot\int [\vec{j}_\omega(\vec{\kappa}\cdot\vec{r}) + \vec{r}(\vec{\kappa}\cdot\vec{j}_\omega)]\,dV.$$

Так как вектор $\vec{a}$ — произвольный, то, учитывая, что $\operatorname{div}\vec{j}_\omega = i\omega\rho_\omega$, находим

$$\vec{q} = \frac{1}{2}\int [\vec{j}_\omega(\vec{n}\cdot\vec{r}) + \vec{r}(\vec{n}\cdot\vec{j}_\omega)]\,dV = -\frac{i\omega}{2}\int \rho_\omega \vec{r}(\vec{n}\cdot\vec{r})\,dV.$$

Используя это соотношение, перепишем формулу (16.2) в приближении $\kappa r \gg 1$:

$$\vec{A}^{(2)}_\omega = \frac{\omega^2}{2}\frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{e^{i\kappa r}}{r}\int \rho_\omega \vec{r}(\vec{n}\cdot\vec{r})\,dV.$$

Вычислим теперь электрическое и магнитное поля:

$$\vec{B}_\omega = \operatorname{rot}\vec{A}^{(2)}_\omega = -\frac{i\omega^3}{2}\frac{\mu_0}{4\pi c^2}\frac{e^{i\kappa r}}{r}\left[\vec{n}, \left(\int \rho_\omega \vec{r}(\vec{n}\cdot\vec{r})\,dV - \frac{\vec{n}}{3}\int \rho_\omega r^2 dV\right)\right], \tag{16.5}$$

$$\vec{E}_\omega = \frac{ic^2}{\omega}\operatorname{rot}\vec{B}_\omega = c[\vec{B}_\omega, \vec{n}].$$

Здесь в выражении для магнитного поля добавлено слагаемое $-\frac{\vec{n}}{3}\int \rho_\omega r^2 dV$, которое при векторном умножении на $\vec{n}$ дает нуль.

Определим вектор $\vec{Q}(\vec{n})$ равенством

$$Q_i(\vec{n}) = \frac{1}{3}\sum_j \int (3x_i x_j - r^2\delta_{ij})\,\rho n_j dV = \frac{1}{3}\sum_j Q_{ij} n_j,$$

где $Q_{ij} = \int (3x_i x_j - r^2\delta_{ij})\,\rho dV$ — тензор квадрупольного момента излучающей системы (3.10). Тогда формулы (16.5) приобретают вид

$$\vec{B}_\omega = -\frac{i\omega^3}{6}\frac{\mu_0}{4\pi c^2}\frac{e^{i\kappa r}}{r}[\vec{n}, \vec{Q}(\vec{n})], \quad \vec{E}_\omega = c[\vec{B}_\omega, \vec{n}].$$

С помощью формулы (12.6), подставляя в нее эти выражения для $\vec{E}_\omega$ и $\vec{B}_\omega$, находим мощность излучения квадруполя в данной полосе частот в данный телесный угол:

$$\frac{dW}{d\Omega d\omega} = \frac{\omega^6}{9\cdot 2^7\pi^3 c^5 e_0}|[\vec{n}, \vec{Q}]|^2 = \frac{\omega^6}{9\cdot 2^7\pi^3 c^5 e_0}(|\vec{Q}|^2 - |\vec{Q}\cdot\vec{n}|^2).$$

Отсюда следует, что мощность квадрупольного излучения пропорциональна шестой степени частоты.

§ 17. Электромагнитное поле ускоренно движущегося заряда. Потенциалы Лиенара—Вихерта

Применим полученные в § 11 формулы (11.1) и (11.5) для вычисления запаздывающих потенциалов произвольно движущейся точечной заряженной частицы.

Пусть заряженная частица движется во внешних силовых полях по закону $\vec{r} = \vec{r}_0(t)$, $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}_0}{dt}$. Плотности заряда и тока, создаваемого точечной заряженной частицей, равны

$$\rho = e\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)), \quad \vec{j} = e\vec{v}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)).$$

Воспользовавшись тем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t')\,\delta\left(t' - t + \frac{R}{c}\right)dt' = f\left(t - \frac{R}{c}\right),$$

перепишем формулы (11.1) и (11.5) в виде

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t')}{R}\,\delta\left(t' - t + \frac{R}{c}\right),$$
$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\rho(\vec{r}', t')}{R}\,\delta\left(t' - t + \frac{R}{c}\right). \qquad (17.1)$$

Здесь, как и ранее, $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$.

Эти формулы можно записать в виде единой формулы, если учесть, что $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} = \frac{\mu_0 c}{4\pi}$ и ввести обозначения $A_\nu = (\varphi, c\vec{A})$, $j_\nu = (\rho c, \vec{j})$, тогда

$$A_\nu(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 c}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \int \frac{j_\nu}{R}\,\delta\left(t' - t + \frac{R}{c}\right) dV', \qquad (17.2)$$

причем $A_0 = \varphi$, $j_0 = c\rho$. Четырехмерная запись величин $A_\nu = (\varphi, c\vec{A})$, $j_\nu = (c\rho, \vec{j})$ ($\nu = 0, 1, 2, 3$) в данном случае носит формальный характер. Однако в гл. 4 показано, что она имеет глубокий физический смысл.

Для точечной частицы

$$j_\nu = ev_\nu \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)),$$

где $v_\nu = (c, \vec{v})$. Поэтому векторный потенциал, создаваемый точечной частицей,

$$A_\nu = \frac{e\mu_0 c}{4\pi}\int dV' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{v_\nu(t')}{R}\,\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0(t))\,\delta\left(t' - t + \frac{R}{c}\right).$$

Используя наличие под интегралом δ-функции, проинтегрируем это выражение сначала по объему:

$$A_\nu(\vec{r}, t) = \frac{e\mu_0 c}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{v_\nu(t')}{R(t')}\,\delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) dt'. \qquad (17.3)$$

В этой формуле $R(t') = |\vec{r} - \vec{r}_0(t')|$. Выражение (17.3) можно проинтегрировать по времени, если воспользоваться формулой

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)\,\delta(f(x))\,dx = \sum_s \frac{F(x_s)}{|f'(x_s)|},$$

где $F(x)$ — некоторая функция, x_s определяется из условия $f(x_s) = 0$. С помощью этого соотношения выполним в (17.3) интегрирование по t'. В результате получим

$$A_\nu(\vec{r}, t) = \frac{e\mu_0 c}{4\pi}\,\frac{v_\nu(\tau)}{R(\tau)\left|\frac{\partial f}{\partial \tau}\right|},$$

где функция $\tau(\vec{r}, t)$ определяется из условия $f(\tau) = \tau - t + \frac{R(\tau)}{c} = 0$.

Вычислим производную

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = 1 + \frac{1}{c}\frac{dR}{d\tau} = 1 - \frac{1}{c}\left(\vec{\nabla}R \cdot \frac{d\vec{r}_0}{d\tau}\right) = 1 - \frac{(\vec{R}\cdot\vec{v})}{Rc} > 0.$$

Если $\frac{v}{c} < 1$, то $\frac{(\vec{R}\cdot\vec{v})}{R\cdot c} < 1$, следовательно, производная $\frac{\partial f}{\partial t}$ нигде не обращается в нуль и поэтому функция $f(t)$ монотонная. Таким образом, уравнение $f(t) = 0$ имеет только один корень, обозначенный τ.

Итак,

$$A_\nu(\vec{r}, t) = \frac{e\mu_0 c}{4\pi}\,\frac{v_\nu}{R - \frac{(\vec{R}\cdot\vec{v})}{c}}, \qquad (17.4)$$

при этом величины $R(\tau) = |\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|$, $v_\nu(\tau)$ берутся в момент времени τ, который связан с временем наблюдения t уравнением

$$\tau - t + \frac{R(\tau)}{c} = 0. \qquad (17.5)$$

Таким образом, электромагнитные потенциалы в точке наблюдения $\vec{r}$ в момент времени t определяются положением и скоростью заряда в предшествующий момент времени $\tau(\vec{r}, t)$, который определяется из (17.5)

Учитывая ранее введенные обозначения $A_\nu = (\varphi, c\vec{A})$, $v_\nu = (c, \vec{v})$, перепишем формулу (17.4) в виде

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R - \frac{(\vec{R}\cdot\vec{v})}{c}},$$
$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}}{c^2}\varphi = \frac{e\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{v}}{R - \frac{(\vec{R}\cdot\vec{v})}{c}}, \qquad (17.6)$$

где $\vec{R}(\tau) = \vec{r} - \vec{r}_0(\tau)$, $t = \tau + \frac{R(\tau)}{c}$. Потенциалы (17.6) определяют электромагнитное поле, создаваемое частицей, которая движется по закону $r_0(t)$, и называются *потенциалами Лиенара — Вихерта*.

Вычислим электромагнитное поле, связанное с потенциалами Лиенара — Вихерта (17.6). Эти потенциалы заданы как функции r и τ, и для вычисления векторов электромагнитного поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ надо вычислить производные $\frac{\partial}{\partial t}$ при постоянном $\vec{r}$ и $\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \equiv \vec{\nabla}$ при постоянном t.

Согласно формулам замены переменных,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)_{\vec{r}}\frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (\vec{\nabla})_t = (\vec{\nabla})_\tau + (\vec{\nabla}\tau)_t\frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Следовательно, для нахождения производных $\frac{\partial}{\partial t}$, $(\vec{\nabla})_t$ необходимо прежде всего вычислить производные $\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)_{\vec{r}}$, $(\vec{\nabla}\tau)_t$.

Вычислим сначала производную $\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)_{\vec{r}}$. Используя (17.5), находим

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)_{\vec{r}}; \quad \left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = \frac{1}{1 + \frac{\partial R}{c\partial \tau}}. \tag{17.7}$$

Так как $R^2 = (\vec{r} - \vec{r}_0(\tau))^2$, то

$$R\frac{\partial R}{\partial \tau} = -(\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)) \cdot \frac{d\vec{r}_0}{d\tau} = -\vec{R} \cdot \vec{v}(\tau).$$

Значит,

$$\frac{\partial R}{\partial \tau} = -(\vec{n} \cdot \vec{v}), \tag{17.8}$$

где $\vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}_0}{d\tau}$.

Подставляя (17.8) в (17.7), получаем

$$\left(\frac{\partial \tau}{dt}\right)_{\vec{r}} = \frac{1}{1 - \frac{(\vec{n} \cdot \vec{v})}{c}}. \tag{17.9}$$

Дифференцируя (17.5) по координатам, находим

$$(\vec{\nabla}\tau)_t + \frac{1}{c}(\vec{\nabla}R)_\tau + \frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial \tau}(\vec{\nabla}\tau)_t = 0. \tag{17.10}$$

Так как $(\vec{\nabla}R)_\tau = \frac{\vec{R}}{R} = \vec{n}$, то из (17.10), учитывая (17.8) и (17.9), имеем

$$(\vec{\nabla}\tau)_t = -\frac{\vec{n}}{c}\frac{1}{1 + \frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial \tau}} = -\frac{\vec{n}}{c\left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c}\right)}. \tag{17.11}$$

Перейдем теперь к непосредственному вычислению векторов электромагнитного поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

$$\vec{E} = -(\vec{\nabla}\varphi)_t - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -(\vec{\nabla}\varphi)_\tau - \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(\vec{\nabla}\tau)_t - \frac{1}{c^2}\frac{\partial(\vec{v}\varphi)}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)_{\vec{r}}. \tag{17.12}$$

Здесь φ и $\vec{A}$ определяются формулами (17.6). Подставляя (17.9) и (17.11) в выражение (17.12), перепишем его в виде

$$\vec{E} = -(\vec{\nabla}\varphi)_\tau + \frac{1}{c\left(1 - \frac{(\vec{n} \cdot \vec{v})}{c}\right)}\left[\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \frac{1}{c}\dot{\vec{v}}\varphi\right]. \tag{17.13}$$

Используя (17.6), вычислим производную

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(R - \frac{(\vec{R} \cdot \vec{v})}{c}\right)^2}\left[-\frac{\partial R}{\partial \tau} + \left(\frac{\vec{v}}{c}\frac{\partial \vec{R}}{\partial \tau}\right) + \frac{(\vec{R} \cdot \dot{\vec{v}})}{c}\right].$$

Учитывая, что $\partial\vec{R}/\partial\tau = -\vec{v}$, а $\partial R/\partial\tau = -\vec{n} \cdot \vec{v}$, запишем эту формулу в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(R - \frac{(\vec{R} \cdot \vec{v})}{c}\right)^2}\left[\vec{v}\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}\right) + \frac{\vec{R} \cdot \dot{\vec{v}}}{c}\right]. \tag{17.14}$$

Аналогично вычисляем

$$(\vec{\nabla}\varphi)_\tau = \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(R - \frac{(\vec{R} \cdot \vec{v})}{c}\right)^2}\left[(\vec{\nabla}R)_\tau - \frac{1}{c}\vec{\nabla}_\tau(\vec{R} \cdot \vec{v})\right] =$$

$$= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{v}/c - \vec{n})}{\left(R - \frac{(\vec{R} \cdot \vec{v})}{c}\right)^2}. \tag{17.15}$$

Подставляя формулы (17.14) и (17.15) в (17.13), получаем

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}\right)}{R^2\left(1 - \frac{(\vec{n} \cdot \vec{v})}{c}\right)^3} + \frac{\left[\vec{n}, \left[\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}\right), \dot{\vec{v}}\right]\right]}{c^2R\left(1 - \frac{(\vec{n} \cdot \vec{v})}{c}\right)^3}\right\} =$$

$$= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(1 - \frac{(\vec{n} \cdot \vec{v})}{c}\right)^3 R^2}\left\{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}\right) + \frac{R}{c^2}\left[\vec{n}, \left[\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}\right), \dot{\vec{v}}\right]\right]\right\}. \tag{17.16}$$

Для вектора магнитной индукции, используя (17.6), имеем

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{c^2}\operatorname{rot}_t(\vec{v}\varphi) = \frac{1}{c^2}[[(\vec{\nabla}\varphi)_t, \vec{v}] + \varphi \operatorname{rot}_t \vec{v}] =$$

$$= \frac{1}{c^2}\left\{\left[\left[(\vec{\nabla}\varphi)_\tau + (\vec{\nabla}\tau)_t\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right], \vec{v}\right] + \varphi \operatorname{rot}_t \vec{v}\right\}. \tag{17.17}$$

Величины $(\vec{\nabla}\varphi)_\tau$, $(\vec{\nabla}\tau)_t$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}$ вычислены ранее. Теперь нужно вычислить $\operatorname{rot}_t \vec{v}$. Для этого, используя формулу (17.11), предварительно найдем производную

$$\left(\frac{\partial v_l}{\partial x_j}\right)_t = \frac{\partial v_l}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x_j} = -\dot{v}_l\frac{n_j}{c\left(1 - \frac{(\vec{n} \cdot \vec{v})}{c}\right)}. \tag{17.18}$$

С учетом (17.18) находим

$$\operatorname{rot}_t \vec{v} = \left[\dot{\vec{v}}, \frac{\vec{n}}{c\left(1 - \frac{(\vec{n}\cdot\vec{v})}{c}\right)}\right]. \qquad (17.19)$$

Из выражения (17.15) следует, что

$$\left[\frac{1}{c}(\vec{\nabla}\varphi)_\tau, \vec{v}\right] = [(\vec{\nabla}\varphi)_\tau, \vec{n}] = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c} \frac{[\vec{v}\cdot\vec{n}]}{R^2\left(1 - \frac{(\vec{n}\cdot\vec{v})}{c}\right)^2}. \qquad (17.20)$$

Подставляя значения величин из формул (17.11), (17.14), (17.15), (17.19) в (17.17) и используя соотношение (17.20), после несложных алгебраических преобразований получаем

$$\vec{B} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left\{\frac{[\vec{v},\vec{n}]}{R^2\left(1 - \frac{(\vec{n}\cdot\vec{v})}{c}\right)^3}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{[\vec{v},\dot{\vec{v}}]}{c^2 R\left(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{c}\right)^3} - \right.$$
$$\left. - \frac{[\vec{n}\cdot\vec{v}] - \vec{n}(\vec{n}\cdot[\vec{n} - \vec{v}/c, \dot{\vec{v}}])}{Rc\left(1 - \frac{(\vec{n}\cdot\vec{v})}{c}\right)^3}\right\} = \frac{1}{c}[\vec{n}, \vec{E}]. \qquad (17.21)$$

Следовательно, вектор индукции магнитного поля всегда направлен перпендикулярно как к вектору $\vec{E}$, так и к вектору $\vec{n}$, направленному от частицы в точку наблюдения.

Из формул (17.16) и (17.21) следует, что электромагнитное поле ускоренно движущейся частицы состоит из двух частей. Первые слагаемые в этих формулах не зависят от ускорения и на больших расстояниях ($R \to \infty$) от излучающей частицы изменяются как $1/R^2$. Эта часть поля имеет потенциальный характер, и ниже покажем, что оно совпадает с полем равномерно движущегося заряда. Зависящие от ускорения слагаемые при $R \to \infty$ изменяются как $1/R$. Это соответствует вихревой части электромагнитного поля. Именно эти слагаемые, как будет показано в следующем параграфе, связаны с излучаемыми зарядами электромагнитными волнами.

Запишем формулы (17.6) для равномерного и прямолинейного движения заряда с постоянной скоростью $\vec{v}$. В этом случае

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{v}\tau, \quad \tau = t + \frac{R}{c} = 0,$$

Следовательно,

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{v}\left(t - \frac{R}{c}\right). \qquad (17.22)$$

Вычислим величину $R - \frac{(\vec{R}\cdot\vec{v})}{c}$, стоящую в знаменателе формул (17.6). Для простоты будем считать, что ось z направлена вдоль скорости движения $\vec{v}$ и поэтому $\vec{v}\cdot\vec{r} = vz$. С помощью формулы (17.22), умножая ее скалярно на $\vec{v}$, находим

$$R - \frac{(\vec{R}\cdot\vec{v})}{c} = (1 - \beta^2)R - \beta(z - vt), \qquad (17.23)$$

где $\beta = v/c$.

Возведя правую и левую части равенства (17.22) в квадрат, имеем

$$(1 - \beta^2)R^2 - 2\beta(z - vt)R - [x^2 + y^2 + (z - vt)^2] = 0, \qquad (17.24)$$

откуда

$$(1 - \beta^2)R = \beta(z - vt) + \sqrt{[x^2 + y^2 + (z - vt)^2](1 - \beta^2) + \beta^2(z - vt)^2}.$$

Здесь физический смысл имеет только положительный корень уравнения (17.24). Учитывая (17.23), находим

$$(1 - \beta^2)R - \beta(z - vt) = R - \frac{\vec{v}\cdot\vec{R}}{c} = [(1 - \beta^2)(x^2 + y^2) + (z - vt)^2]^{1/2}. \qquad (17.25)$$

Теперь, с помощью формул (17.23) и (17.25), запишем потенциалы электромагнитного поля (17.6) равномерно движущегося заряда в виде

$$\vec{A} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\vec{v}}{[(1 - \beta^2)(x^2 + y^2) + (z + vt)^2]^{1/2}} = \frac{\vec{v}}{c^2}\varphi,$$

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{[(1 - \beta^2)(x^2 + y^2) + (z - vt)^2]^{1/2}}.$$

Вычисляя с помощью этих формул векторы электромагнитного поля $\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$, $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$, находим, что они совпадают с первыми слагаемыми формул (17.16) и (17.21).

§ 18. Энергия, излучаемая ускоренно движущейся заряженной частицей

Найдем с помощью вектора Пойнтинга

$$\vec{\Pi} = \varepsilon_0 c^2 [\vec{E}, \vec{B}] \qquad (18.1)$$

энергию, излучаемую ускоренно движущейся заряженной частицей. Для этого подставим в формулу (18.1) выражения для электромагнитных полей (17.16) и (17.21). Так как отношение второго слагаемого в формуле (17.16) к первому по порядку величины равно $\frac{c^2}{R\dot{v}}$, то на расстояниях $\frac{1}{R} \ll \frac{v}{c^2}$ первым слагаемым, не содержащим ускорения, можно пренебречь. Если записать ускорение в виде $v = \omega v$, где ω — характерная частота изменения скорости частицы, то это условие можно переписать в виде неравенства $\frac{1}{R} \ll \frac{\omega v}{c^2}$. Оно заведомо выполняется, если $R \gg \frac{c}{\omega} \sim \lambda$, т. е. если поле рассматривается на расстояниях,

больших, чем длина волны излучения (волновая зона). Предположим, что заряд движется в ограниченной области пространства, а излучение регистрируется на больших расстояниях от этой области, так что $r \gg r_0$, и поэтому $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0 \simeq \vec{r}$. В этом случае

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \approx \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{\left[\vec{n}, \left[\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}\right), \dot{\vec{v}}\right]\right]}{r\left(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{c}\right)^3}. \qquad (18.2)$$

Из формул (18.2) и (17.21) следует, что в волновой зоне векторы $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{n} = \vec{r}/r$ так же, как у плоской волны, взаимно перпендикулярны.

Подставляя (18.2) в (18.1) и учитывая, что $(\vec{E} \cdot \vec{n}) = 0$, получаем

$$\vec{\Pi} = \varepsilon_0 c [\vec{E}, [\vec{n}, \vec{E}]] = \varepsilon_0 c E^2 \vec{n}. \qquad (18.3)$$

Полная энергия, излученная ускоренно движущейся частицей за время $T = \tau_1 - \tau_2$, равна

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dt \int (\vec{\Pi}\cdot\vec{n}) dS = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int d\Omega (\vec{\Pi}\cdot\vec{n}) r^2 \frac{\partial t}{\partial \tau} =$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int d\Omega (\vec{\Pi}\cdot\vec{n})\left(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{c}\right) r^2. \qquad (18.4)$$

Согласно (17.9), множитель $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{c}$. Он отражает тот факт, что энергия, излученная движущимся зарядом в момент времени τ, вследствие запаздывания приходит в разные точки сферы, по поверхности которой производится интегрирование, в разные моменты времени t. Необходимо также иметь в виду, что внешняя нормаль к этой сфере совпадает с вектором $\vec{n} = \vec{r}/r$.

Из формул (18.4) и (18.3) следует, что мощность излучения в элемент телесного угла $d\Omega$

$$\frac{dW}{d\tau d\Omega} = \varepsilon_0 c E^2 \left(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{c}\right) r^2. \qquad (18.5)$$

Подставляя (18.2) в (18.5), получаем

$$\frac{dW}{d\tau d\Omega} = \frac{e^2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{\left(\left[\vec{n}, \left[\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}\right), \dot{\vec{v}}\right]\right]\right)^2}{\left(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{c}\right)^5}. \qquad (18.6)$$

Эта формула позволяет вычислить угловое распределение мощности излучения. Отметим, что если $v/c > 1$, то, согласно формуле (18.6),

$\frac{dW}{d\tau d\Omega} < 0$, т. е. заряд будет поглощать электромагнитное излучение, вместо того чтобы излучать. Этот парадокс можно разрешить, если предположить, что никакая частица не может двигаться со скоростью, превышающей скорость света. Релятивистская механика (гл. 4) обосновывает это утверждение.

Для того чтобы вычислить спектральное распределение излучения, нужно с помощью формулы (12.2) определить фурье-компоненты векторного потенциала (17.4):

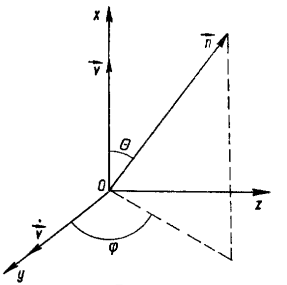


Рис. 9

$$A_\nu(\omega) = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_\nu(\tau)}{R\left(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{c}\right)} e^{i\omega t} dt = \frac{e\mu_0 c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_\nu(\tau)}{R(\tau)} e^{i\omega\left(\tau + \frac{R(\tau)}{c}\right)} d\tau.$$

Здесь в интеграле с помощью формул (17.5) и (17.9) проведена замена переменной интегрирования: $t = \tau + \frac{R(\tau)}{c}$, $dt = d\tau\left(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{c}\right)$.

Вычислив затем $\vec{E}_\omega$ и $\vec{B}_\omega$, с помощью формулы (12.6) находим спектральное распределение излучения.

Рассмотрим излучение заряженной частицы, движущейся по окружности с постоянной скоростью. В этом случае ускорение перпендикулярно к скорости, модуль которой не зависит от времени. Если выбрать направление скорости $\vec{v}$ в качестве полярной оси, а азимутальный угол φ отсчитывать от вектора ускорения $\dot{\vec{v}}$, то знаменатель формулы (18.6) можно записать как

$$\left(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{c}\right)^5 = (1 - \beta\cos\Theta)^5,$$

где $\beta = v/c$, а смысл угла Θ ясен из рис. 9.

Числитель в формуле (18.6) с учетом того, что $\vec{n}\cdot\dot{\vec{v}} = \dot{v}\sin\Theta\cos\varphi$, записывается в виде

$$\left(\left[\vec{n}, \left[\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}\right), \dot{\vec{v}}\right]\right]\right)^2 = \left|\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}\right)(\vec{n}\cdot\dot{\vec{v}}) - \dot{\vec{v}}\left(1 - \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{c}\right)\right|^2 =$$

$$= \left|\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}\right)\dot{v}\sin\Theta\cos\varphi - \dot{\vec{v}}(1 - \beta\cos\Theta)\right|^2 =$$

$$= \dot{v}^2[(1 - \beta\cos\Theta)^2 - (1 - \beta^2)\cos^2\varphi\sin^2\Theta].$$

Здесь учтено, что при движении по окружности $\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} = 0$. Окончательно формула (18.6) для рассматриваемого случая принимает вид

$$\frac{dW}{d\tau d\Omega} = \frac{e^2\dot{v}^2}{(4\pi^2)\,\varepsilon_0 c^2}\left[\frac{1}{(1-\beta\cos\Theta)^3} - \frac{(1-\beta^2)\sin^2\Theta}{(1-\beta\cos\Theta)^5}\cos^2\varphi\right]. \quad (18.7)$$

Это выражение не зависит от τ вообще, так как v и $\dot{v}$ постоянны.

Из формулы (18.7) следует, что при скоростях движения, близких к скорости света ($v \approx c$), заряженная частица излучает преимущественно в направлении своего движения ($\Theta \approx 0$).

Если выражение (18.7) проинтегрировать по углам, то получим полную энергию, которую частица теряет за единицу времени вследствие излучения:

$$-\frac{dE}{d\tau} = \int \frac{dW}{d\tau d\Omega}\,d\Omega = \frac{e^2\dot{v}^2}{8\pi\varepsilon_0 c^3}\left[\int_0^{\pi}\frac{\sin\Theta d\Theta}{(1-\beta\cos\Theta)^3} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}(1-\beta^2)\int_0^{\pi}\frac{\sin^3\Theta d\Theta}{(1-\beta\cos\Theta)^5}\right] = \frac{e^2\dot{v}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\,\frac{1}{(1-\beta^2)^2}. \quad (18.8)$$

В нерелятивистском пределе ($v/c \ll 1$) формула (18.6) приобретает вид

$$\frac{dW}{d\tau d\Omega} = \frac{e^2}{(4\pi)^2\varepsilon_0 c^3}([\vec{n},[\vec{n},\dot{\vec{v}}]])^2 = \frac{e^2}{(4\pi)^2\varepsilon_0 c^3}|\dot{v}^2 - (\vec{n}\,\dot{\vec{v}})^2| = \frac{e^2\dot{v}^2}{(4\pi)^2\varepsilon_0 c^3}\sin^2\Theta,$$

где Θ — угол между векторами $\vec{n}$ и $\dot{\vec{v}}$. Проинтегрировав это выражение по всему телесному углу $d\Omega$, найдем полную энергию, излучаемую за единицу времени ускоренно движущейся частицей:

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{e^2\dot{v}^2}{(4\pi)^2\varepsilon_0 c^3}\int\sin^2\Theta d\Omega = \frac{e^2\dot{v}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}. \quad (18.9)$$

Эта формула согласуется с формулой (15.10), если учесть, что $\dot{e\vec{v}} = \ddot{e\vec{r}} = \ddot{\vec{p}}$, а для гармонически колеблющегося диполя $\ddot{\vec{p}}_\omega = -\omega^2\vec{p}_\omega$.

§ 19. Рассеяние электромагнитных волн свободными зарядами

Плоская монохроматическая электромагнитная волна

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{\kappa}\vec{r})},$$

взаимодействуя со свободным зарядом, ускоряет его. Согласно результатам § 18, ускоренно движущийся заряд излучает вторичную волну, которая, вообще говоря, не совпадает с первичной волной. Таким образом, результатом взаимодействия электромагнитной волны с зарядом будет ее рассеяние. Угловое распределение мощности рассеянной волны в нерелятивистском случае определяется формулой (18.9).

Для того чтобы найти ускорение заряженной частицы, рассмотрим ее движение в поле плоской монохроматической волны. Нерелятивистское уравнение движения имеет вид

$$m\dot{\vec{v}} = e(\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}]), \quad (19.1)$$

где $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{\kappa}\cdot\vec{r})}$, $\vec{B} = \frac{[\vec{\kappa}, \vec{E}_0]}{\omega} e^{-i(\omega t - \vec{\kappa}\cdot\vec{r})}$. Так как для плоской волны $E = cB$, то в нерелятивистском пределе ($v/c \ll 1$) вторым слагаемым в (19.1) можно пренебречь и поэтому

$$\dot{\vec{v}} = \frac{e\vec{E}_0}{m} e^{-i(\omega t - \vec{\kappa}\cdot\vec{r})}.$$

Будем также полагать, что амплитуда колебаний заряда под действием электромагнитной волны мала, так что $\vec{\kappa}\cdot\vec{r} \ll 1$ и поэтому $e^{i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}} \approx 1$ (дипольное приближение). Тогда

$$\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} = \frac{e\vec{E}_0}{m} e^{-i\omega t}. \quad (19.2)$$

В системе координат, где частица в среднем покоится, из уравнения (19.2) находим

$$\vec{v} = i\frac{e\vec{E}_0}{m\omega} e^{-i\omega t}, \quad \vec{r} = -\frac{e\vec{E}_0}{m\omega^2} e^{-i\omega t}.$$

Условие $\vec{\kappa}\cdot\vec{r} \ll 1$ теперь можно записать в виде

$$\frac{\kappa e E_0}{m\omega^2} = \frac{eE_0}{m\omega c} = \frac{v}{c} \ll 1,$$

где $v = eE_0/(m\omega)$ — амплитуда скорости колебания заряда. Таким образом, условие $\vec{\kappa}\cdot\vec{r} \ll 1$ совпадает с условием $v/c \ll 1$.

Используя (19.2), вычислим дипольный момент, возникающий при колебании заряженной частицы:

$$\vec{p} = e\vec{r} = -\frac{e^2\vec{E}_0}{m\omega^2} e^{-i\omega t} = \vec{p}_0 e^{-i\omega t}, \quad (19.3)$$

где $\vec{p}_0 = -e^2\vec{E}_0/(m\omega^2)$.

Из формулы (19.3) следует, что дипольный момент направлен параллельно электрическому вектору падающей электромагнитной волны, а частота его колебаний совпадает с частотой падающей волны. Следовательно, вторичная волна имеет ту же частоту, т. е. процесс рассеяния происходит без изменения частоты.

Поляризацию рассеянного излучения можно установить с помощью формулы (18.2). Полагая в ней $v \ll c$, находим $\vec{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{[\vec{n},[\vec{n},\dot{\vec{v}}]]}{r}$. Отсюда следует, что вектор электрического поля рассеянной волны лежит в плоскости векторов $\vec{n}$ и $\vec{E}_0$ и перпендикулярен к вектору $\vec{n}$.

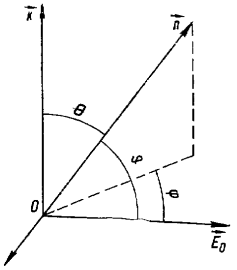


Рис. 10

Подставляя в формулу (15.9) дипольный момент (19.3), находим угловое распределение мощности рассеянной волны:

$$\frac{dW}{d\tau d\Omega} = \frac{\omega^4}{2\,(4\pi)^2\,\varepsilon_0 c^3}\,|\,p_0\,|^2 \sin^2\vartheta = \frac{e^4 E_0^2}{2\,(4\pi)^2\,\varepsilon_0 c^3 m^2}\sin^2\vartheta. \qquad (19.4)$$

Здесь ϑ — угол между направлением вектора $\vec{n}$ и направлением вектора $\vec{E}_0$ падающей волны (рис. 10).

Вычислим *эффективное сечение* этого процесса, которое определяется как отношение количества энергии электромагнитного излучения, рассеянного системой в данный телесный угол за единицу времени, к интенсивности падающего потока энергии. Так как, согласно (13.8), интенсивность падающей плоской монохроматической волны выражается через напряженность электрического поля формулой $I_0 = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 c\,|\,E_0\,|^2$, то эффективное сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{I_0}\frac{dW}{d\tau d\Omega} = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\right)^2 \sin^2\vartheta = r_0^2 \sin^2\vartheta, \qquad (19.5)$$

где величина

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2} = 2{,}82\cdot 10^{-15}\ \text{м} \qquad (19.6)$$

называется *классическим радиусом электрона*. Отсюда очевидно, что сечение рассеяния обратно пропорционально квадрату массы рассеивающей частицы, поэтому впервые это явление изучалось на электронах.

Если падающая волна неполяризована, то формулу (19.5) необходимо усреднить по всем возможным состояниям поляризации падающего излучения, другими словами, по всем возможным направлениям вектора $\vec{E}_0$ падающей волны. Из рис. 10 следует, что $\cos\vartheta = \sin\Theta\cos\varphi$, поэтому

$$\sin^2\vartheta = 1 - \sin^2\Theta\cos^2\varphi,$$

где Θ — угол рассеяния. Усредняя это выражение по углу φ, получаем

$$\overline{\sin^2\vartheta} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\vartheta\, d\varphi = \frac{1+\cos^2\Theta}{2}.$$

Здесь черта над выражением означает усреднение по углу φ.

Таким образом, для неполяризованного света дифференциальное сечение рассеяния в единицу телесного угла описывается формулой

$$\sigma(\Theta) = \frac{\overline{d\sigma}}{d\Omega} = r_0^2\,\overline{\sin^2\vartheta} = \frac{r_0^2}{2}(1+\cos^2\Theta), \qquad (19.7)$$

которая называется формулой Томсона.

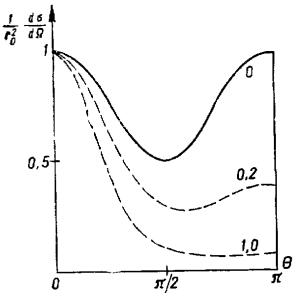


Рис. 11

Полное сечение

$$\sigma = \int\!\!\int \sigma(\Theta)\, d\Omega = \frac{r_0^2}{2}\int\!\!\int (1+\cos^2\Theta)\, d\Omega = \frac{8\pi}{3} r_0^2.$$

Изложенная выше классическая теория рассеяния справедлива при условии $\hbar\omega \ll mc^2$. Если этот критерий не выполняется, то необходимо пользоваться релятивистской квантовой теорией. На рис. 11 изображена зависимость сечения Томсона от угла Θ, вычисленная с помощью квантовой теории. Как видно из этого рисунка, в области больших углов имеет место расхождение с формулой (19.7) тем большее, чем больше отношение $\frac{\hbar\omega}{mc^2}$. Кроме того, более точная квантовая теория указывает на то, что частота электромагнитной волны при рассеянии изменяется (эффект Комптона, 1922). Это изменение можно вычислить, исходя из закона сохранения энергии и импульса частиц, участвующих в рассеянии (электрона и фотона):

$$\hbar\omega + mc^2 = \hbar\omega' + \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}, \quad \vec{\kappa} = \vec{\kappa}' + \vec{p}.$$

Здесь использована релятивистская формула зависимости энергии от импульса (23.12). Следовательно,

$$\frac{\omega-\omega'}{\omega} = \left(1 + \frac{mc^2}{2\hbar\omega\,\sin^2(\Theta/2)}\right)^{-1}.$$

При выполнении условия $\hbar\omega/(mc^2) \ll 1$ получаем результат классической теории $\omega \simeq \omega'$.

§ 20. Реакция излучения. Радиационная ширина спектральных линий

В § 18 было показано, что ускоренно движущийся заряд излучает электромагнитную энергию. Так как излучаемое электромагнитное поле обладает также и импульсом, то очевидно, что вследствие закона сохранения импульса заряд испытывает обратное воздействие излучаемого поля, которое при расчете движения заряда в первом приближении не учитывалось.

Запишем теперь уравнение движения заряженной частицы в виде

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + e[\vec{v},\vec{B}] + \vec{F}_s, \qquad (20.1)$$

где $\vec{F}_s$ — сила реакции излучения, учитывающая изменение импульса частицы за счет излучения электромагнитных волн.

Изменение энергии W ускоренно движущейся заряженной частицы в нерелятивистском пределе ($v \ll c$) и без учета силы реакции излучения $\vec{F}_s$, согласно формуле (18.9),

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\dot{\vec{v}}^2. \tag{20.2}$$

Определим силу реакции $\vec{F}_s$, входящую в уравнение (20.1), так, чтобы произведенная этой силой работа за время ускоренного движения $T = t_1 - t_2$ была равна энергии, которую частица излучила за это же время. Другими словами, положим

$$\int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_s \cdot \vec{v})\, dt = -\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{v}}^2 dt = -\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}})\, dt + \\ + \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\int_{t_1}^{t_2} (\vec{v}\cdot\ddot{\vec{v}})\, dt. \tag{20.3}$$

Если считать, что ускорение происходило только в промежутке времени $t_1 < t < t_2$, а в моменты времени t_1 и t_2 равнялось нулю ($\dot{\vec{v}}(t_1) \equiv \dot{\vec{v}}_1 = 0$, $\dot{\vec{v}}(t_2) \equiv \dot{\vec{v}}_2 = 0$), то

$$\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}})\, dt = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}(\vec{v}_1\cdot\dot{\vec{v}}_1 - \vec{v}_2\cdot\dot{\vec{v}}_2) = 0.$$

При этом условии соотношение (20.3) будет справедливо, если положить

$$\vec{F}_s = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{\vec{v}} = \frac{2r_0 m}{3c}\ddot{\vec{v}}. \tag{20.4}$$

Эта сила называется *силой реакции излучения* или *силой лучистого трения*. Ее источником является обратное воздействие излучения на ускоренно движущуюся заряженную частицу.

Так как при выводе формулы (20.2) в уравнении (20.1) не учитывалась сила $\vec{F}_s$, то очевидно, что формула (20.4) справедлива при выполнении условия

$$m\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| \gg |\vec{F}_s| = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}|\ddot{\vec{v}}|.$$

Для фурье-компонент $\dot{\vec{v}} = i\omega\vec{v}$, $\ddot{\vec{v}} = -\omega^2\vec{v}$, и, следовательно, это неравенство можно записать в виде

$$\frac{e^2\omega}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m} = \frac{2}{3}\frac{\omega}{c}r_0 \ll 1, \tag{20.5}$$

где r_0 — классический радиус электрона, определяемый формулой (19.6). Таким образом, применимость изложенного метода учета силы реакции излучения ограничена областью частот $\omega \ll c/r_0 \approx 10^{23}$ с$^{-1}$.

Рассмотрим теперь свободные колебания осциллятора (диполя) с учетом силы реакции излучения. Без учета этой силы уравнение движения осциллятора имеет вид $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, из которого находим $\dddot{x} = \ddot{v} = -\omega_0^2\dot{x}$. Следовательно, формула (20.4) принимает вид

$$\vec{F}_s = -\frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\dot{x}. \tag{20.6}$$

Таким образом, уравнение движения осциллятора с учетом силы реакции излучения запишется как

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e^2\omega_0^2}{6\pi c^3 m\varepsilon_0}\dot{x}.$$

Обозначив $\gamma = \frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m} = \frac{2}{3}\frac{\omega_0 r_0}{c}\omega_0 \ll \omega_0$, где r_0 определяется формулой (19.6), имеем

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Величина γ называется *коэффициентом лучистого трения*. Решением этого уравнения при $\gamma \ll \omega_0$ и начальных условиях $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$ есть

$$x(t) = ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos\omega_0 t, \quad t > 0,$$
$$x(t) = 0, \quad t < 0. \tag{20.7}$$

Таким образом, благодаря учету силы реакции излучения колебания осциллятора становятся затухающими.

Вычислим энергию, излученную осциллятором за все время процесса излучения:

$$E = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\int_{-\infty}^{\infty}\ddot{x}^2 dt \simeq m\gamma\omega_0^2\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, dt.$$

Здесь снова воспользовались тем, что $\gamma \ll \omega_0$, и поэтому положили $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$. С помощью формулы (12.4) это выражение перепишем в виде

$$E = \frac{m\gamma\omega_0^2}{\pi}\int_0^{\infty}|x(\omega)|^2\, d\omega, \tag{20.8}$$

где $x(\omega)$ — фурье-компонента функции (20.7);

$$x(\omega) = a\int_0^{\infty} e^{-\gamma t/2}e^{i\omega t}\cos\omega_0 t dt = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{\gamma/2 + i(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{\gamma/2 + i(\omega + \omega_0)}\right]. \tag{20.9}$$

Так как $\gamma \ll \omega_0$, то вблизи резонанса, когда частота близка к ω_0, в формуле (20.9) можно оставить только первое слагаемое:

$$x(\omega) \simeq \frac{a}{2}\frac{1}{\gamma/2 + i(\omega - \omega_0)}.$$

Подставляя его в (20.8) и вводя обозначение $I_0 = ma^2\omega_0^2/2$, получаем

$$E = \frac{m\gamma a^2\omega_0^2}{4\pi}\int_0^\infty \frac{d\omega}{\gamma^2/4 + (\omega-\omega_0)^2} =$$

$$= \frac{I_0}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\gamma d\omega}{(\gamma/2)^2 + (\omega-\omega_0)^2} = \int_0^\infty I(\omega)\,d\omega.$$

Таким образом, спектральный состав электромагнитного излучения осциллятора с учетом реакции излучения описывается формулой

$$I(\omega) = \frac{I_0}{2\pi}\frac{\gamma}{(\omega-\omega_0)^2 + \gamma^2/4}. \qquad (20.10)$$

Эта функция называется спектральной *функцией распределения Лоренца*.

Заряженная частица взаимодействует с электромагнитным полем, т. е. может, с одной стороны, порождать это поле, а с другой,— сама подвергаться воздействию электромагнитного поля, создаваемого другими частицами. Очень сложной проблемой классической электродинамики оказался вопрос о взаимодействии заряженной частицы со своим собственным полем. Приближенно это «самовоздействие» может быть описано с помощью силы реакции излучения (20.4). Более полное решение этой проблемы содержится в квантовой электродинамике.

§ 21. Дифракция электромагнитных волн. Формула Грина

Решения волнового уравнения в виде запаздывающих потенциалов (12.8) или их фурье-компонент (12.9), (12.10) могут быть получены более строго, чем это было сделано в § 12, с помощью формулы Грина. Кроме того, эта формула дает возможность разработать приближенный метод решения задач о дифракции света на различных препятствиях.

Для того чтобы получить формулу Грина для скалярного волнового уравнения (12.12), рассмотрим тождество

$$\operatorname{div}(-\varphi\vec{\nabla}G + G\vec{\nabla}\varphi) = -\varphi\Delta G + G\Delta\varphi,$$

справедливое для любых функций G и φ. Подставляя теперь в это выражение $\Delta\varphi$ и ΔG из (12.12) и (12.15), опустив при этом индекс ω, имеем

$$\operatorname{div}(-\varphi\vec{\nabla}G + G\vec{\nabla}\varphi) = \varphi\delta(\vec{R}) - \frac{1}{\varepsilon_0}\rho G.$$

Проинтегрируем полученное равенство по некоторому объему и воспользуемся теоремой Остроградского. В результате получим

$$\varphi = \int\left(G\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial G}{\partial n}\right)dS' + \frac{1}{\varepsilon_0}\int G\rho dV'. \qquad (21.1)$$

Интегрирование здесь производится по поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем; $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \vec{n}\cdot\vec{\nabla}'\varphi$ — производная по внешней нормали к этой поверхности.

Если в формуле (21.1) интегрирование производить по всему бесконечному объему, то интеграл по бесконечно удаленной поверхности обратится в нуль и формула (21.1) совпадет с формулой (12.14). Если же интегрирование производить по объему, свободному от источников, т. е. по тем областям, где $\rho = 0$, то формула (21.1) приобретает вид

$$\varphi = \int\left(G\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial G}{\partial n}\right)dS'.$$

Следовательно, для вычисления поля в областях, свободных от зарядов, необходимо знать значения потенциала φ и его нормальной производной $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ на границе области.

Аналогичную формулу можно получить и для векторной функции, удовлетворяющей волновому уравнению (12.11). Учитывая, что каждая компонента вектора $\vec{A}$ удовлетворяет уравнению (12.12), и заменяя в нем φ на A_x, ρ/ε_0 на $\mu_0 j_x$, получим

$$A_x = \int[G(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}')A_x - A_x(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}'G)]\,dS' + \mu_0\int Gj_x dV'$$

или в векторном виде

$$\vec{A} = \int[G(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}')\vec{A} - \vec{A}(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}'G)]\,dS' + \mu_0\int G\vec{j}dV',$$

где $(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}') = n_x\frac{\partial}{\partial x'} + n_y\frac{\partial}{\partial y'} + n_z\frac{\partial}{\partial z'}$.

В областях, где $\vec{j} = 0$, эта формула приобретает вид

$$\vec{A} = \int[G(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}')\vec{A} - \vec{A}(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}'G)]\,dS',$$

причем замкнутая поверхность интегрирования S' не содержит внутри себя областей с током. В свободном от источников пространстве векторы электромагнитного поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ тоже удовлетворяют волновому уравнению (12.11) при $\vec{j} = 0$, поэтому для них также имеет место формула

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int[G(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}')\vec{E} - \vec{E}(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}'G)]\,dS' \qquad (21.2)$$

и полностью аналогичная формула для вектора $\vec{B}$. В формуле (21.2) операция $\vec{\nabla}'$ выполняется по переменной интегрирования $\vec{r}'$.

Таким образом, зная напряженность электрического поля $\vec{E}$ и ее производные $(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}')\vec{E}$ на замкнутой поверхности S, с помощью формулы (21.2) можно вычислить $\vec{E}$ в любой точке внутри этой поверхности.

Формула (21.2) не всегда удобна, так как требует знания не только поля $\vec{E}$, но и его производных. Однако из нее можно получить эквивалентную формулу, выражающую значение векторных функций $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в объеме через их значения на поверхности. Чтобы показать это, получим предварительно несколько тождеств векторного анализа.

Рассмотрим интеграл по замкнутой поверхности $\int (\vec{n}\cdot\vec{\nabla})\vec{a}dS$. С помощью теоремы Остроградского преобразуем его в объемный интеграл:

$$\int (\vec{n}\cdot\vec{\nabla})\vec{a}dS = \int n_i \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_i} dS = \int \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial x_i^2} dV = \int \Delta \vec{a} dV.$$

Используя формулу (6) приложения II, перепишем это соотношение следующим образом:

$$\int (\vec{n}\cdot\vec{\nabla})\vec{a}dS = \int \vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\vec{a}dV - \int \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{a}dV.$$

Интегралы по объему в правой части снова с помощью теоремы Остроградского преобразуем в интегралы по поверхности:

$$\int (\vec{n}\cdot\vec{\nabla})\vec{a}dS = \int \vec{n}\,\mathrm{div}\,\vec{a}dS - \int [\vec{n}, \mathrm{rot}\,\vec{a}]\,dS.$$

Положив в этой формуле $\vec{a} = G\vec{E}$, имеем

$$\int (\vec{n}\cdot\vec{\nabla})(G\vec{E})\,dS = \int [G(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} + \vec{E}(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}G)]\,dS =$$

$$= \int \vec{n}\,\mathrm{div}\,(G\vec{E})dS - \int [\vec{n}, \mathrm{rot}\,(G\vec{E})]\,dS. \qquad (21.3)$$

Учитывая, что $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$, $\mathrm{rot}\,\vec{E} = i\omega\vec{B}$, а также используя формулы (9) и (7) приложения II, получаем

$$\mathrm{rot}\,(G\vec{E}) = G\,\mathrm{rot}\,\vec{E} + [\vec{\nabla}G, \vec{E}] = i\omega G\vec{B} + [\vec{\nabla}G, \vec{E}],$$

$$\mathrm{div}\,(G\vec{E}) = \vec{\nabla}G\cdot\vec{E} + G\,\mathrm{div}\,\vec{E} = \vec{\nabla}G\cdot\vec{E}.$$

С помощью этих соотношений перепишем равенство (21.3) в виде

$$\int G(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}')\vec{E}dS' = \int \{\vec{n}(\vec{E}\cdot\vec{\nabla}'G) - [\vec{n}, [\vec{\nabla}'G, \vec{E}]] -$$

$$- i\omega G[\vec{n}, \vec{B}] - \vec{E}(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}'G)\}\,dS'.$$

Подставляя затем его в формулу (21.2) и раскрывая в этом выражении двойное векторное произведение $[\vec{n}, [\vec{\nabla}'G, \vec{E}]] = \vec{\nabla}'G(\vec{n}\cdot\vec{E}) - \vec{E}(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}'G)$, окончательно имеем, заменяя $\vec{n}\to -\vec{n}$, т. е. считая $\vec{n}$ внутренней нормалью к поверхности интегрирования:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \{[[\vec{n}, \vec{E}], \vec{\nabla}'G] + (\vec{n}\cdot\vec{E})\vec{\nabla}'G + i\omega[\vec{n}, \vec{B}]G\}\,dS' \qquad (21.4)$$

и аналогичную формулу для вектора индукции магнитного поля

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int \left\{[[\vec{n}, \vec{B}], \vec{\nabla}'G] + (\vec{n}\cdot\vec{B})\vec{\Delta}'G - \frac{i\omega}{c^2}[\vec{n}, \vec{E}]G\right\} dS'. \qquad (21.5)$$

Таким образом, зная значения нормальных $(\vec{n}\cdot\vec{E})$, $(\vec{n}\cdot\vec{B})$ и тангенциальных компонент $[\vec{n}, \vec{E}]$, $[\vec{n}, \vec{B}]$ векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ на некоторой поверхности, можно с помощью формул (21.4) и (21.5) вычислить значения этих векторов в любой точке, находящейся внутри поверхности интегрирования.

Рассмотрим с помощью формул (21.4) и (21.5) задачу о дифракции плоской монохроматической волны, падающей на металлический экран с круглым отверстием радиуса a (рис. 12). Поле будем рассматривать на больших расстояниях от экрана: $L \gg a$. Поэтому для вычисления поля в плоскости, находящейся на расстоянии L от экрана, воспользуемся следующим приближением: 1) положим электромагнитное поле равным полю плоской волны на площади отверстия и нулю на металлическом экране; 2) функцию Грина G заменим приближенным выражением, справедливым при $r' \ll L$:

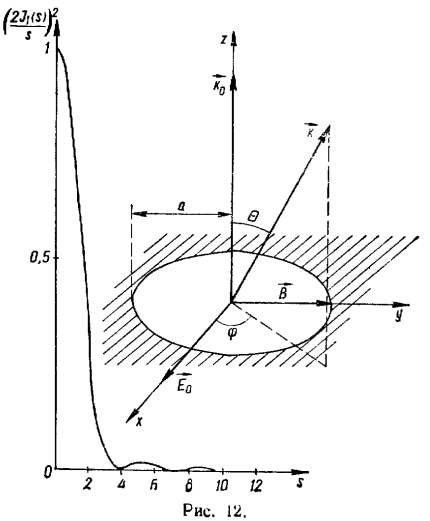


Рис. 12.

$$G = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R} \approx \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}e^{-i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}'}.$$

Здесь $\vec{\kappa} = \kappa\frac{\vec{r}}{r}$ — волновой вектор в направлении наблюдения.

Пусть на экран нормально к его поверхности падает плоская электромагнитная волна, поляризованная вдоль оси x. Тогда на поверхности интегрирования

$$\vec{\nabla}'G = -i\vec{\kappa}G, \quad \vec{E}_0 = E_0\vec{e}_1, \quad [\vec{n}, \vec{B}] = \frac{E_0}{c}\vec{e}_1, \quad \vec{n}\cdot\vec{E} = 0.$$

Подставляя эти выражения в (21.4), получаем

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{i}{4\pi}\frac{e^{i\kappa r}}{r}([\vec{\kappa}, [\vec{n}, \vec{E}_0] - \kappa\vec{E}_0))\int e^{-i(\vec{\kappa}\cdot\vec{r}')}dS' =$$

$$= -\frac{i}{2\pi}\frac{\omega}{c}\vec{E}_0\frac{e^{i\kappa r}}{r}\int e^{-i(\vec{\kappa}\cdot\vec{r}')}dS'. \qquad (21.6)$$

Мы рассматриваем случай малых углов Θ (рис. 12), поэтому приближенно положили $(\vec{\kappa}\cdot\vec{E}_0) \simeq 0$; $(\vec{\kappa}\cdot\vec{n}) = \kappa$. Вектор $\vec{B}$ можно найти с помощью соотношения

$$\vec{B} = -\frac{i}{\omega}\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{i}{2\pi}\frac{1}{c}[\vec{\kappa}, \vec{E}_0]\frac{e^{i\kappa r}}{r}\int e^{-i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}'}dS' = \frac{1}{c}[\vec{n}, \vec{E}].$$

Таким образом, дифрагированная на отверстии волна, так же, как и излучаемая (§ 15) или рассеянная волна (§ 19), имеет вид расходящейся сферической волны.

Вычислим интеграл по площади круга

$$\int e^{-i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}}dS' = \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} e^{-i\kappa\rho \sin\Theta \sin\varphi}d\varphi.$$

Интеграл

$$\int_0^{2\pi} e^{-i\kappa\rho \sin\Theta \sin\varphi}d\varphi = J_0(\kappa\rho \sin\Theta)$$

есть функция Бесселя нулевого индекса. Интеграл

$$\int_0^a \rho J_0(\kappa\rho \sin\Theta)\,d\rho$$

вычисляется с помощью рекуррентного соотношения для функций Бесселя:

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l \{x^n J_n(x)\} = x^{n-l}J_{n-l}(x),$$

которое для $l = n = 1$ принимает вид

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(xJ_1(x)) = J_0(x).$$

Полагая $x = \kappa\rho \sin\Theta$, получаем

$$\int_0^a \rho J_0(\kappa\rho \sin\Theta)d\rho = \frac{1}{(\kappa \sin\Theta)^2}\int_0^{a\kappa \sin\Theta}\frac{d}{dx}(xJ_1)\,dx = \frac{a^2 J_1(a\kappa \sin\Theta)}{a\kappa \sin\Theta}.$$

Таким образом, формула (21.6) окончательно приобретает вид

$$\vec{E} = -\frac{i}{2\pi}\frac{\omega}{c}\vec{E}_0 a^2 \frac{J_1(a\kappa \sin\Theta)}{a\kappa \sin\Theta}\frac{e^{ikr}}{r}.$$

Угловое распределение излучения дается формулой (12.18)

$$\frac{dI}{d\Omega} = (\vec{\Pi}\cdot\vec{n})\,r^2 = \frac{(\kappa a)^2}{4\pi} I_0 \left|\frac{2J_1(\kappa a \sin\Theta)}{\kappa a \sin\Theta}\right|^2, \qquad (21.7)$$

где $I_0 = ce_0E_0^2\pi a^2/2$ — мощность падающего на отверстие излучения. Формула (21.7) справедлива для малых углов $\Theta \ll 1$. На рис. 12 представлена зависимость интенсивности дифрагирования излучения от величины $(2\pi a/\lambda) \sin\Theta$.

Функция $J_1(x)$, входящая в формулу (21.7), первый раз обращается в нуль при $x = 3{,}83$, поэтому интенсивность прошедшего через отверстие света равна нулю при

$$\frac{2\pi a}{\lambda}\sin\Theta = 3{,}83.$$

Отсюда находим угол дифракции

$$\sin\Theta = \frac{3{,}83}{2\pi}\frac{\lambda}{a}.$$

Для зеленого света $\lambda = 5{,}5 \cdot 10^{-5}$ см. Если отверстие имеет диаметр $a = 0{,}5$ см, то

$$\sin\Theta \approx \Theta = 6{,}7 \cdot 10^{-5} = 14''.$$

Таким образом, при условии $\lambda \ll a$ дифракционное уширение пучка мало.

Использованное приближение не учитывает заметного искажения электромагнитного поля у краев экрана (отличие от плоской волны). Резкое изменение векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ при переходе от точек освещенного отверстия к точкам экрана должно компенсироваться поверхностными токами и зарядами вокруг границы отверстия. Этих токов и связанных с ними полей мы не учитывали в вычислениях, и поэтому, как показывает более точная теория, формула (21.7) справедлива только в области малых углов дифракции $\Theta \ll 1$ при нормальном падении плоской волны на экран.

Глава 4

ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 22. Экспериментальные основы теории относительности. Преобразование Лоренца

Принцип относительности классической механики утверждает, что уравнения движения должны быть инвариантны относительно преобразования Галилея:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 t' = \vec{r}' + \vec{v}_0 t, \quad t = t', \qquad (22.1)$$

где $\vec{v}_0$ — постоянная скорость. Преобразование Галилея соответствует переходу от одной системы отсчета к другой, движущихся друг относительно друга со скоростью v_0. Из формул (22.1) следует, что если в какой-то системе отсчета скорость частицы равна $\vec{v}'$, то в другой, движущейся относительно нее со скоростью $\vec{v}_0$, скорость этой частицы

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{v}_0 = \vec{v}' + \vec{v}_0. \qquad (22.2)$$

Согласно принципу относительности классической механики, равномерное и прямолинейное движение системы отсчета никак не влияет на происходящие в ней механические процессы. Это утверждение носит название *принципа относительности Галилея*. Слово «относительность» подчеркивает полную равноправность всех инерциальных систем отсчета по отношению к механическим явлениям. Но этот принцип не исключает существования некоторой абсолютной системы отсчета, движение относительно которой можно установить с помощью электродинамических опытов, так как уравнения Максвелла не инвариантны относительно преобразования Галилея (22.1). Наличие такой системы

отсчета означало бы, что равномерное и прямолинейное движение системы отсчета сказывается на характере протекания электродинамических процессов. В частности, измеряя скорость распространения световых сигналов относительно двух систем отсчета, можно было бы установить факт их относительного движения.

Световые волны, а точнее электромагнитные сигналы, распространяются со скоростью света, и логично поставить вопрос, относительно какой системы отсчета. Вряд ли можно ответить, что относительно Земли. Ведь Земля не является каким-то особым астрономическим объектом. Поэтому в прошлом веке, когда господствовал механистический взгляд на физические явления, предполагалось, что все космическое пространство заполнено особым веществом — эфиром. А скорость света, равная $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 3 \cdot 10^8$ м/с, — это скорость распространения электромагнитных сигналов относительно эфира, который можно, таким образом, считать абсолютной системой отсчета. Поскольку скорость Земли относительно Солнца равна приблизительно $3 \cdot 10^4$ м/с, то если считать Солнце неподвижным относительно эфира, примерно на эту же малую величину и отличается скорость света относительно Земли от значений $3 \cdot 10^8$ м/с.

Впервые скорость света определил О. Рёмер (1676) по изменению промежутков времени между затмениями спутников Юпитера. Источником света в этом случае было отражение излучения Солнца от спутников.

Скорость света от земных источников первым измерил по времени прохождения светом точно известного расстояния А. Физо (1849). В пределах точности измерений оба результата совпали. А так как, согласно классическому правилу сложения скоростей (22.2), скорость света должна зависеть от скорости движения источника, то отсюда следует, что скорости движения Земли и спутников Юпитера относительно эфира значительно меньше скорости света относительно эфира.

После изобретения в оптике интерференционных методов, которые резко повысили точность измерения ряда физических величин (длин волн, показателей преломления, толщин и др.), стало возможным измерить относительно небольшие скорости движения астрономических объектов относительно эфира. Покажем, как экспериментально, используя интерференционные методы, можно измерить скорость движения источника света относительно эфира, при условии, что справедливо правило сложения скоростей (22.2). Исходя из этого правила можно рассуждать следующим образом. Поскольку Земля движется относительно Солнца со скоростью $v = 3 \cdot 10^4$ м/с, с такой же скоростью и Земля должна двигаться относительно эфира, если считать Солнце неподвижным. Если же и Солнце движется относительно эфира, то эта скорость будет больше. Поэтому в системе координат, связанной с Землей, свет, испущенный источником, находящимся на Земле, должен распространяться, согласно правилу сложения скоростей, со скоростью $c - v$, если свет и Земля движутся относительно эфира в одну сторону, и со скоростью $c + v$ — если в противоположные.

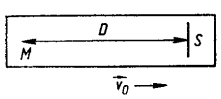


Рис. 13

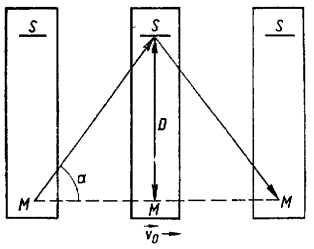


Рис. 14

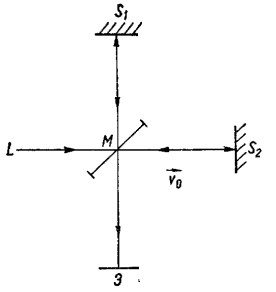


Рис. 15

Предположим, что на оптической скамье, движущейся относительно эфира со скоростью v_0, установлен источник света, свет от которого распространяется от точки M до зеркала S и после отражения в зеркале S снова возвращается в точку M (рис. 13). Используя правило сложения скоростей (22.2), находим, что время распространения света от точки M до зеркала S равно $D/(c - v)$, а в обратном направлении $D/(c + v)$. Полное время распространения равно сумме

$$\Delta t_1 = \frac{D}{c - v} + \frac{D}{c + v} = \frac{2D}{c}(1 - \beta^2)^{-1}, \qquad (22.3)$$

где $\beta = v_0/c$, D — расстояние от точки M до точки S.

Если повернуть оптическую скамью на 90° относительно скорости v_0 (рис. 14), то теперь луч света должен пройти расстояние $2\sqrt{D^2 + \frac{(v\Delta t_2)^2}{4}}$, а для этого, как следует из рис. 14, необходимо время $\Delta t_2 = \frac{2}{c}\sqrt{D^2 + \frac{v_0^2 \Delta t_2^2}{4}}$. Отсюда

$$\Delta t_2 = \frac{2D}{c}(1 - \beta^2)^{-1/2}. \qquad (22.4)$$

Сравнивая (22.3) и (22.4), находим, что временное запаздывание одного луча по отношению к другому равно

$$T = \Delta t_1 - \Delta t_2 = \frac{2D}{c}[(1 - \beta^2)^{-1} - (1 - \beta^2)^{-1/2}].$$

Для обнаружения этой разности Майкельсон использовал созданный им двухлучевой интерферометр, схема которого изображена на рис. 15. Луч света, распространяющийся от источника L, разделяется полупрозрачной пластинкой M на два луча, которые после отражения от зеркал S_1 и S_2 собираются на экране $Э$, где должны интерферировать за счет разности хода этих лучей:

$$\Delta l = cT = 2D[(1 - \beta^2)^{-1} - (1 - \beta^2)^{-1/2}] = D\beta^2$$

$$\left(\text{для Земли } \beta \approx \frac{3 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^8} \approx 10^{-4} \ll 1\right).$$

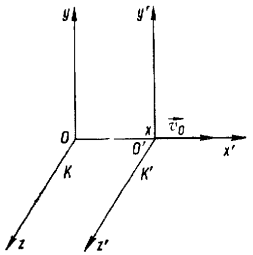


Рис. 16

Если интерферометр повернуть на 90°, то получим такую же разность хода, но с противоположным знаком. Следовательно, при повороте прибора следует ожидать смещения интерференционной картины на k полос:

$$k = \frac{2\Delta l}{\lambda} = \frac{2D}{\lambda}\beta^2,$$

где λ — длина волны света. Однако никакого смещения интерференционных полос в пределах точности эксперимента не было обнаружено ни в опыте Майкельсона (1881), ни в последующих более точных экспериментах Майкельсона и Морли (1885—1887).

Напомним, что приведенные выше рассуждения основаны на предположении о существовании абсолютной системы отсчета (эфира) и преобразовании Галилея (22.1), из которого следует закон сложения скоростей (22.2). Отрицательный результат опытов Майкельсона со всей очевидностью показал, что классическая физика не согласуется с новыми экспериментальными фактами, а поэтому нуждается в существенном пересмотре некоторых ее положений.

Как объяснить результаты опытов Майкельсона? Прежде всего можно было бы предположить, что скорость света $3 \cdot 10^8$ м/с — это скорость света относительно источника, который в опытах Майкельсона находился на Земле. Но, выбрав Солнце в качестве источника света, снова экспериментально обнаруживаем отсутствие интерференционной картины. Следовательно, скорость света не зависит от скорости движения источника.

Выдвигались и другие объяснения результатов опытов Майкельсона, но все они противоречили экспериментальным фактам. Перейдем к изложению теории Эйнштейна, которая оказалась в полном согласии с экспериментом.

А. Эйнштейн заметил, что опыты Майкельсона можно объяснить, если предположить, что скорость света не зависит от скорости движения источника. Это предположение, которое впоследствии подтвердилось экспериментально, можно сформулировать так: скорость распространения света во всех инерциальных системах отсчета одинакова и равна $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Так как это утверждение противоречит правилу сложения скоростей (22.2), то отсюда сразу же следует, что преобразование Галилея (22.1) нуждается в существенном уточнении.

Исходя из предположения Эйнштейна, найдем преобразование, аналогичное (22.1), которое не противоречило бы гипотезе независимости скорости света от равномерного и прямолинейного движения. Представим себе две системы отсчета K и K' (рис. 16), движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью $\vec{v}_0$. Всегда с помощью поворота можно выбрать эти системы так, чтобы их оси Ox совпадали с направлением скорости $\vec{v}_0$. Пусть в момент времени $t = 0$ начала координат систем K и K' совпадали и там в этот же момент произошла вспышка света. В системе K будет распространяться сферическая волна, фронт которой движется со скоростью c. Уравнение фронта этой волны можно записать в виде

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2.$$

Воспользовавшись преобразованием Галилея (22.1), найдем уравнение фронта этой волны в системе K':

$$(x' + v_0t)^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2,$$

или

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2v_0x't' = c^2t'^2(1 - \beta^2). \qquad (22.5)$$

Отсюда следует, что в системе отсчета K' скорость фронта волны зависит от направления распространения. Это противоречит предположению Эйнштейна о независимости скорости света от движения системы отсчета. Следовательно, преобразование Галилея (22.1) должно быть заменено другим, более точным.

Для независимости скорости распространения световых волн от движения системы отсчета, необходимо, чтобы в системе координат K' уравнение фронта волны также имело вид сферы. Для этого из уравнения (22.5) нужно исключить слагаемое, содержащее произведение $x't'$.

Из аналитической геометрии известно, что в квадратичных выражениях произведение типа $x't'$ может быть исключено из (22.5), если преобразование переменных имеет вид

$$x = \varkappa(x' + v_0t'), \quad t = \varkappa(t' + \gamma x'),$$

где $\varkappa$ и γ — пока неизвестные параметры. Используя это преобразование, вместо (22.5) получим

$$\varkappa^2(x'^2 + 2v_0x't' + v_0^2t'^2) + y'^2 + z'^2 = \varkappa^2c^2(t'^2 + 2\gamma x't' + \gamma^2x'^2).$$

Выбирая $\gamma = v_0/c^2$, мы избавляемся в этой формуле от смешанного произведения $x't'$. Затем, полагая $\varkappa = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, находим

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2.$$

Следовательно, если при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой вместо преобразования Галилея (22.1) пользоваться преобразованием

$$x = \frac{x' + v_0t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t = \frac{t' + v_0x'/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \qquad (22.6)$$

то уравнения для фронта волны оказываются одинаковыми во всех инерциальных системах отсчета, следовательно, и скорость света будет одинаковой во всех системах отсчета. Преобразование (22.6) называется *преобразованием Лоренца*. Это преобразование переходит в (22.1), если $\beta = v_0/c \ll 1$, т. е. при скоростях движения, значительно меньших скорости света. Существенным моментом является то, что при преобразовании Лоренца (22.6) время также преобразуется и, таким образом, оно перестает быть абсолютным, т. е. единым для всех систем координат.

Так как координаты и время — величины вещественные, то из формул (22.6) следует, что всегда $\beta = v_0/c \leqslant 1$. Таким образом, никакая система отсчета, а значит, и никакие материальные объекты (частицы, поля), с которыми обычно связывается система отсчета, не могут двигаться быстрее света и поэтому смысл константы $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ выходит за рамки электродинамики, приобретая универсальное значение.

Найдем теперь правило сложения скоростей, соответствующих преобразованию Лоренца. Из (22.6) имеем

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v_0 dt'}{dt' + \frac{v_0}{c^2} dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v_0}{1 + \frac{v_0}{c^2}\frac{dx'}{dt'}},$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'\sqrt{1-\beta^2}}{dt' + \frac{v_0}{c^2} dx'} = \frac{dy'\sqrt{1-\beta^2}}{dt'\left(1 + \frac{v_0}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)},$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'\sqrt{1-\beta^2}}{dt' + \frac{v_0}{c^2} dx'} = \frac{dz'\sqrt{1-\beta^2}}{dt'\left(1 + \frac{v_0}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)}.$$

Так как производные $\frac{dx'}{dt'} = v_x'$; $\frac{dy'}{dt'} = v_y'$; $\frac{dz'}{dt'} = v_z'$ — компоненты вектора скорости частицы относительно системы отсчета K', то отсюда получаем релятивистское правило сложения скоростей:

$$v_x = \frac{v_{x'} + v_0}{1 + v_x' v_0/c^2}, \quad v_y = v_y' \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + v_x' v_0/c^2}, \quad v_z = v_z' \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + v_x' v_0/c^2}. \quad (22.7)$$

Положив в (22.7) $v_x' = c$, получим $v_x = c$. Это означает, что скорость света одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Заметим, что формулы (22.7) переходят в формулы (22.2) при $v_x v_0/c^2 \ll 1$, $v_0^2/c^2 \ll 1$. Следовательно, и правило преобразования скоростей (22.2), как и преобразование (22.1), являются приближенными и справедливы при $v_x \ll c$, $v_0 \ll c$.

Покажем, что если при рассмотрении опыта Майкельсона пользоваться преобразованием Лоренца, а также следствиями из него, то окажется, что разность хода $\Delta l = 0$ и, следовательно, сдвига интерференционной картины на экране в соответствии с опытом не должно быть. Подсчитаем сначала время распространения света от точки M до зеркала S и обратно (см. рис. 13), если направление распространения совпадает с направлением скорости $\vec{v}_0$. В системе отсчета, связанной с прибором, свет в момент времени $t = 0$ начал распространяться к зеркалу S от точки M, пространственную координату x которой будем считать равной нулю. Это событие будем записывать в виде двух чисел (0, 0), где первое число означает время, а второе — координату. Отражение света от зеркала S можно записать как $(D/c, D)$. Здесь в обозначениях (t, x) первое число обозначает временную координату, а второе — пространственную. Тогда возвращение света в точку M

записывается следующим образом: $(2D/c, 0)$, где $2D/c$ — время распространения света от точки M до зеркала S и обратно в системе отсчета, в которой прибор покоится. Если же эта система движется со скоростью v_0, то, согласно преобразованию Лоренца (22.6), в неподвижной системе отсчета началу распространения света из точки соответствует момент времени

$$t_1 = \frac{t' + (v_0/c^2)x'}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0,$$

так как $(t', x') = 0$. Его приходу в эту же точку после отражения от зеркала S соответствует момент времени

$$t_2 = \frac{t' + (v_0/c^2)x'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2D}{c}(1-\beta^2)^{-1/2},$$

так как $(t', x') = (2D/c, 0)$. Таким образом,

$$\Delta t_1 = t_2 - t_1 = \frac{2D}{c}(1-\beta^2)^{-1/2}. \quad (22.8)$$

Определим Δt_2. Так как теперь свет распространяется перпендикулярно к направлению скорости $\vec{v}_0$, то $v_x' = 0$, $v_y' = c$, $v_z' = 0$ и, согласно релятивистскому правилу сложения скоростей (22.7),

$$v_x = v_0, \quad v_y = c(1-\beta^2)^{1/2}.$$

Поэтому, как следует из рис. 14, свет будет распространяться под углом α к направлению скорости $\vec{v}_0$. Этот угол связан со скоростью движения формулой

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{\beta}.$$

Следовательно, в этом случае время прохождения света от точки M до зеркала S и обратно

$$\Delta t_2 = \frac{2D}{c\sin\alpha} = \frac{2D}{c}(1-\beta^2)^{-1/2}. \quad (22.9)$$

Сравнивая (22.8) и (22.9), находим, что $\Delta T = \Delta t_1 - \Delta t_2 = 0$. Этот результат не зависит от относительной скорости систем отсчета v_0 и поэтому опыт Майкельсона будет давать один и тот же результат — отсутствие интерференционной картины — в любой инерциальной системе отсчета.

Самым интересным и необычным следствием преобразования Лоренца является то, что время не является абсолютным, а зависит от системы отсчета. Этот факт имеет множество экспериментальных подтверждений. Рассмотрим одно из них. С помощью ускорителей получают $\mu^{\pm}$-мезоны, которые в неподвижной системе координат распадаются со средним временем $\tau_0 = 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ с по схеме

$$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \quad \mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu.$$

Такие же мезоны, рождающиеся в верхних слоях атмосферы, приходят к поверхности Земли со скоростями, близкими к скорости света

Казалось бы, что путь, пройденный этими частицами, должен быть равен их скорости, умноженной на время жизни τ_0. На самом деле это не так. Действительно, пусть в системе отсчета, связанной с покоящимися мезонами, μ-мезон в момент рождения имел координаты (0, 0), а в момент распада — (τ_0, 0). Тогда, согласно формулам (22.6), в системе отсчета, связанной с Землей, в момент рождения он имел координаты также (0, 0), а в момент распада его координаты равны

$$(\tau, l) = \left(\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{v\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right).$$

Здесь v — скорость μ-мезона относительно Земли.

Таким образом, время жизни мезона в подвижной системе отсчета должно увеличиваться в $(1-\beta^2)^{-1/2} = \frac{E}{mc^2}$ раз и будет равно $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \tau_0 \frac{E}{mc^2}$, где E — энергия мезона. Поэтому он пройдет путь не $v\tau_0$, а $l = \frac{v\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = v\tau_0 \frac{E}{mc^2}$.

Этот факт, который является следствием преобразования Лоренца, подтверждается экспериментально.

Таким образом, **принцип относительности** можно теперь сформулировать иначе: *все физические явления* (механические, электрические и др.) *должны быть инвариантными относительно преобразования Лоренца* (22.6). Позже будет показано, что уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразования Лоренца (§ 25). Чтобы уравнения классической механики также были инвариантны относительно преобразования Лоренца, уравнения Ньютона придется уточнить, что и будет сделано в следующем параграфе.

§ 23. Основы релятивистской классической механики

Уравнения классической механики инвариантны относительно преобразования Галилея, но не согласуются с преобразованием Лоренца (22.6). Например, из законов Ньютона следует, что закон сохранения импульса в любой инерциальной системе отсчета записывается в виде

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \text{const}. \qquad (23.1)$$

Если перейти к другой инерциальной системе отсчета и при этом воспользоваться правилом сложения скоростей (22.2), то получим $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i' + M\vec{v}_0$, где $M = \sum_i m_i$. Следовательно, и в этой системе отсчета

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i' = \text{const}. \qquad (23.2)$$

Таким образом, если в какой нибудь системе отсчета импульс сохраняется, то он будет сохраняться и в любой другой системе отсчета.

Очевидно, что формула (23.2) есть следствие (23.1) при любом значении скорости $\vec{v}_0$. Но существует более точное правило сложения скоростей (22.7), которое согласуется с экспериментом, а при скоростях, меньших скорости света, переходит в (22.2).

Если вместо (22.2) воспользоваться теперь релятивистским законом сложения скоростей (22.7), то в движущейся системе отсчета закон сохранения импульса должен иметь вид

$$\sum_{i=1}^{N} m_i v_{ix} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{v_{ix}' + v_0}{1 + (v_0/c^2)\, v_{ix}'} = \text{const},$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i v_{iy} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_{iy}'}{1 + (v_0/c^2)\, v_{ix}'} \sqrt{1-\beta^2} = \text{const}, \qquad (23.3)$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i v_{iz} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_{iz}'}{1 + (v_0/c^2)\, v_{ix}'} \sqrt{1-\beta^2} = \text{const}.$$

Из (23.3) следует, что если $\sum_i m_i \vec{v}_i' = \text{const}$ в одной системе отсчета, то это вовсе не означает, что это имеет место и в любой другой инерциальной системе отсчета, т. е. либо закон сохранения импульса выполняется только при малых скоростях движения и поэтому является приближенным, либо неточной является формула, связывающая импульс со скоростью, $\vec{p} = m\vec{v}$, которую используют в нерелятивистской механике. Против первого предположения можно выдвинуть серьезное возражение, связанное с тем, что закон сохранения импульса универсален, так как следует из свойства однородности пространства и поэтому должен иметь место в любой теории: классической, квантовой, релятивистской.

Таким образом, необходимо искать более точную связь импульса со скоростью, которая при скоростях $v \ll c$ переходила бы в формулу $\vec{p} = m\vec{v}$. Поскольку закон сохранения импульса есть следствие уравнения движения, то вместо уравнения Ньютона необходимо найти новые уравнения движения, которые были бы инвариантными относительно преобразования Лоренца, а затем, исходя из этих уравнений, получить связь между импульсом и скоростью, а также между энергией и импульсом.

Так как, согласно преобразованию Лоренца (22.6), радиус-вектор $\vec{r}$ и время t представляют собой единую величину, которую в дальнейшем будем называть четырехмерным вектором, то и другие величины, определение которых связано с координатами и временем (скорость, ускорение, импульс и др.), также приобретают четырехмерный характер, т. е. будут определенным образом преобразовываться с помощью преобразования (22.6).

Определим сначала четырехмерную скорость. Для этого заметим следующее: в классической механике расстояние между двумя точками

$$l^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2,$$

а также интервал времени между двумя событиями

$$\Delta t = t_1 - t_2$$

инвариантны относительно преобразования Галилея. Прямой проверкой убеждаемся, что эти величины не инвариантны относительно преобразования Лоренца (22.6), но выражение

$$s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2$$

уже инвариантно. Если считать, что точки и моменты времени близки друг к другу и обозначить $t_1 - t_2 = dt$, $x_1 - x_2 = dx$, ..., то инвариантным также будет выражение

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \qquad (23.4)$$

Пусть в формуле (23.4) $dx^2 + dy^2 + dz^2$ — квадрат пути, пройденный частицей за время dt в некоторой системе отсчета. Тогда выражение $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2$ есть квадрат ее скорости в этой же системе отсчета.

Введем понятие собственного времени $d\tau$ с помощью формулы

$$d\tau = \frac{ds}{c} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \qquad (23.5)$$

которое также будет инвариантным относительно преобразования Лоренца. Введем новые обозначения, принятые в специальной теории относительности:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z.$$

Совокупность четырех величин x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), преобразующихся согласно (22.6), называется *четырехмерным вектором*. Определим вектор скорости формулой

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \qquad (23.6)$$

Так как $d\tau$ — инвариант, а dx^μ преобразуется как четырехмерный вектор, то из определения (23.6) следует, что u^μ также является четырехмерным вектором, т. е. должен преобразовываться с помощью преобразования Лоренца (22.6).

Выразим компоненты четырехмерной скорости через обычную трехмерную скорость. Учитывая определение (23.6), имеем

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right).$$

Отсюда следует, что

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \vec{u} = \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \vec{u} = \vec{v}\frac{u_0}{c}.$$

Четыре компоненты четырехмерной скорости не независимы. Действительно,

$$(u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2 = c^2. \qquad (23.7)$$

Четырехмерным импульсом назовем величину

$$p^\mu = mu^\mu = m\frac{dx}{d\tau}.$$

Четыре компоненты этого вектора есть

$$p^\mu = \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right).$$

Обозначим

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (23.8)$$

В этих формулах $\vec{v}$ — скорость частицы.

Величину $\vec{p}$ назовем трехмерным импульсом. Из (23.8) следует, что он связан с четвертой компонентой p^0 импульса соотношением

$$(p^0)^2 - \vec{p}^2 = m^2c^2,$$

откуда находим связь p^0 с импульсом $\vec{p}$:

$$(p^0)^2 = m^2c^2 + \vec{p}^2. \qquad (23.9)$$

Таким образом, величину p^0 можно выразить как через трехмерный импульс $\vec{p}$, так и через трехмерную скорость $\vec{v}$:

$$p^0 = \sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2} = \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (23.10)$$

Уравнение движения релятивистской механики запишем в виде

$$m\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \mathcal{F}^\mu,$$

где $\mathcal{F}^\mu$ — четырехмерный вектор силы, вид которого необходимо найти. Это уравнение можно переписать следующим образом:

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \vec{\mathcal{F}}, \quad \frac{dp^0}{d\tau} = \mathcal{F}^0. \qquad (23.11)$$

Из выражения (23.9) имеем

$$p^0\frac{dp^0}{d\tau} = \vec{p}\cdot\frac{d\vec{p}}{d\tau}.$$

Поэтому учитывая, что, согласно (23.8), $\frac{\vec{p}}{p^0} = \frac{\vec{v}}{c}$, и используя первое уравнение в системе (23.11), имеем

$$c\frac{dp^0}{d\tau} = c\left(\frac{\vec{p}}{p^0}\cdot\frac{d\vec{p}}{d\tau}\right) = \left(\vec{v}\cdot\frac{d\vec{p}}{d\tau}\right) = (\vec{v}\cdot\vec{\mathcal{F}}).$$

Сравнивая эту формулу с теоремой классической механики об изменении энергии системы: $dE = (\vec{v}\cdot\vec{F})dt = \frac{\vec{v}\cdot\vec{F}}{\sqrt{1 - \beta^2}}d\tau$, находим,

что если в (23.11) приравнять $\mathcal{F}^0 = \frac{(\vec{v}\cdot\vec{F})}{c} = (v\cdot F)/c\sqrt{1-\beta^2}$, то получим $\frac{1}{c}\frac{dE}{d\tau} = \mathcal{F}_0$. Следовательно, величину $E = cp^0$ можно рассматривать как энергию частицы, связанную с импульсом (или скоростью) соотношением

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (23.12)$$

Теперь необходимо решить вопрос, что представляют собой вектор $\vec{\mathcal{F}}$ и величина $\mathcal{F}_0 = \frac{\vec{v}\cdot\vec{\mathcal{F}}}{c}$ в правых частях уравнений (23.11). Если положить $\vec{\mathcal{F}} = \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\beta^2}}$, где $\vec{F} = e\vec{E} + e[\vec{v}, \vec{B}]$, то уравнение (23.11) при $v \ll c$ перейдет в уравнение Ньютона.

Таким образом, релятивистское уравнение движения имеет вид

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + e[\vec{v}, \vec{B}], \qquad (23.13)$$

причем

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \vec{v} = \frac{\vec{p}}{m}\left(1 + \frac{p^2}{m^2c^2}\right)^{-1/2}. \qquad (23.14)$$

С помощью соотношения (23.14) импульс может быть исключен из уравнений (23.13). В результате этого получим

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\sqrt{1-\beta^2}\left\{\vec{E} - \frac{\vec{v}}{c}(\vec{v}\cdot\vec{E}) + [\vec{v}, \vec{B}]\right\}.$$

Уравнение движения (23.13), а также соотношения (23.14) должны, во-первых, в пределе $v \to 0$ совпадать с соответствующими нерелятивистскими формулами, во-вторых, выводы из них должны согласовываться с экспериментальными данными в области высоких энергий. Действительно, при $v \ll c$, что эквивалентно неравенству $p \ll mc$, соотношение (23.14), а также формула для кинетической энергии принимают вид

$$\vec{p} \simeq m\vec{v}, \quad T = E - mc^2 \simeq \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \cdots \simeq \frac{mv^2}{2},$$

что совпадает с соответствующими формулами классической механики.

Очевидно, что при $v \ll c$ уравнение движения (23.13) переходит в уравнение Ньютона

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + e[\vec{v}, \vec{B}],$$

так как при $p \ll mc$ $\vec{v} \simeq \vec{p}/m$.

Противоположный случай $v \to c$ называют ультрарелятивистским. В этом случае $E = cp$, $\vec{v} = c\vec{p}/p$ и уравнение движения (23.13) принимает вид

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{ec}{p}[\vec{p}, \vec{B}].$$

Масса из уравнения движения выпала совсем. Обратим внимание на то,что $E = mc^2$ при $p = 0$, т. е. энергия отлична от нуля даже для покоящейся частицы. Этот важный результат релятивистской механики полностью согласуется с экспериментом. Величина mc^2 называется *энергией покоя* частицы. Релятивистская энергия не обращается в нуль при $p = 0$, поэтому наряду с полной энергией $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$ определим кинетическую энергию формулой

$$T = E - mc^2 = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} - mc^2.$$

Следует отметить, что в отличие от нерелятивистской механики, где в законы сохранения входит кинетическая энергия, в релятивистской механике в процессах, сопровождающихся взаимопревращением частиц, следует учитывать полную энергию, включая и энергию покоя. Этот факт, как будет показано ниже, приводит к новым важным физическим результатам.

Из формул (23.12) следует, что покоящаяся частица обладает энергией $E = mc^2$. Пусть две покоящиеся частицы с энергией $E_1 = m_1c^2$ и $E_2 = m_2c^2$ связываются в одну частицу с энергией $E = mc^2$, и при этом выделяется некоторое количество энергии (*энергии связи*). Согласно закону сохранения энергии, $(m_1 + m_2)c^2 = mc^2 + \Delta E$. Отсюда

$$\Delta E = \frac{m_1 + m_2 - m}{c^2}. \qquad (23.15)$$

Из этой формулы следует, что $m \neq m_1 + m_2$, т. е. масса сложной частицы не равна сумме масс частиц, из которых она состоит. Этот новый факт, который является следствием релятивистской теории, полностью согласуется с экспериментальными результатами. В атомах и молекулах величина ΔE мала и поэтому с достаточной степенью точности

$$m_1 + m_2 - \frac{\Delta E}{c^2} \simeq m_1 + m_2 = m.$$

В атомных ядрах энергия связи ΔE большая и поэтому пренебрегать ею нельзя. Измеряя выделяемую при слиянии двух ядер энергию ΔE, а также массы частиц до слияния и после слияния, можно экспериментально проверить формулу (23.15). И в этом случае эксперимент прекрасно согласуется с теоретическими предсказаниями. При этом очень важно то, что в закон сохранения энергии должна входить полная энергия частицы вместе с энергией покоя, а не только кинетическая энергия.

Рассмотрим теперь эксперименты, которые подтверждают правильность уравнения (23.13), а также релятивистскую зависимость энергии от скорости (23.12). Пусть электрон ускоряется в высоковольтном электростатическом ускорителе до некоторой скорости $\vec{v}$. Согласно (23.11), его энергия изменяется по закону

$$\frac{dE}{dt} = (\vec{v}\cdot\vec{F}) = -e(\vec{v}\cdot\vec{E}) = e(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\varphi).$$

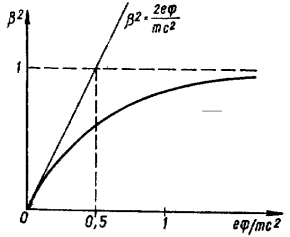


Рис. 17

Здесь e — абсолютное значение заряда электрона. Из этого уравнения следует

$$\frac{dE}{dt} = e\frac{(\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{dr})}{dt} = e\frac{d\varphi}{dt},$$

откуда получаем закон сохранения энергии

$$E - e\varphi = \text{const}.$$

В начальный момент времени на катоде, потенциал которого полагаем равным нулю, скорость электрона была равна нулю. Тогда из закона сохранения энергии следует

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - e\varphi = mc^2 \quad \text{или} \quad T - e\varphi = 0,$$

где $T = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$ — кинетическая энергия. Из этой формулы находим связь между скоростью электрона и ускоряющим потенциалом

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{(1 + e\varphi/(mc^2))^2}. \qquad (23.16)$$

При малых ускоряющих напряжениях $e\varphi$ $(mc^2) \ll 1$ из этой формулы следует

$$\beta^2 \simeq \frac{2e\varphi}{mc^2}.$$

Такой же результат можно получить, исходя из нерелятивистского уравнения Ньютона. Однако при больших ускоряющих напряжениях $e\varphi/(mc^2) \gg 1$ из формулы (23.16) следует, что $\beta^2 \to 1$. Следовательно, график зависимости β^2 от $e\varphi/(mc^2)$ должен иметь вид, как на рис. 17.

В эксперименте с большой точностью измерялось ускоряющее напряжение φ. Скорость электронов определялась путем измерения поглощенной мишенью мощности. Связь между поглощенной мощностью и скоростью электронов дается формулой

$$W = envS\varphi = I\varphi, \quad I = envS,$$

где S — площадь поперечного сечения пучка электронов, n — их плотность, v — скорость электронов в момент попадания на анод.

Эксперимент показал, что при ускорении электроны приобретают скорость, значение которой согласуется с теоретической формулой (23.16), и при больших энергиях приближается к предельному значению $3 \cdot 10^8$ м/с. Согласно же нерелятивистской теории, скорость должна расти беспредельно при увеличении ускоряющего потенциала.

Таким образом, этот эксперимент количественно подтвердил правильность релятивистской зависимости энергии от импульса (23.12).

Рассмотрим релятивистскую задачу о движении частицы в постоянном однородном магнитном поле. Полученные при решении этой задачи результаты используются при расчете мощности синхротронного излучения, что также может служить экспериментальной проверкой основ релятивистской механики. Уравнение движения (23.13) в этом случае имеет вид

$$\frac{\vec{dp}}{dt} = e[\vec{v}, \vec{B}]. \qquad (23.17)$$

Умножая это уравнение скалярно на $\vec{p}$ и учитывая, что $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ получаем $\frac{dp^2}{dt} = 0$, т. е. $p^2 = \text{const}$, следовательно, и $v^2 = \text{const}$. Кроме того, умножив скалярно уравнение (23.17) на $\vec{B}$, получим

$$\vec{B} \cdot \frac{\vec{dp}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{B} \cdot \vec{p}) = 0.$$

Следовательно,

$$(\vec{B} \cdot \vec{p}) = \text{const}.$$

Другими словами, проекция вектора импульса на направление магнитного поля есть интеграл движения, и если считать, что ось z направлена вдоль $\vec{B}$, то $p_z = \text{const}$, а значит, и $v_z = \text{const}$. Положим, $v_z = 0$, тогда движение частицы будет плоским. Пользуясь тем, что $v^2 = \text{const}$, перепишем уравнение (23.17) в виде

$$m\frac{d\dot{v}}{dt} = e\sqrt{1-\beta^2} \cdot [\dot{v}, \dot{B}]. \qquad (23.18)$$

Так как $\dot{v} \perp \vec{B}$, то возведя правую и левую части уравнения (23.18) в квадрат, получим

$$\dot{v}^2 = \left(\frac{eB}{m}\right)^2 v^2 (1-\beta^2). \qquad (23.19)$$

В проекциях на оси x и y уравнение (23.18) имеет вид

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega_B v_y, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\omega_B v_x,$$

а его решение

$$v_x = v\sin(\omega_B t + \varphi), \quad v_y = v\cos(\omega_B t + \varphi);$$

$$x = x_0 - \frac{v}{\omega_B}\cos(\omega_B t + \varphi), \quad y = y_0 + \frac{v}{\omega_B}\sin(\omega_B t + \varphi).$$

Здесь $\omega_B = \frac{eB}{m}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{ec^2B}{E}$ — релятивистская циклотронная частота.

Отсюда можно найти уравнение траектории

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{v^2}{\omega_B^2} = \rho^2.$$

Таким образом, заряженная частица движется по окружности, радиус которой

$$\rho = \frac{mv}{eB}(1-\beta^2)^{-1/2} = \frac{(E^2 - m^2c^4)^{1/2}}{ecB},$$

с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_B} = \frac{2\pi eB}{m}(1-\beta^2)^{-1/2} = \frac{2\pi E}{ec^2B}.$$

Подставляя ускорение (23.19) в формулу (18.8), получим формулу для потери энергии в единицу времени частицей, движущейся в однородном магнитном поле:

$$-\frac{dE}{d\tau} = \frac{e^2\omega_B^2 v^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{1}{(1-\beta^2)^2} = \frac{e^4B^2}{6\pi\varepsilon_0 m^2c^3}\frac{\beta^2}{(1-\beta^2)}. \qquad (23.20)$$

Излучение электромагнитных волн заряженными релятивистскими частицами, движущимися в магнитном поле по круговым траекториям, называется *синхротронным* (или магнитотормозным) *излучением*. Согласно формуле (23.12), $(1-\beta^2)^{-1/2} = E/mc^2$. При $\beta \simeq 1$ (ультрарелятивистский случай) формулу (23.20) можно записать в упрощенном виде

$$-\frac{dE}{d\tau} = \frac{e^4B^2E^2}{6\pi\varepsilon_0 m^4c^5}. \qquad (23.21)$$

Это же излучение, но с нерелятивистских частиц ($\beta \ll 1$), называется *циклотронным излучением* и для него формула (23.20) принимает вид

$$-\frac{dE}{d\tau} = \frac{e^4B^2E}{3\pi\varepsilon_0 m^3c^3}. \qquad (23.22)$$

В этой формуле $E = mv^2/2$ — кинетическая энергия частицы.

Из формул (23.21) и (23.22) следует, что при заданной энергии излучаемая мощность сильно зависит от массы частицы и поэтому синхротронное излучение наиболее существенно для легких частиц — электронов и позитронов.

Синхротронное излучение теоретически было исследовано еще в 1912 г., а экспериментально обнаружено только в 1948 г. на ускорителе электронов больших энергий (синхротрон).

С помощью формулы (23.20) можно вычислить потерю энергии ускоряемой в синхротроне частицы за один период:

$$\Delta E = -\frac{dE}{d\tau}\frac{2\pi}{\omega_B} = \frac{e^2\omega_B}{3\varepsilon_0 c}\frac{\beta^2}{1-\beta^2}.$$

Учитывая, что радиус орбиты $\rho = v/\omega_B$, перепишем эту формулу в виде, более удобном для инженерных расчетов:

$$\Delta E = \frac{e^2v^3}{3\varepsilon_0 m^4c^{11}}\frac{E^4}{\rho}.$$

Для релятивистских энергий, когда $v \simeq c$, эта формула принимает вид

$$\Delta E = 8{,}85\cdot 10^{-2}\cdot\frac{E^4}{\rho}, \qquad (23.23)$$

где E — энергия ускоряемой частицы, ГэВ; ρ — радиус орбиты, м.

В синхротроне, рассчитанном на ускорение частиц до 5 ГэВ, $\rho = 10$ м; согласно (23.23), потери составляют $\Delta E \sim 6$ МэВ за оборот. Мощность внешнего электромагнитного ускоряющего поля должна быть достаточно большой, чтобы компенсировать эти потери на излучение. При современных радиочастотных мощностях формула (23.23) дает верхний предел максимальной энергии в кольцевых ускорителях электронов около 10 ГэВ.

§ 24. Функция Лагранжа для релятивистской заряженной частицы в электромагнитном поле

В предыдущем параграфе уравнения Ньютона были обобщены на релятивистский случай. Как известно из классической механики, уравнение движения можно получить также с помощью вариационного принципа. Для этого необходимо найти вид интеграла действия, из условия стационарности которого выведется уравнение движения.

Начнем с составления интеграла действия для свободной частицы. Очевидно, что этот интеграл должен быть инвариантом относительно преобразования Лоренца и при малых скоростях ($v \ll c$) переходить в интеграл действия нерелятивистской классической механики, который имеет вид

$$S = \int_{t_1}^{t_2}\frac{mv^2}{2}dt = \int_{t_1}^{t_2}Ldt.$$

Из классической механики известно, что вследствие однородности пространства импульс

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$$

есть сохраняющаяся величина. Релятивистская зависимость импульса от скорости (23.8) имеет вид

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}.$$

Отсюда находим релятивистскую функцию Лагранжа для свободной частицы

$$L = -mc^2(1-v^2/c^2)^{1/2}. \qquad (24.1)$$

При этом выражение для энергии частицы

$$E = \vec{p}\cdot\vec{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

будет совпадать с формулой (23.12). При малых скоростях (24.1) можно разложить в ряд

$$L \simeq -mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \cdots,$$

и так как постоянное слагаемое mc^2 в функции Лагранжа не сказывается на виде уравнения движения, приходим к выводу, что релятиви-

вистская функция Лагранжа для свободной частицы имеет вид (24.1). Поскольку $dt\sqrt{1-v^2/c^2}$ есть инвариант, то и интеграл действия

$$S = -mc^2\int\sqrt{1-v^2/c^2}\,dt = -mc^2\int d\tau$$

инвариантен относительно преобразования Лоренца.

Обобщим полученные результаты на случай движения частицы в электромагнитном поле. В классической механике было показано, что для этого из функции Лагранжа нужно вычесть кинетический потенциал [12, § 15]

$$U = e\varphi - e\vec{v}\cdot\vec{A},$$

где $\vec{A}$ и φ — соответственно векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля.

Таким образом, релятивистская функция Лагранжа для заряженной частицы в электромагнитном поле имеет вид

$$L = -mc^2\sqrt{1-v^2/c^2} + e\vec{v}\cdot\vec{A} - e\varphi. \qquad (24.2)$$

Составим уравнение движения с помощью уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial\vec{r}} = 0.$$

Используя функцию Лагранжа (24.2), находим обобщенный импульс

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{\partial L}{\partial\vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + e\vec{A} = \vec{p} + e\vec{A}, \qquad (24.3)$$

а затем — выражение для производной $\frac{\partial L}{\partial\vec{r}}$:

$$\frac{\partial L}{\partial\vec{r}} = \vec{\nabla}L = e\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{v}) - e\vec{\nabla}\varphi.$$

Используя формулу (11) приложения II и учитывая, что скорость $\vec{v}$ является независимой переменной, имеем

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{v}) = (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + [\vec{v}, \operatorname{rot}\vec{A}],$$

поэтому

$$\frac{\partial L}{\partial\vec{r}} = e(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + e[\vec{v}, \operatorname{rot}\vec{A}] - e\vec{\nabla}\varphi.$$

При этом мы учли, что дифференцирование по $\vec{r}$ производится при постоянном $\vec{v}$.

Следовательно, уравнение Лагранжа имеет вид

$$\frac{\partial\vec{\mathcal{P}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p} + e\vec{A}) = e\{(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + [\vec{v}, \operatorname{rot}\vec{A}] - \vec{\nabla}\varphi\}.$$

Поскольку

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A},$$

то эту формулу можно переписать в виде

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) + e[\vec{v}, \operatorname{rot}\vec{A}].$$

Учитывая, что, согласно (10.1) и (10.5),

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A},$$

имеем

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + e[\vec{v}, \vec{B}],$$

что совпадает с (23.13).

Зная функцию Лагранжа (24.2), можно с помощью соотношения

$$H = \frac{\partial L}{\partial\vec{v}}\cdot\vec{v} - L \qquad (24.4)$$

найти соответствующую ей функцию Гамильтона. Подставляя (24.2) и выражение для $\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}$ из формулы (24.3) в (24.4), получаем

$$H = \frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + e\vec{v}\cdot\vec{A} + mc^2\sqrt{1-v^2/c^2} - e\vec{v}\cdot\vec{A} + e\varphi =$$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + e\varphi. \qquad (24.5)$$

Функцию Гамильтона необходимо выразить через обобщенные импульсы. Используя формулу (24.3), находим

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \sqrt{m^2c^4 + c^2(\vec{\mathcal{P}} - e\vec{A})^2}.$$

Исключая с помощью этой формулы из выражения (24.5) скорость, имеем

$$H = \sqrt{m^2c^4 + c^2(\vec{\mathcal{P}} - e\vec{A})^2} + e\varphi. \qquad (24.6)$$

Можно непосредственно убедиться, что при $mc \gg |\vec{\mathcal{P}} - e\vec{A}|$ релятивистская функция Гамильтона (24.6) с точностью до несущественного постоянного слагаемого mc^2 переходит в нерелятивистскую функцию Гамильтона для заряженной частицы, движущейся в электромагнитном поле [12, § 16].

§ 25. Релятивистская инвариантность уравнений Максвелла

Опыты Майкельсона показали, что преобразование Галилея (22.1) и вытекающее из него правило сложения скоростей (22.2) несправедливы при больших скоростях. Экспериментально установленный факт

независимости скорости света от движения источника привел нас к преобразованию Лоренца (22.6) и релятивистскому правилу сложения скоростей (22.7). Поскольку классические уравнения Ньютона неинвариантны относительно преобразования Лоренца, пришлось сформулировать новые, релятивистские инвариантные уравнения движения (23.13). Следствия, вытекающие из них, полностью согласуются с экспериментальными фактами.

Казалось бы, что и в уравнениях Максвелла необходимо провести соответствующие уточнения. Однако оказывается, что в этом нет необходимости, так как уравнения Максвелла уже с самого начала в таком виде, как они записаны: (8.1) — (8.4) — релятивистски инвариантны. Для доказательства этого запишем уравнения Максвелла в четырехмерной ковариантной форме. Термин «ковариантный» означает, что несмотря на то, что при преобразовании Лоренца величины, входящие в уравнения, определенным образом преобразуются, вид самих уравнений остается неизменным.

Так как преобразование Лоренца касается в равной степени как координат, так и времени, удобно рассматривать величины ct, x, y, $z = (ct, \vec{r})$ как компоненты четырехмерного вектора, которые, используя греческие индексы $\mu = 0, 1, 2, 3$, в дальнейшем будем обозначать $x^\mu = (ct, \vec{r})$, или

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z.$$

Тогда преобразование (22.6) в четырехмерном виде запишется следующим образом:

$$x^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} L^\mu_\nu x'^\nu = L^\mu_\nu x'^\nu, \tag{25.1}$$

где матрица Лоренца L^μ_ν имеет вид

$$L^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \varkappa & \beta\varkappa & 0 & 0 \\ \beta\varkappa & \varkappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{25.2}$$

Здесь $\beta = v_0/c$, $\varkappa = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Можно проверить, что детерминант матрицы (25.2) равен 1. Кроме того, она удовлетворяет соотношению $L^\mu_\nu = L_\mu^\nu$, причем верхний индекс μ нумерует строку, а нижний ν — столбец матрицы L^μ_ν.

В дальнейшем знак суммы в выражениях типа (25.1) будем опускать, считая, что наличие двух одинаковых индексов (в данном случае — это индекс ν), одного сверху, а другого снизу, автоматически означает, что по этому индексу необходимо произвести суммирование от 0 до 3.

Обратное преобразование имеет вид

$$x'^\mu = (L^{-1})^\mu_\nu x^\nu,$$

где $(L^{-1})^\mu_\nu$ — матрица, обратная матрице (25.2). Определяя эту матрицу по обычному правилу, получим

$$(L^{-1})^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \varkappa & -\beta\varkappa & 0 & 0 \\ -\beta\varkappa & \varkappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L(-v)^\mu_\nu.$$

Таким образом, обратная матрица соответствует относительному движению систем отсчета с противоположно направленными скоростями. Обе матрицы связаны соотношением

$$(L^{-1})^\nu_\mu L^\mu_\lambda = \delta^\nu_\lambda, \tag{25.3}$$

где δ^ν_λ — единичная матрица,

$$\delta^\nu_\lambda = \delta^\lambda_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Назовем четырехмерным вектором любые четыре величины a^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), которые, независимо от их физического смысла, при преобразовании Лоренца преобразуются по правилу (25.1):

$$a^\mu = L^\mu_\nu a'^\nu.$$

Эти компоненты принято называть *контравариантными*. Наряду с ними вводятся *ковариантные* компоненты, которые определяются как

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu = (a^0, -\vec{a}),$$

где

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = g^\nu_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{25.4}$$

— *метрический тензор*.

Две формы записи одного и того же вектора (контравариантная и ковариантная) принято обозначать одной и той же буквой, но с индексом вверху или внизу: a^μ и a_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$).

Ковариантные компоненты вектора отличаются от контравариантных только знаком у пространственных координат.

Обратная матрица $(g^{-1})_{\mu\nu}$, которую мы обозначим как $g^{\mu\nu} = (g^{-1})_{\mu\nu}$, совпадает с исходной, т. е. $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$. Поэтому переход от контравариантных компонент к ковариантным и обратный выполняется по формулам

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu, \quad a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu.$$

С помощью метрического тензора (25.4) соотношение (23.4) запишется как

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx_\nu dx^\nu.$$

Покажем, что ковариантные компоненты четырехмерного вектора преобразуются с помощью обратной матрицы Лоренца. Так как контравариантные компоненты преобразуются по формуле (25.1), т. е.

$$a^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} a'^{\nu}, \tag{25.5}$$

а ковариантные компоненты связаны с контравариантными через метрический тензор следующим образом:

$$a_{\delta} = g_{\delta\mu} a^{\mu}, \quad a'^{\nu} = g^{\nu\sigma} a'_{\tau}, \tag{25.6}$$

то, подставляя выражение (25.6) в (25.5), получаем формулу для преобразования ковариантных компонент

$$a_{\delta} = g_{\delta\mu} L^{\mu}_{\nu} g^{\nu\sigma} a'_{\sigma} = \Lambda^{\sigma}_{\delta} a'_{\sigma},$$

где $\Lambda^{\sigma}_{\delta} = g_{\delta\mu} L^{\mu}_{\nu} g^{\nu\sigma}$.

Перемножая все три матрицы, получаем

$$\Lambda^{\sigma}_{\delta} = \begin{pmatrix} \varkappa & -\beta\varkappa & 0 & 0 \\ -\beta\varkappa & \varkappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (L^{-1})^{\sigma}_{\delta}.$$

Следовательно,

$$a_{\delta} = (L^{-1})^{\sigma}_{\delta} a'_{\sigma}.$$

Так как

$$a_{\mu} = (L^{-1})^{\sigma}_{\mu} a'_{\sigma}, \quad b^{\mu} = L^{\mu}_{\lambda} b'^{\lambda},$$

то, используя формулу (25.3), имеем

$$a_{\mu} b^{\mu} = (L^{-1})^{\sigma}_{\mu} L^{\mu}_{\lambda} a'_{\sigma} b'^{\lambda} = \delta^{\sigma}_{\lambda} a'_{\sigma} b'^{\lambda} = a'_{\lambda} b'^{\lambda}.$$

Выражение $a_{\mu} b^{\mu} = (a \cdot b)$ называется скалярным произведением двух четырехмерных векторов a^{μ} и b^{μ}. Смысл введения наряду с контравариантными ковариантных компонент заключается в том, что запись скалярного произведения двух четырехмерных векторов a^{μ} и b^{μ} становится более простой: вместо $g_{\mu\nu} a^{\mu} b^{\nu}$ имеем $a_{\nu} b^{\nu}$.

Таким образом, скалярное произведение векторов $a_{\mu} b^{\mu}$ есть инвариант относительно преобразования Лоренца. Отсюда следует, что выражение

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = dx_{\mu} dx^{\mu}$$

имеет одинаковый вид в любой инерциальной системе отсчета, т. е. является инвариантом относительно преобразования Лоренца.

Аналогично можно показать, что инвариантом относительно преобразования Лоренца является элемент четырехмерного объема, который определяется как $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$. Действительно,

$$dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = J dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3,$$

где J — модуль якобиана, элементом которого, согласно формуле (25.1), являются частные производные $\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} = L^{\mu}_{\nu}$. Так как детерминант матрицы Лоренца равен единице, то $J = 1$. Поэтому

$$d\Omega = d\Omega',$$

откуда следует, что

$$dV = dV' \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} = dV' \sqrt{1 - \beta^2}. \tag{25.7}$$

Перейдем к доказательству ковариантности уравнений Максвелла. Начнем с уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0.$$

Введем четырехмерный вектор плотности тока

$$j^{\mu} = (c\rho, \vec{j}).$$

Тогда уравнение непрерывности в некоторой системе отсчета можно записать в виде

$$\frac{\partial j^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0. \tag{25.8}$$

Четырехмерный вектор тока преобразуется по формуле (25.5):

$$j^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} j'^{\nu}; \quad j'^{\mu} = (L^{-1})^{\mu}_{\nu} j^{\nu}.$$

Используя формулу $x'^{\sigma} = (L^{-1})^{\sigma}_{\mu} x^{\mu}$, перепишем производную:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} = (L^{-1})^{\sigma}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\sigma}} \quad \text{или} \quad \nabla_{\mu} = (L^{-1})^{\sigma}_{\mu} \nabla'_{\sigma}.$$

Следовательно, производные по контравариантным координатам $\left(\text{компоненты четырехмерного градиента } \nabla_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)$ преобразуются как ковариантные компоненты четырехмерного вектора. И, наоборот, производные по ковариантным координатам преобразуются как контравариантные компоненты вектора. Таким образом, уравнение (25.8) можно записать в виде скалярного произведения оператора ∇_{μ} на вектор j^{μ}, что и доказывает релятивистскую ковариантность уравнения непрерывности (25.8). При этом оказалось, что плотность тока и плотность заряда составляют единую величину — четырехмерный вектор плотности тока.

Очевидно, что аналог четырехмерной дивергенции

$$\frac{\partial j^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = \nabla_{\mu} j^{\mu}$$

является инвариантной величиной, и поэтому если эта величина равна нулю в одной системе координат, то она равна нулю и в любой другой.

Перейдем к доказательству релятивистской ковариантности волновых уравнений (10.8) и (10.9). Уравнения для векторного и скаляр-

ного потенциалов электромагнитного поля имеют вид

$$\Box \vec{A} \equiv \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j}, \qquad (25.9)$$

$$\Box \varphi \equiv \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

которые справедливы в случае калибровки Лоренца (10.7):

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \qquad (25.10)$$

Сначала докажем инвариантность *оператора Д'Аламбера:*

$$\Box \equiv \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

— четырехмерного аналога оператора Лапласа.

Так как $\nabla^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$, а $\nabla_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right)$, то четырехмерный оператор $\Box$ можно записать в виде скалярного произведения контравариантного оператора ∇_μ на ковариантный ∇_μ:

$$\Box = \nabla - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\nabla^\mu \nabla_\mu.$$

Тем самым доказана инвариантность оператора Д'Аламбера.

Так как $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ — четырехмерный вектор, а оператор $\Box$ является инвариантом, то из (25.9) следует, что для того чтобы уравнения (25.9) имели релятивистски ковариантную форму, необходимо, чтобы величина

$$A^\mu = (\varphi, c\vec{A})$$

представляла собой четырехмерный вектор и преобразовывалась по формуле (25.1). Калибровку Лоренца (25.10) можно записать в виде

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = \nabla_\mu A^\mu = 0,$$

что указывает на ее релятивистскую ковариантность.

Следовательно, уравнения (25.9) могут быть записаны в четырехмерной ковариантной форме

$$\Box A^\mu = -\frac{1}{\varepsilon_0} j^\mu,$$

причем оказывается, что векторный и скалярный потенциалы представляют собой единое целое. Это свидетельствует о том, что электрическое и магнитное поля едины и являются проявлением свойств одного и того же материального объекта — электромагнитного поля.

Следует отметить, что ковариантность волновых уравнений (10.8) и (10.9) относительно преобразования Лоренца имеет место только при калибровке Лоренца, которая также является релятивистски ковариантной.

Запишем теперь формулы (10.1) и (10.2) в релятивистски ковариантном виде. Проекции уравнений (10.1) и (10.2) на ось x имеют вид

$$cB_x = \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3}, \quad E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A^1}{\partial t},$$

где $A^3 \equiv cA_z$, $A^2 \equiv cA_y$, $A^1 \equiv cA_x$.

Так как $A_\nu = g_{\mu\nu}A^\mu$, то $A_1 = -A^1$, $A_2 = -A^2$, $A_3 = -A^3$, $\varphi = A^0 \equiv A_0$, поэтому эти формулы можно записать с помощью ковариантных компонент A_ν следующим образом:

$$cB_x = F_{32} = \frac{\partial A_2}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^2}, \quad E_x = F_{01} = \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1}.$$

Введем антисимметричный тензор второго ранга

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}. \qquad (25.11)$$

Этот тензор выражается через вектор A_μ с помощью оператора ∇_μ — четырехмерного аналога оператора $\vec{\nabla}$.

Тензор (25.11) можно записать в виде матрицы:

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}. \qquad (25.12)$$

Здесь первый индекс $\mu = 0, 1, 2, 3$ нумерует строки, а второй индекс ν — столбцы. Отсюда видно, что напряженности электрического и магнитного полей являются компонентами антисимметричного четырехмерного тензора второго ранга, который имеет шесть независимых компонент.

Ковариантные компоненты тензора (25.12) находятся по формуле

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\sigma}g^{\nu\delta}F_{\sigma\delta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}. \qquad (25.13)$$

С помощью тензора (25.13) уравнения Максвелла (8.1) — (8.4) могут быть записаны в ковариантной форме. Два уравнения Максвелла (8.2) и (8.3)

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

приобретут вид

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{j^\mu}{\varepsilon_0 c}, \qquad (25.14)$$

а два других уравнения Максвелла (8.1) и (8.4)

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0 \tag{25.15}$$

в ковариантной форме имеют вид

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial F^{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial F^{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} = 0. \tag{25.16}$$

Изменение порядка индексов в этом уравнении не приводит к новому уравнению. Кроме того, можно убедиться, что оно не обращается в тождество лишь тогда, когда $\mu \neq \nu \neq \lambda$. Следовательно, уравнение (25.16) содержит только четыре независимых уравнения, так как оно эквивалентно четырем уравнениям (25.15) — одному скалярному и трем векторным.

В § 23 было показано, что уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле в релятивистски ковариантной форме имеют вид

$$\frac{dp^{\mu}}{d\tau} = \mathcal{F}^{\mu}, \tag{25.17}$$

где четырехмерный вектор силы $\mathcal{F}^{\mu}$ выражается через силу Лоренца $\vec{F} = e\vec{E} + e[\vec{v}, \vec{B}]$ следующим образом:

$$\mathcal{F}^{\mu} = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{F}}{c\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right).$$

С помощью четырехмерного вектора скорости $u^{\mu} = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$ это выражение можно переписать как

$$\mathcal{F}^{\mu} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{F}}{c}, \frac{u_0\vec{F}}{c}\right). \tag{25.18}$$

Так как сила Лоренца линейно выражается через компоненты тензора электромагнитного поля, то выражение (25.18) можно записать в виде

$$\mathcal{F}^{\mu} = \frac{1}{c} e u_{\nu} F^{\mu\nu}.$$

В модели сплошной среды четырехмерный вектор объемной плотности запишется так:

$$f^{\mu} = j_{\nu}F^{\mu\nu} = \left(\frac{1}{c}\vec{f}\cdot\vec{E}, \rho\vec{E} + [\vec{j}, \vec{B}]\right). \tag{25.19}$$

Возвращаясь к четырехмерным обозначениям, имеем

$$\mathcal{F}_x = \mathcal{F}^1 = \frac{e}{c}(F^{10}u_0 + F^{11}u_1 + F^{12}u_2 + F^{13}u_3) =$$

$$= \frac{e}{\sqrt{1-\beta^2}}(E_x + B_z v_y - B_y v_z) = \frac{e}{\sqrt{1-\beta^2}}(E_x + [\vec{v}, \vec{B}]_x).$$

Следовательно, $\vec{\mathcal{F}} = \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\beta^2}}$, и поэтому

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

что совпадает с уравнениями (23.13), если учесть, что

$$d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2}.$$

§ 26. Преобразование Лоренца для полей. Эффект Доплера. Аберрация света. Опыт Физо

При переходе от одной инерциальной системы к другой все четырехмерные векторы преобразуются одинаковым образом по правилу

$$a^{\mu} = L^{\mu}_{\nu}a'^{\nu},$$

где L^{μ}_{ν} — матрица Лоренца (25.2). Следовательно, четырехмерный потенциал электромагнитного поля $A^{\mu} = (\varphi, c\vec{A})$ преобразуется так же, как и пространственно-временные координаты: $A^{\mu} = L^{\mu}_{\nu}A'^{\nu}$. Используя формулу (25.2), получаем

$$A_x = \frac{A'_x + (v_0/c^2)\varphi'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \varphi = \frac{\varphi' + v_0 A_x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad A_y = A'_y, \quad A_z = A'_z.$$

Так как величины $\vec{E}$ и $\vec{B}$ являются компонентами тензора второго ранга (25.13), то их закон преобразования при переходе от одной инерциальной системы координат к другой можно найти, исходя из закона преобразования тензоров второго ранга. Компоненты четырехмерного тензора второго ранга $F^{\mu\nu}$, которые выражаются через напряженности электрического и магнитного полей с помощью формул (25.12) и (25.13), преобразуются следующим образом:

$$F^{\mu\nu} = L^{\mu}_{\lambda}L^{\nu}_{\sigma}F'^{\lambda\sigma}. \tag{26.1}$$

Удобнее, однако, поступить следующим образом. Антисимметричный тензор $F^{\mu\nu}$ имеет шесть независимых, отличных от нуля, компонент: F^{23}, F^{13}, F^{12}, F^{03}, F^{02}, F^{01}. Компонента F^{23} связана с компонентами координат y, z и компонентами поля A_y, A_z, которые при преобразовании Лоренца (22.6) не преобразуются, и поэтому $F^{23} = F'^{23}$, т. е. $B_x = B'_x$.

Компоненту F^{01} найдем при помощи формулы (26.1):

$$F^{01} = L^0_{\lambda}L^1_{\sigma}F'^{\lambda\sigma} = L^0_0L^1_0F'^{00} + L^0_1L^1_0F'^{10} = L^0_0L^1_1F'^{01} + L^0_1L^1_0F'^{10} =$$

$$= (\varkappa^2 - \varkappa^2\beta^2)F'^{01} = F'^{01},$$

т. е. $E_x = E'_x$.

Таким образом, продольные относительно скорости движения системы отсчета компоненты поля $(\vec{E}_{\parallel}, \vec{B}_{\parallel})$ при преобразовании Лоренца не изменяются.

Компоненты F^{1j}, F^{0j} при $j = 2,3$ преобразуются как компоненты a^0, a^1 четырехмерного вектора

$$F^{1j} = \frac{F'^{1j} + (v/c)\,F'^{0j}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad F^{0j} = \frac{F'^{0j} + (v/c)\,F'^{1j}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

т. е.

$$B_y = \frac{F^{31}}{c} = \frac{B'_y - \frac{v}{c^2}E'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad B_z = \frac{F^{21}}{c} = \frac{B'_z + \frac{v}{c^2}E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$E_y = F^{20} = \frac{E'_y + vB'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E_z = F^{30} = \frac{E'_z - vB_y}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Полученные результаты можно записать в виде

$$\vec{E}_\parallel = \vec{E}'_\parallel, \quad \vec{E}_\perp = \frac{\vec{E}'_\perp - [\vec{v}, \vec{B}'_\perp]}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\vec{B}_\parallel = \vec{B}'_\parallel, \quad \vec{B}_\perp = \frac{\vec{B}'_\perp + \frac{1}{c^2}[\vec{v}, \vec{E}'_\perp]}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (26.2)$$

Формулы (26.2) выражают глубокое единство электрического и магнитного полей, выступающих как различные проявления электромагнитного поля.

Из компонент тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ можно составить инвариантные величины, которые не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Очевидно, инвариантом будет величина

$$I_1 = \frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}.$$

Пользуясь для $F^{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu}$ выражениями (25.12), (25.13), получаем

$$I_1 = (c^2B^2 - E^2).$$

Рассмотрим, как изменяется скалярное произведение $(\vec{E}\cdot\vec{B})$ при преобразовании Лоренца. Используя (26.2), находим, что

$$(\vec{E}\cdot\vec{B}) = \vec{E}_\parallel\cdot\vec{B}_\parallel + \vec{E}_\perp\cdot\vec{B}_\perp = \vec{E}'_\parallel\cdot\vec{B}'_\parallel + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left\{\vec{E}'_\perp\cdot\vec{B}'_\perp - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{c^2}[\vec{v}, \vec{B}'_\perp]\cdot[\vec{v}, \vec{E}'_\perp] + \vec{B}'_\perp\cdot[\vec{v}, \vec{B}'_\perp] - \frac{1}{c^2}\vec{E}'_\perp\cdot[\vec{v}, \vec{E}'_\perp]\right\} =$$

$$= \vec{E}'_\parallel\cdot\vec{B}'_\parallel + \frac{1}{1-\beta^2}\left\{\vec{E}'_\perp\cdot\vec{B}'_\perp - \frac{1}{c^2}[\vec{B}'_\perp, [\vec{v}, \vec{E}'_\perp]]\cdot\vec{v}\right\} =$$

$$= \vec{E}'_\parallel\cdot\vec{B}'_\parallel + \frac{1}{1-\beta^2}[\vec{E}_\perp\cdot\vec{B}'_\perp - \beta^2(\vec{E}'_\perp\cdot\vec{B}'_\perp)] = (\vec{E}'\cdot\vec{B}').$$

Таким образом, скалярное произведение $I_2 = (\vec{E}\cdot\vec{B})$ тоже есть инвариантом относительно преобразования Лоренца. Очевидно, что любая

функция инвариантов I_1 и I_2 — также инвариант. Следует отметить, что инвариант $(\vec{E}\cdot\vec{B})$ — не скаляр, а псевдоскаляр, так как представляет собой произведение аксиального вектора $\vec{B}$ на полярный вектор $\vec{E}$, и поэтому при инверсии это произведение изменяет знак. Истинным скаляром является величина $(\vec{E}\cdot\vec{B})^2$.

Для плоской монохроматической волны (§ 13) $E = cB$ и $(\vec{E}\cdot\vec{B}) = 0$. Поэтому из инвариантности разности $c^2B^2 - E^2$ и произведения $(\vec{E}\cdot\vec{B})$ следует, что для плоской монохроматической волны инварианты I_1 и I_2 равны нулю в любой инерциальной системе отсчета. Поэтому эти свойства плоской монохроматической волны сохраняются при переходе к другой инерциальной системе отсчета, хотя ее частота и волновой вектор, как будет показано сейчас, изменяются. Сначала покажем, что фаза плоской монохроматической волны является инвариантом относительно преобразования Лоренца. Четырехмерный векторный потенциал плоской монохроматической волны имеет вид

$$A^\mu = a^\mu e^{i\varphi},$$

где a^μ — амплитуда, не зависящая от времени и координат, $\varphi = (\vec{\kappa}\cdot\vec{r}) - \omega t$ — фаза. В другой инерциальной системе отсчета эта волна имеет аналогичный вид:

$$A'^\mu = a'^\mu e^{i\varphi'},$$

где $\varphi' = (\vec{\kappa}'\cdot\vec{r}') - \omega' t'$.

Из преобразования Лоренца для векторов поля следует, что для плоской волны должно быть

$$a^\mu e^{i\varphi} = L^\mu_\nu a'^\nu e^{i\varphi'}.$$

Для выполнения этого соотношения в любой момент времени и в любой точке пространства необходимо, чтобы фаза плоской волны была инвариантной относительно преобразования Лоренца, т. е.

$$\varphi = (\vec{\kappa}\cdot\vec{r}) - \omega t = \varphi' = (\vec{\kappa}'\cdot\vec{r}') - \omega' t',$$

или в ковариантной форме

$$\varphi = -\kappa^\mu x_\mu = -\kappa'^\mu x'_\mu.$$

Так как φ — инвариант, а x_μ — четырехмерный вектор, то величина

$$\kappa^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{\kappa}\right), \quad \kappa'^\mu = \left(\frac{\omega'}{c}, \vec{\kappa}'\right)$$

есть четырехмерный волновой вектор, который, как это следует из (13.4), удовлетворяет условию

$$\kappa_\mu\kappa^\mu = \frac{\omega^2}{c^2} - \kappa^2 = 0.$$

При переходе к другой системе отсчета компоненты этого вектора преобразуются по закону (22.6):

$$\kappa_x = \frac{\kappa'_x + \frac{v}{c^2}\omega'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \omega = \frac{\omega' + v\kappa'_x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \kappa_y = \kappa_y, \quad \kappa_z = \kappa'_z. \qquad (26.3)$$

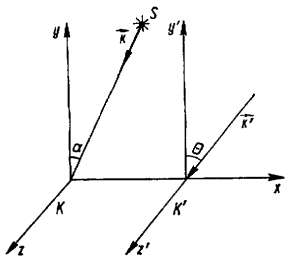


Рис. 18

Из формул (26.3) следует существование двух физических явлений, которые можно обнаружить экспериментально: *аберрации* света и *эффекта Доплера*. Явление аберрации, которое заключается в изменении видимого положения светящегося объекта на небесной сфере, обусловлено конечностью скорости распространения света и движением наблюдателя вследствие вращения Земли (суточная аберрация), вследствие обращения Земли вокруг Солнца (годичная аберрация) и перемещения Солнечной системы в космическом пространстве (вековая аберрация).

Пусть в системе отсчета K (рис. 18), относительно которой источник S неподвижен, распространяется плоская волна в направлении волнового вектора $\vec{\kappa}$, составляющего угол α с осью y. В системе отсчета K', связанной с прибором, находящимся на Земле, угол между волновым вектором $\vec{\kappa}'$ и осью y' обозначим Θ. Тогда из рис. 18 находим

$$\kappa_x = -\frac{\omega}{c}\sin\alpha, \quad \kappa'_x = -\frac{\omega'}{c}\sin\Theta.$$

Из (26.3), если учесть, что $\kappa^2 = \omega^2/c^2$, $\kappa'^2 = \omega'^2/c^2$, имеем

$$\omega\sin\alpha = \omega'\frac{\sin\Theta-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \omega = \omega'\frac{1-\beta\sin\Theta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Отсюда находим

$$\omega' = \omega\frac{1+\beta\sin\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \sin\Theta = \frac{\sin\alpha+\beta}{1+\beta\sin\alpha}. \tag{26.4}$$

Рассмотрим случай, когда $\alpha = 0$, т. е. источник S излучает свет перпендикулярно направлению движения Земли. Тогда из (26.4) находим

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \sin\Theta = \beta.$$

Таким образом, все частоты, излучаемые источником, будут сдвинуты в коротковолновую область на относительную величину

$$\frac{\omega'-\omega}{\omega} \simeq \frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq \frac{\beta^2}{2} \quad (\text{при } \beta \ll 1).$$

Этот эффект изменения частоты, который имеет чисто релятивистскую природу, называют *поперечным эффектом Доплера*. Кроме того, хотя $\alpha = 0$, на Земле источник S будет виден под углом $\Theta = \arcsin\beta$. Поэтому в результате годичного обращения Земли вокруг Солнца видимые положения находящихся в зените светящихся объектов на небесной сфере будут описывать окружности с угловыми размерами, равными 2β (при $\beta \ll 1$). Это явление называется аберрацией.

Если же Земля движется по направлению к источнику ($\alpha = \pi/2$), то из (26.4) следует, что $\Theta = \pi/2$, т. е. явление аберрации отсутствует. Для эффекта Доплера в этом случае из формулы (26.4) получаем

$$\omega' = \omega\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

Следовательно, относительный сдвиг частот

$$\frac{\omega'-\omega}{\omega} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1 \simeq \beta \quad (\text{при } \beta \ll 1).$$

Таким образом, продольный эффект Доплера имеет первый порядок по величине β и его можно было бы получить (при $\beta \ll 1$) с помощью преобразований Галилея.

Все названные эффекты наблюдаются и в других случаях, например при исследовании излучения пучка атомов, движущегося относительно прибора.

Рассмотрим, как изменяется фазовая скорость плоской монохроматической электромагнитной волны в зависимости от скорости движения среды, в которой она распространяется. Фазовая скорость света в прозрачной неподвижной среде $v' = \omega'/k' = c/n$. Для вычисления фазовой скорости света в движущейся со скоростью v среде воспользуемся формулами (26.3):

$$v_\Phi = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{\omega'+v\kappa'}{\kappa'+(v/c^2)\omega'} = \frac{(\omega'/\kappa')+v}{1+(v/c^2)(\omega'/\kappa')} = \frac{v+c/n}{1+v/(cn)}.$$

Если $v/(cn) \ll 1$, то эту формулу можно упростить:

$$v_\Phi \simeq \frac{c}{n} + v\left(1-\frac{1}{n^2}\right). \tag{26.5}$$

В 1851 г. А. Физо поставил эксперимент по определению фазовой скорости света в движущейся среде. Схема этого эксперимента приведена на рис. 19. Луч света от источника L разделяется полупрозрачной пластинкой M на два луча, которые проходят путь $MS_1S_2S_3M$ в противоположных направлениях. Согласно формуле (26.5), фазовая скорость света в трубках, через которые прокачивается жидкость, равна $c/n \pm v\alpha$, где $\alpha = 1 - 1/n^2$ — коэффициент увлечения, v — скорость движения жидкости. Оба луча затем направляют в интерферометр I, где наблюдается интерференционная картина, обусловленная разностью фазовых скоростей лучей Измерения сначала производились при неподвижной жидкости, затем — при движущейся. По смещению интерференционных полос, которое равно $r = (4\pi l/\lambda)\, n^2\alpha$, где r — число смещенных полос, вычислялась разность хода лучей, а отсюда — и коэффициент увлечения $\alpha =$

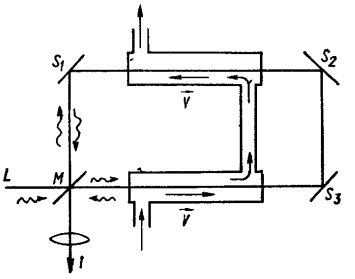


Рис. 19

$= 1 - 1/n^2$. Результаты измерений полностью соответствовали формуле (26.5). Отметим, что если бы мы исходили из классического правила сложения скоростей, то получили бы другой результат: $v_\Phi = c/n + v$, т. е. $\alpha \simeq 1$.

Рассмотрим еще очень интересный релятивистский эффект, так называемый «*парадокс часов*», который в научно-популярной литературе не совсем удачно называется «парадоксом близнецов». В инерциальной системе отсчета K, которую будем считать неподвижной, находятся на расстоянии друг от друга двое одинаковых синхронизованных часов. Пусть в момент времени $t = 0$ из точки $x = 0$, где находятся первые часы, вылетает самолет с точно такими же часами на борту. Двигаясь равномерно со скоростью v, он прибывает в точку, где находятся другие часы, которые показывают время, равное l/v. Таким образом, в системе отсчета, связанной с Землей, начальная точка в четырехмерном пространстве имеет координаты (0, 0), а конечная — $(l/v, l)$. Найдем с помощью преобразования Лоренца координаты этих событий в системе отсчета, связанной с самолетом, а следовательно, и с находящимися в нем часами. Используя формулы

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

находим начальные координаты события (0, 0) и конечные координаты $(t', x') = \left(\frac{l}{v}\sqrt{1-\beta^2}, 0\right)$. Таким образом, часы в самолете покажут время

$$t' = \frac{l}{v}(1-\beta^2)^{1/2}.$$

Следовательно, разность в показаниях часов, находящихся на Земле и на самолете, будет равна

$$\Delta t = t - t' = \frac{l}{v}[1 - (1-\beta^2)^{1/2}]. \qquad (26.6)$$

Если $\beta \ll 1$, то $\Delta t \simeq \frac{l\beta^2}{2v}$.

Этот эффект был подтвержден прямыми опытами, в которых сравнивались показания цезиевых часов, облетевших вокруг Земли на реактивном самолете, и таких же часов, остававшихся на Земле. Если скорость самолета $v = 3 \cdot 10^2$ м/с, $l = 4 \cdot 10^7$ м, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, то по формуле (26.6) находим

$$\Delta t \approx 7 \cdot 10^{-8} \text{ с}.$$

Точность цезиевых часов достаточна для измерения такой величины.

Отметим, что в настоящее время не известен ни один экспериментальный факт, который противоречил бы теории относительности.

§ 27. Принцип наименьшего действия для электромагнитного поля

Действие для всей системы, состоящей из частиц и электромагнитного поля, должно состоять из трех частей:

$$S = S_m + S_f + S_{int},$$

где S_m и S_f — слагаемые, соответствующие свободным частицам и свободному полю соответственно; S_{int} — слагаемое, описывающее взаимодействие между ними.

Используя (24.2), имеем

$$S = \int L dt + S_f = \int [-mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} + e(\vec{v}\cdot\vec{A}) - e\varphi]\,dt + S_f.$$

Запишем это выражение в виде

$$S = \int \left(-mc^2 + \frac{e(\vec{v}\cdot\vec{A})}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{e\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) d\tau + S_f, \qquad (27.1)$$

где $d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2}$ — собственное время.

Поскольку

$$A^\mu = (\varphi, c\vec{A}), \quad A_\mu = (\varphi, -c\vec{A}), \quad u^\mu = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right),$$

то формулу (27.1) можно переписать в релятивистски инвариантном виде:

$$S = \int \left(-mc^2 - \frac{e}{c} A_\mu u^\mu\right) d\tau + S_f.$$

Учитывая, что $dx^\mu = u^\mu d\tau$, $d\tau = \frac{ds}{c}$, перепишем это выражение следующим образом:

$$S = -\int mcds - \frac{e}{c}\int A_\mu dx^\mu + S_f.$$

Найдем действие S_f для свободного электромагнитного поля. Так как уравнения поля линейны, то под знаком интеграла в действии S должно стоять выражение, квадратичное по полю, и, кроме того, оно должно быть инвариантом. В § 26 было показано, что таким инвариантом является скалярная величина $I_1 = \frac{1}{2} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Второй инвариант $I_2 = (\vec{E}\cdot\vec{B})$, хотя и квадратичный по полю, но является не скаляром, а псевдоскаляром, т. е. при инверсии его знак изменяется. Поэтому в качестве действия для электромагнитного поля следует выбрать выражение

$$S = a\int dt \int dV F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

где a — некоторая константа, которая будет определена ниже.

Таким образом, для полного действия имеем

$$S = -\int mcds - \frac{e}{c}\int A_\mu dx^\mu + a\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} dV dt.$$

Для системы частиц интеграл действия (27.1) необходимо записать в виде суммы

$$S = -\sum_i \int m_i c ds_i - \sum_i \frac{e_i}{c} \int A_\mu dx_i^\mu + a \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} dV dt. \quad (27.2)$$

Здесь суммирование производится по всем частицам, которые рассматриваются как точечные.

Часто при рассмотрении движения частиц используют модель сплошной среды, в которой частицы считаются распределенными в пространстве с массовой плотностью μ и плотностью заряда ρ. Тогда в формуле (27.2) вместо сумм по частицам будут стоять интегралы по объему:

$$S = \int \left(-\mu c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \rho\varphi \right) dV dt + S_f. \quad (27.3)$$

Переход от (27.3) к (27.2) происходит путем замены

$$ds = \varepsilon d\tau = c dt \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \mu = \sum_i m_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad \rho = \sum_i e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i),$$

$$\vec{j} = \rho \vec{v}.$$

В § 25 было показано (25.7), что выражение $d\Omega = dV dt$ есть инвариант относительно преобразования Лоренца. Так как действие, выражаемое формулой (27.3), должно быть релятивистски инвариантным, то инвариантным должно быть и подынтегральное выражение

$$-\mu c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \rho\varphi.$$

Первое слагаемое не связано с электромагнитным полем, следовательно, оно должно быть инвариантным и при $\vec{A} = 0$, $\varphi = 0$. Поэтому должно быть также инвариантным выражение

$$\rho (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \rho\varphi, \quad (27\,4)$$

описывающее взаимодействие электромагнитного поля с веществом. Действительно, учитывая, что $A_\mu = (\varphi, -c\vec{A})$, $j^\mu = (c\rho, \vec{j}) = (c\rho, \rho\vec{v})$, запишем выражение (27.4) в релятивистски инвариантной форме

$$\rho (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \rho\varphi = -\frac{1}{c} j^\mu A_\mu. \quad (27.5)$$

Это слагаемое, содержащее величины, относящиеся как к электромагнитному полю (A_μ), так и к частицам(j^μ), описывает электромагнитное взаимодействие между частицами и полем.

Таким образом, интеграл действия для системы, состоящей из взаимодействующих частиц и поля, имеет вид

$$S = \int \left(-\mu c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{c} j^\mu A_\mu + a F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) d\Omega, \quad (27.6)$$

где $d\Omega = dV dt$ — четырехмерный объем.

Согласно вариационному принципу, при заданных токах поля должны быть такими, чтобы функционал (27.6) имел экстремум. Вычислим вариацию этого функционала, считая состояние частиц заданным. В этом случае первое слагаемое в (27.6), а также ток j^μ необходимо считать постоянными величинами. Тогда, учитывая, что $F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}$, имеем

$$\delta S = \int \left[-\frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu + 2a F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} \right] d\Omega = 0.$$

Используя (25.11), перепишем эту формулу в виде

$$\delta S = \int \left[-\frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu + 2a F^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta A_\nu - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta A_\mu \right) \right] d\Omega = 0.$$

Так как $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$, то $F^{\mu\nu} \frac{\partial \delta A_\nu}{\partial x^\mu} = -F^{\mu\nu} \frac{\partial \delta A_\mu}{\partial x^\nu}$, и поэтому

$$\int \left(\frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu + 4a F^{\mu\nu} \frac{\partial \delta A_\mu}{\partial x^\nu} \right) d\Omega = 0.$$

Представим это соотношение в следующем виде:

$$\int \left(\frac{1}{c} j^\mu - 4a \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \right) \delta A_\mu d\Omega + 4a \int \frac{\partial}{\partial x^\nu} (F^{\mu\nu} \delta A_\mu) d\Omega = 0. \quad (27.7)$$

Рассмотрим в этом выражении последний интеграл, учитывая, что $d\Omega = dV dt$:

$$\int \frac{\partial}{\partial x^\nu} (F^{\mu\nu} \delta A_\mu) dV dt = \int \frac{\partial}{\partial x_i} (F^{\mu i} \delta A_\mu) dV dt + \int \frac{\partial}{\partial x^0} (F^{\mu 0} \delta A_\mu) dt dV.$$

Первый интеграл в правой части с помощью теоремы Остроградского можно преобразовать в интеграл по поверхности, а второй, учитывая, что $x^0 = ct$, можно проинтегрировать по времени. В результате получим

$$\int \frac{\partial}{\partial x^\nu} (F^{\mu\nu} \delta A_\mu) d\Omega = \int n_i F^{\mu i} \delta A_\mu dS dt + \frac{1}{c} \int dV F^{\mu 0} \delta A_\mu \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Поскольку на больших расстояниях поле исчезает и поэтому интеграл по поверхности равен нулю, а в заданные моменты времени t_1, t_2 вариации $\delta A_\mu(t_1) = \delta A_\mu(t_2) = 0$, то второй интеграл в (27.7) равен нулю и в силу произвольности δA_μ получаем

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{1}{4ac} j^\mu.$$

Сравнивая последнее выражение с (25.14), находим $a = -\varepsilon_0/4$.

Таким образом, интеграл действия системы, состоящей из частиц и электромагнитного поля, имеет вид

$$S = -\int \left(\mu c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{1}{c} j^\mu A_\mu + \frac{\varepsilon_0}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) d\Omega. \quad (27.8)$$

Подынтегральное выражение в (27.8)

$$\mathcal{L} = -\left(\mu c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{1}{c} j^\mu A_\mu + \frac{\varepsilon_0}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right)$$

представляет собой плотность функции Лагранжа и является инвариантом относительно преобразования Лоренца, так как S и $d\Omega$ в формуле (27.8) — инварианты.

Покажем, что интеграл действия (27.8) градиентно инвариантен, другими словами, не изменяется при преобразовании потенциалов (10.4), которое в четырехмерной форме записывается следующим образом:

$$A_\mu = A'_\mu + \frac{\partial f}{\partial x^\mu}. \tag{27.9}$$

Компоненты тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ инвариантны относительно калибровочного преобразования (27.9). Действительно,

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial A'_\nu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial A'_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = F'_{\mu\nu}.$$

(При калибровочном преобразовании координаты не преобразуются!). Таким образом, последнее слагаемое в (27.8) градиентно инвариантно.

Подвергнем теперь калибровочному преобразованию второе слагаемое в (27.8):

$$\int j^\mu A_\mu d\Omega = \int j^\mu A'_\mu d\Omega + \int j^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} d\Omega.$$

Рассмотрим в этом выражении последний интеграл, переписав его в виде

$$\int j^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} d\Omega = -\int f \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} d\Omega + \int \frac{\partial}{\partial x^\mu}(j^\mu f)\, d\Omega.$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю вследствие уравнения непрерывности (25.8). Второе слагаемое может быть преобразовано в сумму интеграла по поверхности и интеграла по времени:

$$\int \frac{\partial}{\partial x^\mu}(j^\mu f)\, d\Omega = \int (\vec{n} \cdot \vec{j})\, f dS dt + \int f j^0 \Big|_{-\infty}^{\infty} dV.$$

Так как интеграл по поверхности равен нулю и $j^0 (\pm\infty) = 0$, то $\int \frac{\partial}{\partial x^\mu}(j^0 f)\, d\Omega = 0$ (если интегрирование производится по всему пространству и по всему времени).

Таким образом, выражение (27.8) инвариантно относительно градиентного преобразования.

Градиентная инвариантность уравнений электродинамики тесно связана с законом сохранения электрического заряда. Если потребовать, чтобы уравнения поля были градиентно инвариантны, то как следствие получим закон сохранения заряда (§ 6). Таким образом, инвариантность (симметрия) уравнений движения всегда приводит к законам сохранения. Градиентно инвариантные поля различной природы называются калибровочными полями. Электромагнитное поле принадлежит к классу калибровочных полей.

§ 28. Законы сохранения в четырехмерной форме

В § 23 получены уравнения движения классической механики, инвариантные относительно преобразования Лоренца, а в § 25 показана инвариантность уравнений Максвелла относительно этого преобразования. Интеграл действия для взаимодействующих частиц и электромагнитного поля (27.8) также инвариантен относительно преобразования (22.6). Кроме того, действие (27.8) инвариантно относительно градиентного преобразования (27.9).

Наряду с инвариантностью относительно преобразования Лоренца (принцип относительности) из опыта известны и другие принципы инвариантности, или симметрии, законов природы. Например, любой физический процесс происходит абсолютно одинаково: 1) если его осуществлять в любой точке пространства (однородность пространства); 2) если систему, в которой происходит процесс, повернуть на произвольный угол (изотропия пространства); 3) если повторить тот же процесс через произвольный промежуток времени (однородность времени).

Эти три вида симметрии сохраняются и в релятивистской механике, но симметрия относительно преобразования Галилея заменяется более точной симметрией относительно преобразования Лоренца. Симметрии (1—3) выполняются абсолютно точно только в изолированной от внешних воздействий системе, т. е. если можно пренебречь действием внешних факторов на эту систему.

Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса можно получить из условия инвариантности интеграла действия (27.8) по отношению к сдвигу в пространстве (симметрия 1) и времени (симметрия 3), а также по отношению к вращению (симметрия 2). Именно в этом заключается важное преимущество вариационного подхода, который дает возможность единообразно получать как уравнения движения, так и вытекающие из них законы сохранения.

В § 9 эти законы сохранения были получены как следствия из уравнения движения (9.1) — (9.4) и выражаются формулами (9.9), (9.22) и (9.23).

Очевидно, что релятивистские законы сохранения в четырехмерной форме можно получить из готовых результатов (9.9), (9.22) и (9.23), если записать их в релятивистски ковариантной форме. Полагая в формуле (9.9) $\vec{j}_{\text{вн}} = 0$ (изолированная система), перепишем ее в виде

$$\int \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\Pi}\right) dV = -\frac{dU}{dt},$$

где W определяется формулой (9.8), а вектор $\vec{\Pi}$ — формулой (9.7). Так как, согласно (9.6), $\frac{dU}{dt} = \int (\vec{j} \cdot \vec{E})\, dV$, то

$$\int \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\Pi}\right) dV = -\int (\vec{j} \cdot \vec{E})\, dV.$$

Это соотношение справедливо для любого объема и поэтому его можно записать в дифференциальной форме

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_i}{\partial x_i} = -(\vec{j} \cdot \vec{E}). \tag{28.1}$$

Здесь и далее латинские индексы (i, j, k, ...) относятся к пространственным компонентам и, следовательно, принимают значения 1, 2, 3.

Уравнение (9.22), если в нем заменить

$$\vec{g} = \frac{\vec{\Pi}}{c^2} = \varepsilon_0 [\vec{E}, \vec{B}],$$

приобретает вид

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \Pi_i}{\partial t} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -f^i. \tag{28.2}$$

Обозначив $f^0 = \frac{1}{c}(\vec{j} \cdot \vec{E})$, перепишем уравнения (28.1) и (28.2):

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_i}{\partial x_i} = -cf^0, \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Pi_i}{\partial t} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -f^i.$$

Введя обозначения $\frac{1}{c}\Pi_i = T^{0i}$, $T_{ij} = T^{ij}$, $W = T^{00}$, $x^0 = ct$, запишем эти формулы в виде

$$\frac{\partial T^{0\nu}}{\partial x^\nu} = -f^0, \quad \frac{\partial T^{i\nu}}{\partial x^\nu} = -f^i.$$

Объединяя оба выражения в одно, и учитывая, что f^0 и f^i являются компонентами четырехмерного вектора объемной плотности силы (25.19), получим

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -f^\mu = -\frac{1}{c} j_\nu F^{\mu\nu}, \tag{28.3}$$

где $j_\nu = (c\rho, -\rho\vec{v})$ — четырехмерный вектор то ка, а

$$f^\mu = \left(\frac{\vec{j} \cdot \vec{E}}{c}, \rho\vec{E} + [\vec{j}, \vec{B}]\right)$$

— четырехмерный вектор, состоящий из силы Лоренца (пространственная компонента), действующей на единицу объема, и мощности, с которой электромагнитное поле совершает работу над частицами в единице объема; $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ — четырехмерный симметричный *тензор плотности энергии импульса*, который можно выразить через тензор $F^{\mu\nu}$ следующим образом:

$$T^{\mu\nu} = -\varepsilon_0\left(g_{\lambda\sigma}F^{\lambda\mu}F^{\sigma\nu} - \frac{1}{4}\delta^{\mu\nu}F^{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma}\right).$$

В матричной записи этот тензор имеет вид

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} W & \frac{1}{c}\Pi_1 & \frac{1}{c}\Pi_2 & \frac{1}{c}\Pi_3 \\ \frac{1}{c}\Pi_1 & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ \frac{1}{c}\Pi_2 & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ \frac{1}{c}\Pi_3 & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}. \tag{28.4}$$

Пространственные компоненты T_{ij} четырехмерного тензора $T^{\mu\nu}$ совпадают с компонентами трехмерного тензора натяжений Максвелла (9.19), временная компонента T^{00} является плотностью электромагнитной энергии (9.8), а пространственно временные компоненты $T^{0i} = T^{i0}$ совпадают с компонентами трехмерного вектора плотности импульса (9.18), умноженными на c.

Найдем уравнение, аналогичное уравнению (28.3) для частиц. Уравнение движения частиц имеет вид (25.17). Переходя к непрерывному распределению заряда и массы и используя соотношение $\rho/\mu = e/m$, где μ — массовая плотность вещества, перепишем уравнение (25.17) в виде [1]

$$\mu\frac{du^\nu}{dt} = \mu\frac{\partial u^\nu}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\lambda}{dt} = f^\nu = \frac{1}{c} j_\lambda F^{\nu\lambda}, \tag{28.5}$$

где f^ν — объемная плотность сил (25.19).

Уравнение непрерывности для массы частиц имеет вид

$$\frac{\partial j^\lambda}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\mu\frac{dx^\lambda}{dt}\right) = 0. \tag{28.6}$$

Здесь $j^\lambda = (\mu c, \mu\vec{v})$ — четырехмерный вектор потока массы.

Умножим (28.6) на u^ν и сложим с (28.5). В результате получим

$$\mu\frac{dx^\lambda}{dt}\frac{\partial u^\nu}{\partial x^\lambda} + u^\nu\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\mu\frac{dx^\lambda}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\mu u^\nu\frac{dx^\lambda}{dt}\right) = \frac{1}{c} j_\lambda F^{\nu\lambda}. \tag{28.7}$$

Введем четырехмерный тензор плотности энергии импульса частиц $T_m^{\lambda\nu}$:

$$T_m^{\lambda\nu} = \mu u^\lambda\frac{dx^\nu}{dt} = \mu u^\lambda u^\nu\frac{d\tau}{dt}. \tag{28.8}$$

Тогда (28.7) примет вид

$$\frac{\partial T_m^{\lambda\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{1}{c} j_\lambda F^{\nu\lambda}. \tag{28.9}$$

[1] В механике сплошной среды скорость, импульс, энергия и другие величины относятся не к движущейся частице, а к точке пространства [12, § 45]. Поэтому вместо $\vec{v}_i(t)$ имеем $\vec{v}(x, y, z, t)$, т. е. индекс частицы i заменяется координатами точки пространства x, y, z. Поэтому $\frac{dp^\mu}{dt} = \frac{\partial p^\mu}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{dt}$, $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{dt}$.

Суммируя выражения (28.3) и (28.9), получаем закон сохранения энергии импульса частиц и поля в четырехмерной форме

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}(T_f^{\lambda\nu} + T_m^{\lambda\nu}) = 0,$$

где $T_f^{\lambda\nu}$ — тензор энергии импульса электромагнитного поля (28.8).

Придадим теперь закону сохранения момента импульса четырехмерную ковариантную форму. Так как вектор импульса электромагнитного поля и его энергия в релятивистской теории объединяются в единый четырехмерный тензор второго ранга энергии импульса $T^{\mu\nu}$ (28.4), то *момент импульса электромагнитного поля* следует определить следующим образом:

$$L_f^{\nu,\mu\lambda} = (x^\lambda T_f^{\nu\mu} - x^\mu T_f^{\nu\lambda}). \qquad (28.10)$$

Согласно этому определению, четырехмерный тензор третьего ранга $L_f^{\nu,\mu\lambda}$ антисимметричен относительно пары индексов μ, λ.

Выясним физический смысл отдельных компонент тензора $L_f^{\nu,\mu\lambda}$. Сначала рассмотрим те компоненты, у которых первый индекс равен 0, а два других принимают значения 1, 2, 3:

$$L_f^{0,ij} = (x^i T_f^{0j} - x^j T_f^{0i}).$$

Согласно (28.4), компоненты $T_f^{0j} = \frac{\Pi_j}{c} = cg_j$ связаны с компонентами объемной плотности трехмерного вектора импульса электромагнитного поля. Поэтому $-\frac{1}{c}L_f^{0,23} = L_x$, $-\frac{1}{c}L_f^{0,31} = L_y$, $-\frac{1}{c}L_f^{0,12} = L_z$. Таким образом, формула (28.10) есть правильное обобщение момента импульса на четырехмерный случай.

Рассмотрим выражение

$$\frac{\partial L_f^{\nu,\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}(x^\lambda T_f^{\nu\mu}) - \frac{\partial}{\partial x^\nu}(x^\mu T_f^{\nu\lambda}) =$$

$$= x^\lambda \frac{\partial T_f^{\nu\mu}}{\partial x^\nu} - x^\mu \frac{\partial T_f^{\nu\lambda}}{\partial x^\nu} + T_f^{\nu\mu}\delta_\nu^\lambda - T_f^{\nu\lambda}\delta_\nu^\mu = x^\lambda \frac{\partial T_f^{\nu\mu}}{\partial x^\nu} - x^\mu \frac{\partial T_f^{\nu\lambda}}{\partial x^\nu}.$$

Используя формулу (28.3), перепишем это соотношение в виде

$$\frac{\partial L_f^{\nu,\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = \frac{1}{c}[x^\mu j_\nu F^{\lambda\nu} - x^\lambda j_\nu F^{\mu\nu}]. \qquad (28.11)$$

Рассмотрим следующие компоненты этого уравнения:

$$\frac{\partial L_f^{\nu,ik}}{\partial x^\nu} = \frac{1}{c}[x^i j_\nu F^{k\nu} - x^k j_\nu F^{i\nu}].$$

Распишем это соотношение более детально для компоненты $L_f^{\nu,23}$:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial L_f^{0,23}}{\partial t} + \frac{\partial L_f^{k,23}}{\partial x^k} = \frac{1}{c}(yj_\nu F^{z\nu} - zj_\nu F^{y\nu}) =$$

$$= -c\{[\vec{r}, (\rho\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}])]\}_x. \qquad (28.12)$$

Учитывая определения (28.10) компонент $L_f^{k,23}$, перепишем (28.12) в виде

$$\frac{\partial L_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(yT_{fzk} - zT_{fyk}) = [\vec{r}, \rho(\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}])]_x. \qquad (28.13)$$

Формула (28.10) определяет четырехмерный тензор момента импульса третьего ранга электромагнитного поля. Тензор момента импульса частиц определим аналогичной формулой

$$L_m^{\nu,\mu\lambda} = T_m^{\nu\mu}x^\lambda - T_m^{\nu\lambda}x^\mu, \qquad (28.14)$$

где $T_m^{\nu\mu}$ — четырехмерный тензор энергии импульса частиц (28.8).

Рассмотрим выражение

$$\frac{\partial L_m^{\nu,\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}(T_m^{\nu\mu}x^\lambda - T_m^{\nu\lambda}x^\mu) = x^\lambda \frac{\partial T_m^{\nu\mu}}{\partial x^\nu} - x^\mu \frac{\partial T_m^{\nu\lambda}}{\partial x^\nu}.$$

Воспользовавшись формулой (28.9), получаем

$$\frac{\partial L_m^{\nu,\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = \frac{1}{c}(x^\lambda j_\nu F^{\mu\nu} - x^\mu j_\nu F^{\lambda\nu}).$$

Складывая это выражение с (28.11), имеем

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}(L_f^{\nu,\mu\lambda} + L_m^{\nu,\mu\lambda}) = 0.$$

Обозначим $L^{\nu,\mu\lambda} = L_f^{\nu,\mu\lambda} + L_m^{\nu,\mu\lambda}$ суммарный момент импульса частиц $L_m^{\nu,\mu\lambda}$ и поля $L_f^{\nu,\mu\lambda}$ и положим в этом соотношении $\mu = 1$, $\lambda = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}(L^{\nu,10}) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(L_f^{0,10} + L_m^{0,10}) + \frac{\partial}{\partial x_l}(L_f^{l,10} + L_m^{l,10}).$$

Проинтегрируем это выражение по всему объему, в котором находятся частицы и поле, и воспользуемся теоремой Остроградского. В результате получим

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int L^{0,10}dV + \int L^{l,10}n_l dS = 0.$$

Если поверхность S проходит в области, где нет частиц и поля, то интеграл по поверхности в этом выражении обращается в нуль и поэтому $\frac{d}{dt}\int L^{0,10}dV = 0$. Следовательно,

$$\int L^{0,10}dV = \text{const}. \qquad (28.15)$$

Выясним, пользуясь определением тензора момента импульса системы «частицы + поле» (28.10), физический смысл компоненты $L^{0,10}$:

$$L^{0,10} = T^{01}ct - T^{00}x^1 = \Pi_x t - Wx.$$

Так как для изолированной системы $\int WdV$ также есть интеграл движения, то равенство (28.15) можно записать как

$$\frac{t\int \Pi_x dV - \int xWdV}{\int WdV} = \text{const}.$$

Отсюда получаем формулу

$$X = \frac{\int xWdV}{\int WdV} = t\frac{\int \Pi_x dV}{\int WdV} + \text{const},$$

которая в векторной форме имеет вид

$$\vec{R} = t\frac{\int \vec{\Pi} dV}{\int WdV} + \text{const}.$$

Следовательно, точка с радиусом-вектором

$$\vec{R} = \frac{\int \vec{r}WdV}{\int WdV} \tag{28.16}$$

движется равномерно со скоростью

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}} = \frac{\int \vec{\Pi} dV}{\int WdV}.$$

Формула (28.16) есть релятивистское определение координаты центра инерции системы, состоящей из частиц и поля.

В случае электромагнитного поля в вакууме существует еще один интеграл движения, который можно получить следующим образом. Рассмотрим два тождества:

$$A^\nu \Box A^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(A^\nu \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda}\right) - \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda} = 0,$$

$$A^\mu \Box A^\nu = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(A^\mu \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\lambda}\right) - \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\lambda} = 0.$$

Справа стоит нуль, так как для свободного электромагнитного поля в вакууме $\Box A^\mu = 0$. Вычтем из первого равенства второе. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda}A^\nu - \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\lambda}A^\mu\right) = 0.$$

Отсюда следует, что антисимметричный по паре индексов μ и ν тензор третьего ранга

$$S^{\lambda,\mu\nu} = \varepsilon_0\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda}A^\nu - \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\lambda}A^\mu\right) \tag{28.17}$$

удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial S^{\lambda,\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = 0.$$

Этот тензор называется *тензором спиновой плотности* электромагнитного поля.

Рассмотрим следующие компоненты тензора (28.17):

$$S^{0,kl} = \varepsilon_0\left(\frac{\partial A^k}{\partial x^0}A^l - \frac{\partial A^l}{\partial x^0}A^k\right).$$

Вычислим, в частности, интеграл от компоненты $S^{0,xy}$ по всему объему, обозначив этот интеграл S_z:

$$S_z = \int S^{0,xy}dV = \frac{\varepsilon_0}{c}\int\left(A_y\frac{\partial A_x}{\partial t} - A_x\frac{\partial A_y}{\partial t}\right)dV \tag{28.18}$$

для циркулярно поляризованной монохроматической волны, распространяющейся вдоль оси z. Эта волна имеет следующие компоненты (13.10):

$$A_x = \frac{A}{\sqrt{2}}\cos(\omega t - \kappa z - \delta_1),$$

$$A_y = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}\sin(\omega t - \kappa z - \delta_1).$$

Подставляя эти выражения в (28.18), имеем

$$S_z = \pm\frac{\varepsilon_0\omega}{2c}\int A^2 dV. \tag{28.19}$$

Энергия рассматриваемой волны

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int\left[c^2(\operatorname{rot}\vec{A})^2 + \left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)^2\right]dV = \frac{\varepsilon_0\omega^2}{2}\int A^2 dV.$$

С помощью последнего выражения перепишем формулу (28.19) в виде

$$S_z = \pm\frac{W}{\omega}.$$

Воспользовавшись формулой Планка $\varepsilon = W = \hbar\omega$, получим

$$S_z = \pm\hbar.$$

Это означает, что электромагнитная волна имеет спин (внутренний момент количества движения), проекции которого на направление движения принимают значение $\pm\hbar$ (для циркулярно поляризованных плоских волн).

В системе координат, где выбрана калибровка Гамильтона, скалярный потенциал $\varphi = 0$, кроме того, $\operatorname{div}\vec{A} = 0$, и поэтому все остальные компоненты тензора $S^{\nu,\lambda\mu}$ равны нулю.

Часть II

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Глава 5

МОДЕЛЬ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

§ 29. Диэлектрики

Система уравнений, состоящая из уравнений Максвелла (8.1) — (8.4) для электромагнитного поля и уравнений Ньютона для частиц, представляет собой единую систему уравнений, описывающую все явления, обусловленные электромагнитным взаимодействием (без учета релятивистских и квантовых эффектов). Поэтому, строго говоря, их необходимо решать совместно. Однако в такой наиболее общей постановке решать задачи о взаимодействии электромагнитного поля с веществом чрезвычайно трудно. Сложность проблемы заключается в том, что вещество состоит из громадного количества частиц, движение которых каждой в отдельности практически невозможно описать. С такой проблемой мы уже встречались в классической механике при попытках описать механическое движение газов, жидкостей и твердых тел. Чтобы обойти эту трудность приходилось строить определенные модели механических систем: модель абсолютно твердого тела [12, гл. II], модель сплошной среды [12, гл. VI] и др. При изучении взаимодействия заряженных частиц с электромагнитным полем также приходится вводить некоторые модели. Одной из широко употребляемых является модель сплошной среды, состоящей из электрических диполей *(диэлектрик)*.

Модель электрического диполя играет очень важную роль в физике, так как атомы и молекулы представляют собой системы заряженных частиц, которые в целом нейтральны, но могут обладать отличным от нуля дипольным моментом и поэтому создавать электрическое поле. Для описания электромагнитных свойств системы, состоящей из большого количества электрических диполей, воспользуемся моделью сплошной среды, состоящей из атомов и молекул, обладающих дипольным моментом $\vec{p}_l$. Потенциал такой системы в некоторой точке наблюдения $\vec{r}$, согласно принципу суперпозиции, равен сумме потенциалов (3.1), создаваемых отдельными диполями $\vec{p}_l$, расположенными в точках $\vec{r}_l$:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=1}^{N} \frac{\vec{p}_l \cdot (\vec{r} - \vec{r}_l)}{|\vec{r} - \vec{r}_l|^3}. \qquad (29.1)$$

Так как

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}_l}{|\vec{r} - \vec{r}_l|^3} = \vec{\nabla}_l \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_l|},$$

то формулу (29.1) можно переписать в виде

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=1}^{N} \vec{p}_l \cdot \vec{\nabla}_l \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_l|} \right). \qquad (29.2)$$

Перейдем теперь к модели сплошной среды, заменив $\vec{p}_l$ на $\vec{P}dV$, где $\vec{P}$ — дипольный момент единицы объема, который принято называть вектором поляризации. Этот вектор характеризует степень поляризации диэлектрика. Подставляя в формулу (29.2) $\vec{P}_l dV_l$ вместо $\vec{p}_l$ и переходя от суммирования к интегрированию, получим

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV'.$$

Воспользовавшись формулой (7) приложения II, перепишем это выражение следующим образом:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \operatorname{div}' \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\operatorname{div}' \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

Первый интеграл может быть преобразован с помощью орфмулы Остроградского в интеграл по поверхности

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\operatorname{div}' \vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \qquad (29.3)$$

где $\sigma = \vec{P} \cdot \vec{n}$.

Основываясь на принципе суперпозиции, можно утверждать, что в формуле (29.3) слагаемое $-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\operatorname{div}' \vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$ определяет поле, создаваемое дипольными частицами, находящимися внутри объема интегрирования. Сравнивая это выражение с формулой (1.9), находим, что дипольные частицы создают такое же поле, как и заряженные частицы с объемной плотностью заряда

$$\rho = -\operatorname{div} \vec{P}. \qquad (29.4)$$

Эти заряды иногда называют связанными или поляризационными зарядами.

Любой объем диэлектрика должен быть нейтральным. Отсюда следует, что

$$\int \rho dV + \int \sigma dS = -\int \operatorname{div} \vec{P} dV + \int \sigma dS = 0.$$

Таким образом, для произвольно выбранного объема должно выполняться равенство $\int (-P_n + \sigma)\, dS = 0$, т. е. величина $\sigma = P_n$ есть поверхностная плотность поляризационных зарядов. Следовательно, слагаемое $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'$ в (29.3) определяет поле, создаваемое поляризационными зарядами, находящимися на поверхности, ограничивающей объем интегрирования.

Выясним, какой вид примут уравнения Максвелла (8.2) и (8.3) для электромагнитного поля внутри диэлектрика. Для этого подставим (29.4) в (8.3):

$$\operatorname{div}\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\operatorname{div}\vec{P}.$$

Если определить вектор электромагнитной индукции формулой

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \tag{29.5}$$

то уравнение (8.3) запишется в виде

$$\operatorname{div}\vec{D} = 0,$$

а при наличии также и сторонних по отношению к веществу диэлектрика зарядов с объемной плотностью $\rho_{\text{стор}}$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho_{\text{стор}}. \tag{29.6}$$

Так как $\rho = -\operatorname{div}\vec{P}$, то из уравнения непрерывности (6.4) следует, что в нестационарном случае с вектором поляризации $\vec{P}$ связан *поляризационный ток:*

$$\vec{j} = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}. \tag{29.7}$$

Этот ток необходимо учесть в уравнении (6.3), тогда оно приобретает вид

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j}_{\text{стор}} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\left(\vec{j}_{\text{стор}} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right). \tag{29.8}$$

Здесь учтено определение вектора индукции $\vec{D}$ (29.5), поэтому плотность тока $\vec{j}_{\text{стор}}$ в формуле (29.8) уже не содержит поляризационного тока. Обычно в хороших диэлектриках можно положить $\vec{j}_{\text{стор}} = 0$. Величину $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ иногда называют *током смещения.*

Вектор поляризации $\vec{P}$ макроскопических систем в отсутствие внешнего поля в средах, за исключением электретов, сегнетоэлектриков и пироэлектриков, равен нулю и может довольно сложным образом зависеть от напряженности поля $\vec{E}$. Однако для большинства веществ вектор поляризации при не слишком сильных полях зависит от $\vec{E}$ линейно:

$$\vec{P} = \varepsilon_0\varkappa\vec{E}, \tag{29.9}$$

где $\varkappa$ — *диэлектрическая восприимчивость* вещества. Формула (29.5) в этом случае принимает вид

$$\vec{D} = \varepsilon_0(1+\varkappa)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}, \tag{29.10}$$

где $\varepsilon = 1 + \varkappa$ — *диэлектрическая проницаемость* вещества.

Следует особо подчеркнуть, что под E в формуле (29.9) следует понимать напряженность полного электрического поля, созданного в данной точке диэлектрика как внешними источниками, так и поляризационными зарядами, возникающими в результате поляризации диэлектрика.

В более общем случае анизотропного вещества формула (29.10) принимает вид

$$D_i = \varepsilon_0\varepsilon_{ij}E_j, \tag{29.11}$$

где $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ — симметричный *тензор диэлектрической проницаемости.*

Существует класс веществ, в которых поляризация возникает также и при их деформации — пьезокристаллы. Опыт показывает, что при не слишком больших деформациях вектор индукции зависит от тензора деформации $u_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)$ линейно. В этом случае формулу (29.11) следует записать в виде

$$D_i = \varepsilon_0\varepsilon_{ij}E_j - e_{i,kl}u_{kl}. \tag{29.12}$$

Здесь $e_{i,kl}$ — симметричный по индексам kl тензор третьего ранга, который называется *тензором пьезомодулей.*

Закон Гука [12, § 50] для пьезокристаллов имеет вид

$$p_{ij} = \lambda_{ijkl}u_{kl} + e_{i,ij}E_i.$$

Обратим внимание на то, что в эту формулу входит тот же тензор пьезомодулей, что и в (29.12). Этот факт есть следствие законов термодинамики.

Рассмотрим модель сплошной среды, состоящей из частиц, обладающих квадрупольным моментом. Квадрупольный момент единицы объема обозначим через $q_{ij}(\vec{r})$. Согласно принципу суперпозиции, такая система будет создавать в точке наблюдения $\vec{r}$ потенциал, равный сумме (интегралу) потенциалов (3.7), создаваемых каждой частицей:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{6}\int q_{ij}(\vec{r}')\frac{\partial^2}{\partial x_i'\partial x_j'}\left(\frac{1}{R}\right)dV',$$

где $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$. Воспользовавшись теоремой Остроградского, перепишем это выражение в виде

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{6}\int\frac{\partial q_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i'}\left(\frac{1}{R}\right)dV' + \frac{1}{6}\int n_i q_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j'}\left(\frac{1}{R}\right)dS'\right].$$

Применив снова к первому интегралу теорему Остроградского, получим

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{6}\int\frac{1}{R}\frac{\partial^2 q_{ij}}{\partial x_i'\partial x_j'}dV' - \frac{1}{6}\int n_i\frac{1}{R}\frac{\partial q_{ij}}{\partial x_j}dS' + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{6}\int n_i q_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j'}\left(\frac{1}{R}\right)dS'\right].$$

Следовательно, в модели сплошной среды частицы, обладающие квадрупольным моментом, создают такое же электрическое поле, как и система заряженных частиц с объемной плотностью заряда

$$\rho = \frac{1}{6}\frac{\partial^2 q_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{\partial P_i}{\partial x_i}$$

или система дипольных частиц с дипольным моментом единицы объема

$$P_i' = -\frac{1}{6}\frac{\partial q_{ij}}{\partial x_j}.$$

Если квадрупольный момент q_{ij} изменяется со временем, то, согласно уравнению непрерывности, возникает поляризационный ток, плотность которого $\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}'}{\partial t}$.

В среде, состоящей из частиц, которые кроме дипольного обладают также и квадрупольным моментом, уравнение (8.3) можно записать в виде

$$\operatorname{div}\vec{E} \equiv \frac{\partial E_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_{\text{стор}} - \operatorname{div}\vec{P} + \frac{1}{6}\frac{\partial^2 q_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}\right). \qquad (29.13)$$

Введем вектор индукции с компонентами

$$D_i = \varepsilon_0 E_i + P_i - \frac{1}{6}\frac{\partial q_{ij}}{\partial x_j}. \qquad (29.14)$$

Тогда уравнение (29.13) запишется в виде

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho_{\text{стор}},$$

где вектор $\vec{D}$ определяется формулой (29.14).

В большинстве случаев квадрупольный момент, так же, как и дипольный, линейно связан с электрическим полем:

$$q_{ij} = -6\gamma_{ij,k}E_k;$$

здесь $\gamma_{ij,k}$ — тензор третьего ранга, симметричный по индексам ij. В этом случае связь между векторами индукции и электрического поля имеет вид

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j + \gamma_{ij,k}\frac{\partial E_k}{\partial x_j}.$$

Иными словами, значение вектора индукции в некоторой точке зависит от значения электрического поля не только в данной точке, но и в соседних (пространственная дисперсия), так как вектор индукции зависит от производных по координатам вектора $\vec{E}$.

§ 30. Магнетики

Рассмотрим теперь вещество, атомы или молекулы которого обладают магнитным моментом (магнетик). Для этого снова воспользуемся моделью сплошной среды. Векторный потенциал отдельной частицы

магнетика, обладающей магнитным моментом, определяется формулой (5.5). Воспользовавшись принципом суперпозиции, запишем векторный потенциал магнитного поля, создаваемого всеми частицами магнетика, в виде

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_i \frac{[\vec{\mu}_i, (\vec{r}-\vec{r}_i)]}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}.$$

Заменяя суммирование интегрированием, т. е. переходя к модели сплошной среды, имеем

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{[\vec{M}(\vec{r}'), (\vec{r}-\vec{r}')]}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\vec{M}, \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\right)\right]dV',$$

где $\vec{M}$ — магнитный момент единицы объема магнетика; $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$. Необходимо иметь в виду, что в этой формуле интегрирование ведется по произвольному объему. Тогда векторный потенциал, определяемый этой формулой, есть векторный потенциал, создаваемый магнитными диполями, находящимися внутри объема интегрирования, на расстояниях от этого объема больших, чем размеры диполей.

Пользуясь формулой векторного анализа

$$\left[\vec{M}, \vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right)\right] = -\operatorname{rot}\left(\frac{\vec{M}}{R}\right) + \frac{1}{R}\operatorname{rot}\vec{M}$$

и теоремой Остроградского, перепишем эту формулу в виде

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\operatorname{rot}\vec{M}}{R}dV' - \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{[\vec{n}, \vec{M}]}{R}dS'.$$

Как и в случае диэлектрика (29.3), это выражение состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое можно записать как

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\operatorname{rot}\vec{M}}{R}dV' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}}{R}dV'.$$

Сравнивая это выражение с формулой (4.10), находим, что частицы, обладающие магнитным моментом, создают такое же магнитное поле, как и система с объемной плотностью тока

$$\vec{j} = \operatorname{rot}\vec{M}. \qquad (30.1)$$

Ток, выражаемый формулой (30.1), называется *током намагничения*. Слагаемое

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{[\vec{M}, \vec{n}]}{R}dS$$

определяет векторный потенциал, создаваемый токами по поверхности, ограничивающей объем интегрирования. Величину $\vec{i} = [\vec{M}, \vec{n}]$ можно трактовать как величину поверхностного тока намагничения.

Посмотрим теперь, какой вид примет уравнение Максвелла (8.2) для электромагнитного поля внутри магнетика. Для этого подставим.

(30.1) в уравнение Максвелла (8.2). Тогда с учетом тока смещения $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ это уравнение принимает вид

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j}_{\text{стор}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{M} \right),$$

откуда

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j}_{\text{стор}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \qquad (30.2)$$

Здесь уже плотность тока $\vec{j}_{\text{стор}}$ не включает в себя ни плотности поляризационного тока, ни тока намагничения.

Следует отметить, что в уравнении (30.2) учтена только объемная плотность токов намагничения $\vec{j} = \operatorname{rot} \vec{M}$, и поэтому это уравнение справедливо во всех точках объема, кроме точек поверхности, где имеется поверхностный ток намагничения $\vec{i} = [\vec{M}, \vec{n}]$. Наличие поверхностного тока намагничения учитывается с помощью граничных условий (§ 32).

Обозначим в уравнении (30.2)

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = 0, \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}). \qquad (30.3)$$

Вектор $\vec{H}$ называется вектором *напряженности магнитного поля*. Как и вектор $\vec{D}$, он введен с целью упрощения записи уравнений. Непосредственный физический смысл имеют, конечно, векторы $\vec{P}$ и $\vec{M}$. С помощью ектора $\vec{H}$ ура внение (30.2) перепишем в виде

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{стор}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \qquad (30.4)$$

Для того чтобы система уравнений Максвелла для магнетика была замкнутой, необходимо знать вектор $\vec{M}$. Из эксперимента следует, что в случае парамагнетиков и диамагнетиков его можно выразить через вектор $\vec{H}$ простой формулой $\vec{M} = \varkappa \vec{H}$, тогда

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \varkappa) \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H}. \qquad (30.5)$$

Безразмерная величина $\varkappa$ называется *магнитной восприимчивостью*, а величина $\mu = 1 + \varkappa$ — *магнитной проницаемостью* вещества. В ферромагнетиках и антиферромагнетиках связь между вектором магнитной индукции $\vec{B}$ и вектором $\vec{H}$ более сложная.

Уравнения Максвелла в случае статического магнитного поля имеют вид

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{стор}}, \qquad (30.6)$$

причем

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}), \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Используя уравнение (30.6) и теорему Стокса, имеем

$$\oint (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = \int (\vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{H})\, dS = \int (\vec{n} \cdot \vec{j}_{\text{стор}})\, dS = I, \qquad (30.7)$$

где $I = \int (\vec{n} \cdot \vec{j}_{\text{стор}})\, dS$ — полный ток через поверхность S. Это — интегральная форма уравнения (30.6).

§ 31. Проводники. Сверхпроводники

Из уравнения Максвелла (8.2) следует, что причиной возникновения магнитного поля, кроме переменного во времени электрического поля, является электрический ток, создаваемый движением заряженных частиц. В зависимости от характера движения частиц различают поляризационный ток, ток намагничения, ток проводимости, конвекционный ток, диффузионный ток, сверхпроводящий ток и др.

В § 29 формулой (29.7) была определена плотность поляризационного тока. Этот ток обусловлен изменением со временем относительного расположения зарядов в атомах или молекулах. Характерной особенностью поляризационного тока является то, что заряды при своем движении не смещаются на большие расстояния от положения равновесия. Плотность поляризационного заряда $\rho = -\operatorname{div} \vec{P}$ и связанный с ним поляризационный ток, плотность которого $\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$, играют существенную роль в диэлектриках. В уравнениях электродинамики сплошной среды вектор поляризации обычно исключается из уравнений Максвелла путем введения вектора индукции (29.5).

Плотность тока намагничения определена в § 30 формулой (30.1). Этот ток обусловлен наличием у заряженных частиц момента импульса, с которым, согласно формуле (5.11), всегда связан магнитный момент. Существует также ток намагничения, который связан не с движением частиц, а с наличием у них спина — собственного магнитного момента, не связанного с орбитальным движением. Характерной особенностью тока намагничения является то, что для него $\operatorname{div} \vec{j} = 0$, и, следовательно, в отличие от поляризационного тока, он не связан с макроскопической плотностью зарядов. Кроме того, плотность тока намагничения не вносит вклада в полный ток через поперечное сечение проводника. Действительно, так как $I = \int (\vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{M})\, dS$, а интегрирование производится по всему сечению проводника, то, воспользовавшись формулой Стокса $I = \int \vec{M} \cdot d\vec{l} = 0$, получим $I = 0$, так как $\vec{M} = 0$ везде вне вещества. В уравнениях Максвелла вектор намагничения обычно исключается из уравнений Максвелла путем введения вектора напряженности магнитного поля (30.3). Поляризационный ток и ток намагничения возникают вследствие движения внутриатомных частиц и поэтому о них часто говорят как о токах, обусловленных движением связанных зарядов. Эти токи можно объединить в одну формулу $\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{M}$.

Рассмотрим ток проводимости, обусловленный движением несвязанных зарядов. В общем случае плотность такого тока можно записать в виде

$$\vec{j} = en\vec{u}, \tag{31.1}$$

где n — число частиц в единице объема, $\vec{u}$ — их скорость, e — заряд. Если заряженные частицы свободны и движутся в вакууме или переносятся вместе с движущейся средой, то создаваемый ими ток принято называть конвекционным. Если же носители заряда движутся в некоторой среде (металл, полупроводник, электролит), то они, взаимодействуя со средой, теряют свой импульс и поэтому могут двигаться относительно этой среды только под действием какой-нибудь силы, например внешнего электрического поля или магнитного поля. Уравнение движения заряженной частицы можно в этом случае записать в виде

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\nu\vec{p} + e(\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}]), \tag{31.2}$$

где $\vec{p} = m\vec{u}$ — импульс заряженной частицы; $-\nu\vec{p}$ — сила трения, учитывающая потерю импульса движущихся зарядов за счет их взаимодействия со средой, в которой они движутся; ν — частота столкновений; $\vec{v}$ — скорость движения среды (или ее отдельного участка). В стационарном случае $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$, и, учитывая, что $\vec{p} = m\vec{u}$, из уравнения (31.2) находим скорость движения заряда во внешнем электрическом и магнитном полях:

$$\vec{u} = \frac{\vec{p}}{m} = \frac{e(\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}])}{m\nu}.$$

Подставляя это выражение в (31.1), получаем

$$\vec{j} = en\vec{u} = \frac{e^2n}{m\nu}(\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}]) = \sigma(\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}]), \tag{31.3}$$

где $\sigma = e^2n/(m\nu)$ — проводимость вещества, зависящая от рода и состояния проводника; n — число заряженных частиц в единице объема. Формула (31.3) называется законом Ома, а ток (31.3), входящий в эту формулу — током проводимости. Если проводящая среда покоится, то формула (31.3) приобретает вид $\vec{j} = \sigma\vec{E}$.

Рассмотрим ток проводимости в неподвижных средах. Электрическое поле, создающее в неподвижном проводнике ток, совершает над движущимися в нем зарядами работу. Эту работу, выполняемую за единицу времени в единице объема, можно вычислить следующим образом:

$$ne\left(\vec{E} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = en(\vec{u} \cdot \vec{E}) = (\vec{j} \cdot \vec{E}) = \frac{j^2}{\sigma} \tag{31.4}$$

(здесь мы воспользовались законом Ома $\vec{j} = \sigma\vec{E}$). Эта работа превращается в теплоту. Формула (31.4) выражает собой *закон Джоуля — Ленца*.

Вещества, обладающие хорошей проводимостью (например, металлы), обычно называют проводниками. Они характеризуются тем, что статическое электрическое поле, а также поле, достаточно медленно изменяющееся со временем, не проникают вглубь проводника. Для того чтобы выяснить причину этого явления, рассмотрим проводник, у которого ток связан с напряженностью электрического поля законом Ома: $\vec{j} = \sigma\vec{E}$. Ток и напряженность электрического поля, в свою очередь, связаны с плотностью зарядов уравнениями:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}.$$

Из этих уравнений и закона Ома можно получить следующее уравнение для плотности заряда в однородном проводнике:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sigma\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}\rho = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r})e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}t}, \tag{31.5}$$

где $\rho_0(\vec{r})$ определяется начальным распределением зарядов.

Таким образом, из формулы (31.5) следует, что за время порядка времени максвелловской релаксации ($\tau_M = \varepsilon_0\varepsilon/\sigma$) любой объемный заряд, созданный в проводнике, исчезает и проводник становится электрически нейтральным. Если же это был избыточный заряд, то он уходит из объема на поверхность.

Ток и напряженность электрического поля также становятся равными нулю, поэтому в статических полях потенциал в пределах каждого проводника постоянен, а избыточный заряд определенным образом распределен по его поверхности.

Существуют и другие причины движения зарядов неэлектрического происхождения. Например, если в среде создан градиент концентрации носителей заряда определенного сорта, то вследствие диффузии они будут двигаться и при этом возникает ток, называемый *диффузионным*:

$$\vec{j} = -eD\vec{\nabla}n, \tag{31.6}$$

где D — коэффициент диффузии. Диффузионный ток играет существенную роль в полупроводниках.

Если же одновременно имеется и электрическое поле, то полный ток можно записать в виде суммы (31.3) и (31.6):

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} - eD\vec{\nabla}n = \sigma\left(\vec{E} - \frac{eD}{\sigma}\vec{\nabla}n\right).$$

Если ввести обозначение $\vec{E}_{\text{стор}} = -\frac{eD}{\sigma}\vec{\nabla}n$, то эта формула примет вид

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}). \tag{31.7}$$

Величину $\vec{E}_{\text{стор}}$ называют напряженностью стороннего поля, а $\int(\vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l}) = \mathcal{E}_{\text{стор}}$ — сторонней э. д. с.. Слагаемое $[\vec{v}, \vec{B}]$ в формуле

(31.3), которое обусловлено движением проводящей среды во внешнем магнитном поле, также можно назвать сторонним полем.

В сверхпроводниках связь между плотностью тока и электромагнитным полем существенно иная. Известно, что в сверхпроводниках при температурах $T < T_c$, где T_c — критическая температура, может возникнуть ток, не испытывающий сопротивления. Такой ток можно возбудить с помощью любого слабого нестационарного электрического поля, а затем он будет сохраняться сколь угодно долго, без поддержки извне.

Предположим, что внутри сверхпроводника возникло электрическое поле. Сверхпроводящие электроны (спаренные электроны, которые называют куперовскими парами) будут ускоряться, не передавая своего импульса решетке:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E}. \tag{31.8}$$

Так как $\vec{j} = en_s\vec{v} = \frac{en_s\vec{p}}{m}$, где n_s — число электронов, участвующих в сверхпроводимости, то эту формулу можно записать

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = e^2\frac{n_s}{m}\vec{E}. \tag{31.9}$$

Взяв ротор обеих частей выражения (31.9) и используя закон электромагнитной индукции Фарадея (8.1), находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{rot}\vec{j} + \frac{e^2n_s\vec{B}}{m}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что в любой среде, которая проводит электрический ток без диссипации, выражение $\operatorname{rot}\vec{j} + \frac{e^2n_s}{m}\vec{B}$ не зависит от времени. А поскольку в начальный момент времени, т. е. до возбуждения тока в сверхпроводнике, $\vec{j} = 0$, $\vec{B} = 0$, то в любой момент времени должно быть

$$\operatorname{rot}\vec{j} = -\frac{e^2n_s\vec{B}}{m}. \tag{31.10}$$

Так как $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$, то из (31.10) следует, что

$$\operatorname{rot}\left(\vec{j} + \frac{e^2n_s}{m}\vec{A}\right) = 0.$$

Одним из решений этого уравнения есть

$$\vec{j} = -\frac{e^2n_s}{m}\vec{A}. \tag{31.11}$$

Эта формула связывает сверхпроводящий ток с векторным потенциалом электромагнитного поля. Строго говоря, в правую часть уравнения (31.11) мы должны добавить слагаемое, пропорциональное градиенту произвольной функции. Однако с помощью калибровочного преобразования можно избавиться от этого слагаемого. Отметим, что соотношение (31.11) получено на основе классического уравнения движения (31.8), и поэтому учет квантовых эффектов может его изменить.

Подставляя (31.11) в (4.13), получим уравнение для векторного потенциала в сверхпроводнике

$$\Delta\vec{A} = \mu_0\frac{e^2n_s}{m}\vec{A} = \lambda^2\vec{A}, \tag{31.12}$$

где $\lambda^2 = \mu_0\frac{e^2n_s}{m}$. Взяв ротор от обеих частей уравнения (31.12) и учитывая, что $\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{B}$, получим

$$\Delta\vec{B} = \lambda^2\vec{B}.$$

Если граница сверхпроводника плоская, то это уравнение принимает вид

$$\frac{d^2\vec{B}}{dz^2} = \lambda^2\vec{B},$$

откуда $\vec{B} = \vec{B}_0e^{-\lambda z}$.

Распределение тока в пространстве найдем из уравнения $\mu_0\vec{j} = \operatorname{rot}\vec{B}$:

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{\lambda}{\mu_0}[\vec{B}_0, \vec{e}_3]e^{-\lambda z} = \vec{j}_0e^{-\lambda z},$$

где e_3 — орт оси z.

Следовательно, магнитное поле и электрический ток распределены в приповерхностном слое сверхпроводника, толщина которого порядка $\frac{1}{\lambda} = \sqrt{\frac{m}{\mu_0e^2n_s}}$. Для типичных сверхпроводников эта величина составляет 1—10 нм. Ввиду малости этой величины токи в сверхпроводниках, размеры которых гораздо больше, чем глубина проникновения $1/\lambda$, можно считать поверхностными.

§ 32. Система уравнений Максвелла в сплошной среде. Граничные условия

Полная система уравнений классической электродинамики в сплошной среде имеет вид

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \quad (32.1) \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{32.2}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho_{\text{стор}}, \quad (32.3) \qquad \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j}_{\text{стор}} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \tag{32.4}$$

причем

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

и поэтому $\rho_{стор}$ и $\vec{j}_{стор}$ не включают в себя зарядов и токов, связанных с поляризацией и намагничением вещества. Отметим, что вид уравнений (32.1) и (32.2) не зависит от наличия среды, в то время как векторы $\vec{D}$ и $\vec{H}$, а также величины $\rho_{стор}$ и $\vec{j}_{стор}$, входящие в уравнения (32.3) и (32.4), зависят от свойств вещества и условий, в которых оно находится. Любое макроскопическое тело, рассматриваемое как сплошная среда, состоит из заряженных частиц — электронов и ядер, обладающих также и магнитными моментами, и поэтому взаимодействующих с электромагнитным полем, являясь в то же время и его источниками. Таким образом, величины $\vec{D}$, $\vec{H}$, $\rho_{стор}$ и $\vec{j}_{стор}$ следует определять, исходя из электрических и магнитных свойств вещества.

При решении задач электродинамики сплошных сред необходимо учесть, что все макроскопические тела ограничены поверхностями. При переходе через эти поверхности физические свойства макроскопических тел изменяются скачком и поэтому также скачком могут изменяться и электромагнитные поля, создаваемые этими телами. Другими словами, векторные функции $\vec{E}$ и $\vec{B}$ являются кусочно-непрерывными функциями координат, т. е. они непрерывны вместе со своими производными внутри каждой однородной области, но могут претерпевать разрывы на границах раздела двух сред. В связи с этим представляется удобным решать уравнения Максвелла (32.1) — (32.4) в каждой области, ограниченной некоторой поверхностью раздела, отдельно, а затем полученные решения сшивать с помощью граничных условий, которые мы сейчас получим.

При нахождении граничных условий удобно исходить из интегральной формы уравнений Максвелла. Согласно уравнению (32.3) и теореме Остроградского,

$$\int \operatorname{div} \vec{D} dV = \int D_n dS = \int \rho dV = Q, \qquad (32.5)$$

где Q — полный заряд внутри объема интегрирования.

Рассмотрим бесконечно малый объем в виде цилиндра с высотой h и площадью основания S, расположенный в средах *1* и *2* (рис. 20). Соотношение (32.5) в этом случае можно записать в виде

$$D_{1n}S - D_{2n}S + \int\limits_{бок} D_n dS = Q; \qquad (32.6)$$

здесь $\vec{n}$ — нормаль к границе раздела двух сред, направленная из среды *2* в среду *1*. Знак «минус» во втором слагаемом появился из-за того, что внешняя нормаль $\vec{n}$ к поверхности интегрирования в среде *2* направлена противоположно нормали $\vec{n}$ в среде *1*. Пусть основание цилиндра стремится к границе раздела двух сред. Так как площадь боковой поверхности стремится к нулю, то $\int\limits_{бок} D_n dS \to 0$, и поэтому (32.6) приобретет вид

$$D_{1n} - D_{2n} = \frac{Q}{S} = \sigma, \qquad (32.7)$$

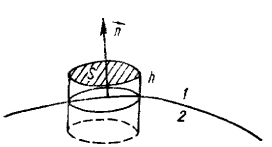


Рис. 20

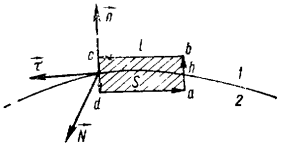


Рис. 21

где D_{1n} и D_{2n} — значения нормальных составляющих вектора $\vec{D}$ по разные стороны поверхности раздела; σ — поверхностная плотность зарядов, избыточных по отношению к связанным зарядам самого вещества. Если поверхность раздела незаряжена, то в формуле (32.7) необходимо положить $\sigma = 0$. Пользоваться понятием поверхностной плотности удобно тогда, когда избыточные (сторонние) заряды расположены в очень тонком слое вещества d, а поле рассматривается на расстояниях от поверхности $r \gg d$. Тогда из определения объемной плотности заряда $\rho = \Delta Q/(\Delta S d)$ следует

$$\sigma = \rho d = \frac{\Delta Q}{\Delta S}.$$

Если учесть, что $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, а $(\vec{P} \cdot \vec{n})$ — поверхностная плотность поляризационных зарядов (§ 29), то формулу (32.7) можно записать в виде

$$\varepsilon_0 (E_{1n} - E_{2n}) = \sigma + \sigma_{пол},$$

где $\sigma_{пол} = P_{2n} - P_{1n} = (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \vec{n}$, а величина σ, которая входит в граничное условие (32.7), есть поверхностная плотность зарядов, избыточных по отношению к связанным зарядам самого вещества.

Используя уравнение (32.1) и проводя аналогичные рассуждения, получаем граничное условие для вектора $\vec{B}$:

$$B_{1n} - B_{2n} = 0. \qquad (32.8)$$

Выражения (32.7) и (32.8) — граничные условия для нормальных составляющих векторов $\vec{B}$ и $\vec{D}$.

Чтобы получить граничные условия для тангенциальных составляющих, используем уравнения (32.2) и (32.4). Умножим уравнение (32.4) скалярно на положительную нормаль $\vec{N}$ к поверхности S, ограниченной контуром L, имеющим вид прямоугольника (рис. 21). Используя теорему Стокса, получим

$$\int (\vec{N} \cdot \operatorname{rot} \vec{H}) dS = \oint\limits_L (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = \frac{\partial}{\partial t} \int (\vec{D} \cdot \vec{N}) dS + \int (\vec{j} \cdot \vec{N}) dS.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\oint (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = \int\limits_a^b H_n dh + \int\limits_b^c (\vec{H}_1 \cdot \vec{\tau}) dl - \int\limits_d^a (\vec{H}_2 \cdot \vec{\tau}) dl - \int\limits_c^d H_n dh =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int (\vec{D} \cdot \vec{N}) dh dl + \int (\vec{j} \cdot \vec{N}) dh dl. \qquad (32.9)$$

Здесь $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_2$ — значения вектора $\vec{H}$ соответственно в средах *1* и *2*, $\vec{\tau}$ — единичный вектор, касательный к поверхности раздела; $\vec{n}$ — нормаль к поверхности раздела, направленная из среды *2* в среду *1*.

Пусть теперь $h \to 0$ при малом, но фиксированном l. Тогда $\int H_n dh \to 0$, $\int D_n dS \to 0$ и соотношение (32.9) примет вид

$$(\vec{H}_1 \cdot \vec{\tau} - \vec{H}_2 \cdot \vec{\tau})\, l = (\vec{j} \cdot \vec{N})\, hl.$$

После сокращения на l имеем

$$(\vec{H}_1 \cdot \vec{\mathfrak{v}}) - (\vec{H}_2 \cdot \vec{\tau}) = (\vec{j} \cdot \vec{N})\, h = (\vec{i} \cdot \vec{N}),$$

здесь $\vec{i} = \vec{j}h$. Вектор $\vec{\mathfrak{v}}$, как следует из рис. 21, можно записать в виде $\vec{\mathfrak{v}} = [\vec{N}, \vec{n}]$. Тогда предыдущее выражение можно записать как

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot [\vec{N}, \vec{n}] = [\vec{n}, (\vec{H}_1 - \vec{H}_2)] \cdot \vec{N} = \vec{i} \cdot \vec{N}.$$

Поскольку эта формула справедлива для любой ориентации поверхности S, а следовательно, и вектора $\vec{N}$, то имеем

$$[\vec{n}, \vec{H}_1] - [\vec{n}, \vec{H}_2] = \vec{i}. \qquad (32.10)$$

В граничном условии (32.10) присутствует поверхностная плотность тока, избыточная по отношению к токам намагничения. Если токи отсутствуют, то следует положить $\vec{i} = 0$. Учитывая, что $\vec{H} = (\vec{B}/\mu_0) - \vec{M}$, а $[\vec{M}, \vec{n}]$ есть поверхностная плотность тока намагничения (§ 30), запишем формулу (32.10) в виде

$$[\vec{n}, \vec{B}_1] - [\vec{n}, \vec{B}_2] = (\vec{i} + \vec{i}_{\text{нам}})\, \mu_0,$$

где $\vec{i}_{\text{нам}} = [\vec{M}_1, \vec{n}] - [\vec{M}_2, \vec{n}] = [(\vec{M}_1 - \vec{M}_2), \vec{n}]$.

Используя уравнение (32.2) и проводя аналогичные рассуждения, получаем граничные условия для вектора $\vec{E}$:

$$[\vec{n}, \vec{E}_1] - [\vec{n}, \vec{E}_2] = 0. \qquad (32.11)$$

Таким образом, уравнения Максвелла (32.1) — (32.4) должны быть дополнены граничными условиями (32.7), (32.8), (32.10) и (32.11). Эти условия означают непрерывность тангенциальных составляющих вектора $\vec{E}$ (32.11) и нормальной составляющей вектора $\vec{B}$ (32.8) при переходе через границу раздела двух сред. Нормальная составляющая вектора $\vec{D}$ при переходе через границу раздела испытывает скачок, если на поверхности раздела имеются заряды (32.7). Аналогично испытывает скачок тангенциальная составляющая вектора $\vec{H}$, если имеются поверхностные токи (32.10).

Еще одно граничное условие можно получить, используя уравнение непрерывности (6.2) и уравнение (32.3), из которых следует

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D} + \operatorname{div} \vec{j} = \operatorname{div} \left\{ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right\}.$$

Так как граничное условие (32.8) является следствием уравнения (32.1), то по аналогии находим

$$\frac{\partial D_{1n}}{\partial t} + j_{1n} = \frac{\partial D_{2n}}{\partial t} + j_{2n}. \qquad (32.12)$$

Если же на поверхности раздела нет зарядов, поверхностная плотность которых зависит от времени, то из (32.7) и (32.12) следует непрерывность нормальных составляющих плотности тока:

$$j_{1n} = j_{2n}.$$

Итак, *граничные условия* на поверхности раздела двух сред имеют вид

$$\begin{aligned} &\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma; \quad [\vec{n}, (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)] = 0, \\ &\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0; \quad [\vec{n}, (\vec{H}_1 - \vec{H}_2)] = \vec{i}, \end{aligned} \qquad (32.13)$$

где $\vec{n}$ — нормаль к границе раздела, направленная из среды *2* в среду *1*, и должны выполняться в любой момент времени в каждой точке на поверхности раздела.

Так как на практике почти всегда приходится решать уравнения Максвелла (32.1) — (32.4) в кусочно-непрерывных средах, то граничные условия (32.13) следует рассматривать как неотъемлемую часть уравнений Максвелла (32.1) — (32.4).

В случае стационарных электрических и магнитных полей $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$ система уравнений Максвелла (32.1) — (32.4) распадается на систему *уравнений электростатики*

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \qquad (32.14)$$

и *уравнений магнитостатики*

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \mu \vec{H}, \qquad (32.15)$$

а граничные условия (32.13) остаются теми же.

В качестве примера решения электростатических задач вычислим электрическое поле, создаваемое диэлектрическим шаром радиуса R, находящимся в однородном электрическом поле $\vec{E}_0$. Уравнения электростатики в диэлектрике (32.14) при $\rho = 0$ имеют вид

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}. \qquad (32.16)$$

Из этих уравнений следует, что потенциал электростатического поля удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} (\varepsilon \vec{\nabla} \varphi) = 0, \qquad (32.17)$$

причем $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$, $\vec{D} = -\varepsilon_0\varepsilon\vec{\nabla}\varphi$. В однородном диэлектрике $\varepsilon = \text{const}$, поэтому уравнение (32.17) переходит в обычное уравнение Лапласа $\Delta\varphi = 0$.

Граничное условие (32.13), выражающее непрерывность вектора индукции, записывается следующим образом:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \varepsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} \quad \text{при} \quad r = R. \tag{32.18}$$

Здесь φ_1 — решение уравнения вне сферы, φ_2 — внутри сферы. Вместо граничного условия непрерывности тангенциальных составляющих электрического поля можно использовать эквивалентное ему условие непрерывности потенциала

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \text{при} \quad r = R. \tag{32.19}$$

Это условие можно получить, рассматривая интеграл $\int \vec{E}\cdot d\vec{l}$ по контуру, изображенному на рис. 21. Воспользовавшись теоремой Стокса и уравнением $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$, находим

$$\int (\vec{N}\cdot \operatorname{rot}\vec{E})\,dS = \oint (\vec{E}\cdot d\vec{l}) = -\oint (\vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{l}) = -\oint d\varphi = 0.$$

Так как интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю, то это значит, что функция φ непрерывна, откуда и следует условие (32.19). Из (32.19) очевидно также, что

$$d\varphi_1 = (\vec{\nabla}\varphi_1\cdot d\vec{l}) = d\varphi_2 = (\vec{\nabla}\varphi_2\cdot d\vec{l}),$$

где элемент $d\vec{l}$ направлен касательно к границе раздела. Из этого равенства следует, что тангенциальные компоненты вектора $\vec{E}$ также непрерывны.

Для решения поставленной задачи используем сферическую систему координат, полярная ось которой (ось z) совпадает с направлением напряженности внешнего однородного электрического поля $\vec{E}_0$.

Поскольку на достаточно большом удалении от диэлектрического шара электрическое поле не искажается наличием этого шара, то потенциал φ_1 должен удовлетворять условию

$$\varphi_1 \to -(\vec{E}_0\cdot\vec{r}) = -\vec{E}_0 r\cos\Theta, \quad -\vec{\nabla}\varphi_1 = \vec{E}_0 \quad \text{при} \quad r\to\infty.$$

Из соображений симметрии ясно, что потенциал не должен зависеть от азимутального угла, поэтому решение уравнения Лапласа запишем в виде разложения по полиномам Лежандра $P_l(\cos\Theta)$:

$$\varphi_1 = CrP_1(\cos\Theta) + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\Theta), \quad r > R,$$

$$\varphi_2 = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\Theta), \quad r < R.$$

Здесь потенциал нормирован так, чтобы $\varphi_2 = 0$ при $r = 0$. Так как $P_1(\cos\Theta) = \cos\Theta$, то из условия на бесконечности находим $C = -E_0$.

Воспользуемся теперь граничными условиями (32.18) и (32.19):

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos\Theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{R^{l+1}}P_l(\cos\Theta) - E_0 R P_1(\cos\Theta),$$

$$\varepsilon\sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos\Theta) = -\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(l+1)}{R^{l+2}}B_l P_l(\cos\Theta) - E_0 P_1(\cos\Theta).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых полиномах Лежандра, получаем

$$A_0 = \frac{B_0}{R}, \quad B_0 = 0 \quad (\text{при } l = 0),$$

$$A_1 R = \frac{B_1}{R^2} - E_0 R, \quad \varepsilon A_1 = -\frac{2}{R^3}B_1 - E_0 \quad (\text{при } l = 1),$$

$$A_l R^l = \frac{B_l}{R^{l+1}}, \quad \varepsilon l A_l R^{l-1} = -\frac{(l+1)}{R^{l+2}}B_l \quad (\text{при } l > 1).$$

Из этих уравнений находим

$$A_1 = -\frac{3E_0}{\varepsilon+2}, \quad B_1 = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}R^3 E_0.$$

Все остальные коэффициенты A_l и B_l равны нулю, если $l \neq 1$.

Таким образом, решение задачи имеет вид

$$\varphi_1 = -E_0 r\cos\Theta + \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}E_0\frac{R^3}{r^2}\cos\Theta = -(\vec{E}_0\cdot\vec{r})\left(1 - \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\frac{R^3}{r^3}\right), \tag{32.20}$$

$$\varphi_2 = -\frac{3E_0 r}{\varepsilon+2}\cos\Theta = -\frac{3}{\varepsilon+2}(\vec{E}_0\cdot\vec{r}).$$

Используя формулу $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$, вычислим вектор поляризации диэлектрической сферы

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon-1)\vec{E} = -\varepsilon_0(\varepsilon-1)\vec{\nabla}\varphi_2 = 3\frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)}{\varepsilon+2}\vec{E}_0.$$

С помощью вектора поляризации формулы (32.20) можно записать в виде

$$\varphi_1 = -(\vec{E}_0\cdot\vec{r}) + \frac{V}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{P}\cdot\vec{r})}{r^3}, \tag{32.21}$$

$$\varphi_2 = -(\vec{E}_0\cdot\vec{r}) + \frac{(\vec{P}\cdot\vec{r})}{3\varepsilon_0}, \tag{32.22}$$

где $V = \frac{4\pi}{3}R^3$ — объем сферы.

Первые два слагаемых в (32.21) и (32.22) представляют собой потенциал однородного внешнего поля, создаваемого внешними источниками. Вторые слагаемые — это потенциал электрического поля, созда-

ваемого диэлектрическим шаром, поляризованным внешним полем. Вне сферы — это потенциал диполя (3.1) с дипольным моментом $\vec{p} = \vec{P}V$. Внутри сферы поляризованный шар создает однородное электрическое поле с напряженностью

$$\vec{E}_i = -\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{3\varepsilon_0}\right) = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}. \qquad (32.23)$$

Полная напряженность внутри шара

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi_2 = \vec{E}_0 - \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P} = \frac{3}{\varepsilon+2}\vec{E}_0. \qquad (32.24)$$

Таким образом, электрическое поле внутри шара не зависит от радиуса шара и ослаблено на значение поля $\vec{E}_i = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}$, которое называется *деполяризующим полем*. Возникновение деполяризующего поля есть частный случай явления экранировки внешнего поля связанными или свободными зарядами.

§ 33. Термодинамические соотношения для вещества в электрическом и магнитном полях

Внешние электрическое и магнитное поля влияют на термодинамические свойства вещества и поэтому напряженность электрического поля $\vec{E}$ и индукция магнитного поля $\vec{B}$ также являются, наряду с давлением и температурой, термодинамическими параметрами, определяющими состояние вещества.

Чтобы записать в явном виде первое начало термодинамики $dU = dA + dQ$ для вещества в электрическом и магнитном полях, необходимо найти выражение для работы dA, связанное с поляризацией и намагничиванием вещества, обусловленными внешними электрическим и магнитным полями, создаваемыми током $\vec{j}_{вн}$ и зарядом $\rho_{вн}$, не включенными в рассматриваемую термодинамическую систему. Состояние внешней системы, которая является источником внешних электрического и магнитного полей, считается не зависящим от состояния рассматриваемого вещества. Эта система играет такую же роль по отношению к электрическим и магнитным величинам, как термостат по отношению к температуре.

Чтобы найти выражение для работы dA, воспользуемся системой уравнений (32.1) — (32.4), а также соотношением (9.11). В системе уравнений (32.1) — (32.4), в отличие от системы уравнений (9.1) — (9.4), токи и заряды, связанные с поляризацией и намагничением вещества, учтены путем введения векторов $\vec{D}$ и $\vec{H}$.

Из формулы (9.11) следует, что изменение внутренней энергии вещества, находящегося во внешнем электромагнитном поле,

$$\frac{dU}{dt} = -\int \vec{j}_{вн}\vec{E}dV. \qquad (33.1)$$

Внешний ток, который входит в правую часть (33.1), можно выразить через векторы $\vec{H}$ и $\vec{D}$ с помощью уравнения (32.4), заменив в нем $\vec{j}$ на $\vec{j}_{вн}$

$$\vec{j}_{вн} = \operatorname{rot}\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.$$

Тогда выражение (33.1) примет вид

$$\frac{dU}{dt} = \int \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}dV - \int \vec{E}\cdot\operatorname{rot}\vec{H}dV.$$

Следовательно, дифференциал внутренней энергии вещества в электрическом и магнитном полях можно представить в виде

$$dU = \int \vec{E}\cdot d\vec{D}dV - dt\int \vec{E}\cdot\operatorname{rot}\vec{H}dV. \qquad (33.2)$$

Преобразуем последний интеграл следующим образом:

$$\int \vec{E}\cdot\operatorname{rot}\vec{H}dV \equiv \int \operatorname{div}[\vec{H},\vec{E}]dV + \int \vec{H}\cdot\operatorname{rot}\vec{E}dV.$$

Согласно теореме Остроградского,

$$\int \operatorname{div}[\vec{E},\vec{H}]dV = \int [\vec{E},\vec{H}]\cdot\vec{n}dS.$$

Этот интеграл равен нулю, если выбрать замкнутую поверхность S, проходящую далеко от системы, там где $\vec{E}$ и $\vec{B}$ равны нулю. Кроме того, из уравнения (32.2) следует

$$d\vec{B} = -\operatorname{rot}\vec{E}dt,$$

и поэтому

$$dt\int \vec{H}\cdot\operatorname{rot}\vec{E}dV = -\int \vec{H}\cdot d\vec{B}dV.$$

Подставляя это соотношение в (33.2) и учитывая, что в отсутствие теплообмена $dU = dA$, получаем

$$dA = \int \vec{E}\cdot d\vec{D}dV + \int \vec{H}\cdot d\vec{B}dV. \qquad (33.3)$$

Эта формула выражает изменение внутренней энергии термодинамической системы, состоящей из вещества и поля, за счет работы внешних полей, создаваемых источником. Интегрирование в формуле (33.3) происходит по всему пространству, занимаемому как полем, так и веществом. Это объясняется тем, что наличие вещества искажает внешнее поле, которое имелось бы в отсутствие вещества, не только в самом веществе, но и в окружающем пространстве.

В случае диэлектрика в формуле (33.3) следует оставить только первое слагаемое. Формула (33.3), которая для диэлектриков имеет вид $dA = \int \vec{E}\cdot d\vec{D}dV$, неудобна тем, что необходимо интегрировать и по пространству, где нет вещества, но есть поле. Преобразуем эту формулу так, чтобы интегрирование происходило только по объему, занятому веществом. Для этого, пользуясь формулой $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$,

представим ее в виде

$$dU = \int d\left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\right) dV + \int \vec{E}\ \ d\vec{P} dV. \qquad (33.4)$$

Первое слагаемое есть работа по созданию электрического поля В нем интегрирование производится по всему объему, включая объем, занимаемый диэлектриком. Это слагаемое зависит только от электрического поля и не зависит от других термодинамических параметров Второе слагаемое — это работа, затрачиваемая на поляризацию диэлектрика. Интегрирование в нем можно проводить только по объему, занятому диэлектриком, так как вне этого объема $\vec{P} = 0$. Это слагаемое зависит от плотности вещества, температуры, а также от напряженности электрического поля

Для изотропного диэлектрика с линейной зависимостью $\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \vec{E}$ из формулы (33.4) находим

$$d\tilde{U} = dU - \int d\left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\right) dV = \int (\vec{E} \cdot d\vec{P}) dV = \varepsilon_0 \int (\varepsilon - 1)(\vec{E} \cdot d\vec{E})\, dV =$$

$$= \int d\, \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E^2}{2} dV. \qquad (33.5)$$

Таким образом, внутренняя энергия единицы объема вещества, связанная только с его поляризацией,

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2} (\varepsilon - 1) E^2.$$

Эта часть внутренней энергии зависит, помимо напряженности электрического поля, от плотности и температуры вещества, так как $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$. В дальнейшем рассмотрим только эту часть

$$\tilde{U} = U - \int \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV.$$

Запишем первое начало термодинамики с учетом формулы (33.5) и соотношения $dQ = Tds$, имеющего место для равновесных процессов

$$d\tilde{U} = dA + dQ = \int \vec{E} \cdot d\vec{P} dV + \int T ds dV,$$

где s — энтропия единицы объема вещества.

Преобразуем эту формулу:

$$d\tilde{U} - \int d(Ts) dV = \int d(\tilde{u} - Ts) dV =$$

$$= \int (\vec{E} \cdot d\vec{P}) dV - \int s dT dV = \int d\tilde{f} dV.$$

Здесь $\tilde{f} = \tilde{u} - Ts$ есть свободная энергия единицы объема вещества в переменных $\vec{P}$ и T, дифференциал которой

$$d\tilde{f} = \vec{E} \cdot d\vec{P} - s dT.$$

С помощью преобразования Лежандра перейдем к переменным $\vec{E}$ и T:

$$df = d(\tilde{f} - \vec{P} \cdot \vec{E}) = -\vec{P} \cdot d\vec{E} - s dT; \qquad (33.6)$$

здесь f — свободная энергия в переменных T и $\vec{E}$. Так как df — полный дифференциал, то из (33.6) следует

$$P_x = -\frac{\partial f}{\partial E_x}, \quad P_y = -\frac{\partial f}{\partial E_y}, \quad P_z = -\frac{\partial f}{\partial E_z}.$$

Очевидно, что так как смешанные производные равны, то должны выполняться соотношения типа

$$\frac{\partial^2 f}{\partial E_x \partial E_y} = -\frac{\partial P_x}{\partial E_y} = \frac{\partial^2 f}{\partial E_y \partial E_x} = -\frac{\partial P_y}{\partial E_x}. \qquad (33.7)$$

В случае линейной связи между векторами $\vec{P}$ и $\vec{E}$

$$P_i = \varepsilon_0 \alpha_{ij} E_j.$$

Из (33.7) следует, что $\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$. Следовательно, так как $\varepsilon_{ij} = \alpha_{ij} + \delta_{ij}$, то

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx},$$

т. е. тензор диэлектрической проницаемости должен быть симметричным: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

Если связь между $\vec{P}$ и $\vec{E}$ линейна, то из (33.6) имеем

$$df = -P_i dE_i - s dT = -\varepsilon_0 \alpha_{ij} E_j dE_i - s dT.$$

Так как α_{ij} не зависит от напряженности поля $\vec{E}$, то из этого соотношения следует, что

$$f = f_0(\rho, T) - \frac{\varepsilon_0 \alpha_{ij} E_i E_j}{2}, \qquad (33.8)$$

где ρ — массовая плотность вещества; f_0 — не зависящая от поля часть свободной энергии.

Таким образом, выражение

$$-\frac{\varepsilon_0 \alpha_{ij} E_i E_j}{2}$$

есть свободная энергия вещества, находящегося в электрическом поле, в переменных $\vec{E}$, ρ, T в случае линейной связи между векторами $\vec{P}$ и E.

Аналогичные формулы имеют место и для магнетиков. В частности, для изотропного магнетика

$$f = f_0(\rho, T) - \frac{1}{2\mu_0}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) B^2.$$

§ 34. Силы, действующие на диэлектрики, магнетики и проводники

В случае неоднородных сред, например диэлектрика во внешнем электрическом поле, формула $p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,\vec{E}}$ для вычисления давления неудобна, так как F — свободная энергия всего объема и дифференци-

рование в ней производится по полному объему вещества. Если среда неоднородная, т. е. каждая точка ее находится в разных условиях, плотность изменяется в каждой точке по-разному. Следовательно, полный объем в случае неоднородных тел не может служить термодинамическим параметром, и поэтому для неоднородных сред более удобным термодинамическим параметром является плотность вещества, которая для однородных тел связана с объемом формулой $\rho = M/V$, где M — полная масса тела. В этом случае формула $p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{\vec{E},T}$ запишется следующим образом:

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{\vec{E},T} = -\left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_{\vec{E},T}\left(\frac{\partial \rho}{\partial V}\right)_{\vec{E},T} = \frac{M}{V^2}\frac{\partial F}{\partial \rho} = \rho^2\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \rho}\right)_{\vec{E},T};$$

здесь $\bar{F} = F/M$ — свободная энергия единицы массы вещества. Полная свободная энергия

$$F = \int \bar{F}dm = \int \bar{F}\rho dV = \int f dV,$$

где $f = \bar{F}\rho$ — свободная энергия единицы объема вещества. Таким образом, для неоднородных сред давление вычисляется по формуле

$$p = \rho^2\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \rho}\right)_{\vec{E},T} = \rho^2\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{f}{\rho}\right)_{\vec{E},T} = -f + \rho\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_{\vec{E},T}. \quad (34.1)$$

Определим теперь силу, действующую на единицу объема диэлектрика, помещенного в электрическое поле. Из механики сплошных сред известно, что эта сила

$$\vec{f} = -\vec{\nabla}p + \vec{f}_{эл},$$

где p — давление, $\vec{f}_{эл}$ — объемная электрическая сила. Чтобы вычислить последнюю, запишем электрическую силу, действующую на произвольный объем диэлектрика, в виде

$$\vec{F} = \int \rho\vec{E}dV + \int \sigma\vec{E}dS,$$

где $\rho = -\mathrm{div}\,\vec{P}$, $\sigma = \vec{P}\cdot\vec{n}$ — соответственно объемная и поверхностная плотности поляризационного заряда; S — поверхность, ограничивающая объем V. Применяя к интегралу по замкнутой поверхности формулу Остроградского, получаем

$$\vec{F} = \int \rho\vec{E}dV + \int \frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{E}P_i)\,dV =$$

$$= \int \rho\vec{E}dV + \int \vec{E}\,\mathrm{div}\,\vec{P}dV + \int P_i\frac{\partial \vec{E}}{\partial x_i}dV.$$

Так как $\rho = -\mathrm{div}\,\vec{P}$, то первый и второй интегралы сокращаются и тогда

$$\vec{F} = \int (\vec{P}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{E}dV.$$

Таким образом, для объемной электрической силы получаем

$$\vec{f}_{эл} = (\vec{P}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{E}.$$

Для изотропного диэлектрика с линейной зависимостью $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}$ эта формула может быть записана следующим образом:

$$\vec{f}_{эл} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)(\vec{E}\cdot\vec{\nabla})E = \frac{\varepsilon_0}{2}(\varepsilon - 1)\vec{\nabla}E^2 \quad (34.2)$$

(здесь использована формула векторной алгебры (18) приложения II и уравнение электростатики $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$).

Поскольку в случае изотропного диэлектрика с линейной зависимостью $\vec{\mathcal{P}} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}$ свободная энергия единицы объема диэлектрика, согласно формуле (33.8), равна

$$f = f_0(\rho, T) - \frac{\varepsilon_0}{2}(\varepsilon - 1)E^2,$$

то, воспользовавшись формулой (34.1), получим

$$p = -f_0 + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}{2}E^2 + \rho\frac{\partial f_0}{\partial \rho} - \frac{\varepsilon_0}{2}E^2\rho\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}.$$

Таким образом, сила, действующая на единицу объема диэлектрика, с учетом (34.2), равна

$$\vec{f} = -\vec{\nabla}p + \vec{f}_{эл} = -\vec{\nabla}p_0 - \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{\nabla}[(\varepsilon - 1)E^2] + \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{\nabla}\left(E^2\rho\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right) +$$

$$+ \frac{\varepsilon_0}{2}(\varepsilon - 1)\vec{\nabla}E^2 = -\vec{\nabla}p_0 - \frac{\varepsilon_0}{2}E^2\vec{\nabla}\varepsilon + \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{\nabla}\left(E^2\rho\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right), \quad (34.3)$$

где $p_0 = -f_0 + \rho\left(\frac{\partial f_0}{\partial \rho}\right)_{\vec{E},T}$. Следовательно, на каждую единицу объема диэлектрика, помещенного во внешнее электрическое поле, кроме силы, связанной с давлением, действует сила

$$\vec{f} = -\frac{\varepsilon_0}{2}E^2\vec{\nabla}\varepsilon + \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{\nabla}\left(E^2\rho\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right). \quad (34.4)$$

Аналогично можно вычислить силу, действующую на произвольный объем магнетика со стороны внешнего магнитного поля. Она равна

$$\vec{F} = \int [\vec{j}, \vec{B}]\,dV + \int [\vec{i}, \vec{B}]\,dS; \quad (34.5)$$

здесь $\vec{j} = \mathrm{rot}\,\vec{M}$ — объемный ток намагничения; $\vec{i} = [\vec{M}, \vec{n}]$ — поверхностный ток намагничения.

Рассмотрим сначала интеграл по поверхности

$$\int [\vec{i}, \vec{B}]\,dS = \int [[\vec{M}, n], \vec{B}]\,dS = -\int \vec{M}(\vec{n}\cdot\vec{B})\,dS + \int \vec{n}(\vec{M}\cdot\vec{B})\,dS.$$

С помощью теоремы Остроградского преобразуем интегралы по поверхности в интегралы по объему:

$$\int [\vec{i}, \vec{B}]\,dS = -\int \frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{M}B_i)\,dV + \int \vec{\nabla}(\vec{M}\cdot\vec{B})\,dV.$$

Воспользовавшись формулой (11) приложения II, а также тождеством $\frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{M}B_i) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{M} + \vec{M}\,\mathrm{div}\,\vec{B}$, имеем

$$\int [\vec{i}, \vec{B}]\,dS = \int \{(\vec{M}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{M} + [\vec{M}, \mathrm{rot}\,\vec{B}] + [\vec{B}, \mathrm{rot}\,\vec{M}]\}\,dV - \int (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{M}dV - \int \vec{M}\,\mathrm{div}\,\vec{B}dV.$$

Учитывая, что $\vec{j} = \mathrm{rot}\,\vec{M}$, $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ и сокращая подобные члены, получаем

$$\int [\vec{i}, \vec{B}]\,dS = \int \{[\vec{M}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} - [\vec{j}, \vec{B}] + [\vec{M}, \mathrm{rot}\,\vec{B}]\}\,dV.$$

Тогда, подставляя это выражение в формулу (34.5), запишем

$$\vec{F} = \int \{(\vec{M}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + [\vec{M}, \mathrm{rot}\,\vec{B}]\}\,dV \equiv \int \vec{f}_{\text{магн}}dV,$$

где $\vec{f}_{\text{магн}} = (\vec{M}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{M}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{B}$. Для случая линейной связи между векторами $\vec{M}$ и $\vec{B}$

$$\vec{M} = \frac{1}{\mu_0}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\vec{B}$$

и поэтому объемная плотность магнитной силы равна

$$\vec{f}_{\text{магн}} = \frac{1}{\mu_0}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\{(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + [\vec{B}, \mathrm{rot}\,\vec{B}]\} = \frac{1}{2\mu_0}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\vec{\nabla}B^2.$$

Свободная энергия единицы объема магнетика

$$f = f_0(\rho, T) - \frac{1}{2\mu_0}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)B^2.$$

Воспользовавшись формулой (34.1), вычислим давление

$$p = -f_0 + \frac{1}{2\mu_0}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)B^2 + \rho\frac{\partial f_0}{\partial \rho} + \frac{B^2}{2\mu_0}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

Таким образом, полная сила, действующая на единицу объема магнетика,

$$\vec{f} = -\vec{\nabla}p + \vec{f}_{\text{магн}} = -\vec{\nabla}p_0 - \frac{1}{2\mu_0}\vec{\nabla}\left[\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)B^2\right] - \frac{1}{2\mu_0}\vec{\nabla}\left[B^2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\mu}\right)\right] + \frac{1}{2\mu_0}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\vec{\nabla}B^2 =$$

$$= -\vec{\nabla}p_0 + \frac{1}{2\mu_0}B^2\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\mu}\right) - \frac{1}{2\mu_0}\vec{\nabla}\left[B^2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\mu}\right)\right].$$

Следовательно, на каждую единицу объема магнетика, помещенного во внешнее магнитное поле, кроме давления действует сила

$$\vec{f} = \frac{1}{2\mu_0}B^2\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\mu}\right) + \frac{1}{2\mu_0}\vec{\nabla}\left[B^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\mu}\right)\right].$$

При вычислении силы, действующей на проводник со стороны электрического поля, будем исходить из следующих соображений. Так как

электрическое поле не проникает вглубь проводника, то в нем $\vec{j} = 0$, $\rho = 0$, $\vec{E} = 0$, а на его поверхности сосредоточен поверхностный заряд, который с помощью граничных условий (32.13) можно выразить через электрическое поле; полагая в (32.13) $\vec{E}_2 = 0$, $\vec{D}_2 = 0$, $\vec{D}_1 = \varepsilon_0\vec{E}$, где $\vec{E}$ — напряженность электрического поля в вакууме вблизи поверхности проводника, имеем

$$\sigma = \vec{n}\cdot\vec{E}, \quad [\vec{n}, \vec{E}] = 0.$$

Отсюда следует, что вблизи поверхности проводника

$$\vec{E} = E\vec{n} = (1/\varepsilon_0)\sigma\vec{n}.$$

Подставляя это выражение в формулу (2.10), получаем

$$\vec{F} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2\vec{n}dS.$$

Таким образом, электрическое поле оказывает на поверхность проводника давление, равное $p = (\varepsilon_0/2)E^2$. Сила, связанная с этим давлением, направлена вдоль внешней нормали и по величине равна плотности энергии поля.

§ 35. Теория локального поля

В предыдущих параграфах получены основные уравнения электродинамики сплошной среды или, как говорят, макроскопической электродинамики. Поскольку описать движение каждой частицы и проследить за ним практически невозможно, мы вынуждены перейти от уравнений Максвелла (8.1) — (8.4) к формулам макроскопической электродинамики (32.1) — (32.4). Этот переход аналогичен переходу от уравнений Ньютона к уравнениям механики сплошной среды в классической механике.

Продемонстрируем идею замены микроскопических величин макроскопическими на примере электрического потенциала системы заряженных частиц, который имеет вид

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{e_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}.$$

С помощью δ-функции запишем это выражение так:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')\,dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \qquad (35.1)$$

где $\rho(\vec{r}') = \sum_{i=1}^{N} e_i\delta(\vec{r}' - \vec{r}_i)$.

Выполним в формуле (35.1) с помощью локально равновесной функции распределения F статистическое усреднение левой и правой

частей. В результате получим

$$\varphi_{\text{макро}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_{\text{макро}}(\vec{r}')\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}.$$

Здесь $\rho_{\text{макро}} = \int \rho F d\Gamma$ — статистическое среднее микроскопической плотности зарядов; $\varphi_{\text{макро}}$ — соответствующий ей потенциал. Аналогично выполняется усреднение и других величин. Индекс «макро» в макроскопической электродинамике писать не принято. Строгое обоснование как уравнений механики сплошной среды, так и уравнений макроскопической электродинамики с помощью статистического усреднения систем с большим количеством частиц дано в книге [9]. Следует отметить, что приближение сплошной среды, как и принцип локального равновесия, имеет свои границы применимости и поэтому не всегда справедливо. Одной из проблем, для решения которой недостаточно уравнений макроскопической электродинамики, является вычисление силы, действующей со стороны электрического и магнитного поля на отдельную частицу сплошной среды.

Для вычисления отклика отдельной частицы (молекулы, атома) среды на внешнее электромагнитное поле необходимо знать силу, действующую на данную частицу, находящуюся в окружении других частиц. В модели сплошной среды сила, действующая на произвольный объем диэлектрика со стороны электрического поля $\vec{E}$, равна $\vec{F} = \int \vec{f} dV$, где $\vec{f}$ — объемная сила, которая в изотропной среде имеет вид (1.10). Под произвольным объемом понимают действительно любой объем, но все-таки в модели сплошной среды — это макроскопический объем, с линейными размерами $r_0 \gg a$ (где a — среднее расстояние между частицами), содержащий достаточно много частиц. Поэтому выражение (1.10) непригодно для вычисления силы, действующей на отдельную частицу. Так как эта сила определяется напряженностью электрического поля в точке нахождения частицы, то возникает проблема его достаточно точного вычисления. Оно отличается от поля, которое вычисляется в приближении сплошной среды, так как учет электрического поля, создаваемого ближайшими соседями рассматриваемой частицы, не может быть выполнен в этом приближении. Это поле, которое принято называть *локальным* (эффективным, или действующим), необходимо вычислять более точным способом. Для этого выделим вокруг рассматриваемой частицы сферическую область радиуса $r_1 \gg r_0 \gg a$ (гораздо большего, чем размеры частицы, но достаточно малого). Как мы увидим ниже, результат не будет зависеть от радиуса этой сферы. Тогда, пользуясь принципом суперпозиции, локальное поле можно вычислить следующим образом. Из поля, вычисленного в приближении сплошной среды $\vec{E}$, вычтем поле $\vec{E}_l$ (32.23), создаваемое поляризованным диэлектрическим шаром, также вычисленное в приближении сплошной среды, и прибавим вместо него поле $\vec{E}_1$ частиц, находящихся в этом же шаре, но вычисленное более точно, без использования приближения сплошной среды.

Таким образом, напряженность локального поля равна

$$\vec{E}_{\text{лок}} = \vec{E} - \vec{E}_l + \vec{E}_1.$$

Так как, согласно (32.23), $\vec{E}_l = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}$, то

$$\vec{E}_{\text{лок}} = \vec{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P} + \vec{E}_1. \tag{35.2}$$

Самая трудная задача заключается в вычислении с достаточной степенью точности напряженности электрического поля $\vec{E}_1$ в центре сферы, где находится частица. Это поле, как было уже сказано, создается частицами, находящимися в объеме сферы. Его напряженность зависит от структуры диэлектрика (величины и взаимной ориентации диполей, их расположения в пространстве), и поэтому в каждом случае требует отдельного расчета, но, как будет видно из последующего, практически не зависит от радиуса сферы.

Рассмотрим случай, когда частицы (диполи) расположены в узлах кубической решетки и выберем систему координат с центром в выбранной нами сфере. Будем считать также, что этот центр совпадает с одним из узлов решетки. Таким образом, мы определим электрическое поле, действующее на атом, находящийся в центре сферы, со стороны всех других атомов, расположенных в узлах, которые попадают в выбранную нами сферу малого радиуса. В этом случае, согласно (3.2), электрическое поле, создаваемое в центре сферы диполем, находящимся в точке $\vec{r}$, равно

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,|3\vec{n}(\vec{p}\cdot\vec{n}) - \vec{p}|\,\frac{1}{r^3}.$$

Будем предполагать, что все диполи, находящиеся в эквивалентных узлах внутри физически малой сферы, имеют одинаковые по величине дипольные моменты. Тогда напряженность поля, создаваемого этими диполями,

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum \frac{1}{r^3}\,|3\vec{n}(\vec{p}\cdot\vec{n}) - \vec{p}|, \tag{35.3}$$

где суммирование производится по всем диполям, находящимся внутри сферы, за исключением диполя, находящегося в ее центре. Таким образом, при вычислении напряженности $\vec{E}_1$ мы отказываемся от модели сплошной среды, и рассчитываем её как решеточную сумму (35.3).

Так как все диполи предполагаем одинаковыми, то в формуле (35.3) можно вынести дипольный момент $\vec{p}$ за знак суммы, и тогда l-ю компоненту (35.3) можно записать как

$$E_{1l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum \frac{(3x_l x_j - \delta_{lj} r^2)}{r^5}\,p_j. \tag{35.4}$$

Будем считать, что выбранная нами декартова система координат совпадает с осями кубической решетки. Тогда если координаты какого-нибудь диполя равны x, y, z, то обязательно найдется диполь

с координатами x, y, $-z$, и при этом расстояние их от центра сферы будет одинаковым. Поэтому суммы типа

$$\sum \frac{3zx}{r^5}, \quad \sum \frac{3zy}{r^5}, \quad \sum \frac{3xy}{r^5}$$

будут равны нулю. Если рассмотреть выражение типа $\sum \frac{3x_i x_j - \delta_{ij} r^2}{r^5}$ при $i = j$, например

$$\sum \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{r^5},$$

то поскольку в кубической решетке наряду с диполем, находящимся в точке $x = a$, $y = b$, $z = c$, найдутся также и диполи в точках $x = b$, $y = c$, $z = a$ и $x = c$, $y = a$, $z = b$, такие суммы будут равны нулю, так как r у них одинаково.

Таким образом, для кристаллов с кубической симметрией $\vec{E}_1 = 0$. Такой же результат мы получили бы и в случае изотропной среды, в частности для жидкости или газа. Напомним, что приведенный выше расчет локального поля основан на очень сильном требовании отсутствия корреляции между положением и ориентацией диполей.

Таким образом, полагая в (35.2) $\vec{E}_1 = 0$, получаем

$$\vec{E}_{\text{лок}} = \vec{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}.$$

Так как $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}$, то

$$\vec{E}_{\text{лок}} = \vec{E} + \frac{\varepsilon - 1}{3}\vec{E} = \frac{\varepsilon + 2}{3}\vec{E}. \tag{35.5}$$

Поскольку $\varepsilon > 1$, следовательно, действующее на атом электрическое поле $\vec{E}_{\text{лок}}$ всегда больше, чем электрическое поле, вычисленное в приближении сплошной среды.

Используя формулу (35.5) для локального поля, можно выразить ε (макроскопическую характеристику сплошной среды) через поляризуемость отдельной частицы α_0 (микроскопическая характеристика сплошной среды). Действительно, так как дипольный момент отдельной частицы $\vec{p}$ пропорционален действующему на нее электрическому полю, то

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \alpha_0 \vec{E}_{\text{лок}},$$

где α_0 — поляризуемость отдельной частицы.

Если в единице объема находится n частиц, то дипольный момент единицы объема

$$\vec{P} = n\varepsilon_0 \alpha \vec{E}_{\text{лок}} = n\varepsilon_0 \alpha_0 \frac{\varepsilon + 2}{\varepsilon}\vec{E}. \tag{35.6}$$

В то же время макроскопическая величина — дипольный момент единицы объема $\vec{P}$ — определяется формулой

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}.$$

Сравнивая это выражение с (35.6), находим

$$n\alpha_0 \frac{\varepsilon + 2}{3} = \varepsilon - 1.$$

Эта формула называется *формулой Лоренц — Лоренца* и ее обычно записывают в виде

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{n\alpha_0}{3}. \tag{35.7}$$

Хотя формулы (35.6) и (35.7) и получены при весьма специальных предположениях, из предыдущего следует необходимость учета различия между полем $\vec{E}$, вычисленным в модели сплошной среды, и полем, действующим на отдельную частицу $\vec{E}_{\text{лок}}$, находящуюся в этой сплошной среде.

Рассмотренный выше способ расчета локального поля не является единственным. В 1936 г. Л. Онсагер предложил другой метод. Если рассмотреть сферическую полость вокруг данной частицы, настолько малую, что в ней помещается только одна частица, то напряженность электрического поля в центре этой полости и будет, очевидно, равна $\vec{E}_{\text{лок}}$. Для нахождения $\vec{E}_{\text{лок}}$ в этом методе следует вычислить поле в сфере с $\varepsilon = 1$, окруженной диэлектриком с $\varepsilon \neq 1$. Эта задача аналогична задаче, рассмотренной в § 32, с той только разницей, что вакуум и диэлектрик необходимо поменять местами и поэтому граничное условие (32.18) теперь должно иметь вид

$$\varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \quad \text{при} \quad r = R.$$

Таким образом, не решая заново задачи можем воспользоваться формулами § 32, в частности формулой (32.24), заменив в них ε на $1/\varepsilon$, $\vec{E}$ на $\vec{E}_{\text{лок}}$, а $\vec{E}_0$ на $\vec{E}$. В результате такой замены получим

$$\vec{E}_{\text{лок}} = \frac{3}{1/\varepsilon + 2}\vec{E} = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1}\vec{E}. \tag{35.8}$$

Эта формула отличается от (35.5), но они совпадают, если $(\varepsilon - 1) \ll \varepsilon$, т. е. если ε мало отличается от единицы. Однако по-прежнему сохраняется вывод о том, что напряженность локального поля больше, чем поля вычисленного, в приближении сплошной среды (макроскопического поля).

§ 36. Электродинамика движущихся сред

Уравнения Максвелла в неподвижной сплошной среде (32.1) — (32.4) в отсутствие сторонних зарядов и токов имеют вид

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{36.1}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho, \quad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}, \tag{36.2}$$

а связь между векторами $\vec{D}$, $\vec{H}$ и векторами электромагнитного поля $\vec{E}$, $\vec{B}$ для изотропных сред в системе отсчета, связанной со средой, задается уравнениями

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}.$$

Уравнения Максвелла в сплошной среде должны быть также инвариантны относительно преобразования Лоренца. Первые два уравнения Максвелла (36.1) не зависят от наличия среды, поэтому ясно, что для обеспечения релятивистской инвариантности второй пары уравнений Максвелла (36.2) необходимо записать их в виде (25.14), где вместо тензора $F^{\mu\nu}$ должен стоять некоторый антисимметричный тензор второго ранга $G^{\mu\nu}$, компоненты которого выражаются через компоненты векторов $\vec{D}$ и $\vec{E}$. Для того чтобы найти тензор $G^{\mu\nu}$, воспользуемся тем, что при замене

$$\vec{E} \to \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0}, \quad \vec{B} \to \mu_0 \vec{H} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \vec{H} \tag{36.3}$$

уравнения (36.2) и (8.2), (8.3) совпадают. Поэтому выполнив в формуле (25.13) замену (36.3), получаем искомый тензор второго ранга

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{\varepsilon_0} \begin{bmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -\frac{1}{c} H_z & \frac{1}{c} H_y \\ D_y & \frac{1}{c} H_z & 0 & -\frac{1}{c} H_x \\ D_z & -\frac{1}{c} H_y & \frac{1}{c} H_x & 0 \end{bmatrix},$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{\varepsilon_0} \begin{bmatrix} 0 & D_x & D_y & D_z \\ -D_x & 0 & -\frac{1}{c} H_z & \frac{1}{c} H_y \\ -D_y & \frac{1}{c} H_z & 0 & -\frac{1}{c} H_x \\ -D_z & -\frac{1}{c} H_y & \frac{1}{c} H_x & 0 \end{bmatrix}.$$

С помощью тензора $G^{\mu\nu}$ два уравнения (36.2) записываются в виде

$$\frac{\partial G^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{j^\nu}{c\varepsilon_0},$$

что доказывает релятивистскую инвариантность уравнений Максвелла в сплошной среде.

Теперь найдем связь между тензорами $G^{\mu\nu}$ и $F^{\mu\nu}$, другими словами, между векторами $\vec{D}$, $\vec{H}$ и $\vec{E}$, $\vec{B}$ в движущейся системе отсчета, исходя из известной связи между ними (29.10), (30.5) в покоящейся системе отсчета.

Очевидно, что тензор $G^{\mu\nu}$ преобразуется при преобразовании Лоренца так же, как и тензор $F^{\mu\nu}$. Следовательно, и векторы $\vec{D}$ и $\frac{1}{c}\vec{H}$ преобразуются точно так же, как векторы $\vec{E}$ и $c\vec{B}$. Поэтому используя формулы (26.2), заменяя в них $\vec{E}$ и $\vec{B}$ соответственно на $\vec{D}$ и $\frac{1}{c^2}\vec{H}$, находим

$$\vec{D}_\parallel = \vec{D}'_\parallel, \quad \vec{D}_\perp = \frac{\vec{D}'_\perp - \frac{1}{c^2}[\vec{v}, \vec{H}'_\perp]}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\vec{H}_\parallel = \vec{H}'_\parallel, \quad \vec{H}_\perp = \frac{\vec{H}'_\perp + [\vec{v}, \vec{D}'_\perp]}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Исходя из этих формул и связи между $\vec{D}$, $\vec{H}$ и $\vec{E}$, $\vec{B}$ в неподвижной системе отсчета, находим связь между соответствующими векторами в движущейся системе отсчета:

$$\vec{D}_\perp = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}_\perp = \frac{\vec{D}'_\perp - \frac{1}{c^2}[\vec{v}, \vec{H}'_\perp]}{\sqrt{1-\beta^2}} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\vec{E}'_\perp - [\vec{v}, \vec{B}'_\perp]}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\mu_0 \mu \vec{H}_\perp = \vec{B}_\perp = \frac{\vec{B}'_\perp + \frac{1}{c^2}[\vec{v}, \vec{E}'_\perp]}{\sqrt{1-\beta^2}} = \mu_0 \mu \frac{\vec{H}'_\perp + [\vec{v}, \vec{D}'_\perp]}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\vec{D}'_\parallel = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}'_\parallel, \quad \vec{H}'_\parallel = \mu_0 \mu \vec{B}'_\parallel.$$

Сокращая на общий множитель $1/\sqrt{1-\beta^2}$ и учитывая, что $[\vec{v}, \vec{H}'_\parallel] = 0$, $[\vec{v}, \vec{H}'_\parallel] = 0$, $[\vec{v}, \vec{E}'_\parallel] = 0$, $[\vec{v}, \vec{D}'_\parallel] = 0$, получаем

$$\varepsilon_0 \varepsilon (\vec{E} - [\vec{v}, \vec{B}]) = \vec{D} - \frac{1}{c^2}[\vec{v}, \vec{H}],$$

$$\frac{1}{\mu_0 \mu}\left(\vec{B} + \frac{1}{c^2}[\vec{v}, \vec{E}]\right) = \vec{H} + [\vec{v}, \vec{D}] \tag{36.4}$$

(здесь штрихи у векторов $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{D}$, $\vec{H}$ уже опущены).

Формулы (36.4) и дают искомую связь между векторами $\vec{E}$, $\vec{B}$ с одной стороны и векторами $\vec{D}$ и $\vec{H}$ — с другой.

Так как $\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$, $\vec{M} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{H}$, то очевидно, что векторы $\vec{P}$ и $\vec{M}$ также образуют антисимметричный четырехмерный тензор второго ранга, который обозначим $S^{\mu\nu}$:

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{\varepsilon_0} \begin{bmatrix} 0 & -P_x & -P_y & -P_z \\ P_x & 0 & \frac{1}{c} M_z & -\frac{1}{c} M_y \\ P_y & -\frac{1}{c} M_z & 0 & \frac{1}{c} M_x \\ P_z & \frac{1}{c} M_y & -\frac{1}{c} M_x & 0 \end{bmatrix}. \tag{36.5}$$

Соотношения $\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E}$, $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$ в четырехмерной форме приобретают вид

$$G^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}.$$

С помощью тензора $S^{\mu\nu}$ можно записать в ковариантной форме связь между векторами поляризации $\vec{P}$ и намагничения $\vec{M}$ с одной стороны, и плотностями заряда $\rho = -\mathrm{div}\,\vec{P}$ и тока $\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,\vec{M}$ — с другой. Эта связь имеет вид $j^\nu = \frac{\partial S^{\mu\nu}}{\partial x^\mu}$.

Компоненты тензора $S^{\mu\nu}$ при преобразовании Лоренца должны преобразовываться как четырехмерный тензор электромагнитного поля (25.12). Необходимые формулы преобразования получены в § 26 (см. формулы (26.2)), в них следует только заменить $\vec{E}$ на $\vec{P}/\varepsilon_0$, $\vec{B}$ на $-\mu_0\vec{M}$. В результате получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \vec{P}_\parallel &= \vec{P}'_\parallel, \quad \vec{P}_\perp = \frac{\vec{P}'_\perp - \frac{1}{c^2}[\vec{v}, \vec{M}']}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \vec{M}_\parallel &= \vec{M}'_\parallel, \quad \vec{M}_\perp = \frac{\vec{M}'_\perp - [\vec{v}, \vec{P}']}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \tag{36.6}$$

Следует помнить, что в этих формулах $\vec{P}$ и $\vec{M}$ — соответственно электрический и магнитный дипольные моменты единицы объема. Если в единице объема содержится n частиц, обладающих электрическим $\vec{p}$ или магнитным $\vec{\mu}$ дипольным моментами, то тогда $\vec{P} = n\vec{p}$, $\vec{M} = n\vec{\mu}$. Пользуясь формулами (36.6), получаем связь между дипольными моментами в покоящейся и движущейся системах отсчета:

$$\begin{aligned} n\vec{p}_\perp &= \frac{\vec{p}'_\perp - \frac{1}{c^2}[\vec{v}, \vec{\mu}'_\perp]}{\sqrt{1-\beta^2}} n', \quad n\vec{p}_\parallel = n'\vec{p}'_\parallel, \\ n\vec{\mu}_\perp &= \frac{\vec{\mu}'_\perp - [\vec{v}, \vec{p}'_\perp]}{\sqrt{1-\beta^2}} n', \quad n\vec{\mu}_\parallel = n'\vec{\mu}'_\parallel. \end{aligned} \tag{36.7}$$

Так как, согласно (25.7), $dV = dV' \frac{\partial t'}{\partial t} = dV'\sqrt{1-\beta^2}$, а $dN \equiv dN'$, то

$$n = \frac{dN}{dV} = \frac{dN}{dV'}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{n'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Подставляя это соотношение в (36.7), имеем

$$\vec{p} = \vec{p}' - \frac{1}{c^2}[\vec{v}, \vec{\mu}'], \quad \vec{\mu} = \vec{\mu}' - [\vec{v}, \vec{p}'] \tag{36.8}$$

(здесь учтено, что $[\vec{v}, \vec{p}'_\perp] = [\vec{v}, \vec{p}']$).

Из формул (36.8) следует, что покоящаяся частица, не обладающая дипольным моментом, при движении приобретает дипольный момент

$$\vec{p} = -\frac{1}{c^2}[\vec{v}, \vec{\mu}].$$

Следовательно, на магнитный диполь, движущийся в электрическом поле, согласно формуле $\vec{F} = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}$, будет действовать сила

$$\vec{F} = -\frac{1}{c^2}([\vec{v}, \vec{\mu}]\cdot\vec{\nabla})\vec{E}.$$

Аналогичная сила действует и на движущийся в магнитном поле электрический диполь:

$$\vec{F} = ([\vec{v}, \vec{p}]\cdot\vec{\nabla})\vec{B}.$$

Нетрудно найти и моменты сил, действующие на движущиеся частицы, обладающие дипольным магнитным моментом. Предлагаем читателю сделать это самостоятельно.

Глава 6

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ

§ 37. Частотная дисперсия диэлектрической проницаемости. Соотношения Крамерса—Кронига

Система уравнений, описывающая состояние вещества и поля, представляет собой систему уравнений Максвелла (9.1) — (9.4) и уравнения Ньютона (9.5). Эти уравнения необходимо решать совместно, так как, с одной стороны, источниками электромагнитного поля являются заряженные частицы и создаваемые ими токи, которые входят в уравнение Максвелла через плотности заряда ρ и тока $\vec{j}$ (токи проводимости, поляризации, намагничения и др.), а с другой — движение заряженных частиц определяется силой Лоренца $\vec{f} = \rho\vec{E} + [\vec{j}, \vec{B}]$, в которую входят векторы электромагнитного поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Но в такой общей постановке задачи классической физики были бы практически неразрешимы, и поэтому необходимы определенные их упрощения.

Во многих случаях решение задачи о вычислении электромагнитного поля можно упростить, считая заряды и токи, которые создают это поле, заданными; иными словами, можно не учитывать обратного влияния электромагнитного поля на характер движения зарядов (§ 15, 16). Другим упрощением является решение задачи о движении частиц в заданном («внешнем») электромагнитном поле (§ 17, 18). В обоих случаях пренебрегаем обратным влиянием одной из подсистем на другую. Но такое пренебрежение возможно не всегда, и тогда необходимо решать систему уравнений электродинамики и механики совместно. В этом случае можно попытаться сначала в каком-то прибли-

жении решить задачу о движении заряженных частиц в электромагнитном поле, а затем найти выражение для создаваемых ими зарядов и токов. Очевидно, что плотности тока и заряда, а также векторы поляризации и намагниченности вещества будут при этом выражены через $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Подставив затем найденные выражения для токов и зарядов в уравнения Максвелла (9.1) — (9.4), можно вычислить электромагнитное поле.

Обычно на практике решение такой задачи связано с большими математическими трудностями. Однако можно, исходя из физического опыта, постулировать зависимость токов и зарядов от $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в виде некоторых феноменологических соотношений. Например, можно предположить, а затем проверить справедливость этого предположения на опыте, что вектор поляризации, с которым связаны поляризационный заряд $\rho = -\mathrm{div}\,\vec{P}$ и ток $\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$, в не слишком сильных полях пропорционален напряженности электрического поля

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}. \tag{37.1}$$

При записи формулы (37.1) предполагается, что вектор поляризации в данной точке диэлектрика зависит от напряженности электрического поля в этой же точке, причем $\vec{E}$ в этой формуле включает в себя как поле, созданное внешними источниками, так и поле, возникшее в результате поляризации среды.

Формулой (37.1) иногда можно пользоваться и в том случае, если электрическое поле изменяется со временем, но достаточно медленно. Однако при быстром его изменении формула (37.1) нуждается в обобщении, так как в результате инерционности движения частиц вектор поляризации $\vec{P}(t)$ зависит от значения напряженности электрического поля не только в данный момент времени, но и от его значения в предшествующие моменты времени $t_i \leqslant t$, что можно записать следующим образом:

$$\vec{P}(t) = \varepsilon_0 \sum_i \alpha (t - t_i) \vec{E}(t_i) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{t} \alpha (t - t') \vec{E}(t')\, dt', \tag{37.2}$$

или, если сделать в этом интеграле замену переменных $t - t' = \tau$,

$$\vec{P}(t) = \varepsilon_0 \int_0^{\infty} \alpha(\tau) \vec{E}(t - \tau)\, d\tau. \tag{37.3}$$

Формула (37.3) является обобщением формулы (37.1) на случай переменного электромагнитного поля и учитывает то, что поляризация диэлектриков под действием внешнего поля происходит не мгновенно, а с некоторым запаздыванием.

Разложим напряженность электромагнитного поля в интеграл Фурье

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

и подставим это выражение в формулу (37.3). Изменив затем порядок интегрирования по частоте и по времени, получим

$$\vec{P}(t) = \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} \alpha(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau.$$

Функция частоты

$$\alpha(\omega) = \int_0^{\infty} \alpha(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \tag{37.4}$$

есть преобразование Фурье (а точнее преобразование Лапласа) функции $\alpha(\tau)$. Так как функция $\alpha(\tau)$ невозрастающая, то ее преобразование Лапласа $\alpha(\omega)$ аналитично в верхней полуплоскости комплексной переменной ω. Таким образом,

$$\vec{P}(t) = \frac{1}{1\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{P}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega) \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Следовательно, преобразование Фурье вектора поляризации имеет вид

$$\vec{P}(\omega) = \varepsilon_0 \alpha(\omega) \vec{E}(\omega).$$

Согласно определению вектора индукции (29.5), имеем

$$\vec{D}(\omega) = \varepsilon_0 \vec{E}(\omega) + \vec{P}(\omega) = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \vec{E}(\omega), \tag{37.5}$$

где

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \alpha(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} \alpha(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \tag{37.6}$$

Диэлектрическую постоянную можно рассматривать как некоторый интегральный оператор, который функции $f(t)$ ставит в соответствие другую функцию $\varphi(t)$ по правилу

$$\varphi(t) = \hat{\varepsilon} f(t) = f(t) + \int_0^{\infty} \alpha(\tau) f(t - \tau)\, d\tau.$$

В частности, если $f(t) = e^{-i\omega t}$, то

$$\hat{\varepsilon} e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t} + \int_0^{\infty} \alpha(\tau) e^{-i\omega t} e^{i\omega\tau} d\tau = \left(1 + \int_0^{\infty} \alpha(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau\right) e^{-i\omega t}.$$

Учитывая, что $\varepsilon(\omega) = 1 + \alpha(\omega)$, и используя определение (37.4), получаем

$$\hat{\varepsilon} e^{-i\omega t} = \varepsilon(\omega) e^{-i\omega t}.$$

Итак, в переменном электрическом поле диэлектрическая проницаемость зависит не только от свойств самой среды, но и от частоты. Эта зависимость называется *дисперсией диэлектрической проницаемости*. В следующем параграфе будет показано, что физическая причина дисперсии связана с инерционностью движения заряженных частиц под действием электромагнитного поля.

Рассмотрим теперь некоторые свойства функции $\varepsilon(\omega)$, общие для любых сред. Из формулы (37.6) следует, что хотя функция $\alpha(\tau)$ вещественна, функция $\varepsilon(\omega)$, вообще говоря, комплексна. Обозначим ее вещественную и мнимую части как $\varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_2(\omega)$. Тогда

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_1(\omega) + i\varepsilon_2(\omega).$$

Из определения (37.6) и вещественности функции $\alpha(\tau)$ следует, что

$$\varepsilon^*(\omega) = 1 + \int_0^\infty \alpha(\tau)\, e^{-i\omega\tau} d\tau = \varepsilon(-\omega).$$

Разделяя это соотношение на мнимую и вещественную части, получим

$$\varepsilon_1(\omega) = \varepsilon_1(-\omega), \quad \varepsilon_2(\omega) = -\varepsilon_2(-\omega).$$

Другими словами, вещественная часть функции $\varepsilon(\omega)$ есть четная, а мнимая часть — нечетная функции частоты. Следовательно, достаточно знать поведение функции $\varepsilon(\omega)$ только при положительных частотах.

Хотя в физических приложениях диэлектрическая постоянная $\varepsilon(\omega)$ рассматривается как функция вещественной переменной ω, математически удобно для установления некоторых ее аналитических свойств считать ее функцией комплексной переменной z. Физический смысл имеют значения $\varepsilon(z)$ только на вещественной оси $\omega = \operatorname{Re} z$.

Из определений (37.6) следует, что функция $\varepsilon(z)$ аналитична в верхней полуплоскости комплексного переменного z. Действительно, так как функция $\alpha(\tau)$, входящая в определение величины $\varepsilon(z)$, конечна при всех значениях своего аргумента и при $\tau \to \infty$ стремится к нулю, а подынтегральное выражение в формуле (37.6) содержит экспоненциально убывающий при $\operatorname{Im} z > 0$ множитель $e^{-\operatorname{Im} zt}$, то при любом значении z в верхней полуплоскости этот интеграл сходится. Существенно, что данное свойство функции $\varepsilon(z)$ математически связано с тем, что интегрирование в (37.6) производится от 0 до ∞, а это, в свою очередь, означает, что поляризация в данный момент времени может зависеть от значения напряженности поля только в предыдущие моменты времени $t' < t$ *(принцип причинности)*.

При $z \to \infty$ $\varepsilon(z) \to 1$. Это объясняется тем, что ввиду инерционности движения заряженных частиц среды при достаточно большой скорости изменения поля со временем процесс поляризации не успевает происходить вообще.

Таким образом, для любого вещества функция $\varepsilon(z)$ обладает следующими свойствами: 1) $\varepsilon(z) \to 1$ при $z \to \infty$; 2) $\varepsilon(z)$ аналитична при $\operatorname{Im} z \to 0$. Исходя из этих свойств можно найти связь между мнимой и вещественной частями функции $\varepsilon(\omega)$ *(соотношения Крамерса — Кронига)*. Для этого рассмотрим

$$\int_C \frac{\varepsilon(z) - 1}{z - \omega}\, dz$$

по замкнутому контуру C, изображенному на рис. 22. Функция $\varepsilon(z) - 1$ аналитична в верхней полуплоскости, а ω — вещественная величина,

поэтому внутри контура C подынтегральная функция аналитична, и, согласно теореме Коши, этот интеграл равен нулю. Перепишем его в виде суммы четырех интегралов:

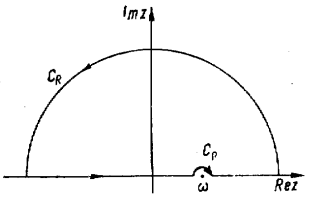


Рис. 22

$$\int_{C_R} \frac{\varepsilon(z) - 1}{z - \omega}\, dz + \int_{-\infty}^{\omega-\rho} \frac{\varepsilon(z) - 1}{z - \omega}\, dz +$$

$$+ \int_{C_\rho} \frac{\varepsilon(z) - 1}{z - \omega}\, dz + \int_{\omega+\rho}^{\infty} \frac{\varepsilon(z) - 1}{z - \omega}\, dz = 0.$$

Здесь C_R — полуокружность большого радиуса R; C_ρ — полуокружность бесконечно малого радиуса ρ; второй и четвертый интегралы берутся по вещественной оси.

Так как $\varepsilon(z) \to 1$ при $|z| \to \infty$, то интеграл

$$\int_{C_R} \frac{\varepsilon(z) - 1}{z - \omega}\, dz$$

обращается в нуль. Интеграл

$$\int_{C_\rho} \frac{\varepsilon(z) - 1}{z - \omega}\, dz$$

по полуокружности бесконечно малого радиуса ρ можно вычислить, введя замену $z = \omega + \rho e^{i\varphi}$, $dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$ и приняв $\rho \to 0$:

$$\lim_{\rho \to 0} \int_\pi^0 \frac{\varepsilon(\omega + \rho e^{i\varphi}) - 1}{\rho e^{i\varphi}}\, i\rho e^{i\varphi} d\varphi = -i\pi\,[\varepsilon(\omega) - 1].$$

Таким образом,

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega}\, d\omega', \qquad (37.7)$$

где $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, dz = \lim_{\rho \to 0} \left(\int_{-\infty}^{\omega-\rho} f(z)\, dz + \int_{\omega+\rho}^{\infty} f(z)\, dz \right)$. Разделяя (37.7) на мнимую и вещественную части, получаем соотношения Крамерса — Кронига:

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_2(\omega')\, d\omega'}{\omega' - \omega} = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega' \varepsilon_2(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2}\, d\omega',$$

$$\varepsilon_2(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_1(\omega') - 1}{\omega' - \omega}\, d\omega' = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon_1(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2}\, d\omega', \qquad (37.8)$$

связывающие мнимую $\varepsilon_2(\omega)$ и вещественную $\varepsilon_1(\omega)$ части диэлектрической проницаемости.

Рассмотрим одно из практических применений соотношений Крамерса — Кронига. Пусть частота изменяется в интервале, где мнимая

часть $\varepsilon_2(\omega)$ практически равна нулю (область прозрачности), и поэтому в подынтегральном выражении первого соотношения Крамерса — Кронига (37.8) в точке $\omega = \omega'$ фактически особенности нет. Следовательно, это соотношение можно продифференцировать по параметру ω. В результате получим

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\omega} = \frac{4\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{x\varepsilon_2(x)}{(x^2-\omega^2)^2}\,dx.$$

Так как для термодинамически равновесных сред при $\omega > 0$ всегда $\varepsilon_2 \equiv \operatorname{Im}\varepsilon > 0$, то

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\omega} \equiv 2n\frac{dn}{d\omega} > 0,$$

где $n = \sqrt{\varepsilon}$ — показатель преломления. Другими словами, в термодинамически равновесных средах ($\varepsilon_2 > 0$) область прозрачности является вместе с тем и областью нормальной дисперсии, т. е. $\frac{dn}{d\omega} > 0$. Справедливо также и обратное утверждение.

Рассмотрим теперь уравнения (32.1) — (32.4) в диспергирующей среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$, зависящей от частоты, и $\mu = 1$. Так как вид уравнений (32.1) и (32.2) не зависит от наличия среды, то по-прежнему можно выразить $\vec{B}$ и $\vec{E}$ через $\vec{A}$ и φ следующим образом:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}.$$

Для того чтобы получить уравнение для $\vec{A}$ и φ в диспергирующей среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$, удобно перейти к фурье-компонентам. Тогда

$$\vec{E}_\omega = -\vec{\nabla}\varphi_\omega + i\omega\vec{A}_\omega, \quad \vec{B}_\omega = \operatorname{rot}\vec{A}_\omega,$$

а уравнения (32.3) и (32.4) примут вид

$$\operatorname{div}\vec{D}_\omega = \rho_\omega, \quad \operatorname{rot}\vec{B}_\omega = \mu_0(\vec{j}_\omega - i\omega\vec{D}_\omega).$$

Учитывая, что, согласно формуле (37.5), $\vec{D}_\omega = \varepsilon_0\varepsilon(\omega)\vec{E}_\omega$, перепишем последнее уравнение следующим образом:

$$\operatorname{rot}\vec{B}_\omega = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}_\omega = -\Delta\vec{A}_\omega + \vec{\nabla}\operatorname{div}\vec{A}_\omega =$$
$$= \mu_0\vec{j}_\omega + \frac{i\omega\varepsilon(\omega)}{c^2}(\vec{\nabla}\varphi_\omega - i\omega\vec{A}_\omega).$$

Пользуясь калибровочной инвариантностью уравнений Максвелла (§ 10), наложим на векторный и скалярный потенциалы дополнительное условие

$$\operatorname{div}\vec{A}_\omega - \frac{i\omega}{c^2}\varepsilon(\omega)\varphi_\omega = 0, \qquad (37.9)$$

совпадающее при $\varepsilon(\omega) = 1$ с калибровкой Лоренца (10.7). Тогда для векторного потенциала получаем следующее уравнение:

$$\Delta\vec{A}_\omega + \kappa^2\vec{A}_\omega = -\mu_0\vec{j}_\omega, \qquad (37.10)$$

где $\kappa^2 = (\omega^2/c^2)\varepsilon(\omega)$.

Из уравнения $\operatorname{div}\vec{D}_\omega = \rho_\omega$, подставляя в него $\vec{D}_\omega = \varepsilon_0\varepsilon(\omega) \times (-\vec{\nabla}\varphi_\omega + i\omega\vec{A}_\omega)$ и пользуясь калибровкой (37.9), находим

$$\Delta\varphi_\omega + \kappa^2\varphi_\omega = -\frac{\rho_\omega}{\varepsilon_0\varepsilon(\omega)}. \qquad (37.11)$$

Величины ρ_ω и $\vec{j}_\omega$ в формулах (37.10) и (37.11) связаны между собой уравнением непрерывности

$$-i\omega\rho_\omega + \operatorname{div}\vec{j}_\omega = 0.$$

Обычно уравнение (37.11) при решении задач не используется, так как достаточно решить уравнение (37.10) и тогда φ_ω находится из условия (37.9).

Уравнение для векторного потенциала (37.10) в диспергирующей среде отличается от соответствующего уравнения (12.11) для вакуума только тем, что в (37.10) вместо $\kappa^2 = \omega^2/c^2$ стоит $\kappa^2 = (\omega^2/c^2)\varepsilon(\omega)$. Поэтому если искать решение уравнения

$$\Delta\vec{A}_\omega + \kappa^2\vec{A}_\omega = 0$$

в виде плоских волн (§ 13), то закон дисперсии для них будет иметь вид

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega). \qquad (37.12)$$

Следовательно, фазовая скорость

$$v = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}} = \frac{c}{n(\omega)}$$

обладает дисперсией по частоте, так как величина $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon}(\omega)$, которая называется *показателем преломления*, зависит от частоты.

В общем случае функция $\varepsilon(\omega)$ при вещественных ω может быть комплексной. Тогда и волновой вектор $\kappa(\omega)$, согласно (37.12), также будет комплексным. Это означает, что амплитуда плоской волны по мере распространения в диспергирующей среде будет уменьшаться по закону $e^{-\operatorname{Im}\kappa\cdot z}$, где $\operatorname{Im}\kappa = (\omega/c)\operatorname{Im}\varepsilon(\omega)$.

В § 39 будет показано, что вследствие дисперсии скорость распространения электромагнитного импульса (сигнала) в среде отличается от фазовой скорости, а его форма изменяется по мере его распространения. Другими словами, наличие дисперсии приводит к тому, что в диспергирующей среде значение фазовой скорости не совпадает со скоростью распространения электромагнитных импульсов (или волновых пакетов).

Следует отметить, что описание сплошной среды с помощью диэлектрической проницаемости ограничено. Действительно, в § 15 было

показано, что излучающую систему можно рассматривать как диполь при условии $kd = \omega d/c \ll 1$ (дипольное приближение), где d — размеры излучающей системы. Если излучающая система представляет собой атом, то $d \simeq 10^{-10}$ м, и так как $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, то критерий дипольного приближения выполняется вплоть до частот $\omega \sim c/d \simeq \simeq 10^{18}$ с$^{-1}$, другими словами, охватывает всю оптическую область, включая и далекую ультрафиолетовую область. Таким образом, величина $\varepsilon(\omega)$ имеет физический смысл, вообще говоря, только для частот $\omega \leqslant 10^{18}$ с$^{-1}$. Для рентгеновского и γ-излучения описание среды с помощью диэлектрической проницаемости, строго говоря, невозможно.

Выше была рассмотрена линейная зависимость вектора поляризации от напряженности электрического поля. Если учесть следующие члены разложения зависимости $\vec{P}(t)$ от $\vec{E}(t)$, то формулу (37.2) следует записать в виде

$$P_i(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{t} \alpha_{ij}(t-t') E_j(t')\,dt' +$$

$$+ \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t} \chi_{ijk}(t-t', t-t'') E_j(t') E_k(t'')\,dt'' + \cdots$$

Эта формула после замены переменных $t - t' = \tau$, $t - t'' = \tau'$ приобретает вид

$$P_i(t) = \varepsilon_0 \int_0^{\infty} \alpha_{ij}(\tau) E_j(t-\tau)\,d\tau +$$

$$+ \varepsilon_0 \int_0^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} d\tau' \chi_{ijk}(\tau, \tau') E_j(t-\tau) E_k(t-\tau') + \cdots$$

Для фурье-компонент

$$P_i(\omega) = \varepsilon_0 \alpha_{ij}(\omega) E_j(\omega) +$$

$$+ \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \chi_{ijk}(\omega', \omega-\omega') E_j(\omega') E_k(\omega-\omega') + \cdots,$$

где

$$\alpha_{ij}(\omega) = \int_0^{\infty} \alpha_{ij}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$$

— *линейная восприимчивость;*

$$\chi_{ijk}(\omega, \omega') = \int_0^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} d\tau' \chi_{ijk}(\tau, \tau') e^{i(\omega\tau+\omega'\tau')} \qquad (37.13)$$

— тензор третьего ранга, описывающий *квадратичную нелинейность.* Аналогичный вид имеют тензоры, описывающие более высокий порядок нелинейности. *

§ 38. Диэлектрическая проницаемость разреженной плазмы

Плазма — это частично или полностью ионизованный газ, в котором плотности положительных и отрицательных зарядов практически одинаковы. Вещество в плазменном состоянии очень часто встречается как в земных условиях, так и в астрофизических объектах. В земных условиях плазму создают и интенсивно исследуют в лабораторных условиях в связи с проблемой термоядерного синтеза; в плазменном состоянии находятся верхние слои атмосферы (ионосфера). В астрофизических объектах вещество находится в состоянии плазмы не только во внутренних областях звезд, но и в их атмосфере, а также в областях межзвездной материи.

В простейшем случае плазму можно представить как разреженный идеальный газ, состоящий из электронов и ионов. Под действием внешнего электромагнитного поля они начинают двигаться, создавая токи и заряды, которые, в свою очередь, становятся источниками электромагнитного поля. Так как масса ионов значительно больше массы электронов, то можно считать их неподвижными и рассматривать только движение электронов. Это приближение справедливо при не слишком малых частотах.

Вычислим диэлектрическую проницаемость разреженной плазмы. В нерелятивистском приближении уравнение движения электронов в поле монохроматической волны $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ имеет вид (31.2):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\nu\vec{p} + e\vec{E}_0 e^{-i\omega t}.$$

Поскольку в нерелятивистском случае ($v \ll c$) движение частиц практически не зависит от индукции магнитного поля электромагнитной волны, то ток и вектор поляризации $\vec{P}$ вещества будут зависеть только от вектора электрического поля $\vec{E}$. Решением этого уравнения есть

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} = \frac{e}{m(\nu - i\omega)} \vec{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad \vec{r} = \frac{ie}{m\omega(\nu - i\omega)} \vec{E}_0 e^{-i\omega t}.$$

Плотность тока и вектор поляризации, создаваемые электронами, вычисляем по формулам

$$\vec{j} = en\vec{v} = \frac{e^2 n}{m(\nu - i\omega)} \vec{E}_0 e^{-i\omega t} = \sigma(\omega)\vec{E},$$

$$\vec{P} = en\vec{r} = \frac{ie^2 n}{m\omega(\nu - i\omega)} \vec{E}_0 e^{-i\omega t} = \varepsilon_0 \alpha(\omega)\vec{E},$$

где n — число электронов в единице объема. Из этих формул находим комплексную проводимость

$$\sigma(\omega) = \frac{e^2 n}{m(\nu - i\omega)} = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\nu - i\omega}$$

и диэлектрическую проницаемость плазмы

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \alpha(\omega) = 1 - \frac{e^2 n}{m\varepsilon_0} \frac{1}{(\omega^2 - i\omega\nu)}. \qquad (38.1)$$

В формулу (38.1) входит величина $\omega_p = \left(\frac{e^2 n}{m\varepsilon_0}\right)^{1/2}$, которая имеет размерность частоты и называется частотой ленгмюровских колебаний плазмы. В земной ионосфере $n \approx 10^4 - 10^6$ см$^{-3}$ и поэтому $\omega_p \approx \approx 6 \cdot 10^6 - 6 \cdot 10^7$ с$^{-1}$; соответственно в полупроводниках и лабораторной плазме $n \approx 10^{12} - 10^{18}$ см$^{-3}$, $\omega_p \approx 6 \cdot 10^{10} - 6 \cdot 10^{13}$ с$^{-1}$; в металлах $n \approx 10^{22}$ см$^{-3}$, $\omega_p \approx 6 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$.

Проводимость плазмы σ практически не зависит от частоты, если $\omega \ll \nu$. Для меди, например, $\nu \approx 3 \cdot 10^{13}$ с$^{-1}$, и поэтому в металлах условие $\nu \gg \omega$ выполняется вплоть до оптических частот.

Из (38.1) находим вещественную и мнимую части диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2} = \varepsilon_1(-\omega),$$

$$\varepsilon_2(\omega) = -\omega_p^2 \frac{\nu}{\omega(\omega^2 + \nu^2)} = -\varepsilon_2(-\omega).$$

Если $\omega \gg \nu$, то можно пренебречь столкновениями с ионами, и тогда

$$\varepsilon(\omega) \simeq \varepsilon_1(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \varepsilon_2(\omega) \simeq -\frac{\omega_p^2 \nu}{\omega^3} \simeq 0.$$

Согласно формуле (37.12), волновой вектор плоской волны связан с частотой соотношением

$$\kappa = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}.$$

При $\omega < \omega_p$ волновой вектор становится мнимым: $\kappa = i\varkappa$, где $\varkappa = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$. Это означает, что решение (13.2) принимает вид

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{-\varkappa z} e^{-i\omega t}.$$

Другими словами, электромагнитная волна с частотой $\omega < \omega_p$ проникает в плазму только на расстояние $\delta = 1/\varkappa$ и затем полностью отражается. Заметим, что это уменьшение амплитуды волны при проникновении ее вглубь плазмы в данном случае не связано с ее поглощением.

Если $\omega < \omega_p$, то $\delta \sim c/\omega_p$. В металлах $\omega_p \approx 6 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$, следовательно, $\delta \approx 5 \cdot 10^{-6}$ см. Таким образом, при $\omega \ll \omega_p$ $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в металле практически равны нулю, т. е. происходит экранировка внешнего поля, поэтому даже тонкая пластинка металла непрозрачна для электромагнитных волн с частотой $\omega \leqslant 6 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$.

Наличие стационарного внешнего магнитного поля существенным образом влияет на диэлектрические свойства плазмы. Диэлектрическая проницаемость становится тензорной величиной, другими словами, плазма становится анизотропной. Поэтому условия распространения электромагнитных волн вдоль магнитного поля и поперек его становятся разными.

Рассмотрим диэлектрические свойства *замагниченной плазмы*, т. е. плазмы, помещенной во внешнее стационарное и однородное магнитное поле $\vec{B}_0$, при частотах $\omega \gg \nu$. Уравнение движения электронов необходимо дополнить силой Лоренца:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E}_0 e^{-i\omega t} + e[\vec{v}, \vec{B}_0].$$

В проекциях на оси системы координат, ось z которой направлена вдоль магнитного поля, это уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{e}{m}E_x e^{-i\omega t} - \omega_B v_y, \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{e}{m}E_y e^{-i\omega t} + \omega_B v_x, \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{e}{m}E_z e^{-i\omega t}, \end{aligned} \tag{38.2}$$

где $\omega_B = -eB_0/m$ — *электронная циклотронная частота* (знак «минус» здесь обусловлен отрицательным значением заряда электрона).

Решение системы уравнений (38.2) имеет вид

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{ie}{m}\left(\frac{\omega E_x - i\omega_B E_y}{\omega^2 - \omega_B^2}\right)e^{-i\omega t}, \\ v_y &= \frac{ie}{m}\left(\frac{i\omega_B E_x + \omega E_y}{\omega^2 - \omega_B^2}\right)e^{-i\omega t}, \\ v_z &= \frac{ie}{m\omega}E_z e^{-i\omega t}, \end{aligned} \tag{38.3}$$

$$\begin{aligned} x &= -\frac{e}{m}\left[\frac{1}{\omega^2 - \omega_B^2}E_x - i\frac{\omega_B}{\omega(\omega^2 - \omega_B^2)}E_y\right]e^{-i\omega t}, \\ y &= -\frac{e}{m}\left[\frac{i\omega_B}{\omega(\omega^2 - \omega_B^2)}E_x + \frac{1}{\omega^2 - \omega_B^2}E_y\right]e^{-i\omega t}, \\ z &= -\frac{e}{m\omega^2}E_z e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

Так как $\vec{P} = en\vec{r}$, то из (38.3) следует, что в замагниченной плазме вектор $\vec{P}$ связан с вектором $\vec{E}$ следующим образом: $P_i = \varepsilon_0 \alpha_{ij} E_j$, и поэтому диэлектрическая проницаемость является тензором второго ранга. Этот тензор в выбранной системе координат имеет вид

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \delta_{ij} + \alpha_{ij} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2} & i\frac{\omega_B \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_B^2)} & 0 \\ -i\frac{\omega_B \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_B^2)} & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{bmatrix}. \tag{38.4}$$

Из формулы (38.4) следует, что этот тензор является эрмитовым: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon^*_{ji}$.

Рассмотрим распространение плоской электромагнитной волны в намагниченной плазме вдоль магнитного поля $\vec{B}_0$, т. е. вдоль Oz. Уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{38.5}$$

причем

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij}(\omega) E_j. \tag{38.6}$$

Так как монохроматическая волна распространяется вдоль магнитного поля, которое, как мы условились, направлено вдоль оси z, то векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ зависят только от z. Поэтому для плоских монохроматических волн

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \kappa z)}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{-i(\omega t - \kappa z)},$$

а уравнения (38.5) в проекциях на оси системы координат примут вид

$$\begin{aligned} i\omega B_x &= -i\kappa E_y, & -i\mu_0 \omega D_x &= -i\kappa B_y, \\ i\omega B_y &= i\kappa E_x, & -i\mu_0 \omega D_y &= i\kappa B_x, \\ i\omega B_z &= 0, & -i\mu_0 \omega D_z &= 0. \end{aligned} \tag{38.7}$$

Соотношение (38.6) в этом случае принимает вид

$$D_x = \varepsilon_0 (\varepsilon_{xx} E_x + \varepsilon_{xy} E_y), \quad D_y = \varepsilon_0 (\varepsilon_{yx} E_x + \varepsilon_{yy} E_y), \tag{38.8}$$
$$D_z = \varepsilon_0 \varepsilon_{zz} E_z.$$

Здесь $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2}$, $\varepsilon_{xy} = \varepsilon^*_{yx} = i \dfrac{\omega_B \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_B^2)}$, $\varepsilon_{zz} = 1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_p^2}$.

Так как, согласно (38.7), $D_z = 0$, то последнее из уравнений (38.8) удовлетворяется, если $\omega = \omega_p$. В этом случае $E_z \neq 0$, а $E_x = E_y = 0$, $\vec{B} = 0$. Это решение соответствует *продольным плазменным колебаниям*, которые происходят с частотой, равной плазменной частоте ω_p. При учете теплового движения электронов плазмы эти колебания могут распространяться в плазме, т. е. превращаются в продольные электрические волны, у которых вектор $\vec{E}$ параллелен волновому вектору $\vec{\kappa}$, а вектор $\vec{B} = 0$. Эти волны сопровождаются волной плотности заряда, так как

$$en = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \varepsilon_0 i \kappa E_0 e^{-i(\omega t - \kappa z)} \neq 0.$$

Кроме этого решения уравнения (38.7) и (38.8) имеют также решения в виде поперечных электромагнитных волн. Для нахождения характеристик этих волн перепишем уравнения (38.7), введя обозначения

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_B^2}, \quad \varepsilon_1 = -\frac{\omega_B \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_B^2)},$$

в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\omega}{c^2}\frac{D_x}{\varepsilon_0} - \kappa B_y = 0, \quad \omega B_y - \kappa E_x = 0, \\ &\frac{\omega}{c^2}\frac{D_y}{\varepsilon_0} + \kappa B_x = 0, \quad \omega B_x + \kappa E_y = 0, \\ &\frac{D_x}{\varepsilon_0} = \varepsilon E_x - i\varepsilon_1 E_y, \quad \frac{D_y}{\varepsilon_0} = i\varepsilon_1 E_x + \varepsilon E_y. \end{aligned} \tag{38.9}$$

Вместо шести величин E_x, E_y, B_x, B_y, D_x, D_y введем их линейные комбинации

$$E_\pm = E_x \pm iE_y, \quad B_\pm = B_x \pm iB_y, \quad D_\pm = \frac{1}{2}(D_x \pm iD_y).$$

В этих переменных система уравнений (38.9) приобретает более простой вид:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\omega}{c^2} D_\pm + i\kappa B_\pm = 0, \quad \kappa E_\pm + i\omega B_\pm = 0, \\ &\frac{1}{\varepsilon_0} D_\pm = \varepsilon_\pm E_\pm, \quad \frac{\omega}{c^2}\varepsilon_\pm E_\pm + i\kappa B_\pm = 0, \end{aligned} \tag{38.10}$$

где $\varepsilon_+ = \varepsilon - \varepsilon_1 = 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_B)}$, $\varepsilon_- = \varepsilon + \varepsilon_1 = 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_B)}$.

Таким образом, в новых переменных система уравнений (38.9) распадается на две независимые подсистемы с индексами «+» и «—».

Для того чтобы система уравнений (38.10) имела решения, необходимо равенство нулю детерминанта каждой подсистемы. Из этого условия находим сначала дисперсионное уравнение для величин с индексом «+»:

$$\kappa^2 = \kappa_+^2 \equiv \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_+ = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_B)}\right).$$

Тогда $E_+ \neq 0$, $E_- = 0$. При этом для волн, распространяющихся вдоль магнитного поля, $B_+ = i\dfrac{\sqrt{\varepsilon_+}}{c} E_+$. Так как $E_+ = E_x + iE_y$, $E_x - iE_y = 0$, то $E_x = E_+/2$, $E_y = -iE_+/2$. Обозначив $A = \dfrac{1}{2}E_+$, запишем электрический вектор волны в виде

$$\vec{E}_+ = A(\vec{e}_1 - i\vec{e}_2) e^{-i(\omega t - \kappa_+ z)}.$$

Здесь

$$\kappa_+(\omega) = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_B)}}. \tag{38.11}$$

Таким образом, как следует из § 13, это плоская циркулярно поляризованная волна, вектор $\vec{E}$ которой вращается по часовой стрелке. Зависимость $\kappa_+(\omega)$ для этой волны, которая определяется формулой

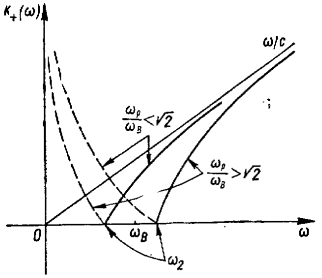


Рис. 23

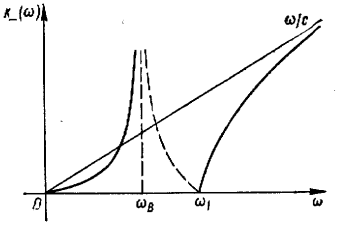


Рис. 24

(38.11), изображена на рис. 23, из которого следует, что волна этого типа при частоте $\omega < \sqrt{\frac{\omega_B^2}{4} + \omega_p^2} - \frac{\omega_B}{2} \equiv \omega_2$ полностью отражается от плазмы, так как волновой вектор κ_+ становится чисто мнимым (мнимая часть волнового вектора изображена на рис. 23 штриховой линией).

Аналогично для величин с индексом «—» имеем

$$\kappa^2 = \kappa_-^2 \equiv \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_- = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_B)}\right).$$

При этом $E_- \neq 0$, но $E_+ = 0$, а $B_- = i\frac{\sqrt{\varepsilon_-}}{c} E_-$. Электрический вектор этой волны имеет вид

$$\vec{E}_- = A(\vec{e}_1 + i\vec{e}_2)\, e^{-i(\omega t - \kappa_- z)},$$

где $A = E_-/2$, что соответствует циркулярно поляризованной волне, электрический вектор которой вращается против часовой стрелки. Зависимость волнового вектора этой волны от частоты изображена на рис. 24, откуда следует, что волна этого типа при частотах $\omega_B < \omega < \sqrt{\omega_B^2/4 + \omega_p^2} + \omega_B/2 \equiv \omega_1$ полностью отражается от плазмы. Минимальная глубина проникновения этой волны в плазму соответствует циклотронному резонансу, когда $\omega \simeq \omega_B$. Замагниченная плазма прозрачна для обоих типов волн при $\omega > \omega_1$ и $\omega_2 < \omega < \omega_B$. Последнее возможно, если $\omega_p < \omega_B\sqrt{2}$.

Из этого параграфа следует, что вычисление диэлектрической проницаемости вещества представляет собой важную физическую задачу. Эта величина определяет характер распространения электромагнитных волн в веществе: поглощение, фазовую скорость, дисперсию и др. Экспериментально измеряя эти величины, можно определить некоторые характеристики вещества. Например, в случае плазмы, используя формулу (38.1), можно найти концентрацию электронов n и частоту столкновений ν.

§ 39. Распространение электромагнитных сигналов в диспергирующей среде. Групповая скорость

При решении волновых уравнений методом разложения на монохроматические плоские волны получаем дисперсионное уравнение $D(\omega, \kappa) = 0$, связывающее частоту ω и волновое число κ. Для электромагнитных волн в диспергирующей среде это дисперсионное уравнение имеет вид (37.12). Возникают вопросы, во-первых, относительно какой величины следует решать дисперсионное уравнение: $\omega(\kappa)$ или $\kappa(\omega)$, и, во-вторых, почему можно считать аргументы этих функций вещественными? Еще один вопрос связан со скоростью распространения электромагнитных сигналов. Коль скоро фазовая скорость волны зависит от частоты, а реальный электромагнитный сигнал представляет собой импульс, являющийся суперпозицией плоских волн с разными частотами, то с какой скоростью распространяется сигнал, если фазовая скорость зависит от частоты?

Чтобы ответить на эти вопросы, рассмотрим электромагнитные волны, распространяющиеся в изотропной диспергирующей среде в направлении оси z. В этом случае все величины зависят только от одной координаты z. Так как $\operatorname{div}\vec{D} = \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0$, $\operatorname{div}\vec{B} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$, то можно положить $B_z = 0$, $D_z = 0$, и, следовательно, векторы $\vec{D}$ и $\vec{B}$ будут перпендикулярны к направлению распространения волны. Уравнения Максвелла для этого случая имеют вид

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} + \mu_0\frac{\partial D_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} - \mu_0\frac{\partial D_y}{\partial t} = 0,$$
$$\frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial B_x}{\partial t} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \tag{39.1}$$

причем

$$\vec{D}(t) = \varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0\int_0^\infty \alpha(\tau)\vec{E}(t-\tau)\,d\tau \equiv \varepsilon_0\int_0^\infty \varepsilon(\tau)\vec{E}(t-\tau)\,d\tau.$$

Система уравнений Максвелла (39.1) представляет собой две независимые подсистемы уравнений: одна для компонент E_x, B_y, другая — для E_y, B_x. Об этих состояниях электромагнитного поля говорят как о двух состояниях поляризации.

С помощью уравнений (39.1) обычно решают два класса задач.

1. Задачи с начальными условиями: по заданным $E(0, z)$ и $B(0, z)$ в начальный момент времени с помощью уравнений (39.1) определяют значения этих функций в любой момент времени. Такие задачи аналогичны задаче о собственных колебаниях в системах с конечным числом степеней свободы в классической механике. Начальные значения функций можно разложить в интеграл Фурье:

$$E(0, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(0, \kappa)\, e^{i\kappa z} d\kappa.$$

Затем решение системы уравнений (39.1) ищется в виде плоских монохроматических волн и находится дисперсионное уравнение, из которого определяется частота $\omega(\kappa)$ как функция вещественных κ, так как в интеграле Фурье интегрирование производится по вещественным κ. Тогда решение уравнений (39.1) выразится через начальные условия в виде интеграла Фурье по вещественным волновым векторам

$$E(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(0, \kappa) e^{-i(\omega(\kappa)t - \kappa z)} d\kappa.$$

Эта задача соответствует задаче о распространении *волнового пакета*, начальная форма которого $E(0, z)$ задана.

Таким образом, рассматривая задачу с начальными условиями, из дисперсионного уравнения $D(\omega, \kappa) = 0$ находим частоты $\omega(\kappa)$ как функции вещественных κ. При этом сами частоты могут оказаться комплексными.

2. Задачи с граничными условиями по заданным значениям $E(t, 0)$, $B(t, 0)$ на границе системы ($z = 0$) с помощью уравнений (39.1) определяют значения этих функций в любой точке $z > 0$. Эту задачу можно связать с задачей о распространении *импульса*, заданного на границе: $E(t, 0)$. Подобные задачи аналогичны задаче о вынужденных колебаниях в системе с конечным числом степеней свободы в классической механике. Функции $E(t, 0)$, $B(t, 0)$ также можно разложить в интеграл Фурье:

$$E(t, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega, 0) e^{-i\omega t} d\omega$$

и затем из дисперсионного уравнения найти $\kappa(\omega)$ как функцию вещественных ω. В этом случае решение уравнений (39.1) выражается через граничные условия в виде интеграла Фурье:

$$E(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega, 0) e^{-i(\omega t - \kappa(\omega) z)} d\omega.$$

В задачах с граничными условиями из дисперсионного уравнения находим волновой вектор как функцию вещественных ω. При этом $\kappa(\omega)$ может оказаться комплексным. В задаче с граничными условиями важно уметь различать попутные волны, уходящие от границы, и встречные волны, распространяющиеся в противоположном направлении [13].

Заметим, что в обоих случаях (задачи с граничными и задачи с начальными условиями) мы предполагали, что в области, где ищется решение уравнений Максвелла, источники $(\rho, \vec{j})$ отсутствуют. Один из методов решения задач с источниками изложен в § 21, где рассмотрена задача с граничным условием в присутствии источников.

Рассмотрим распространение плоских монохроматических волн в диспергирующей среде. Пусть это будет волна, электрический вектор которой направлен по оси x, тогда ее магнитный вектор будет направлен по оси y.

Решение уравнений (39.1) ищем в виде плоских монохроматических волн, что эквивалентно разложению искомых функций в интеграл Фурье по времени и координате:

$$B_y = B_0 e^{-i(\omega t - \kappa z)}, \quad E_x = E_0 e^{-i(\omega t - \kappa z)}. \tag{39.2}$$

Подставляя (39.2) в (39.1) и учитывая, что $D = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) E$, получим однородную систему алгебраических уравнений для E_0 и B_0:

$$i\omega B_0 - i\kappa E_0 = 0, \quad i\kappa B_0 - \frac{i\omega}{c^2} \varepsilon E_0 = 0.$$

Чтобы получить решение, отличное от нуля, необходимо приравнять детерминант этой системы уравнений нулю. Таким образом, получаем дисперсионное уравнение для плоских монохроматических волн в диспергирующей среде

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega). \tag{39.3}$$

Для попутной волны, распространяющейся в положительном направлении оси z,

$$\kappa(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)}, \quad B_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c} E_0,$$

а для встречной волны, распространяющейся в противоположном направлении,

$$\kappa = -\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon}, \quad B_0 = -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{c} E_0.$$

Таким образом, в диспергирующей среде, так же как и в вакууме, при заданной частоте ω существуют две волны, поляризованные вдоль оси x, которые распространяются в противоположных направлениях. Еще две волны отличаются от рассмотренных выше поляризацией (E_y, B_x). Следовательно, при заданной частоте ω (или заданном κ) существуют четыре волны, различающиеся направлением распространения и поляризацией.

Волны в диспергирующей среде отличаются от плоских волн в вакууме законом дисперсии: $k^2 = (\omega^2/c^2)\varepsilon(\omega)$, фазовой скоростью, которая равна $v = \omega/k = c/\sqrt{\varepsilon} = c/n$, и связью между B_0 и E_0, которая имеет вид $B_0 = (\sqrt{\varepsilon}/c) E_0$. Положив $\varepsilon = 1$, переходим к случаю распространения волн в вакууме.

Важным вопросом в теории волновых процессов является вопрос о скорости их распространения. В среде без дисперсии волновые пакеты, или импульсы, распространяются без изменения своей формы со скоростью, равной фазовой скорости. Это следует из того, что в вакууме фазовая скорость плоской волны не зависит от частоты, и поэтому любая суперпозиция таких плоских волн перемещается в пространстве с той же скоростью. Если фазовая скорость зависит от частоты, то каждая компонента Фурье волнового пакета имеет свою фазовую скорость, и поэтому возникает вопрос, с какой скоростью будут распространяться сигналы и как вообще можно дать определение этой величины.

Изучим процесс распространения *импульса*, под которым будем понимать распространяющееся в пространстве волновое поле конечной длительности, введенное в систему на границе. Эквивалентным понятием является волновой пакет, занимающий в начальный момент времени ограниченную область пространства. Таким образом, под волновым пакетом, или импульсом, распространяющимся в направлении оси, будем понимать волну вида

$$E = \frac{1}{2}[A(\vec{r}, t)\, e^{-i(\omega_0 t - \kappa_0 z)} + \text{к. с.}] = \mathcal{E}\cos(\omega_0 t - \kappa_0 z + \varphi), \quad (39.4)$$

в которой комплексная амплитуда $A = \mathcal{E}e^{i\varphi}$ является медленно изменяющейся функцией координат и времени, а именно

$$\left|\frac{\partial A}{\partial t}\right| \ll \omega_0 |A|, \quad \left|\frac{\partial A}{\partial z}\right| \ll \kappa_0 |A|.$$

Если A не зависит от времени и координат, то выражение (39.4) представляет собой плоскую монохроматическую волну вида (39.2), которая удовлетворяет волновому уравнению (39.1), если $\kappa_0^2 = (\omega_0^2/c^2)\,\varepsilon(\omega_0)$.

Чтобы получить уравнение для медленно изменяющейся комплексной амплитуды $A(z, t)$, рассмотрим решение дисперсионного уравнения для плоских волн, распространяющихся вдоль оси z, $\kappa(\omega)$ и разложим его в ряд около ω_0:

$$\kappa = \kappa(\omega_0) + \frac{\partial \kappa}{\partial \omega}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \kappa}{\partial \omega^2}(\omega - \omega_0)^2 + \ldots$$

В этом разложении мы ограничились только квадратичными членами, так как электромагнитный импульс с медленно изменяющейся амплитудой можно представить как суперпозицию плоских волн с частотами, близкими к ω_0 (пакет монохроматических плоских волн). Обозначив

$$\kappa_0 = \kappa(\omega_0), \quad \frac{\partial \kappa}{\partial \omega} = \frac{1}{v_{\text{гр}}}, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \kappa}{\partial \omega^2} = \beta,$$

получаем приближенное дисперсионное уравнение

$$-\kappa + \kappa_0 + \frac{1}{v_{\text{гр}}}(\omega - \omega_0) + \beta(\omega - \omega_0)^2 = 0.$$

Зная дисперсионное уравнение и учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega, \quad \frac{\partial}{\partial z} \to i\kappa, \quad \omega \to i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \kappa \to -i\frac{\partial}{\partial z},$$

можно восстановить волновое уравнение

$$i\frac{\partial E}{\partial z} + \kappa_0 E + \frac{i}{v_{\text{гр}}}\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\omega_0}{v_{\text{гр}}}E + \beta\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \omega_0\right)^2 E = 0.$$

Подставляя в это уравнение выражение (39.4), находим уравнение для медленно изменяющейся комплексной амплитуды A:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{v_{\text{гр}}}\frac{\partial A}{\partial t} + i\beta\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0, \quad (39.5)$$

из которого можно получить уравнение и для комплексно сопряженной амплитуды:

$$\frac{\partial A^*}{\partial z} + \frac{1}{v_{\text{гр}}}\frac{\partial A^*}{\partial t} - i\beta\frac{\partial^2 A^*}{\partial t^2} = 0.$$

Уравнение (39.5) описывает распространение импульса в среде с дисперсией и его необходимо решать при заданных граничных условиях: $A(0, t) = f(t)$.

Если $\beta \to 0$, то уравнение (39.5) принимает вид

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{v_{\text{гр}}}\frac{\partial A}{\partial t} = 0,$$

общее решение которого есть

$$A = f\left(t - \frac{z}{v_{\text{гр}}}\right).$$

Таким образом, если на границе задан импульс вида $f(t)$, то в последующие моменты времени он будет распространяться, не изменяя своей формы, со скоростью

$$v_{\text{гр}} = \frac{\partial \omega}{\partial \kappa} = \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \omega}\right)^{-1},$$

которая называется *групповой скоростью*.

Если $\beta \neq 0$, то учет последнего слагаемого в (39.5) приводит к тому, что импульс будет расплываться. Это может заметно сказаться на его форме, если он имеет слишком малую длительность. Для того чтобы оценить эффект расплывания коротких импульсов, запишем уравнение (39.5) в безразмерных переменных $\tau = t/T$, $\xi = z/v_{\text{гр}}T$, где T — длительность импульса:

$$\frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{\partial A}{\partial \tau} + i\frac{\beta v_{\text{гр}}}{T}\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} = 0;$$

из этого уравнения следует, что дисперсионным расплыванием импульса можно пренебречь, если его длительность удовлетворяет условию $\left|\frac{\beta v_{\text{гр}}}{T}\right| \ll 1$.

Поскольку в оптике принято изучать зависимость коэффициента преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$ не от частоты, а от длины волны, то необходимо выразить $v_{\text{гр}}$ и β через эти величины, пользуясь тем, что $\kappa = (\omega/c)\,n$, а $\omega = 2\pi c/\lambda$:

$$v_{\text{гр}} = \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \omega}\right)^{-1} = c\left[\frac{\partial \omega n}{\partial \omega}\right]^{-1} = \frac{c}{n + \omega\dfrac{\partial n}{\partial \omega}} = \frac{c}{n - \lambda\dfrac{\partial n}{\partial \lambda}}, \quad (39.6)$$

$$\beta = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \kappa}{\partial \omega^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{1}{v_{\text{гр}}}\right) = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial n}{\partial \omega} + \frac{\omega}{2}\frac{\partial^2 n}{\partial \omega^2}\right) = \frac{\lambda^3}{4\pi c^2}\frac{\partial^2 n}{\partial \lambda^2}.$$

Так как обычно $\frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda} \ll 1$, то из формулы (39.6) следует, что групповая скорость отличается от фазовой на величину

$$\frac{v_{\text{гр}} - v_\phi}{v_\phi} \approx \frac{\lambda}{n}\frac{\partial n}{\partial \lambda}.$$

Таблица

CS_2 жидкость		$LiNbO_3$			CdS		
λ, мкм	n	λ, мкм	n_o	n_e	λ, мкм	n_o	n_e
0,486	1,652	0,50	2,3444	2,2446	0,515	2,743	2,726
0,550	1,640	0,55	2,3188	2,2241	0,520	2,702	2,698
0,589	1,628	0,60	2,3002	2,2083	0,525	2,674	2,675

В таблице приведены значения показателя преломления сероуглерода для трех значений длины волны. С помощью этой таблицы находим

$$v_{гр} = 1{,}68 \cdot 10^8 \text{ м/с}; \quad \beta = 5{,}9 \cdot 10^{-33} \text{ с}^2/\text{м}.$$

Таким образом, частотная дисперсия существенно влияет на скорость и характер распространения волновых пакетов, частоты которых попадают в область заметной дисперсии. Следовательно, понятие групповой скорости достаточно хорошо определено лишь в областях спектра со слабой дисперсией. В случае сильной дисперсии (производная $\frac{\partial n}{\partial \lambda}$ велика) и при широком спектре сигнала (очень короткий импульс) использование понятия групповой скорости может оказаться недопустимым.

Очевидно, что если рассматривать в диспергирующих средах распространение волновых пакетов, форма которых в начальный момент задана $A(0, z)$, то для нахождения уравнения для $A(t, z)$ необходимо разлагать в ряд $\omega(\kappa)$:

$$\omega = \omega_0 + \frac{\partial \omega}{\partial \kappa}(\kappa - \kappa_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial \kappa^2}(\kappa - \kappa_0)^2 + \cdots$$

Тогда получим следующее уравнение для медленно изменяющейся амплитуды:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + v_{гр}\frac{\partial A}{\partial z} + i\varkappa \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0, \tag{39.7}$$

где $\varkappa = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial \kappa^2} = -\beta v_{гр}^3$. Уравнение (39.7) необходимо решать при заданных начальных условиях: $A(0, z) = f(z)$.

§ 40. Геометрическая оптика. Эйкональное приближение

Очень часто возникает необходимость решать задачу о распространении электромагнитных волн в *оптически неоднородных средах*, т. е. в средах, показатель преломления которых зависит от координат. Найти аналитическое решение уравнений Максвелла тогда удается только в нескольких частных случаях. При произвольной, но достаточно медленной зависимости показателя преломления от координат

можно получить достаточно точное решение, используя так называемое *эйкональное приближение*, или приближение *геометрической оптики*.

Итак, задача состоит в получении приближенного решения уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = -\frac{i\omega}{c^2}\varepsilon(\omega, \vec{r})\vec{E}, \tag{40.1}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = i\omega \vec{B}, \tag{40.2}$$

описывающих распространение монохроматической волны в неоднородной среде с показателем преломления $n(\omega, \vec{r}) = \sqrt{\varepsilon}$, зависящим достаточно медленно от координат. Будем предполагать, что

$$|\vec{\nabla} n| \ll \kappa_0,$$

где $\kappa_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda$. Другими словами, приближение геометрической оптики можно применять в тех случаях, когда длина неоднородности $l \sim 1/|\nabla n|$ гораздо больше длины волны: $\lambda = 2\pi/\kappa_0 = 2\pi c/\omega \ll l$.

Предполагая длину волны достаточно малой, будем искать решение уравнений (40.1) и (40.2) в виде разложения по степеням длины волны:

$$\vec{E} = e^{i\kappa_0 \Psi}\left[\vec{E}_0(\vec{r}) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-i}{\kappa_0}\right)^n \vec{e}_n(\vec{r})\right], \tag{40.3}$$

$$\vec{B} = e^{i\kappa_0 \Psi}\left[\vec{B}_0(\vec{r}) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-i}{\kappa_0}\right)^n \vec{b}_n(\vec{r})\right]. \tag{40.4}$$

Подставляя (40.3) и (40.4) в (40.1) и (40.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях величины $i/\kappa_0 = i\omega/c$, получим цепочку уравнений

$$[\vec{\nabla}\Psi, \vec{B}_0] + \frac{\varepsilon}{c}\vec{E}_0 = 0, \quad [\vec{\nabla}\Psi, \vec{E}_0] - c\vec{B}_0 = 0;$$

$$[\vec{\nabla}\Psi, \vec{e}_1] - c\vec{b}_1 = -\operatorname{rot}\vec{E}_0, \quad [\vec{\nabla}\Psi, \vec{b}_1] + \frac{\varepsilon}{c}\vec{e}_1 = -\operatorname{rot}\vec{B}_0;$$

. . . . . .

$$[\vec{\nabla}\Psi, \vec{e}_n] - c\vec{b}_n = -\operatorname{rot}\vec{e}_{n-1}, \quad [\vec{\nabla}\Psi, \vec{b}_n] + \frac{\varepsilon}{c}\vec{e}_n = -\operatorname{rot}\vec{b}_{n-1};$$

. . . . . .

причем каждое из них можно решать независимо от последующих уравнений, если решены предыдущие.

Рассмотрим уравнения нулевого приближения

$$[\vec{\nabla}\Psi, \vec{B}_0] + \frac{\varepsilon}{c}\vec{E}_0 = 0, \quad [\vec{\nabla}\Psi, \vec{E}_0] - c\vec{B}_0 = 0. \tag{40.5}$$

Из уравнений (40.5) следует, что три вектора: $\vec{\nabla}\Psi$, $\vec{E}_0$ и $\vec{B}_0$ образуют тройку взаимно ортогональных векторов:

$$(\vec{\nabla}\Psi \cdot \vec{E}_0) = 0, \quad (\vec{\nabla}\Psi \cdot \vec{B}_0) = 0, \quad (\vec{E}_0 \cdot \vec{B}_0) = 0.$$

Исключая из системы уравнений (40.5) вектор $\vec{B}_0$:

$$\varepsilon\vec{E}_0 + [\vec{\nabla}\Psi, [\vec{\nabla}\Psi, \vec{E}_0]] = \varepsilon\vec{E}_0 + \vec{\nabla}\Psi(\vec{\nabla}\Psi \cdot \vec{E}_0) - \vec{E}_0(\vec{\nabla}\Psi)^2 = 0,$$

находим уравнение в частных производных для функции Ψ:

$$(\vec{\nabla}\Psi)^2 = \varepsilon(\omega, \vec{r}) = n^2. \tag{40.6}$$

Функция Ψ получила название *эйконала*.

Если среда однородна и показатель преломления не зависит от координат, то решение уравнения (40.6) можно записать в виде

$$\Psi = \vec{a}\vec{r},$$

где $a^2 = n^2$. Тогда, считая $\vec{E}_0$ и $\vec{B}_0$ не зависящими от координат, а все $\vec{e}_n$ и $\vec{b}_n$ равными нулю, мы приходим к решению (40.3) в виде плоской монохроматической волны.

Уравнение для эйконала (40.6) совпадает с уравнением Гамильтона — Якоби [12, § 40] для частицы с массой m и энергией E, движущейся во внешнем поле с потенциалом $U(\vec{r})$:

$$(\vec{\nabla}S)^2 = 2m[E - U(\vec{r})].$$

Если сравнить эту формулу с формулой (40.6), то очевидно, что они совпадут, если положить

$$n^2 = 2m[E - U(\vec{r})] = p^2; \tag{40.7}$$

здесь $p = mv$ — импульс частицы. Отсюда следует, что световые лучи в геометрической оптике можно отождествить с траекторией частицы в поле $U(\vec{r})$. Эта траектория (луч) находится из условия

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla}U, \tag{40.8}$$

причем, как это следует из сравнения (40.8) с (40.7),

$$-\vec{\nabla}U = \frac{n\vec{\nabla}n}{m}.$$

В уравнение (40.8) входит масса частицы, но ее можно исключить, выбрав за параметр величину $d\tau = dt/m$. Тогда уравнение (40.8) перепишется так:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{d\vec{r}}{d\tau}\right) = n\vec{\nabla}n.$$

Это уравнение обычно записывают в несколько другом виде, вводя новый параметр $dl = nd\tau$. В этом случае уравнение для лучей записывается в виде

$$\frac{d}{dl}\left(n\frac{d\vec{r}}{dl}\right) = \vec{\nabla}n. \tag{40.9}$$

Выясним смысл параметра l. Так как $n = p = mv$, то $dl = vdt = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Таким образом, параметр l есть длина кривой $\vec{r}(l)$, которая является лучом. Лучи всегда ортогональны к поверхности $\Psi = \text{const}$.

Решение уравнения (40.9) вместе с граничными (начальными) условиями $\vec{r} = \vec{r}_0$, $\frac{d\vec{r}}{dl} = \vec{\tau}$, где $\vec{\tau}$ — единичный вектор, касательный к траектории луча, определяет траекторию луча $\vec{r} = \vec{r}(l)$ в параметрической форме. Обычно это уравнение также довольно сложно и найти его аналитическое решение не всегда удается. Численные же методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений в настоящее время хорошо разработаны.

Из механики известно, что

$$\vec{p} = m\vec{v} = \vec{\nabla}S,$$

т. е. $\vec{\nabla}S$ совпадает с касательной к траектории частицы. Так как $\vec{\nabla}\Psi$ также совпадает с направлением луча, то

$$d\Psi = \vec{\nabla}\Psi \cdot d\vec{r} = \vec{\nabla}\Psi \cdot \frac{d\vec{r}}{dl}dl = \vec{\nabla}\Psi \cdot \vec{\tau}dl.$$

Следовательно, производная эйконала вдоль луча

$$\frac{d\Psi}{dl} = |\vec{\nabla}\Psi| = n. \tag{40.10}$$

Если траектория луча найдена с помощью дифференциального уравнения (40.9), то эйконал (или фазу) можно найти из уравнения (40.10) в виде криволинейного интеграла вдоль траектории луча:

$$\Psi = \int_{M_0}^{M} ndl. \tag{40.11}$$

Покажем, что уравнение (40.9) может быть получено из вариационного *принципа Ферма*, согласно которому интеграл (40.11) должен иметь минимальное (точнее, экстремальное) значение при фиксированных точках M_0 и M. Чтобы доказать это, вычислим вариацию функционала (40.11). Вариации подлежат функции $x(l)$, $y(l)$, $z(l)$, описывающие луч:

$$\delta\Psi = \int_{M_0}^{M}\left[\left(\frac{\partial n}{\partial x}\delta x + \frac{\partial n}{\partial y}\delta y + \frac{\partial n}{\partial z}\delta z\right)dl + nd\delta l\right]. \tag{40.12}$$

Так как $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, $dld\delta l = dxd\delta x + \ldots$, то

$$d\delta l = \frac{dx}{dl}d\delta x + \cdots,$$

поэтому

$$\delta\Psi = \int_{M_0}^{M}\left[\left(\frac{\partial n}{\partial x}\delta x + \cdots\right)dl + \left(n\frac{dx}{dl}d\delta x + \cdots\right)\right].$$

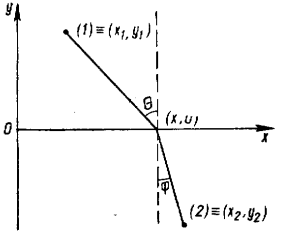


Рис. 25

Последнее слагаемое запишем в виде

$$n\frac{dx}{dl}\,d\delta x + \cdots = d\left[n\left(\frac{dx}{dl}\right)\delta x + \right.$$

$$\left. + \cdots\right] - \left[\frac{d}{dl}\left(n\frac{dx}{dl}\right)\delta x + \cdots\right] dl.$$

Подставляя это выражение в (40.12), находим

$$\delta\Psi = \int_{M_0}^{M}\left\{\left[\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{d}{dl}\left(n\frac{dx}{dl}\right)\right]\delta x + \right.$$

$$\left. + \cdots\right\} dl + \left[n\left(\frac{dx}{dl}\right)\delta x + \cdots\right]_{M_0}^{M}.$$

Так как $\vec{\delta r}(M) = \vec{\delta r}(M_0) = 0$, то приравнивая нулю коэффициенты при независимых вариациях δx, δy, δz, получаем уравнение (40.9) в компонентах на оси координат.

В качестве примера применения принципа Ферма рассмотрим распространение луча из точки (x_1, y_1), находящейся в среде с показателем преломления n_1, в точку (x_2, y_2), находящуюся в среде с показателем преломления n_2 (рис. 25). Луч в среде *1* распространяется из точки (x_1, y_1) в точку $(x, 0)$, а в среде *2* — из точки $(x, 0)$ в точку (x_2, y_2) прямолинейно. Координата точки x, в которой происходит преломление луча, неизвестна. Найдем ее, пользуясь принципом Ферма. В нашем случае

$$\Psi = \int_1^2 n(\omega, \vec{r})\,dl = \int_{(x_1 y_1)}^{(x 0)} n_1 dl + \int_{(x,0)}^{(x_2 y_2)} n_2 dl =$$

$$= n_1\left[(x_1 - x)^2 + y_1^2\right]^{1/2} + n_2\left[(x - x_2)^2 + y_2^2\right]^{1/2}.$$

Из условия экстремума

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = n_1\frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}} - n_2\frac{x_2 - x}{\sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2}} = 0$$

находим координату точки x, а затем закон преломления света

$$n_1 \sin\Theta = n_2 \sin\varphi. \qquad (40.13)$$

Смысл углов Θ и φ ясен из рис. 25. Эта формула выражает *закон преломления, или закон Снелля (Снеллиуса)*.

§ 41. Излучение Черенкова—Вавилова

Из формулы (18.6) следует, что заряд, движущийся в вакууме без ускорения, не излучает. Однако в 1934 г. П. А. Черенков в экспериментах, предпринятых по инициативе С. И. Вавилова, обнаружил, что электрон, движущийся равномерно и прямолинейно в среде с показателем преломления $n > 1$, излучает свет. Теоретически это явление объяснили в 1937 г. И. Е. Тамм и И. М. Франк. За эту работу трое советских ученых были удостоены Нобелевской премии по физике за 1958 г.

Рассмотрим электромагнитное поле точечного заряда, движущегося в диэлектрической среде с показателем преломления $n > 1$. Плотность тока, соответствующая точечному заряду, движущемуся равномерно со скоростью $\vec{v}$ в системе координат, ось x которой совпадает с направлением движения, имеет вид

$$\vec{j} = e\vec{v}\delta(x - vt)\,\delta(z)\,\delta(y).$$

Найдем временную фурье-компоненту этого тока:

$$\vec{j}_\omega(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{t}\,\vec{j}(\vec{r}, t)\,e^{i\omega t} = \frac{e\vec{v}}{v}\,e^{i\frac{\omega x}{v}}\,\delta(y)\,\delta(z).$$

Мощность излучения в данной полосе частот и в данный телесный угол вычисляем с помощью формулы (15.6):

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = \frac{\kappa^2}{(4\pi)^2\pi\varepsilon_0 c}\left|\vec{j}_\omega(\vec{\kappa})\right|^2 \sin^2\Theta, \qquad (41.1)$$

где $\vec{j}_\omega(\vec{\kappa})$ определяется формулой (15.6).

Заметим, что теперь величина κ определяется формулой (39.3) и поэтому $\vec{\kappa} = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon}\,\vec{n}$, где по-прежнему $\vec{r}/r = \vec{n}$.

Считая, что $\varepsilon(\omega)$ — величина вещественная, вычислим интеграл

$$\vec{j}_\omega(\vec{\kappa}) = \int \vec{j}_\omega(\vec{r})\,e^{-i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}}\,dV = e\frac{\vec{v}}{v}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\int_{-\infty}^{+\infty} dy\int_{-\infty}^{+\infty} dz\,e^{i\left(\frac{\omega}{v}x - \vec{\kappa}\cdot\vec{r}\right)}\,\delta(y)\,\delta(z) =$$

$$= e\vec{\tau}\lim_{L\to\infty}\int_{-L/2}^{L/2} e^{i\left(\frac{\omega}{v} - \kappa\cos\Theta\right)x}\,dx,$$

где $\vec{\tau} = \vec{v}/v$, $\kappa_x = \kappa\cos\Theta = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon}\cos\Theta$; Θ — угол между направлением движения заряда и направлением наблюдения излучения.

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\left(\frac{\omega}{v} - \kappa\cos\Theta\right)x}\,dx.$$

Его можно записать двояким образом: если $\omega/v - \kappa\cos\Theta = 0$, то $I = L$, если же $L \to \infty$, то $I = 2\pi\delta(\omega/v - \kappa\cos\Theta)$. Поэтому

$$\left|\vec{j}(\vec{\kappa})\right|^2 = 2\pi e^2\delta\left(\frac{\omega}{v} - \kappa\cos\Theta\right)\int_{-L/2}^{L/2} e^{i\left(\frac{\omega}{v} - \kappa\cos\Theta\right)x}\,dx =$$

$$= 2\pi e^2 L\delta\left(\frac{\omega}{v} - \kappa\cos\Theta\right).$$

Подставляя это значение в формулу (41.1), получим

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = L\frac{e^2}{8\pi^2\varepsilon_0}\frac{\omega^2}{c^3}\sqrt{\varepsilon}\sin^2\Theta\,\delta\left(\frac{\omega}{v} - \kappa\cos\Theta\right). \qquad (41.2)$$

Выражение (41.2) описывает частотное и угловое распределение *излучения Черенкова — Вавилова*. Очевидно, что из-за наличия в форму-

ле (41.2) δ-функции в заданном направлении излучается свет строго определенной частоты и, наоборот, излучение на данной частоте происходит в направлении, образующем поверхность конуса с углом раствора $\cos\Theta = \frac{\omega}{kv} = \frac{1}{\beta\sqrt{\varepsilon(\omega)}}$; $\beta = \frac{v}{c}$ *(черенковский угол)*. Отсюда следует, что излучение Черенкова — Вавилова возможно только при условии $\beta\sqrt{\varepsilon} > 1$, т. е. скорость движения заряда должна быть больше фазовой скорости электромагнитных волн в среде: $v > \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Проинтегрировав формулу (41.2) по всему телесному углу и разделив на L, получим выражение для энергии излучения в данном интервале частот на единицу длины пути:

$$dP = \frac{dW}{L} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2}\right)\omega d\omega.$$

Если эту величину разделить на энергию одного фотона $\hbar\omega$, то получим число фотонов, излучаемых электроном в данный интервал частот, на единицу длины пройденного пути:

$$dN = \frac{dP}{\hbar\omega} = \alpha\left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2}\right)\frac{d\omega}{c}; \qquad (41.3)$$

здесь $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}$ — безразмерная константа, так называемая *постоянная тонкой структуры*, характеризующая интенсивность электромагнитного взаимодействия.

Свойства излучения Черенкова — Вавилова используются для детектирования быстрых заряженных частиц (счетчик Черенкова). При этом можно измерять скорость частицы, так как черенковский угол однозначно связан с ее скоростью. Зная скорость и импульс (или энергию) частиц, можно по формуле (23.12) вычислить ее массу. Для релятивистских частиц в качестве излучающей среды обычно используется газ. Это объясняется тем, что вблизи линий поглощения газов показатель преломления $n(\omega)$ становится очень большим и величина dN согласно (41.3) возрастает.

Как видно из формулы (41.2), излучение Черенкова — Вавилова, в отличие от синхротронного излучения, совсем не зависит от массы движущейся частицы. Это объясняется тем, что, по существу, излучает не сам заряд, а среда, в которой он движется и которую пролетающий заряд возбуждает своим полем. Точнее: излучает система, состоящая из движущегося электрона и диэлектрической среды. Это подтверждается и тем, что спектральное распределение излучения Черенкова — Вавилова определяется зависимостью показателя преломления среды от частоты.

§ 42. Распространение волн в ограниченных средах. Волноводы и резонаторы

Рассмотрим распространение электромагнитных волн в среде, свойства которой однородны в одном из направлений распространения электромагнитной волны. Эта задача имеет большое практическое

значение в области радиотехники СВЧ-диапазона *(волноводы* и *резонаторы)*, а также в оптоэлектронике (световоды и оптические резонаторы).

В § 15 описано излучение в пространство электромагнитных волн электрическим диполем, который можно рассматривать как простейшую передающую антенну. Угловое распределение электромагнитного излучения, или, как принято говорить в радиотехнике, *диаграмма направленности* антенны, описывается множителем $\sin^2\Theta$ (см. формулу (15.8)). Для того чтобы сделать диаграмму направленности более острой, конструкция антенны должна быть сложнее. Расчет и конструирование антенн с требуемой диаграммой направленности являются одной из важнейших задач радиотехники.

В некоторых случаях возникает задача о передаче электромагнитного излучения из одной точки пространства в другую, например от генератора к антенне, с минимальными потерями. Для этой цели используются волноводы. Основное назначение волноводов состоит в передаче электромагнитного излучения в определенном направлении с минимальными потерями. Простейшим типом волновода является *металлический волновод*, представляющий собой полую металлическую трубу круглого (или прямоугольного) сечения.

Уравнения Максвелла для монохроматического электромагнитного поля имеют вид

$$\operatorname{rot}\vec{E} = [\vec{\nabla}, \vec{E}] = i\omega\vec{B}, \quad \operatorname{rot}\vec{B} = [\vec{\nabla}, \vec{B}] = -\frac{i\omega\varepsilon(\omega)}{c^2}\vec{E}. \qquad (42.1)$$

В дальнейшем будем считать, что электромагнитное поле распространяется в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$, однородной в некотором направлении, которое мы выберем за направление оси z. Однородность среды означает, что $\varepsilon(\omega)$ не зависит от z, и поэтому решение уравнений (42.1) можно искать в виде

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{e}(x, y)\, e^{i\kappa z}, \quad \vec{B}(x, y, z) = \vec{b}(x, y)\, e^{i\kappa z},$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial z} = i\kappa\vec{E}, \quad \frac{\partial\vec{B}}{\partial z} = i\kappa\vec{B}.$$

Для удобства последующих вычислений представим оператор $\vec{\nabla}$ в виде

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_3 = \vec{\nabla}_\perp + \vec{e}_3\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\vec{\nabla}_\perp = \vec{e}_1\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2\frac{\partial}{\partial y},$$

а $\vec{e}_3$ — орт в направлении оси z. Векторы электрического и магнитного полей также представим в виде суммы поперечной и продольной составляющих:

$$\vec{E} = \vec{E}_\perp + \vec{E}_\parallel = \vec{E}_\perp + \vec{e}_3 E_z, \quad \vec{B} = \vec{B}_\perp + \vec{B}_\parallel = \vec{B}_\perp + \vec{e}_3 B_z.$$

Уравнения (40.1) в этих обозначениях будут иметь вид

$$\operatorname{rot}\vec{E} \equiv [\vec{\nabla}, \vec{E}] = [\vec{\nabla}_\perp, \vec{E}_\perp] + [\vec{\nabla}_\perp, (\vec{e}_3 E_z)] + \left[\vec{e}_3, \frac{\partial \vec{E}_\perp}{\partial z}\right] + \left[\vec{e}_3, \frac{\partial \vec{E}_\parallel}{\partial z}\right] = i\omega(\vec{B}_\perp + \vec{e}_3 B_z),$$

$$\operatorname{rot}\vec{B} \equiv [\vec{\nabla}, \vec{B}] = [\vec{\nabla}_\perp, \vec{B}_\perp] + [\vec{\nabla}_\perp, (\vec{e}_3 B_z)] + \left[\vec{e}_3, \frac{\partial \vec{B}_\perp}{\partial z}\right] + \left[\vec{e}_3, \frac{\partial \vec{B}_\parallel}{\partial z}\right] = -i\omega\frac{\varepsilon}{c^2}(\vec{E}_\perp + \vec{e}_3 E_z).$$

Разделяя эти векторные уравнения на продольные и поперечные составляющие и учитывая, что $\frac{\partial \vec{E}_\perp}{\partial z} = i\kappa\vec{E}_\perp$, $\frac{\partial \vec{B}_\perp}{\partial z} = i\kappa\vec{B}_\perp$, $\left[\vec{e}_3, \frac{\partial \vec{E}_\parallel}{\partial z}\right] = 0$, получаем

$$i\omega\vec{e}_3 B_z = [\vec{\nabla}_\perp, \vec{E}_\perp], \quad -\frac{i\omega\varepsilon}{c^2}\vec{e}_3 E_z = [\vec{\nabla}_\perp, \vec{B}_\perp],$$

$$i\omega\vec{B}_\perp - i\kappa[\vec{e}_3, \vec{E}_\perp] = [\vec{\nabla}_\perp E_z, \vec{e}_3], \qquad (42.2)$$

$$-\frac{i\omega\varepsilon}{c^2}\vec{E}_\perp - i\kappa[\vec{e}_3, \vec{B}_\perp] = [\vec{\nabla}_\perp B_z, \vec{e}_3].$$

С помощью двух последних уравнений (42.2) можно выразить $\vec{E}_\perp$ и $\vec{B}_\perp$ через $\vec{\nabla}_\perp E_z$ и $\vec{\nabla}_\perp B_z$. Для этого умножим третье уравнение (42.2) на $\varepsilon\omega/c^2$, а четвертое (42.2) — векторно на $\vec{ke}_3$ и раскрыв двойные векторные произведения: $[\vec{e}_3, [\vec{e}_3, \vec{B}_\perp]] = -\vec{B}_\perp$, $[\vec{e}_3, [\vec{\nabla}_\perp B_z, \vec{e}_3]] = \vec{\nabla}_\perp B_z$, вычтем из первого второе. В результате получим

$$\vec{B}_\perp = \frac{i}{\varkappa^2}\left\{\frac{\omega\varepsilon}{c^2}[\vec{e}_3, \vec{\nabla}_\perp E_z] + \kappa\vec{\nabla}_\perp B_z\right\}. \qquad (42.3)$$

Здесь введено обозначение $\varkappa^2 = (\omega^2/c^2)\varepsilon - \kappa^2$.

Аналогично находим

$$\vec{E}_\perp = \frac{i}{\varkappa^2}\{-\omega[\vec{e}_3, \vec{\nabla}_\perp B_z] + \kappa\vec{\nabla}_\perp E_z\}. \qquad (42.4)$$

Уравнения (42.3) и (42.4) позволяют найти поперечные составляющие электромагнитных полей $\vec{E}_\perp$ и $\vec{B}_\perp$, если известны их продольные составляющие B_z и E_z.

Формулы (42.3) и (42.4) удобны тем, что в тех областях, где показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$, а значит, и величина $\varkappa^2 = (\omega^2/c^2)\varepsilon - \kappa^2$ не зависят от координат, можно получить уравнения только для E_z и B_z, в которые не входят поперечные компоненты $\vec{E}_\perp$ и $\vec{B}_\perp$, а затем с помощью формул (42.3) и (42.4) найти и поперечные компоненты. Для того чтобы получить эти уравнения, подставим (42.3) во второе уравнение (42.2), а (42.4) — в первое. В результате имеем

$$(\Delta_\perp + \varkappa^2)E_z = 0, \quad (\Delta_\perp + \varkappa^2)B_z = 0.$$

Так как $E_z = e_z(x, y)e^{i\kappa z}$, $B_z = b_z(x, y)e^{i\kappa z}$ и оператор $\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ действует только на поперечные координаты, то

$$(\Delta_\perp + \varkappa^2)e_z = 0, \quad (\Delta_\perp + \varkappa^2)b_z = 0.$$

Эти уравнения при соответствующих граничных условиях позволяют найти E_z и B_z, а затем по формулам (42.3) и (42.4) — $\vec{E}_\perp$ и $\vec{B}_\perp$.

Очевидно, что пользоваться изложенной выше схемой решения уравнений Максвелла (42.1) удобно, если среда в поперечном направлении кусочно-непрерывна, т. е. состоит из областей с разными, но постоянными в пределах данной области диэлектрическими проницаемостями ε.

Итак, мы свели задачу к решению двух независимых уравнений для E_z и B_z. Но следует иметь в виду, что из-за наличия граничных условий решения этих уравнений могут оказаться связанными между собой. И только в некоторых случаях можно удовлетворить граничным условиям каждым решением в отдельности. Одним из таких случаев является волновод с идеально проводящей границей.

Рассмотрим металлический волновод произвольного сечения, заполненный средой с диэлектрической постоянной ε. Так как внутри металла поле отсутствует, то в любой точке на поверхности волновода должны выполняться граничные условия

$$\vec{n}\cdot\vec{B} = \vec{n}\cdot\vec{B}_\perp = 0, \quad [\vec{n}, \vec{E}] = 0,$$

где $\vec{n}$ — нормаль к поверхности волновода, направленная перпендикулярно к оси z.

Пусть E_z тождественно равно нулю, тогда из (42.3) и (42.4) имеем

$$\vec{E}_\perp = \frac{i\omega}{\varkappa^2}[\vec{\nabla}_\perp B_z, \vec{e}_3], \quad \vec{B}_\perp = \frac{i\kappa}{\varkappa^2}\vec{\nabla}_\perp B_z. \qquad (42.5)$$

Посмотрим, удастся ли нам с помощью решения, в котором $E_z = 0$, удовлетворить всем граничным условиям. Условие $\vec{n}\cdot\vec{B}_\perp = 0$ будет выполнено, если

$$(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}_\perp B_z) \equiv \frac{\partial B_z}{\partial n} = 0.$$

Тогда условие (при $E_z = 0$)

$$[\vec{n}, \vec{E}] = [\vec{n}, \vec{E}_\perp] = \frac{i\omega}{\varkappa^2}[\vec{n}, [\vec{\nabla}_\perp B_z, \vec{e}_3]] = -\frac{i\omega}{\varkappa^2}\vec{e}_3\frac{\partial B_z}{\partial n} = 0$$

выполняется автоматически.

Таким образом, в металлическом волноводе могут существовать волны, у которых $E_z = 0$, $B_z \neq 0$ (H-волны, или TE-волны). Эти волны удовлетворяют уравнению

$$\Delta b_z + \varkappa^2 b_z = 0 \qquad (42.6)$$

и граничному условию

$$\frac{\partial b_z}{\partial n} = 0 \qquad (42.7)$$

на поверхности металлического волновода.

Решив уравнение (42.6) при граничном условии (42.7), остальные компоненты находим из формул (42.5).

Пусть теперь B_z тождественно равно нулю. Тогда из (42.4) и (42.3) имеем

$$\vec{E}_\perp = \frac{i\kappa}{\varkappa^2}\vec{\nabla}_\perp E_z, \quad \vec{B}_\perp = \frac{i\omega\varepsilon}{\varkappa^2}[\vec{e}_3, \vec{\nabla}_\perp E_z]. \qquad (42.8)$$

В этом случае граничное условие $[\vec{n}, \vec{E}] = [\vec{n}, \vec{e}_3 E_z]$ будет выполнено, если $E_z = 0$ на поверхности металлического волновода. Из условия $E_z = 0$ следует, что $\vec{\nabla}_\perp E_z \cdot d\vec{r} = 0$. Другими словами, вектор $\vec{\nabla} E_z$ направлен по нормали к поверхности волновода, и граничное условие $\vec{n} \cdot \vec{B} = 0$, которое с помощью уравнения (42.8) можно переписать в виде

$$\vec{n} \cdot \vec{B} = \vec{n} \cdot \vec{B}_\perp = \frac{i\varepsilon\omega}{\varkappa^2}\vec{n} \cdot [\vec{e}_3, \vec{\nabla}_\perp E_z] = \frac{i\omega\varepsilon}{\varkappa^2}\vec{e}_3[\vec{\nabla}_\perp E_z, \vec{n}] = 0,$$

выполняется автоматически.

Таким образом, в металлическом волноводе могут существовать также волны, у которых $B_z = 0$, $E_z \neq 0$ (E-волны, или TM-волны). Эти волны удовлетворяют уравнению

$$\Delta_\perp e_z + \varkappa^2 e_z = 0 \qquad (42.9)$$

и граничному условию

$$e_z = 0 \qquad (42.10)$$

на поверхности металлического волновода.

Решив уравнение (42.9) при граничном условии (42.10), остальные компоненты электромагнитного поля находим по формулам (42.8).

Рассмотрим распространение E-волны в металлическом волноводе с прямоугольным поперечным сечением со сторонами a и b (рис. 26).

Решение уравнения (42.9) будем искать в виде

$$e_z(x, y) = A \sin(k_x x) \sin(k_y y).$$

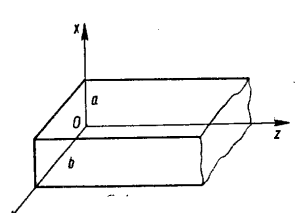


Рис. 26

Тогда, подставляя это выражение в уравнение (42.9), находим, что оно будет решением при условии

$$\kappa_x^2 + \kappa_y^2 = \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} - \kappa^2 \equiv \varkappa^2. \qquad (42.11)$$

Так как, согласно граничному условию (42.10), $e_z(0, y) = e_z(a, y) = 0$, $e_z(x, 0) = e_z(x, b) = 0$, то

$$\kappa_x a = \pi n, \quad \kappa_y b = \pi m, \qquad (42.12)$$

где числа n и m принимают значения ± 1, ± 2... и при этом не обращаются в нуль (при $n = 0$ или $m = 0$ получаем тривиальное решение $e_z = 0$).

Подставляя (42.12) в (42.11), находим дисперсионное уравнение для TH-волн:

$$\kappa = \pm\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - \frac{\omega_{nm}^2}{c^2}}, \qquad (42.13)$$

где $\omega_{nm}^2 = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)$. Знаки «$\pm$» в формуле (42.13) соответствуют двум возможным направлениям распространения электромагнитной волны.

В диапазоне СВЧ диэлектрическая проницаемость ε практически не зависит от частоты и тем не менее имеет место дисперсия фазовой скорости, так как последняя зависит от частоты:

$$v = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon - \omega_{nm}^2/\omega^2}} > \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Поэтому скорость распространения волн (групповая скорость) в волноводах определяется формулой

$$v_{\text{гр}} = \frac{\partial\omega}{\partial\kappa} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{1 - \frac{\omega_{nm}^2}{\varepsilon\omega^2}} = \frac{c^2}{v\varepsilon} < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Физическая причина дисперсии в этом случае связана с геометрическим фактором, а не с инерционностью движения заряженных частиц диэлектрика.

Из формул (42.13) следует, что минимальное значение частоты электромагнитной TH-волны, которая может распространяться в металлическом прямоугольном волноводе,

$$\omega_{\min} = \frac{\pi c}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}.$$

Эта частота называется *граничной частотой*. Наличие граничной частоты является характерной чертой практически всех волноводов, но ее конкретное значение зависит от типа волновода. Если $\omega < \omega_{\min}$, то электромагнитные волны не могут проникать достаточно далеко вглубь волновода. Происходит отражение электромагнитных волн, которое по своей физической природе аналогично явлению полного внутреннего отражения (§ 43).

На рис. 27 изображена зависимость $\kappa(\omega)$ для двух мод TH-волн в металлическом волноводе прямоугольного сечения. При больших частотах ($\omega \gg \omega_{nm}$) эта зависимость становится такой же, как и у плоских волн.

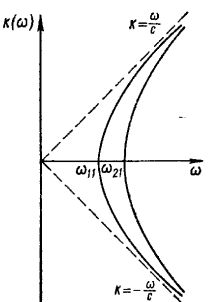


Рис. 27

Электрическое поле в поперечном направлении имеет вид стоячих волн:

$$(e_z)_{nm} = A_{mn} \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}.$$

Остальные компоненты могут быть найдены с помощью формулы (42.8).

Решение аналогичного уравнения (42.6) при граничном условии (42.7) имеет вид

$$(b_z)_{mn} = B_{mn} \cos \frac{\pi n x}{a} \cos \frac{\pi m y}{b},$$

а дисперсионное уравнение —

$$\varkappa = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - \frac{\omega_{nm}^2}{c^2}},$$

где $\omega_{nm}^2 = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)$, причем n, m — целые числа, не обращающиеся в нуль одновременно.

Отметим одну из особенностей всех волноводов — существование в них дискретного набора нормальных волн (мод), распространяющихся со своими групповыми и фазовыми скоростями. Каждое из полученных выше решений принято называть волновой модой или просто *модой*. Каждая мода характеризуется указанием на ее поляризацию (*TE* или *TH*), а также двумя целыми индексами (n, m) и имеет свой закон дисперсии (42.13). Полное решение уравнений Максвелла (42.1) должно иметь вид суперпозиции всех мод

$$E_z = \sum_{n,m,s} A_{m,n}^s \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b} e^{-i(\omega t - \varkappa_{mn}^s(\omega) z)},$$

$$B_z = \sum_{n,m,s} B_{mn}^s \cos \frac{\pi n x}{a} \cos \frac{\pi m y}{b} e^{-i(\omega t - \varkappa_{mn}^s(\omega) z)},$$

где s означает *TE*- или *TH*-волны. Значения коэффициентов A_{mn}^s и B_{mn}^s в этих выражениях зависят от способа возбуждения волновода и их нахождение представляет довольно сложную математическую задачу.

Отметим, что в металлическом волноводе произвольного сечения классификация волн по типу *TE*- и *TH*-волн возможна всегда. Для диэлектрического волновода круглого сечения такое разбиение возможно только для тех мод, у которых отсутствует зависимость от азимутального угла φ (симметричные моды). Это связано с тем, что векторы $\vec{E}_\perp$ и $\vec{B}_\perp$ у симметричных мод направлены по нормали к границе раздела, и поэтому можно удовлетворить граничным условиям только одним типом волн. В случае несимметричных мод для удовлетворения граничных условий приходится брать суперпозицию двух типов волн. Это связано с двумя возможными состояниями поляризации электромагнитных волн и с тем, что граничные условия не удовлетворяются одним типом волн. Такие волны называются гибридными, но по-прежнему каждой частоте будут соответствовать два типа гибридных волн, не имеющих специального названия.

Кроме найденных выше решений в виде *TE*- и *TH*-волн, уравнение (42.2) имеет еще один тип решения. Действительно, если умножить уравнения (42.3) и (42.4) на $\varkappa^2$, то очевидно, что для $\varkappa^2 = 0$ эти уравнения удовлетворяются при $E_z = 0$, $B_z = 0$, но $\vec{E}_\perp \neq 0$, $\vec{B}_\perp \neq 0$. Эти волны называются поперечными электромагнитными волнами, и их скорость совпадает со скоростью плоской волны c, так как для них $\varkappa^2 = k^2 - (\omega^2/c^2)\,\varepsilon = 0$. Как следует из первых двух уравнений (42.2),

$$[\vec{\nabla}_\perp, \vec{E}_\perp] = 0, \quad [\vec{\nabla}_\perp, \vec{B}_\perp] = 0, \quad \vec{B}_\perp = \pm \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c} [\vec{e}_3, \vec{E}_\perp],$$

причем последнее уравнение является следствием третьего или четвертого уравнения (42.2).

Таким образом, для *TEM*-волны (или главной волны) должно выполняться условие $\vec{E}_\perp = -\vec{\nabla}_\perp \varphi$, а так как, кроме того, $\operatorname{div} \vec{E}_\perp = 0$, то очевидно, что функция φ удовлетворяет двухмерному уравнению Лапласа

$$\Delta_\perp \varphi = 0.$$

Для того чтобы удовлетворить граничному условию на поверхности волновода $[\vec{n}, \vec{E}_\perp] = -[\vec{n}, \vec{\nabla}_\perp \varphi] = 0$, необходимо, чтобы $\varphi = \text{const}$ на поверхности проводника. Условие $\vec{n} \cdot \vec{B} = \pm \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c} \vec{n} \cdot [\vec{e}_3, \vec{E}_\perp] = \pm \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c} \vec{e}_3 \cdot [\vec{E}_\perp, \vec{n}]$ при этом удовлетворяется автоматически.

Таким образом, решение задачи о распространении *TEM*-волны свелось к решению двухмерной электростатической задачи. В односвязной области уравнение Лапласа с граничным условием $\varphi = \text{const}$ на границе имеет только одно тривиальное решение $\varphi = \text{const}$ везде внутри волновода, т. е. $\vec{E} = 0$ и, следовательно, существование этого типа волн невозможно. В многосвязной области уравнение Лапласа при граничных условиях $\varphi = \text{const}$ (причем потенциал φ принимает разные значения на разных поверхностях) имеет нетривиальное решение. Примерами многосвязных областей могут быть коаксиальный кабель и двухпроводная линия.

Вычислим с помощью формулы (12.18) среднее значение потока электромагнитной энергии через поперечное сечение волновода для *TE*-волны. Так как $E_z = 0$, а $\vec{B} = \vec{B}_\perp + B_z \vec{e}_3$, то формула (12.18) в рассматриваемом случае приобретает вид

$$\vec{\Pi} = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \operatorname{Re} [\vec{E}_\perp, (B_z^* \vec{e}_3 + \vec{B}_\perp^*)].$$

Подставляя в эту формулу выражение для $\vec{E}_\perp$ и $\vec{B}_\perp$ (42.5) и заменяя $\varepsilon_0 c^2 = 1/\mu_0$, получаем

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} \left\{ \frac{i\omega}{\varkappa^2} [[\vec{\nabla}_\perp B_z, \vec{e}_3], \vec{e}_3 B_z^*] + \frac{\omega \varkappa}{\varkappa^4} [[\vec{\nabla}_\perp B_z, \vec{e}_3], \vec{\nabla}_\perp B_z^*] \right\}.$$

Учитывая, что первое слагаемое мнимое и поэтому не дает вклада в реальную часть, и раскрывая во втором слагаемом двойное векторное произведение, в котором $\vec{e}_3 \cdot \vec{\nabla}_\perp B_z = 0$ и $B_z = b_z e^{i\kappa z}$, имеем

$$\vec{\Pi} = \frac{\omega\kappa}{2\mu_0\varkappa^4} |\vec{\nabla}_\perp b_z|^2 \vec{e}_3. \qquad (42.14)$$

Из формулы (42.14) следует, что вектор Пойнтинга, а значит, и поток энергии направлены вдоль оси волновода. Полный поток энергии равен интегралу по поперечному сечению волновода

$$P = \int (\vec{\Pi} \cdot \vec{e}_3)\, dS = \frac{\omega\kappa}{2\mu_0\varkappa^4} \int |\vec{\nabla}_\perp b_z|^2\, dS. \qquad (42.15)$$

Воспользовавшись соотношением $\operatorname{div}_\perp (b_z^* \vec{\nabla}_\perp b_z) = |\vec{\nabla}_\perp b_z|^2 + b_z^* \Delta_\perp b_z$ и формулой (42.6), перепишем (42.15) в виде

$$P = \frac{\omega\kappa}{2\mu_0\varkappa^2} \int |b_z|^2\, dS + \frac{\omega\kappa}{2\mu_0\varkappa^4} \oint b_z^* (\vec{\nabla} b_z \cdot \vec{e}_3)\, dl.$$

Так как, согласно граничному условию, $b_z = 0$ на границе волновода, то для TE-волны имеем

$$P = \frac{\omega\kappa}{2\mu_0\varkappa^2} \int |b_z|^2 dS$$

и аналогично для TH-волны

$$P = \varepsilon \frac{\varepsilon_0\omega\kappa}{2\varkappa^2} \int |e_z|^2\, dS.$$

Подставив в эти формулы выражения для полей b_z и e_z и проведя интегрирование, получаем поток энергии для металлического волновода произвольного сечения (без учета поглощения).

Из формулы (42.13) следует, что при заданном волновом числе в волноводе могут распространяться электромагнитные волны с частотой

$$\omega(\kappa) = \sqrt{\frac{\omega_{mn}^2 + c^2\kappa^2}{\varepsilon}}.$$

Эта частота зависит от дискретных переменных m и n, а также от волнового числа κ, которое принимает непрерывные значения. Зависимость от дискретных индексов обусловлена необходимостью удовлетворять граничным условиям. Оказывается, что только при дискретных значениях поперечных волновых чисел κ_x и κ_y можно удовлетворить этим условиям. Очевидно, что если наложить граничные условия в продольном направлении, то они будут удовлетворены только при некоторых избранных значениях продольного волнового числа κ и, следовательно, в таких системах *(резонаторах)* будут возможны электромагнитные колебания (уже не волны) на определенных частотах, называемых резонансными или *собственными частотами резонатора.*

Электромагнитный резонатор такого типа становится похожим на

резонансный LC-контур с той разницей, что резонатор обладает не одной, а множеством дискретных резонансных частот.

Закроем теперь торцы прямоугольного волновода металлическими стенками, перпендикулярными к оси волновода (расстояние между стенками d). Таким образом, будем рассматривать часть пространства в форме прямоугольного параллелепипеда со сторонами a, b, d, ограниченного металлическими стенками. В этом случае полученные выше решения должны удовлетворять еще одному граничному условию

$$E_z(x, y, 0) = E_z(x, y, d) = 0. \qquad (42.16)$$

Чтобы удовлетворить этому граничному условию в качестве решения волнового уравнения (42.9), выберем суперпозицию двух мод волновода, отличающихся знаком κ:

$$E_z(x, y, z) = e_z(x, y)(Ae^{-i\kappa z} + Be^{i\kappa z}).$$

Условие (42.16) будет удовлетворено, если положить

$$A + B = 0, \quad Ae^{-i\kappa d} + Be^{i\kappa d} = 0,$$

откуда $\sin \kappa d = 0$, т. е. должно быть

$$\kappa = \frac{\pi}{d} l,$$

где $l = \pm 1, \pm 2$. (При $l = 0$, $A = B = 0$ получаем тривиальное решение $E_z = 0$).

Подставляя $\kappa = \pi l/d$ в (42.11), получаем формулу для собственных частот прямоугольного металлического резонатора

$$\omega_{nml} = \pi c \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{l^2}{d^2}}.$$

Минимальная резонансная частота по порядку величины равна $\omega \sim c/L$, где L — линейные размеры резонатора. Если $L \approx 10$ см, то $\omega \approx 10^{10}$ с$^{-1}$, и поэтому такие резонаторы находят применение в радиотехнике СВЧ-диапазона вместо LC-контуров.

§ 43. Преломление и отражение электромагнитных волн на границе раздела двух диэлектриков. Формулы Френеля

В § 39 было установлено, что в безграничной однородной среде электромагнитное поле можно представить в виде суперпозиции плоских монохроматических волн с законом дисперсии $\kappa^2 = (\omega^2/c^2)\,\varepsilon(\omega)$. Возникает вопрос, что произойдет с плоской монохроматической волной, если на своем пути она встретит границу раздела с однородной средой, но с другим показателем преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$. Для того чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим задачу о распространении плоской электромагнитной волны в кусочно-однородной среде, состоящей из двух диэлектриков с плоской границей раздела между ними. Систему координат выберем так, чтобы все формулы имели максимально простой вид. Для этого ось z направим перпендикулярно к плоскости раздела (рис. 28), а саму плоскость выберем за коорди-

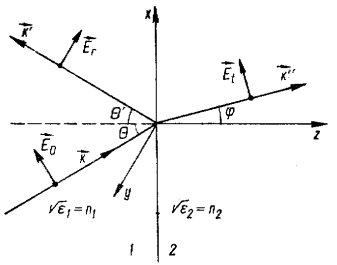


Рис. 28

натную плоскость xy. Ось x направим так, чтобы она лежала в плоскости, содержащей волновой вектор падающей на границу раздела плоской монохроматической волны.

Итак, пусть в среде *1* с диэлектрической проницаемостью ε_1 распространяется линейно поляризованная плоская монохроматическая волна

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{\kappa}\cdot\vec{r})}, \quad \vec{B} = \frac{1}{\omega}[\kappa, \vec{E}]; \tag{43.1}$$

причем $\vec{\kappa} = \{\kappa_x = \kappa \sin\Theta,\ \kappa_y = 0,\ \kappa_z = \kappa\cos\Theta\}$; $\kappa = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}$.

Эта волна проникает в среду *2* с диэлектрической проницаемостью ε_2 в виде преломленной волны. При этом ее поляризация, волновой вектор и частота могут изменяться, поэтому

$$\vec{E}'' = \vec{E}_t e^{-i(\omega'' t - \vec{\kappa}''\cdot\vec{r})}, \quad \vec{B}'' = \frac{1}{\omega''}[\vec{\kappa}'', \vec{E}''], \tag{43.2}$$

причем $\kappa'' = \frac{\omega''}{c}\sqrt{\varepsilon_2}$.

Любая электромагнитная волна на границе раздела двух сред должна удовлетворять граничным условиям (32.13). Так как в нашем случае поверхностные заряды и токи отсутствуют ($\sigma = 0$, $\vec{i} = 0$) и, кроме того, обе среды не магнитные ($\vec{M} = 0$, $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$), то граничные условия примут вид

$$[\vec{n}, \vec{E}_1] = [\vec{n}, \vec{E}_2], \quad \vec{n}\cdot\vec{D}_1 = \vec{n}\cdot\vec{D}_2, \quad \vec{B}_1 = \vec{B}_2. \tag{43.3}$$

Последнее граничное условие следует из того, что непрерывными являются как тангенциальная, так и нормальная составляющие вектора магнитной индукции.

Если бы мы попытались удовлетворить граничным условиям (43.3) с помощью только падающей (43.1) и преломленной волн (43.2), то нам бы это не удалось. Поэтому необходимо ввести еще одну, отраженную волну в среде *1*:

$$\vec{E}' = \vec{E}_r e^{-i(\omega' t - \vec{\kappa}'\cdot\vec{r})}, \quad \vec{B}' = \frac{1}{\omega'}[\vec{\kappa}', \vec{E}'], \tag{43.4}$$

причем $\kappa' = (\omega'/c)\sqrt{\varepsilon_1}$.

Для того чтобы удовлетворить граничным условиям (43.3) в любой момент времени и в любой точке плоскости xy, необходимо, чтобы фазы $\varphi = \omega t - \vec{\kappa}\cdot\vec{r}$ всех трех волн при $z = 0$ были одинаковы:

$$\omega t - \kappa_x x = \omega' t - \kappa_x' x - \kappa_y' y = \omega'' t - \kappa_x'' x - \kappa_y'' y.$$

Отсюда следует, что $\omega = \omega' = \omega''$, т. е. при отражении и преломлении от покоящейся границы частота не изменяется. Кроме того, должно быть

$$\kappa_x' = \kappa_x'' = \kappa_x, \quad \kappa_y' = \kappa_y'' = 0. \tag{43.5}$$

Другими словами, проекции волнового вектора на плоскость xy при отражении и преломлении также не изменяются. Поэтому волновые векторы падающей, отраженной и преломленной волн лежат в плоскости xy.

Из условия

$$\kappa_x = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}\sin\Theta = \kappa_x' = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}\sin\Theta'$$

находим, что $\Theta = \Theta'$, т. е. угол отражения равен углу падения.

Из условия

$$\kappa_x = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}\sin\Theta = \kappa_x'' = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_2}\sin\varphi$$

следует, что угол преломления φ и угол падения Θ связаны между собой соотношением

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\Theta} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} = \frac{n_1}{n_2}, \tag{43.6}$$

которое принято называть законом Снелля (40.13).

Нормальные компоненты волнового вектора находим из дисперсионного уравнения:

$$\kappa^2 = \kappa_x^2 + \kappa_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon,$$

$$\kappa_z = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}\cos\Theta, \quad \kappa_z' = -\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}\cos\Theta, \tag{43.7}$$

$$\kappa_z'' = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2 - \kappa_x^2} = \frac{\omega}{c}n_2\sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\Theta}.$$

Из полученных формул можно указать только направление отраженной и преломленной волн, но ничего нельзя сказать о распределении интенсивности между ними, а также об их поляризации. Для того чтобы найти интенсивности и поляризацию, следует исходить из граничных условий (43.3) на поверхности раздела. Найдем с помощью этих условий амплитуду отраженной и преломленной волн. Так как в среде *1* существует как падающая, так и отраженная волна, то электромагнитное поле в этой среде представляет собой суперпозицию двух волн:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_r, \quad \vec{B} = \frac{1}{\omega}\{[\vec{\kappa}, \vec{E}_0] + [\vec{\kappa}', \vec{E}_r]\}.$$

Тогда условие непрерывности тангенциальных компонент электрического вектора примет вид

$$[\vec{n}, \vec{E}_0] + [\vec{n}, \vec{E}_r] = [\vec{n}, \vec{E}_t], \tag{43.8}$$

а условие непрерывности магнитной индукции

$$[\vec{\kappa}, \vec{E}_0] + [\vec{\kappa}', \vec{E}_r] = [\vec{\kappa}'', \vec{E}_t]. \tag{43.9}$$

Кроме того, необходимо, чтобы выполнялось условие непрерывности нормальных составляющих вектора индукции:

$$\varepsilon_1 \vec{n} \cdot (\vec{E}_0 + \vec{E}_r) = \varepsilon_2 \vec{n} \cdot \vec{E}_t, \qquad (43.10)$$

а также условия поперечности плоских монохроматических волн $(\vec{\kappa} \cdot \vec{E}_0) = (\vec{\kappa}' \cdot \vec{E}_t) = (\vec{\kappa}'' \cdot \vec{E}_r) = 0$. Этих условий достаточно, чтобы выразить в общем случае векторы $\vec{E}_t$ и $\vec{E}_r$ через вектор $\vec{E}_0$. Однако при этом, учитывая векторный характер уравнений (43.8) — (43.10), приходится проделать хотя и несложные, но довольно громоздкие выкладки. Так как произвольно поляризованную волну можно представить как суперпозицию двух линейно поляризованных волн (§ 13), то проще рассмотреть обе поляризации падающей волны в отдельности: волны, поляризованные в плоскости падения, и поляризованные перпендикулярно к ней.

Сначала рассмотрим случай, когда вектор $\vec{E}_0$ перпендикулярен к плоскости падения. Условие (43.10), а также условие поперечности при этом будут удовлетворяться автоматически. Граничные условия (43.8) и (43.9) будут удовлетворены, если векторы $\vec{E}_t$ и $\vec{E}_r$ также будут перпендикулярны к плоскости падения. Причем из условия (43.8) следует, что

$$E_0 + E_r = E_t,$$

а из условия (43.9)

$$\kappa_z E_0 + \kappa_z' E_r = \kappa_z'' E_t.$$

Учитывая, что

$$\kappa_z = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}\cos\Theta, \quad \kappa_z' = -\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}\cos\Theta, \quad \kappa_z'' = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_2}\cos\varphi$$

и решая эти уравнения относительно E_r и E_t, получаем *формулы Френеля:*

$$E_r = E_0 \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\Theta - \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1\sin^2\Theta}}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\Theta + \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1\sin^2\Theta}},$$
$$E_t = E_0 \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\Theta}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\Theta + \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1\sin^2\Theta}}, \qquad (43.11)$$

связывающие амплитуды отраженной E_r и прошедшей E_t волн с амплитудой падающей волны E_0.

Если ε_1 и ε_2 вещественные (обе среды прозрачные), то $\sqrt{\varepsilon_1}/\sqrt{\varepsilon_2} = \sin\varphi/\sin\Theta$ и формулы (43.11) приобретают вид

$$E_r = E_0 \frac{\sin(\varphi - \Theta)}{\sin(\Theta + \varphi)}, \quad E_t = E_0 \frac{2\cos\Theta\sin\varphi}{\sin(\Theta + \varphi)}. \qquad (43.12)$$

Формулы Френеля связывают амплитуды отраженной и преломленной волн с отношением показателей преломления, а также с углом падения Θ и амплитудой падающей волны. Поляризация отраженной и преломленной волн в рассматриваемом случае не изменяется.

Для вектора падающей волны E_0, лежащего в плоскости падения, получим следующие формулы Френеля:

$$E_r = E_0 \frac{\operatorname{tg}(\Theta - \varphi)}{\operatorname{tg}(\Theta + \varphi)}, \quad E_t = E_0 \frac{2\sin\Theta\cos\Theta}{\sin(\Theta + \varphi)\cos(\Theta - \varphi)}. \qquad (43.13)$$

Пусть теперь на границу раздела падает неполяризованная волна под углом $\Theta = \beta$, который определяется из условия $\operatorname{tg}\beta = n_2/n_1$ и называется *углом Брюстера*. В этом случае из формулы Снелля (43.6) находим $\sin\varphi = \cos\beta$. Отсюда следует, что $\varphi + \beta = \pi/2$. При этом $\operatorname{tg}(\varphi + \beta) = \infty$ и, согласно формуле (43.13), $E_r = 0$.

Таким образом, при падении неполяризованной волны под углом Брюстера $\beta = \operatorname{arctg}\frac{n_2}{n_1}$ отраженная волна, поляризованная в плоскости падения, отсутствует. Другими словами, отраженная волна будет полностью поляризована перпендикулярно к плоскости падения.

Рассмотрим теперь отражение волны от оптически менее плотной среды ($n_1 > n_2$). Так как $\kappa_x'' = \kappa_x = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}\sin\Theta$, то в этом случае из (43.7) для прошедшей волны имеем

$$\kappa_z'' = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}n_2^2 - \frac{\omega^2}{c^2}n_1^2\sin^2\Theta} = \frac{\omega}{c}n_2\left(1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\Theta\right)^{1/2}. \qquad (43.14)$$

При углах падения $(n_1/n_2)\sin\Theta \geqslant 1$ формула (43.14) запишется в виде

$$\kappa_z'' = i\frac{\omega}{c}n_2\left(\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\Theta - 1\right)^{1/2}.$$

При $\sin\Theta > n_2/n_1$ прошедшая волна независимо от поляризации будет иметь вид

$$E_t'' = E_t e^{-\frac{\omega z}{c}n_2\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\Theta\right)^2 - 1\right]^{1/2}} e^{-i(\omega t - \kappa x)}.$$

Другими словами, при углах падения $\sin\Theta > n_2/n_1$ ее амплитуда становится затухающей в направлении оси z. При этом прошедшая волна превращается в поверхностную, которая распространяется вдоль поверхности раздела двух сред с фазовой скоростью $V_\Phi = \omega/\kappa_x = c/(n_1\sin\Theta)$. Угол $\sin\Theta = n_2/n_1$ называется углом полного внутреннего отражения.

Если в диэлектрическую пластинку с показателем преломления n_2, окруженную оптически менее плотным веществом $n_1 < n_2$, запустить световую волну под углом, большим угла полного отражения ($\Theta > \arcsin(n_1/n_2)$), то, благодаря явлению полного внутреннего отражения, электромагнитная волна не будет выходить из пластинки. На этом принципе создаются волноводы, которые в СВЧ-диапазоне называются диэлектрическими волноводами, а в оптическом диапазоне — световодами.

Поверхностная волна затухает достаточно быстро на расстоянии в несколько длин волн, если только угол падения не слишком близок к углу полного внутреннего отражения. Если два диэлектрика разде-

лены тонким слоем воздушной прослойки ($\varepsilon = 1$), толщина которой порядка длины волны, то, благодаря экспоненциальному проникновению электромагнитных волн в вакуум, она будет проникать и в область, занятую другими диэлектриками. Этот эффект аналогичен квантовому эффекту туннелирования легких частиц через потенциальные барьеры (туннельный эффект).

Рассмотрим теперь отражение электромагнитной волны от хорошего проводника, граничащего с вакуумом. Уравнение Максвелла (32.4) имеет вид

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Для монохроматических волн, учитывая, что $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, эту формулу можно записать в виде

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 (\sigma \vec{E} - i\omega\varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}) = -i\omega\varepsilon_0\mu_0 \left(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}\right)\vec{E} = -\frac{i\omega}{c^2}\varepsilon'\vec{E},$$

где

$$\varepsilon' = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}. \qquad (43.15)$$

Таким образом, металл можно рассматривать как диэлектрик с комплексной диэлектрической постоянной (43.15), причем у хороших проводников мнимая часть вплоть до частот $10^{14}\ c^{-1}$ гораздо больше, чем вещественная:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega} \gg \varepsilon \text{ или } \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} \gg \omega.$$

Поскольку металл — среда непрозрачная, то следует пользоваться формулами Френеля в виде (43.11). С целью упрощения выкладок рассмотрим нормальное падение ($\Theta = 0$). В этом случае формулы Френеля (43.11) для обеих поляризаций одинаковы и принимают вид

$$E_r = E_0 \frac{1 - \sqrt{\varepsilon'}}{1 + \sqrt{\varepsilon'}}, \quad E_t = E_0 \frac{2}{1 + \sqrt{\varepsilon'}}. \qquad (43.16)$$

Так как величина ε' комплексная, то

$$E_r = E_0 \left|\frac{1 - \sqrt{\varepsilon'}}{1 + \sqrt{\varepsilon'}}\right| e^{i\varphi_r}, \quad E_t = E_0 \frac{2}{|1 + \sqrt{\varepsilon'}|} e^{i\varphi_t}.$$

Другими словами, при отражении и преломлении от границ раздела вакуум — металл отраженная и преломленная волны приобретают дополнительный сдвиг фаз соответственно φ_r и φ_t, который зависит от проводимости металла.

Кроме того, из формулы (43.16) следует, что при $\sigma \to \infty$

$$E_r \to E_0 e^{i\pi}, \quad E_t \to 0.$$

Это означает, что при условии $\sigma/(\varepsilon\varepsilon_0\omega) \gg 1$ электромагнитная волна практически полностью отражается от металла, приобретая при этом дополнительную фазу, равную π.

Следует также отметить, что волновой вектор прошедшей волны

$$\kappa = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}\left(1 + i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon\omega}\right)^{1/2}$$

становится комплексным, что означает экспоненциальное уменьшение амплитуды за счет поглощения прошедшей вглубь металла волны, так как в этом случае $E = E_0 e^{-i\omega + i\kappa z} = E_0 e^{-\operatorname{Im}\kappa \cdot z} e^{-i(\omega t - \operatorname{Re}[\kappa \cdot z])}$.

Следует отметить, что отражение электромагнитных волн от металла и полное внутреннее отражение, в результате которого волна затухает вглубь прозрачного диэлектрика, имеют совершенно различный характер и различные причины.

§ 44. Распространение плоских монохроматических волн в анизотропных кристаллах. Кристаллооптика

В § 37 рассмотрено распространение плоской монохроматической волны в изотропной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$. Установлено, что скорость распространения сигналов (импульсов или волновых пакетов) в диэлектрике меньше, чем скорость света в вакууме, и в отсутствие дисперсии равна $v = c/n$, где $n = \sqrt{\varepsilon}$ — показатель преломления. Причем, как и в вакууме, эта скорость не зависит от поляризации.

Рассмотрим теперь распространение плоской электромагнитной волны в анизотропном диэлектрике. В общем случае анизотропных сред, каковыми являются монокристаллы, линейная связь между векторами индукции и напряженности электрического поля выражается формулой

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j. \qquad (44.1)$$

Совокупность величин ε_{ij} называется *тензором диэлектрической проницаемости*. Как и тензор моментов инерции, этот тензор является симметричным тензором второго ранга $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$. И хотя его физический смысл совершенно другой, чем у тензора момента инерции, закон преобразования при переходе от одной системы координат к другой у них совершенно одинаковый. Следовательно, и математические свойства их также одинаковы.

Как и всякий симметричный тензор второго ранга, тензор диэлектрической проницаемости путем выбора специальной системы координат можно привести к диагональному виду

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}.$$

Уравнения Максвелла для монохроматических волн имеют вид

$$\operatorname{rot} \vec{B} = -i\mu_0\omega\vec{D}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = i\omega\vec{B}. \qquad (44.2)$$

Для плоских волн все векторы $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$ пропорциональны $e^{i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}}$ и поэтому уравнение (44.2) записывается как

$$[\vec{\kappa}, \vec{B}] = -\mu_0\omega\vec{D}, \quad [\vec{\kappa}, \vec{E}] = \omega\vec{B}. \qquad (44.3)$$

Из этих формул следует $\vec{D} \perp \vec{\kappa}$, $\vec{D} \perp \vec{B}$, а также $\vec{B} \perp \vec{E}$ и $\vec{B} \perp \vec{\kappa}$. Это означает, что $\vec{D}$, $\vec{B}$ и $\vec{\kappa}$ образуют тройку взаимно ортогональных векторов, а вектор $\vec{E}$ лежит в плоскости векторов $\vec{D}$ и $\vec{\kappa}$ и составляет с вектором $\vec{D}$ угол α, который зависит от вида тензора ε_{ij}. Исключая из уравнений (44.3) вектор $\vec{B}$, получаем

$$-\mu_0\omega^2\vec{D} = [\vec{\kappa}, [\vec{\kappa}, \vec{E}]] = \vec{\kappa}(\vec{\kappa}\cdot\vec{E}) - \vec{E}\kappa^2.$$

Выражая $\vec{D}$ через $\vec{E}$ с помощью формулы (44.1), получаем линейное уравнение для вектора $\vec{E}$

$$-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}E_j = \kappa_i\kappa_j E_j - E_i\kappa^2,$$

или

$$\left(\kappa^2\delta_{ij} - \kappa_i\kappa_j - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}\right)E_j = 0. \qquad (44.4)$$

Приравнивая определитель этой системы нулю, найдем дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в анизотропной среде.

Воспользуемся системой координат, в которой тензор ε_{ij} имеет диагональный вид, так как при этом уравнения Максвелла будут иметь наиболее простой вид. Рассмотрим также случай, когда два из главных значений тензора диэлектрической проницаемости совпадают: $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_\perp$, $\varepsilon_{33} = \varepsilon_\parallel$ (так называемые *одноосные кристаллы*). Ось z принято называть *оптической осью кристалла*. Так как два главных значения тензора ε_{ij} совпадают, то координатные оси x и y могут иметь произвольные направления. Выберем их ориентацию так, чтобы волновой вектор $\vec{\kappa}$ лежал в плоскости zx (рис. 28). Тогда $\kappa_y = 0$ и система уравнений (44.4) в проекциях на оси координат будет иметь вид

$$\begin{aligned}
&\left(\kappa^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp\right)E_y = 0,\\
&\left(\kappa_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp\right)E_x - \kappa_x\kappa_z E_z = 0, \qquad (44.5)\\
&\left(\kappa_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\parallel\right)E_z - \kappa_x\kappa_z E_x = 0.
\end{aligned}$$

Причем $\kappa^2 = \kappa_x^2 + \kappa_z^2$, $\kappa_x = \kappa\sin\Theta$, $\kappa_z = \kappa\cos\Theta$.

Первое уравнение в этой системе не зависит от двух остальных. Поэтому для волны, поляризованной вдоль оси y, т. е. перпендикулярно к плоскости, содержащей ось z и волновой вектор $\vec{\kappa}$: $\vec{E} = (0, E_y, 0)$, дисперсионное уравнение имеет вид

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp. \qquad (44.6)$$

Волна с этой поляризацией ничем не отличается от волны в изотропной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_\perp$ и поэтому ее принято называть обыкновенной.

Дисперсионное уравнение для второй волны, у которой $E_y = 0$, получаем из условия равенства нулю детерминанта двух последних уравнений системы (44.5)

$$\left(\kappa_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp\right)\left(\kappa_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\parallel\right) - \kappa_x\kappa_z = 0,$$

откуда имеем

$$\varepsilon_\perp\kappa_x^2 + \varepsilon_\parallel\kappa_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\parallel\varepsilon_\perp \qquad (44.7)$$

или

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\varepsilon_\parallel\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel\cos^2\Theta + \varepsilon_\perp\sin^2\Theta}.$$

Используя дисперсионное уравнение (44.7) и любое из двух последних уравнений системы (44.5), находим поляризацию, т. е. направление вектора $\vec{E}$ этой волны:

$$\frac{E_z}{E_x} = -\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\operatorname{tg}\Theta. \qquad (44.8)$$

Таким образом, дисперсионное уравнение, а следовательно, и скорость распространения волны, у которой $\vec{E} = (E_x, 0, E_z)$, согласно (44.7), зависят от направления распространения; кроме того, $(\vec{E}\cdot\vec{\kappa}) \neq 0$. Перечисленными выше свойствами эта волна отличается от волн в изотропном диэлектрике и потому получила название *необыкновенной*.

Пренебрегая дисперсией, вычислим групповую скорость необыкновенной волны, используя (44.7)

$$v_x = \frac{\partial\omega}{\partial\kappa_x} = \frac{c^2}{\varepsilon_\parallel}\frac{\kappa_x}{\omega}, \quad v_z = \frac{\partial\omega}{\partial\kappa_z} = \frac{c^2}{\varepsilon_\perp}\frac{\kappa_z}{\omega}.$$

Отсюда находим

$$\frac{v_x}{v_z} = \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\frac{\kappa_x}{\kappa_z}.$$

Другими словами, угол Θ' между групповой скоростью и оптической осью связан с углом Θ соотношением

$$\frac{v_x}{v_z} = \operatorname{tg}\Theta' = \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\operatorname{tg}\Theta. \qquad (44.9)$$

Таким образом, направление распространения волнового пакета в случае необыкновенной волны не совпадает с направлением волнового вектора. Это явление называется сносом. Используя выражения (44.8) и (44.9), находим

$$v_z E_z + v_x E_x = 0,$$

откуда следует, что вектор $\vec{E}$ перпендикулярен вектору групповой скорости.

Найдем направление вектора Пойнтинга для необыкновенной волны. Так как $\vec{\Pi} = \varepsilon_0 c^2 [\vec{E}, \vec{B}]$, а $\vec{B} = \frac{1}{\omega}[\vec{\kappa}, \vec{E}]$, то

$$\vec{\Pi} = \frac{\varepsilon_0 c^2}{\omega}[\vec{E}, [\vec{\kappa}, \vec{E}]] = \frac{\varepsilon_0 c^2}{\omega}[\vec{\kappa}E^2 - \vec{E}(\vec{\kappa}\cdot\vec{E})].$$

Поскольку групповая скорость $\vec{v}$ перпендикулярна к вектору $\vec{E}$, а вектор $\vec{\kappa}$ лежит в плоскости этих векторов, то его можно разложить по векторам $\vec{v}$ и $\vec{E}$:

$$\vec{\kappa} = \frac{\vec{\kappa}\cdot\vec{v}}{v^2}\vec{v} + \frac{(\vec{\kappa}\cdot\vec{E})\vec{E}}{E^2},$$

откуда

$$\vec{\kappa}E^2 - (\vec{\kappa}\cdot\vec{E})\vec{E} = \frac{(\vec{\kappa}\cdot\vec{v})}{v^2}\vec{v}E^2.$$

Следовательно,

$$\vec{\Pi} = \frac{\varepsilon_0 c^2}{\omega v^2}(\vec{\kappa}\cdot\vec{v})\vec{v}E^2.$$

Таким образом, вектор Пойнтинга, который характеризует направление распространения энергии, направлен вдоль вектора групповой скорости. Так как

$$(\vec{\kappa}\cdot\vec{v}) = \kappa_x v_x + \kappa_z v_z = \frac{c^2}{\varepsilon_\parallel \omega}\kappa_x^2 + \frac{c^2}{\varepsilon_\perp \omega}\kappa_z^2 = \omega,$$

$$v^2 = \frac{c^4}{\omega^2}\left(\frac{\kappa_x^2}{\varepsilon_\parallel^2} + \frac{\kappa_z^2}{\varepsilon_\perp^2}\right) = \frac{c^2}{\varepsilon_\parallel \varepsilon_\perp}\frac{\varepsilon_\parallel^2\cos^2\Theta + \varepsilon_\perp^2\sin^2\Theta}{\varepsilon_\parallel\cos^2\Theta + \varepsilon_\perp\sin^2\Theta},$$

то окончательно имеем

$$\vec{\Pi} = v_0 \frac{(\varepsilon_\parallel\cos^2\Theta + \varepsilon_\perp\sin^2\Theta)}{\left(\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}\cos^2\Theta + \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\sin^2\Theta\right)}\vec{v}\cdot E^2.$$

Явление преломления плоской монохроматической волны, падающей на поверхность анизотропного кристалла, отличается от преломления на границе двух изотропных сред, рассмотренного в § 43. В одноосном кристалле при преломлении возникают две волны: обыкновенная и необыкновенная (двойное лучепреломление). Обыкновенная волна полностью аналогична обычным преломленным волнам в изотропных телах, ее групповая скорость совпадает по направлению с волновым вектором и лежит в плоскости падения волны. Направление групповой скорости необыкновенной волны, вообще говоря, не лежит в плоскости падения. Это обусловлено тем, что хотя волновые векторы как отраженной, так и преломленной волн лежат в плоскости падения, однако нормальные компоненты для обеих волн имеют разные значения, и поэтому их групповые скорости будут различны.

Рассмотрим в качестве примера нормальное падение электромагнитной волны из вакуума на поверхность раздела вакуума с одноосным кристаллом, перпендикулярную к его оптической оси. Выберем систему координат таким образом, чтобы нормаль к поверхности и оптическая ось совпадали с осью z, а ориентацию осей x и y — так, чтобы волновой вектор падающей волны лежал в плоскости xz. Поскольку тангенциальные компоненты сохраняются, то $\kappa_x = (\omega/c)\sin\Theta$, а компоненту κ_z для необыкновенной волны определим из формулы (44.7):

$$\kappa_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp - \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\Theta} = \frac{\omega}{c}\left(\varepsilon_\perp - \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\sin^2\Theta\right)^{1/2}.$$

С помощью формулы (44.9) находим

$$\operatorname{tg}\Theta' = \frac{v_x}{v_z} = \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\frac{\kappa_x}{\kappa_z} = \frac{\sqrt{\varepsilon_\perp}}{\sqrt{\varepsilon_\parallel}}\frac{\sin\Theta}{(\varepsilon_\parallel - \sin^2\Theta)^{1/2}}.$$

§ 45. Нелинейные эффекты в оптике. Генерация второй гармоники

До сих пор мы считали, что вектор поляризации связан с электрическим вектором электромагнитного поля линейно (37.2). В большинстве случаев этого приближения было достаточно. С созданием мощных лазерных источников электромагнитного излучения большой интенсивности стало возможным наблюдение эффектов, обусловленных нелинейной зависимостью вектора поляризации от электрического поля. Рассмотрим эффекты, связанные с квадратичной нелинейностью. Предварительно для выяснения, к каким качественно новым явлениям может привести учет нелинейных членов, рассмотрим колебания в системе двух осцилляторов с нелинейной связью.

Пусть функция Лагранжа двух осцилляторов с собственными частотами ω_1 и ω_2 имеет вид

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 - \omega_1^2 x_1^2) + \frac{1}{2}(\dot{x}_2^2 - \omega_2^2 x_2^2) + \alpha x_2 x_1^2. \qquad (45.1)$$

Здесь слагаемое $\alpha x_2 x_1^2$ описывает простейший вид нелинейной связи (нелинейное взаимодействие) между двумя осцилляторами.

Уравнения движения этих осцилляторов

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = 2\alpha x_1 x_2, \quad \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \alpha x_1^2. \qquad (45.2)$$

Параметр нелинейности α будем считать достаточно малым. Тогда решение системы уравнений (45.2) можно искать в виде разложения в ряд по α:

$$x_1 = a_1\cos\Psi_1 + \alpha f_1 + \cdots, \quad x_2 = a_2\cos\Psi_2 + \alpha f_2 + \cdots, \qquad (45.3)$$

где $\Psi_i = \omega_i t + \varphi_i$.

Подставляя в уравнение (45.2) выражения (45.3) и приравнивая члены при одинаковых степенях α, получаем уравнения для f_1 и f_2:

$$\ddot{f}_1 + \omega_1^2 f_1 = 2a_1 a_2\cos\Psi_1\cos\Psi_2 = a_1 a_2[\cos(\Psi_1 + \Psi_2) + \cos(\Psi_1 - \Psi_2)],$$

$$\ddot{f}_2 + \omega_2^2 f_2 = a_1^2\cos^2\Psi_1 = \frac{a_1^2}{2}(1 + \cos 2\Psi_1). \qquad (45.4)$$

Решения (45.4) имеют вид

$$f_1 = -\frac{a_1 a_2}{\omega_2(\omega_2 - 2\omega_1)}\cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2] - \\ -\frac{a_1 a_2}{\omega_2(\omega_2 + 2\omega_1)}\cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2], \qquad (45.5)$$

$$f_2 = \frac{a_1^2}{2\omega_1^2} + \frac{a_1^2}{2(\omega_2^2 - 4\omega_1^2)}\cos 2(\omega_1 t + \varphi_1).$$

Следовательно, решение уравнений (45.2) можно представить в виде рядов:

$$x_1 = a_1\cos\Psi_1 - \alpha\frac{a_1 a_2}{\omega_2(\omega_2 - 2\omega_1)}\cos(\Psi_1 - \Psi_2) - \\ -\alpha\frac{a_1 a_2}{\omega_2(\omega_2 + 2\omega_1)}\cos(\Psi_1 + \Psi_2) + 0(\alpha^2), \qquad (45.6)$$

$$x_2 = a_2\cos\Psi_2 + \alpha\frac{a_1^2}{2\omega_2^2} + \alpha\frac{a_1^2}{2(\omega_2^2 - 4\omega_1^2)}\cos 2\Psi_1 + 0(\alpha^2).$$

Внимательно изучив выражения (45.6), заметим, что учет ангармонизма приводит к следующим нелинейным эффектам: 1) к сдвигу равновесного положения, около которого происходят колебания; в нашем случае это слагаемое $\alpha a_1^2/(2\omega_2^2)$ в формуле для x_2; 2) в спектре колебаний кроме основных частот ω_1 и ω_2 появляются комбинационные частоты; в нашем случае — это $2\omega_1$ и $\omega_2 \pm \omega_1$. Условием применимости изложенного выше метода есть

$$\frac{\alpha a}{\omega^2} \ll 1,$$

где a — амплитуда колебаний. Из формул (45.6) следует также, что при выполнении соотношения $\omega_2 = 2\omega_1$ этот метод неприменим даже при сколь угодно малом параметре нелинейности α и амплитуде колебаний.

Таким образом, если $\omega_2 = 2\omega_1$, то даже при малых α (слабая нелинейность) следует ожидать качественно новых явлений. Этот случай в дальнейшем будем называть нелинейным резонансным взаимодействием или *параметрическим резонансом*.

Для исследования движения нелинейных колебательных систем в условиях параметрического резонанса необходимо разработать новый приближенный математический метод, который в первую очередь учитывал бы резонансные слагаемые. Нерезонансными членами в первом приближении по α можно пренебречь. Следует иметь в виду, что для нахождения следующих по α приближений нужно было бы учитывать и нерезонансные слагаемые, так как в более высоких порядках они также могут привести к резонансным членам. В этом параграфе ограничимся только первым порядком по α.

Выше был рассмотрен случай колебательных систем, у которых спектр собственных частот дискретный. Волноведущие системы отличаются от колебательных тем, что спектр их собственных частот непрерывен. Кроме того, каждая волна, помимо частоты, характеризуется волновым вектором, который связан с частотой дисперсионным уравнением

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega).$$

Поэтому для параметрического резонанса кроме условия $\omega_2 = 2\omega_1$ должно выполняться также так называемое условие *пространственного синхронизма*

$$\kappa_2 = 2\kappa_1,$$

где $\kappa_2 = \kappa(2\omega)$, $\kappa_1 = \kappa(\omega)$, $\omega_1 = \omega$.

При заданной частоте ω два условия синхронизма $\omega_2 = 2\omega$ и $\kappa(\omega_2) = 2\kappa(\omega)$ дают два уравнения для одной частоты ω. Поэтому для синхронизма необходимо, чтобы $\varepsilon(\omega) = \varepsilon(2\omega)$. Из-за частотной дисперсии диэлектрической проницаемости выполнения этого равенства обычно добиваются за счет параметров, от которых зависит диэлектрическая проницаемость: температуры, направления распространения волны в анизотропных диэлектриках и др.

Рассмотрим распространение электромагнитных волн в диэлектрике. Уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \qquad (45.7)$$

Будем считать, что волны распространяются вдоль оси z, а вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ направлен вдоль оси x. Тогда из системы уравнений (45.7) имеем

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial B_y}{\partial z} + \mu_0\frac{\partial D_x}{\partial t} = 0. \qquad (45.8)$$

Пусть вектор индукции связан с напряженностью электрического поля соотношением

$$D_x = \varepsilon_0\varepsilon E_x + \varepsilon_0\alpha E_x^2 + \cdots \qquad (45.9)$$

Здесь α — коэффициент квадратичной нелинейности. Если пренебречь нелинейностью ($\alpha = 0$), то решения системы уравнений (45.8) можно представить в виде плоских волн

$$E_x = Ee^{-i(\omega t - \kappa z)}, \quad B_y = \frac{\kappa}{\omega}Ee^{-i(\omega t - \kappa z)},$$

причем $\kappa^2 = (\omega^2/c^2)\varepsilon(\omega)$, а амплитуда E не зависит ни от координат, ни от времени.

Если плоская монохроматическая волна падает на границу раздела вакуум — диэлектрик, то происходит отражение и преломление этой волны, причем в случае линейной среды частоты этих волн не изменяются (§ 43). Для нелинейной среды это уже не так. Благодаря квадратичной нелинейности (второе слагаемое в (45.9)) в среде кроме колебаний вектора поляризации на частоте ω будут происходить также его колебания и на частотах 2ω, 3ω и т. д. В результате этого вектор индукции (45.9), в свою очередь, будет возбуждать в нелинейной среде

электромагнитные волны на этих же частотах. Однако вследствие частотной зависимости диэлектрической проницаемости можно сделать так, чтобы условие параметрического резонанса $\kappa(2\omega) = 2\kappa(\omega)$ выполнялось только для второй гармоники, и тогда можно ограничиться этими двумя волнами: на основной частоте и на второй гармонике. Поэтому решение уравнений (45.8) будем искать в виде

$$E_x = \frac{1}{2}[E_1(z,t)\,e^{i\psi_1} + \text{к. с.}] + \frac{1}{2}[E_2(z,t)\,e^{i\psi_2} + \text{к. с.}] + \alpha f_1 + \cdots$$

$$B_y = \frac{1}{2}\left[\frac{\kappa}{\omega}(E_1 + \alpha g_1 + \cdots)\,e^{i\psi_1} + \text{к. с.}\right] + \tag{45.10}$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\kappa}{\omega}(E_2 + \alpha g_2 + \cdots)\,e^{i\psi_2} + \text{к. с.}\right] + \alpha\frac{\kappa}{\omega} f_2 + \cdots$$

Здесь $\psi_1 = \kappa z - \omega t$, $\psi_2 = -2\omega t + \kappa(2\omega)\,z = 2\psi_1$, причем $\kappa(2\omega) = 2\kappa(\omega)$. Функции g_1, g_2, f_1, f_2 подберем так, чтобы в решении отсутствовали резонансные слагаемые. Функции f_1, f_2 будут при этом описывать малые добавки, связанные с появлением нерезонансных частот (см. (45.6)). Так как α — величина малая, то E_1 и E_2, а также функции g_1 и g_2 являются медленно изменяющимися функциями координаты и времени:

$$\left|\frac{\partial E_i}{\partial t}\right| \ll \omega |E_i|, \quad \left|\frac{\partial E_i}{\partial z}\right| \ll \kappa |E_i|.$$

Таким образом, решение (45.10) имеет вид двух волновых пакетов, распространяющихся слева направо. Медленное их изменение в пространстве и времени обусловлено малостью коэффициента нелинейности α. При $\alpha = 0$ эти величины были бы вообще постоянны.

Подставив (45.10) в (45.9), получим линейную часть вектора индукции

$$D_x^{(1)} = \frac{\varepsilon_0}{2}[(\varepsilon_1 E_1 e^{i\psi_1} + \text{к. с.}) + (\varepsilon_2 E_2 e^{2i\psi_1} + \text{к. с.})] + \alpha\varepsilon_0\hat{\varepsilon} f_1$$

и с точностью до членов порядка α^2 нелинейную часть

$$D_x^{(2)} = \frac{\varepsilon_0}{4}\alpha[(E_1^2 e^{2i\psi_1} + \text{к. с.}) + 2(E_2 E_1^* e^{i\psi_1} + \text{к. с.}) +$$

$$+ (E_2^2 e^{4i\psi_1} + \text{к. с.}) + 2(E_1 E_2 e^{3i\psi_1} + \text{к. с.}) + 2|E_1|^2 + 2|E_2|^2], \tag{45.11}$$

причем $D_x = D_x^{(1)} + D_x^{(2)}$, $\varepsilon_1 = \varepsilon(\omega) = \varepsilon_2 = \varepsilon(2\omega)$.

Следует обратить внимание, что в выражении для нелинейной части вектора индукции (45.11) сначала записаны те слагаемые, фазы которых удовлетворяют соотношениям $\psi_2 = 2\psi_1$ и $\psi_1 = \psi_2 - \psi_1$, так как именно они находятся в параметрическом резонансе: $e^{2i\psi_1} = e^{i\psi_2}$ — с удвоенной частотой, $e^{i(\psi_2 - \psi_1)} = e^{i\psi_1}$ — с основной частотой. Как мы видели в начале этого параграфа, именно они должны быть учтены в первую очередь; члены с нерезонансной зависимостью в первом приближении могут быть опущены.

Решение для амплитуд обеих волн получаем путем подстановки (45.10) в уравнения Максвелла (45.8), в которых оставим только члены

порядка α, считая произведения α на производные от медленно меняющихся величин малыми второго порядка и пренебрегая ими.

Прежде чем подставить (45.10) в (45.8), вычислим необходимые производные с точностью до членов порядка α^2:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial E_1}{\partial z} + i\kappa E_1\right)e^{i\psi_1} + \text{к. с.} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial E_2}{\partial z} + 2i\kappa E_2\right)e^{2i\psi_1} + \text{к. с.}\right] + \alpha\frac{\partial f_1}{\partial z} + \cdots,$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{1}{2}\left[\frac{\kappa}{\omega}\left(\frac{\partial E_1}{\partial t} - i\omega E_1 - i\omega\alpha g_1\right)e^{i\psi_1} + \text{к. с.}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\kappa}{\omega}\left(\frac{\partial E_2}{\partial t} - 2i\omega E_2 - 2i\omega\alpha g_2\right)e^{2i\psi_1} + \text{к. с.}\right] + \frac{\kappa}{\omega}\alpha\frac{\partial f_2}{\partial t} + \cdots$$

Складывая эти выражения и учитывая, что $\kappa/\omega = 1/v$, получим

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial E_1}{\partial z} + \frac{1}{v}\frac{\partial E_1}{\partial t} - i\alpha\kappa g_1\right)e^{i\psi_1} + \text{к. с.}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial E_2}{\partial z} + \frac{1}{v}\frac{\partial E_2}{\partial t} - 2i\alpha\kappa g_2\right)e^{2i\psi_1} + \text{к. с.}\right] +$$

$$+ \alpha\left(\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{1}{v}\frac{\partial f_2}{\partial t}\right) + \cdots = 0. \tag{45.12}$$

Вычислим далее производные:

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[\frac{\kappa}{\omega}\left(i\kappa E_1 + i\alpha\kappa g_1 + \frac{\partial E_1}{\partial z}\right)e^{i\psi_1} + \text{к. с.}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\kappa}{\omega}\left(\frac{\partial E_2}{\partial z} + 2i\kappa E_2 + 2i\alpha\kappa g_2\right)e^{2i\psi_1} + \text{к. с.}\right] + \alpha\frac{\kappa}{\omega}\frac{\partial f_2}{\partial z} + \cdots,$$

$$\mu_0\frac{\partial D_x}{\partial t} = \frac{1}{2c^2}\left[\varepsilon\left(\frac{\partial E_1}{\partial t} - i\omega E_1 - \frac{i\omega\alpha}{\varepsilon}E_2 E_1^*\right)e^{i\psi_1} + \text{к. с.} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon\left(\frac{\partial E_2}{\partial t} - 2i\omega E_2 - \frac{i\omega\alpha}{\varepsilon}E_1^2\right)e^{2i\psi_1} + \text{к. с.}\right] + \alpha\frac{\hat{\varepsilon}}{c^2}\frac{\partial f_1}{\partial t} -$$

$$- \frac{i\alpha\omega}{2c^2}[(2E_2^2 e^{4i\psi_1} + \text{к. с.}) + (3E_1 E_2 e^{3i\psi_1} + \text{к. с.})] + \cdots$$

Здесь при вычислении производной нелинейной части индукции $\frac{\partial D_x^{(2)}}{\partial t}$ дифференцируем только экспоненты, поскольку медленно меняющиеся амплитуды в первом приближении по α считаем постоянными.

Складывая полученные уравнения и учитывая, что $\kappa^2/\omega^2 = \varepsilon/c^2$, получаем второе уравнение:

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} + \mu_0\frac{\partial D_x}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\kappa}{\omega}\left[\left(\frac{\partial E_1}{\partial z} + \frac{1}{v}\frac{\partial E_1}{\partial t} + i\alpha\kappa g_1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{i\kappa\alpha}{\varepsilon}E_2 E_1^*\right)e^{i\psi_1} + \text{к. с.} + \left(\frac{\partial E_2}{\partial z} + \frac{1}{v}\frac{\partial E_2}{\partial t} + 2i\alpha\kappa g_2 -\right.\right.$$

$$-\frac{i\kappa\alpha}{\varepsilon}E_1^2\Big)e^{2i\Psi_1}+\text{к. с.}\Big]+\alpha\left\{\frac{\kappa}{\omega}\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}+\frac{\hat{\varepsilon}}{v\varepsilon}\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\kappa^2}{2\varepsilon\omega}\left[(2iE_2^2e^{4i\Psi_1}+\text{к. с.})+(3iE_1E_2e^{3i\Psi_1}+\text{к. с.})\right]\right\}=0. \quad (45.13)$$

Для того чтобы равенство (45.12) было справедливым, необходимо приравнять коэффициенты при одинаковых фазах нулю:

$$\frac{\partial E_1}{\partial z}+\frac{1}{v}\frac{\partial E_1}{\partial t}-i\alpha\kappa g_1=0, \quad (45.14)$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial z}+\frac{1}{v}\frac{\partial E_2}{\partial t}-2i\alpha\kappa g_2=0, \quad (45.15)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z}+\frac{1}{v}\frac{\partial f_2}{\partial t}=0. \quad (45.16)$$

Аналогично поступаем с равенством (45.13) и получаем

$$\frac{\partial E_1}{\partial z}+\frac{1}{v}\frac{\partial E_1}{\partial t}-\frac{i\kappa\alpha}{\varepsilon}E_2E_1^*+i\kappa\alpha g_1=0, \quad (45.17)$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial z}+\frac{1}{v}\frac{\partial E_2}{\partial t}-\frac{i\kappa\alpha}{\varepsilon}E_1^2+2i\kappa\alpha g_2=0. \quad (45.18)$$

Тогда из (45.13) следует также равенство

$$\frac{\partial f_2}{\partial z}+\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon v}\frac{\partial f_1}{\partial t}=-\frac{\kappa}{2\varepsilon}\left[(2iE_2^2e^{4i\Psi_1}+\text{к. с.})+(3iE_1E_2e^{3i\Psi_1}+\text{к. с.})\right], \quad (45.19)$$

где $\hat{\varepsilon}$ определено в § 37.

Сравнивая (45.14) с (45.17), (45.15) с (45.18), находим

$$g_1=\frac{E_2E_1^*}{2\varepsilon},\quad g_2=\frac{E_1^2}{4\varepsilon}.$$

Таким образом, уравнения для медленно меняющихся амплитуд в первом приближении по α имеют вид

$$\frac{\partial E_1}{\partial z}+\frac{1}{v}\frac{\partial E_1}{\partial t}=i\frac{\alpha\omega}{2c\sqrt{\varepsilon}}E_2E_1^*, \quad (45.20)$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial z}+\frac{1}{v}\frac{\partial E_2}{\partial t}=i\frac{\alpha\omega}{2c\sqrt{\varepsilon}}E_1^2. \quad (45.21)$$

Уравнения для комплексно сопряженных величин получаются из этих уравнений путем операции комплексного сопряжения.

Как видим, для нахождения уравнений первого порядка по α явный вид функций g_i и f_i не понадобился. Однако для вычисления следующих приближений, а также для оценки применимости данного метода знание этих функций необходимо.

Будем искать стационарные решения уравнений (45.20), (45.21), и поэтому положим в них производные по времени равными нулю.

Тогда, вводя $\eta=\frac{\alpha\omega}{2c\sqrt{\varepsilon}}$, получим

$$\frac{dE_1}{dz}=i\eta E_2E_1^*,\quad \frac{dE_1^*}{dz}=-i\eta E_2^*E_1, \quad (45.22)$$

$$\frac{dE_2}{dz}=i\eta E_1^2,\quad \frac{dE_2^*}{dz}=-i\eta E_1^{*2}. \quad (45.23)$$

Умножим первое уравнение (45.22) на E_1^*, а второе — на E_1 и сложим их. В результате получим

$$\frac{d}{dz}|E_1|^2=i\eta(E_2E_1^{*2}-E_2^*E_1^2).$$

Аналогично поступая с уравнением (45.23), придем к равенству

$$\frac{d|E_2|^2}{dz}=i\eta(E_1^2E_2^*-E_2E_1^{*2}).$$

Сложив полученные равенства, найдем первый интеграл системы уравнений (45.22), (45.23) $|E_1|^2+|E_2|^2=P=\text{const}$. Он выражает собой сохранение суммарного потока энергии обеих волн. Постоянная P определяется граничными условиями при $z=0$. Например, если на кристалл падает волна с частотой ω и амплитудой E_0, то величина $P=|E_0|^2$ будет пропорциональна интенсивности падающей на нелинейный кристалл волны.

С целью упрощения записи уравнения перейдем к вещественным величинам, положив

$$E_1=P^{1/2}\rho_1e^{i\varphi_1},\quad E_2=P^{1/2}\rho_2e^{i\varphi_1}.$$

Тогда первый интеграл уравнений (45.22), (45.23) примет вид

$$\rho_1^2+\rho_2^2=1,$$

а сами уравнения запишутся следующими образом:

$$\frac{d\rho_1}{d\xi}+i\rho_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}=i\rho_1\rho_2e^{i(\varphi_2-2\varphi_1)},$$

$$\frac{d\rho_2}{d\xi}+i\rho_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi}=i\rho_1^2e^{-i(\varphi_2-2\varphi_1)};$$

здесь $\xi=z\eta\sqrt{P}$ — безразмерная переменная.

Отделяя мнимую и вещественную части, получаем

$$\frac{d\rho_1}{d\xi}=-\rho_1\rho_2\sin\Theta,\quad \frac{d\rho_2}{d\xi}=\rho_1^2\sin\Theta,$$

$$\frac{d\theta}{d\xi}=\left(-2\rho_2+\frac{\rho_1^2}{\rho_2}\right)\cos\Theta, \quad (45.24)$$

где $\Theta=\varphi_2-2\varphi_1$. Если умножить первое из уравнений (45.24) на $2\rho_1\rho_2\cos\Theta$, второе — на $\rho_1^2\cos\Theta$, а третье — на $(-\rho_1^2\rho_2\sin\Theta)$ и сложить полученные выражения, то можно убедиться, что их сумма равна

нулю, т. е.

$$2\rho_1\rho_2\cos\Theta\frac{d\rho_1}{d\xi}+\rho_1^2\cos\Theta\frac{d\rho_2}{d\xi}-\rho_1^2\rho_2\sin\Theta\frac{d\Theta}{d\xi}=\frac{d}{d\xi}(\rho_1^2\rho_2\cos\Theta)=$$

$$=2\rho_1\rho_2\cos\Theta(-\rho_1\rho_2\sin\Theta)+$$

$$+\rho_1^2\cos\Theta(\rho_1^2\sin\Theta)-\rho_1^2\rho_2\sin\Theta\left(-2\rho_2+\frac{\rho_1^2}{\rho_2}\right)\cos\Theta=0.$$

Таким образом, уравнения (45.24) имеют еще один первый интеграл

$$\rho_2\rho_1^2\cos\Theta=\text{const}=\delta,$$

причем из условий $\rho_1^2+\rho_2^2=1$; $|\cos\Theta|\leqslant 1$ следует, что постоянная $\delta<2/3\sqrt{3}$.

Используя эти интегралы, получаем

$$\frac{d\rho_2}{d\xi}=(1-\rho_2^2)\sqrt{1-\frac{\delta^2}{\rho_2^2(1-\rho_2^2)^2}}.$$

Введя новую функцию $\rho_2^2=u$, запишем это уравнение как

$$\frac{du}{d\xi}=2\left|u(1-u)^2-\delta^2\right|^{1/2}. \qquad (45.25)$$

Кубическое уравнение $u(1-u)^2-\delta^2=0$ при $\delta^2\leqslant 4/27$ имеет три вещественных положительных корня, из которых два меньше единицы. Обозначим их u_1 и u_2, считая $u_1<u_2$. Отсюда следует, что $u_1<u<u_2$, так как вне этого интервала полином $u(1-u)^2-\delta^2$ принимает отрицательные значения, что недопустимо. Запишем $u(1-u)^2-\delta^2=(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)$. Тогда из уравнения (45.25) получаем

$$\xi-\xi_0=\frac{1}{2}\int_{u_1}^{u}\frac{du}{\sqrt{(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)}}. \qquad (45.26)$$

Здесь постоянная интегрирования ξ_0 соответствует тому значению координаты $z=\xi_0/(\eta P^{1/2})$, при котором u принимает значение u_1. Формула (45.26) дает решения поставленной задачи, но неудобна тем, что в ней выражено ξ через u. Обратная зависимость $u(\xi)$ имеет вид эллиптического синуса [12, § 24]:

$$u=u_1+(u_2-u_1)\,\mathrm{sn}^2\beta(\xi-\xi_0),$$

где $\beta=2\sqrt{u_3-u_1}$, а модуль эллиптической функции $k^2=(u_2-u_1)/(u_3-u_1)$.

Рассмотрим теперь частный случай, когда на нелинейный кристалл падает только волна на основной частоте ω; тогда $\rho_1(0)=1$, $\rho_2(0)=0$ и из интеграла $\rho_1^2\rho_2\cos\Theta=\delta$ следует, что $\delta=0$. В этом случае уравнение (45.25) приобретает вид

$$\frac{du}{d\xi}=2(1-u)\sqrt{u},\ \text{или}\ \frac{d\rho_2}{d\xi}=(1-\rho_2^2).$$

Интегрируя, находим

$$\rho_2=\mathrm{th}(\xi-\xi_0),\ \rho_1=\sqrt{1-\rho_2^2}=\mathrm{cth}(\xi-\xi_0).$$

Так как при $\xi=0$ $\rho_2=0$, $\rho_1=1$, то необходимо положить $\xi_0=0$, и тогда окончательно имеем

$$\rho_2=\mathrm{th}\,\xi,\ \rho_1=\mathrm{cth}\,\xi.$$

Отсюда следует, что при $\xi\to\infty$ $\rho_2\to 1$, $\rho_1\to 0$. Другими словами, в нелинейном кристалле происходит усиление волны на удвоенной частоте за счет основной волны и при достаточно большой длине кристалла падающая волна полностью преобразуется во вторую гармонику.

Следует отметить, что последнее утверждение справедливо, если коэффициент поглощения $\varkappa$ электромагнитной волны меньше, чем величина $\eta\sqrt{P}$, которая имеет размерность обратной длины $\varkappa\ll\eta\sqrt{P}$. В противном случае в уравнениях (45.19) и (45.20) следует учитывать поглощение электромагнитных волн как на основной, так и на удвоенной гармонике.

Для получения критерия справедливости, использованного при выводе уравнений (45.20), (45.21) приближения, найдем функции f_1 и f_2, удовлетворяющие уравнениям (45.16) и (45.19). Согласно общей теории дифференциальных уравнений, решение будем искать в виде

$$f_1=Ae^{3i\Psi_1}+Be^{4i\Psi_1}+\text{к. с.},$$
$$f_2=Ce^{3i\Psi_1}+De^{4i\Psi_1}+\text{к. с.} \qquad (45.27)$$

Подставив (45.27) в (45.16), найдем $C=A$, $D=B$, т. е. $f_1=f_2$. Подставляя затем (45.27) в (45.19) и учитывая, что $\hat{\varepsilon}e^{-i\omega t}=\varepsilon(\omega)e^{-i\omega t}$ (см. § 37), получаем

$$A=\frac{1}{\varepsilon(\omega)-\varepsilon(3\omega)}E_1E_2,\ B=\frac{1}{2(\varepsilon(\omega)-\varepsilon(4\omega))}E_1^2. \qquad (45.28)$$

Из (45.10) следует, что ряд по α хорошо сходится, если $|E|\gg\alpha|f|$. Используя формулы (45.17) и (45.18), получаем критерий применимости используемого приближения

$$\frac{\alpha E}{\Delta\varepsilon}\ll 1, \qquad (45.29)$$

где $\Delta\varepsilon=\varepsilon(\omega)-\varepsilon(3\omega)$. Запишем критерий (45.29) через интенсивность. Так как, согласно (13.8), $I\sim\varepsilon_0cE^2$, то критерий (45.29) можно записать так:

$$I\ll\frac{\Delta\varepsilon^2\varepsilon_0c}{\alpha^2}. \qquad (45.30)$$

Для кристалла КДР $\Delta\varepsilon=5\cdot10^{-2}$, $\alpha=3{,}6\cdot10^{-13}$ м/В, поэтому критерий (45.30) выполняется при $I\ll10^{15}$ Вт/см^2.

Глава 7

КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

§ 46. Квазистационарное приближение для магнитного поля. Скин-эффект

Для решения многих задач электродинамики часто применяют приближенный метод, который называется *квазистационарным приближением*. Сущность его заключается в следующем. Рассмотрим уравнение Максвелла (32.4) в среде с хорошей проводимостью, когда можно пренебречь током смещения по сравнению с током проводимости

$$|\vec{j}| \gg \left|\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right|. \qquad (46.1)$$

Так как $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$, то для монохроматической волны это неравенство можно записать в виде

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} \equiv \frac{1}{\tau_м} \gg \omega, \qquad (46.2)$$

где $\tau_м$ — максвелловское время релаксации.

Следовательно, для полей, достаточно медленно изменяющихся со временем, в уравнении (32.4) можно пренебречь током смещения $\partial\vec{D}/\partial t$, и поэтому

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0. \qquad (46.3)$$

Эти уравнения имеют такой же вид, как и в магнитостатике (8.9), поэтому данное приближение называется квазистационарным.

Решение системы уравнений (46.3) имеет вид (4.10)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV', \quad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} \qquad (46.4)$$

с той разницей, что ток, а следовательно, и магнитное поле теперь зависят от времени. Если сравнить формулу (46.4) с формулой (11.5), то станет очевидным, что квазистационарное приближение заключается в пренебрежении запаздыванием. Действительно, формулу (46.4) можно получить из (11.5) путем замены в подынтегральном выражении аргумента $t - R/v$ на t. Рассмотрим, при каком условии это можно сделать. Разложим в ряд выражение для плотности тока

$$\vec{j}\left(\vec{r}, t - \frac{R}{c}\right) \approx \vec{j}(\vec{r}, t) - \frac{\partial\vec{j}}{\partial t}\frac{R}{c} + \cdots$$

Пусть $|\vec{j}| \gg \left|\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}\right|\frac{R}{c}$. Для монохроматических волн это условие можно записать так: $|\vec{j}| \gg |\vec{j}|\frac{\omega R}{c}$. Другими словами, должно быть

$$\frac{\omega R}{c} \ll 1. \qquad (46.5)$$

Следовательно, квазистационарное приближение является достаточно хорошим для нахождения электромагнитного поля в ближней зоне. Как следует из (46.5), чем меньше частота, тем большую область пространства занимает ближняя зона. В дальней зоне квазистационарное приближение дает неверный результат и поэтому с его помощью нельзя вычислять энергию излучения. Фактически условие (46.5) означает пренебрежение потерями на излучение. Но, как мы видели на примере электрического дипольного излучения (§ 15), эти потери, согласно формуле (15.9), при низких частотах действительно малы.

Если изменение поля настолько медленно, что выполняется условие (46.2), то можно считать, что в любой момент в объеме проводника $\rho = 0$ (см. формулу (31.5)), и поэтому вектор $\vec{E}$ удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \qquad (46.6)$$

Таким образом, в квазистационарном приближении в проводниках достаточно учитывать только вихревую часть электрического поля.

Уравнения (46.3) и (46.6) необходимо решать совместно, так как в случае проводников плотность тока, входящая в уравнение (46.3), связана с напряженностью электрического поля соотношением $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, и поэтому первое уравнение (46.3) можно записать в виде

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\sigma\vec{E}.$$

Учитывая, что $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, и используя уравнение (46.6), получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{B} = \vec{\nabla}\operatorname{div}\vec{B} - \Delta\vec{B} = \mu_0\sigma\operatorname{rot}\vec{E} = -\mu_0\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.$$

Следовательно, уравнение для магнитного поля в квазистационарном приближении для хорошо проводящей среды имеет вид

$$\frac{1}{\mu_0\sigma}\Delta\vec{B} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad (46.7)$$

причем $\operatorname{div}\vec{B} = 0$. Решив это уравнение, можно затем с помощью соотношений

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec{B}, \quad \vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} = \frac{1}{\mu_0\sigma}\operatorname{rot}\vec{B}$$

найти плотность тока и напряженность электрического поля.

В качестве примера применения квазистационарного приближения рассмотрим задачу о проникновении переменного магнитного поля низкой частоты в проводник (*скин-эффект*). Пусть проводник с плоской поверхностью, которую мы выберем за плоскость xy, помещен в магнитное поле, изменяющееся по закону $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}$. Очевидно по такому же закону будут изменяться ток и электрическое поле. Если считать, что проводник занимает полупространство $z > 0$,

то магнитное поле будет зависеть только от координаты z. Поэтому решение уравнения (46.7) в области $z > 0$ будем искать в виде $\vec{B}(z, t) = \vec{B}(z)\, e^{-i\omega t}$.

Согласно (46.7), имеем

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} = -i\mu_0\sigma\omega\vec{B}, \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \tag{46.8}$$

Отсюда следует, что $B_z = 0$, поэтому магнитное поле должно быть параллельным плоскости xy. Решение уравнения (46.8) ищем в виде $\vec{B}(z) = \vec{B}_0 e^{kz}$. Подставляя последнее выражение в (46.8), находим $k^2 = -i\mu_0\sigma\omega$, откуда $k = \pm(1-i)\sqrt{\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}}$. Так как при $z \to \infty$ $\vec{B} \to 0$, то необходимо в выражении для k выбрать знак «—». Таким образом, решение имеет вид

$$\vec{B}(z, t) = \vec{B}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)},$$

где

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}} = c\sqrt{\frac{2\tau_м}{\omega}} \tag{46.9}$$

— величина, характеризующая глубину проникновения магнитного поля в проводник (глубина скин-слоя); $\tau_м = \varepsilon_0/\sigma$ — максвелловское время релаксации.

Плотность тока находим из условия

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec{B} = \sqrt{\frac{\sigma\omega}{\mu_0}}\,[\vec{B}_0, \vec{e}_3]\, e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-i\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right)},$$

(где $\vec{e}_3$ — орт оси z), а напряженность электрического поля — из закона Ома:

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} = \sqrt{\frac{\omega}{\mu_0\sigma}}\,[\vec{B}_0, \vec{e}_3]\, e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-i\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

В последних двух формулах учтено, что $1 - i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$.

Чтобы оценить глубину проникновения электромагнитного поля в проводник, рассмотрим конкретный пример. При комнатной температуре для меди $\sigma = 10^7$ Ом$^{-1}$ · м$^{-1}$. Для частоты $\omega = 2 \cdot 10^3$ с$^{-1}$ по формуле (46.9) следует

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}} \approx 0{,}5 \text{ см}.$$

Очевидно, что электромагнитное поле и ток сосредоточены главным образом в приповерхностном слое толщиной примерно 5 мм.

Таким образом, в проводнике, помещенном во внешнее переменное магнитное поле, возникает индуцированное им переменное электрическое поле, которое, в свою очередь, вызывает появление токов (*токи Фуко*). Эти токи создают свое собственное магнитное поле и таким образом экранируют внешнее магнитное поле, не давая ему проникать на всю глубину проводника (скин-эффект).

Сравнивая амплитуды электрического и магнитного полей в металле, находим $E_0 = (B_0/c)\sqrt{\omega\tau_м}$. Для плоской монохроматической волны в вакууме $E_0 = B_0/\varepsilon$, в металле $E_0 \ll B_0/\varepsilon$, так как по условию квазистационарного приближения $\omega\tau_м \ll 1$. Следовательно, магнитная компонента электромагнитной волны лучше проникает в металл, чем электрическая.

Критерий применимости квазистационарного приближения (46.6) в данном случае можно записать в виде

$$\frac{\omega\delta}{c} \sim \sqrt{\frac{\omega}{c^2\mu_0\sigma}} \sim \sqrt{\frac{\omega\varepsilon_0}{\sigma}} \ll 1,$$

что согласуется с условием (46.2).

Так как квазистационарное приближение заключается в пренебрежении запаздыванием, то это эквивалентно пренебрежению в волновом уравнении

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j} \tag{46.10}$$

производной по времени. При этом оно приобретает вид

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}.$$

Для случая проводников такое пренебрежение правомерно, так как при выполнении условия (46.1) выполняется также и условие

$$\frac{1}{c^2}\left|\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}\right| \ll \mu_0|\vec{j}|.$$

Другая возможность применения квазистационарного приближения заключается в возможности удовлетворить неравенству

$$|\Delta\vec{A}| \gg \frac{1}{c^2}\left|\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}\right|.$$

Для плоских монохроматических волн $|\Delta\vec{A}| \sim k^2|\vec{A}|$, $\frac{1}{c^2}\left|\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}\right| \sim \frac{\omega^2}{c^2}$, и этот критерий приобретает вид

$$k^2 \gg \frac{\omega^2}{c^2}, \tag{46.11}$$

что эквивалентно условию $v = \frac{\omega}{k} \ll c$. Другими словами, фазовая скорость магнитостатических волн должна быть меньше скорости света.

Квазистационарное приближение для магнитного поля в проводниках и магнетиках применимо и к электрическому полю в диэлектриках. Существуют два источника электрического поля: электрические заряды (ρ) и переменное магнитное поле $\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$ (см. § 6). В некоторых

случаях можно пренебречь той частью электрического поля, которая обусловлена переменным во времени магнитным полем, и положить

$$\operatorname{rot} \vec{E} \approx 0.$$

Тогда электрическое поле будет удовлетворять системе уравнений

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \tag{46.12}$$

которая совпадает с уравнениями электростатики (32.14). Решение имеет вид

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi.$$

Таким образом, и в этом случае пренебрегаем запаздыванием, а следовательно, и потерями на излучение. Очевидно, что это приближение можно применять для вычисления электрического поля в диэлектриках, частоты которых удовлетворяют условию (46.5). Критерий применимости системы уравнений (46.12) для вычисления электромагнитного поля, как это следует из формулы (11.12), можно записать в виде

$$|\Delta\varphi| \gg \frac{\omega^2}{c^2} |\varphi|.$$

Для плоских волн $\Delta\varphi \sim \kappa^2\varphi$, где κ — волновой вектор, и поэтому предыдущее неравенство можно записать как

$$\kappa^2 \gg \frac{\omega^2}{c^2}$$

или через фазовую скорость

$$v_\Phi = \frac{\omega}{\kappa} \ll c. \tag{46.13}$$

Другими словами, как и в предыдущем случае, фазовая скорость электростатических волн должна быть гораздо меньше скорости света.

Таким образом, если фазовая скорость волнового процесса в некоторой среде меньше скорости света *(замедленные волны)*, то можно применять квазистатическое приближение.

Критерий квазистационарного приближения (46.13) можно записать и по-другому, если учесть, что для ограниченных тел минимальные значения волнового вектора κ по порядку величины равны $1/L$, где L — линейные размеры диэлектрика. Тогда критерий квазистационарности (46.13) можно записать в виде

$$\frac{1}{L} \gg \frac{\omega}{c}.$$

Это означает, что период изменения электрического поля $T = 2\pi/\omega$ должен быть гораздо больше, чем время распространения электромагнитной волны L/c в пределах диэлектрика, и поэтому запаздыванием можно пренебречь.

Для нахождения магнитного поля можно воспользоваться оставшимися уравнениями

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0,$$

при этом $\vec{E}$ определяется из уравнений (46.12). С помощью уравнений

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

можно найти поправку к электрическому полю, обусловленную переменным магнитным полем. Если критерий применимости квазистационарного приближения выполняется, то эта поправка будет мала.

В качестве примера применения квазистационарного приближения рассмотрим распространение звука в пьезоэлектрике. Будем считать, что продольная звуковая волна распространяется в направлении оси z. Уравнение движения абсолютно упругой среды имеет вид [12, § 50]

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial p}{\partial z}, \tag{46.14}$$

где

$$p \equiv p_{zz} = c \frac{\partial u}{\partial z} + d \cdot E. \tag{46.15}$$

Здесь $p = p_{zz}$ — компонента тензора напряжения; c — упругая постоянная; $d = d_{z,zz}$ — компонента пьезомодуля; ρ — массовая плотность.

Для нахождения электрического поля воспользуемся уравнениями квазистационарного приближения

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \tag{46.16}$$

причем для пьезодиэлектрика

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon E - d \frac{du}{dz}. \tag{46.17}$$

Уравнения (46.14) и (46.16) представляют собой систему связанных уравнений теории упругости и электростатики. Их решения будем искать в виде плоских монохроматических волн

$$u = u_0 e^{-i(\omega t - \kappa z)}, \quad E = E_0 e^{-i(\omega t - \kappa z)}. \tag{46.18}$$

Подставляя выражение (46.18) в (46.14) и (46.16), с учетом (46.15) и (46.17) получаем

$$\begin{gathered} (\rho\omega^2 - c\kappa^2) u_0 + i\kappa d \cdot E_0 = 0, \\ \varepsilon_0 \varepsilon E_0 - i\kappa d \cdot u_0 = 0. \end{gathered} \tag{46.19}$$

Эта однородная система алгебраических уравнений имеет отличное от нуля решение, если

$$\begin{vmatrix} \rho\omega^2 - c\kappa^2 & i\kappa d \\ -i\kappa d & \varepsilon_0 \varepsilon \end{vmatrix} = \varepsilon_0 \varepsilon \rho \left[\left(\omega^2 - \frac{c}{\rho} \kappa^2 \right) - \frac{d^2}{\varepsilon_0 \varepsilon c} \frac{c}{\rho} \kappa^2 \right] = 0.$$

Таким образом, дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega^2 = s^2 (1 + K^2) \kappa^2,$$

где $s = \sqrt{c/\rho}$ — скорость звука без учета пьезоэффекта; $K^2 = d^2/(\varepsilon_0 \varepsilon c)$ — безразмерный *коэффициент электромеханической связи*, значение которого характеризует связь звуковых и электростатических волн. Для большинства материалов $K^2 \ll 1$.

Таким образом, в пьезоэлектрике распространение звуковой волны сопровождается электростатической волной, амплитуда которой, как следует из (46.19), связана с амплитудой смещения формулой

$$E_0 = \frac{d}{\varepsilon_0 \varepsilon} i\kappa u_0 = \frac{d}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{i\omega}{s(1 + K^2)^{1/2}} u_0.$$

Скорость этой волны $v = \omega/\kappa = s(1 + K^2)^{1/2}$ и удовлетворяет условию применимости квазистационарного приближения: $v/c \approx 10^{-5}$, так как скорость звука в подавляющем большинстве материалов порядка 10^5 см/с.

§ 47. Электродвижущая сила индукции в случае линейных проводников и квазистационарных полей

Согласно формуле $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$, э. д. с. электромагнитной индукции в замкнутом контуре может быть вычислена, если известен поток вектора магнитной индукции через данный контур. Покажем, что для квазистационарных токов и линейных проводников зависимость потока магнитной индукции через некоторый контур от тока в нем может быть записана в общем виде.

Пусть имеем n замкнутых контуров с токами I_k ($k = 1, 2, \ldots, n$). Магнитный поток Φ_i через i-й контур создается как током, проходящим в данном контуре, так и токами, проходящими в остальных контурах:

$$\Phi_i = \int \vec{B} \cdot \vec{n} dS_i = \int \vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} dS_i = \oint_{L_i} \vec{A}(\vec{r}_i, t) \cdot d\vec{l}_i, \qquad (47.1)$$

где $\vec{A}(\vec{r}, t)$ — векторный потенциал магнитного поля, создаваемого токами всех контуров. Для линейных токов в квазистационарном приближении, согласно формуле (4.5),

$$\vec{A}(\vec{r}_i, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=1}^{n} I_k \oint \frac{d\vec{l}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}.$$

Подставляя это выражение в формулу (47.1), получаем

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_0}{4\pi} I_k \int_{L_i} \int_{L_k} \frac{d\vec{l}_i \cdot d\vec{l}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}. \qquad (47.2)$$

Обозначим

$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_i} \int_{L_k} \frac{d\vec{l}_i \cdot d\vec{l}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}. \qquad (47.3)$$

Формула (42.2) тогда приобретает вид

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^{n} L_{ik} I_k. \qquad (47.4)$$

Хотя эта формула получена для стационарных токов, приближенно она справедлива и для медленно изменяющихся токов, когда выполняется критерий квазистационарного приближения.

Как видно из определения (47.3), величины L_{ik} зависят от формы и взаимного расположения проводников, но не зависят от токов. При этом L_{12} зависит только от формы и взаимного расположения контуров L_1 и L_2 и не зависит от наличия других контуров. При $i \neq k$ величины L_{ik} называются *коэффициентами взаимной индукции*, а L_{ii} — *коэффициентами самоиндукции*. Согласно определению (47.3), $L_{ik} = L_{ki}$.

Формула (47.3) достаточно точна для вычисления коэффициентов взаимной индукции L_{ik}, если длины проводников и расстояния между ними гораздо больше их толщин. Для вычисления коэффициентов самоиндукции L_{ii} формула (47.3), вообще говоря, непригодна, так как в этом случае точки $\vec{r}_i$ и $\vec{r}_k$ могут совпадать и выражения для L_{ii} обращаются в бесконечность, т. е. не имеют смысла. В этом случае необходимо учитывать конечную толщину проводника, а для этого в формуле (47.3) необходимо перейти от линейных токов к объемным, как это было сделано в § 4, путем замены $Id\vec{l} \leftrightarrows \vec{j}dV$, которая предполагает переход от интегрирования по контуру к интегрированию по объему. Коэффициенты самоиндукции при этом будут иметь вид

$$L_{ii} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{I_i^2} \int \frac{\vec{j}_i(\vec{r}) \cdot \vec{j}_i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV'; \qquad (47.5)$$

здесь $I = \int j_n dS$ — полный ток через поперечное сечение проводника.

Аналогично необходимо обобщить и формулы для коэффициентов взаимной индукции, если проводники нельзя считать линейными, например в тех случаях, когда благодаря скин-эффекту ток неравномерно распределен по сечению проводника. В этом случае коэффициенты

$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{I_i I_k} \int \frac{\vec{j}_i(\vec{r}) \cdot \vec{j}_i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV' \qquad (47.6)$$

не зависят от полного тока I, но зависят от его распределения по сечению.

В случае переменного тока его распределение по сечению проводника вследствие скин-эффекта зависит от частоты (см. § 46). Поэтому если толщина скин-слоя сравнима с толщиной проводника или меньше ее, то коэффициенты L_{ik} также зависят от частоты.

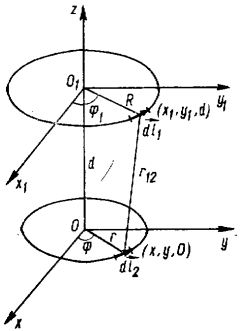


Рис. 29

Воспользуемся формулой (9.8) и найдем полную энергию магнитного поля системы линейных проводников с током. Так как $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$, $\vec{E} = 0$, $\varepsilon_0 c^2 = 1/\mu_0$, то

$$W_{\text{магн}} = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2 dV = \frac{1}{2\mu_0}\int \vec{B}\cdot\operatorname{rot}\vec{A}dV =$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\int \operatorname{div}[\vec{A}, \vec{B}]dV + \frac{1}{2\mu_0}\int \vec{A}\cdot\operatorname{rot}\vec{B}dV.$$

Первый интеграл можно преобразовать в интеграл по поверхности, проходящей достаточно далеко от рассматриваемой системы проводников, и поэтому этот интеграл равен нулю. Во втором интеграле заменим $\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ и для линейных проводников получим

$$W_{\text{магн}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int \vec{j}_i\cdot\vec{A}_i dV = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i \oint_{L_i}\vec{A}(\vec{r}_i)\cdot d\vec{l}_i,$$

где I_i — ток в i-м проводнике. Пользуясь формулами (47.1) и (47.4), находим

$$W_{\text{магн}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i\Phi_i = \frac{1}{2}\sum_{i,k} L_{ik}I_iI_k. \qquad (47.7)$$

Следовательно, энергия системы линейных проводников с током есть квадратичная функция этих токов.

В качестве примера вычислим коэффициент взаимной индукции двух концентрических кольцевых проводников с радиусами r и R, лежащих в параллельных плоскостях и находящихся на расстоянии d друг от друга (рис. 29). Согласно определению (47.3),

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_r\int_R \frac{d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2}{r_{12}}.$$

В рассматриваемом случае

$$d\vec{l}_1 = R\vec{e}_\varphi d\varphi_1 = R(-\vec{i}\sin\varphi_1 + \vec{j}\cos\varphi_1)\,d\varphi_1,\quad d\vec{l}_2 = r(-\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi)\,d\varphi,$$

$$r_{12} = \sqrt{R^2 + r^2 + d^2 - 2rR\cos(\varphi - \varphi_1)}.$$

Таким образом,

$$L_{12} = \frac{\mu_0 rR}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi_1\int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{\cos(\varphi - \varphi_1)}{[a^2 - 2rR\cos(\varphi - \varphi_1)]^{1/2}},$$

где $a^2 = R^2 + r^2 + d^2$.

Вычислим производную по φ_1 от внутреннего интеграла

$$\frac{d}{d\varphi_1}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\varphi - \varphi_1)}{[a^2 - 2rR\cos(\varphi - \varphi_1)]^{1/2}}d\varphi = -\int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{d}{d\varphi}\,\frac{\cos(\varphi - \varphi_1)}{[a^2 - 2rR\cos(\varphi - \varphi_1)]^{1/2}} =$$

$$= \frac{\cos(\varphi - \varphi_1)}{[a^2 - 2rR\cos(\varphi - \varphi_1)]^{1/2}}\Bigg|_{2\pi}^{0} = 0.$$

Внутренний интеграл не зависит от φ_1, и поэтому в нем можно положить $\varphi_1 = 0$. Тогда интеграл по φ_1 даст множитель 2π и, следовательно,

$$L_{12} = \frac{\mu_0 rR}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{\cos\varphi}{(a^2 - 2rR\cos\varphi)^{1/2}}.$$

Выполним в этом интеграле замену переменных $\varphi = \pi + 2\Theta$, после чего получим

$$L_{12} = \mu_0 rR\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{(2\sin^2\Theta - 1)\,d\Theta}{(a^2 + 2rR - 4rR\sin^2\Theta)^{1/2}}.$$

Обозначим

$$\frac{4Rr}{a^2 + 2rR} = \frac{4Rr}{(R + r)^2 + d^2} \equiv k^2 \leqslant 1.$$

Тогда

$$L_{12} = \frac{2\mu_0 Rr}{(a^2 + 2rR)^{1/2}}\int_0^{\pi/2}\frac{(2\sin^2\Theta - 1)}{(1 - k^2\sin^2\Theta)^{1/2}}d\Theta =$$

$$= \frac{\mu_0\sqrt{Rr}}{k}\int_0^{\pi/2}\frac{2k^2\sin^2\Theta - k^2 + 2 - 2}{(1 - k^2\sin^2\Theta)^{1/2}}d\Theta =$$

$$= \frac{\mu_0\sqrt{Rr}}{k}\left[-2\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - k^2\sin^2\Theta}\,d\Theta + (2 - k^2)\int_0^{\pi/2}\frac{d\Theta}{(1 - k^2\sin^2\Theta)^{1/2}}\right] =$$

$$= \mu_0\sqrt{Rr}\left[\left(\frac{2}{k} - k\right)K(k) - \frac{2}{k}E(k)\right],$$

где $K(k) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\Theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\Theta}}$, $E(k) = \int_0^{\pi/2} d\Theta\sqrt{1 - k^2\sin^2\Theta}$ — соответственно полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

§ 48. Емкость системы проводников

На практике во многих случаях электрические поля создаются либо заряженными проводниками, либо проводниками, подключенными к источникам напряжения. Очевидно, что заряды и потенциалы проводников не могут быть заданы одновременно произвольным образом. Действительно, электрическое поле $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ в пространстве между проводниками находится из уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \qquad (48.1)$$

при условии, что электрическое поле внутри проводников равно нулю и поэтому внутри каждого проводника потенциал постоянен: $\varphi_j = \text{const}$. Решение уравнения (48.1) должно удовлетворять следующим условиям на границе каждого проводника: $[\vec{n}, \vec{E}] = 0$, $\vec{n}\cdot\vec{D} = \sigma$, в любой точке на поверхности проводников.

Из условия $\varphi(x, y, z) = \text{const}$ на поверхности проводника следует, что $\vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r} = 0$, т. е. $\vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$, и поэтому условие $[\vec{n}, \vec{E}] = 0$ выполняется автоматически. Таким образом, граничными условиями для задач электростатики могут служить значения потенциала каждого проводника.

Из условия $(\vec{n} \cdot \vec{D}) = \sigma$ находим заряд каждого проводника

$$Q_i = \int \sigma dS_i = \int (\vec{D} \cdot \vec{n})\, dS_i = -\varepsilon_0 \varepsilon \int \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS_i. \qquad (48.2)$$

Здесь i — номер проводника, интегрирование производится по его поверхности; $\vec{n}$ — внешняя по отношению к поверхности проводника нормаль.

Решив уравнение (48.1) при заданных граничных условиях, с помощью соотношения (48.2) можно вычислить заряды каждого проводника. Потенциал каждого проводника затем находится из условия $\varphi_i = \varphi(\vec{r}_i, \ldots, Q_i, \ldots)$, где $\vec{r}_i$ — любая точка i-го проводника. Этот потенциал зависит от формы проводников, их взаимного расположения, диэлектрической проницаемости среды, окружающей проводники, а также от зарядов на них:

$$\varphi_i = \varphi_i(\ldots, Q_i, \ldots). \qquad (48.3)$$

Очевидно, для решения задачи электростатики достаточно задавать только заряды на всех проводниках. Тогда из (48.3) можно найти потенциалы каждого проводника.

Следовательно, задачи электростатики можно разделить на два типа: первый тип связан с решением уравнения Лапласа (48.1) при заданных потенциалах проводников; второй — при заданных зарядах на проводниках. Можно задавать и смешанные граничные условия — на части проводников задавать заряды, а на остальных — потенциалы.

Из (48.2) следует, что если на поверхности проводников заданы производные $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, то тем самым будут определены и их заряды Q_i. Поэтому в математической физике обычно рассматривают решения уравнения (48.1) в некоторой области, на границе которой заданы: значения потенциала φ (задача Дирихле, или задача I рода); производные $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ (задача Неймана, или задача II рода); смешанные граничные условия (задача III рода). В большинстве случаев решение этих задач находится с помощью численных методов.

Покажем, что зависимость потенциалов проводников от их зарядов всегда носит линейный характер. Для этого изменим заряд каждого проводника в κ раз, не изменив ни их формы, ни расположения. Тогда новые потенциалы φ_i' должны определяться из соотношения (48.3), но с зарядами, равными κQ_i:

$$\varphi_i' = \varphi_i(\ldots, \kappa Q_i, \ldots).$$

Эти же потенциалы φ_i' можно найти, решая уравнения

$$\Delta\varphi' = 0, \quad \kappa Q_i = Q_i' = \varepsilon_0 \varepsilon \int \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\, dS_i.$$

Введем новую функцию: $\varphi' = \kappa\varphi$, тогда для нее получим

$$\Delta\varphi = 0, \quad Q_i = -\varepsilon_0 \varepsilon \int \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS_i.$$

Решение этого уравнения совпадает с решением уравнения (48.3). Отсюда следует, что, с одной стороны,

$$\varphi_i' = k\varphi_i(\ldots, Q_i, \ldots),$$

а с другой, так как $\varphi_i' = \varphi_i(\ldots, \kappa Q_i, \ldots)$,

$$\varphi_i' = \varphi_i(\ldots, \kappa Q_i, \ldots) = \kappa\varphi_i(\ldots, Q_i, \ldots).$$

Пусть $\kappa = 1 + \gamma$, где γ — малая величина. Разлагая это соотношение в ряд по γ, получаем равенство

$$\varphi_i = \sum_i Q_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial Q_i}, \qquad (48.4)$$

которое справедливо при любых Q_i.

Следовательно, потенциал каждого проводника является однородной функцией первого порядка зарядов на этих проводниках.

Покажем теперь, что производные $\partial\varphi_i/\partial Q_i$ не зависят от зарядов. Для этого изменим один из зарядов на величину δQ_j, оставляя другие заряды неизменными: $\delta Q_i = 0$, если $i \neq j$. Тогда изменение потенциала $\delta\varphi$ во всем пространстве, связанное с изменением заряда δQ_j, в силу линейности уравнений (48.1) будет удовлетворять уравнению $\Delta\delta\varphi = 0$ при условии $\delta\varphi_i = \text{const}$ внутри проводников, и, кроме того,

$$\delta Q_j = -\varepsilon_0 \varepsilon \int \frac{\partial \delta\varphi}{\partial n}\, dS_j, \quad \int \frac{\partial \delta\varphi}{\partial n}\, dS_i = 0, \text{ если } i \neq j.$$

Изменим величину δQ_j в t раз, положив $\delta Q_j' = t\delta Q_j$. Этому изменению заряда соответствует изменение потенциала $\delta\varphi'$ в пространстве между проводниками. Тогда, заменяя в предыдущих соотношениях $\delta\varphi' = t\delta\varphi$, получим

$$\Delta\delta\varphi' = 0, \quad \delta Q_j' = -\varepsilon_0 \varepsilon \int \frac{\partial \delta\varphi'}{\partial n}\, dS_j, \quad \int \frac{\partial \delta\varphi'}{\partial n}\, dS_i = 0 \text{ при } i \neq j. \qquad (48.5)$$

Таким образом, изменение δQ_j в t раз приводит к изменению потенциалов всех проводников $\delta\varphi_i$ также в t раз. Следовательно, $\delta\varphi_i = S_{ij}\delta Q_j$, причем так как заряды не входят ни в уравнение (48.5), ни в граничные условия, то коэффициенты S_{ij} не зависят ни от величины зарядов, ни от распределения их по поверхности проводников, а только от формы и взаимного расположения проводников.

Подставляя значение производных $\frac{\partial \varphi_i}{\partial Q_i} = S_{ii}$ в формулу (48.4), получаем

$$\varphi_i = \sum_i S_{ij} Q_i. \qquad (48.6)$$

Соотношение, обратное (48.6), имеет вид

$$Q_i = \sum_j C_{ij}\varphi_j, \qquad (48.7)$$

где $C_{ij} = S_{ij}^{-1}$ — матрица, обратная матрице S_{ij}, называется *матрицей емкостных коэффициентов*.

Диагональные элементы этой матрицы называются *коэффициентами емкости*, а недиагональные — *коэффициентами электростатической индукции* или *коэффициентами взаимной емкости*. Теоретическое вычисление этих коэффициентов требует решения сложной в математическом отношении задачи электростатики и в аналитическом виде может быть осуществлено только в некоторых простейших случаях. Поэтому обычно их определяют экспериментально или вычисляют с помощью ЭВМ.

Формула (48.7) получена для статического распределения зарядов, но приближенно она справедлива и для медленно меняющихся полей, когда вихревой частью электрического поля можно пренебречь (квазистационарное приближение).

В технике чаще всего в качестве электрической емкости используются конденсаторы, которые представляют собой два проводника с большой поверхностью, причем заряды этих проводников равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. В этом случае вводится понятие *емкости конденсатора*. Эта величина определяется следующим образом:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{Q}{C},$$

где $\varphi_2 - \varphi_1$ — разность потенциалов проводников; Q — заряд; C — емкость конденсатора.

Емкость конденсатора C можно выразить через емкостные коэффициенты C_{ij} следующим образом. Используя (48.7), запишем

$$Q = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2, \quad -Q = C_{12}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2,$$

откуда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{C_{11} + 2C_{12} + C_{22}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} Q = \frac{Q}{C}.$$

Следовательно,

$$C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + 2C_{12} + C_{22}}.$$

Рассмотрим изменение электростатической энергии $W_э = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 dV$ при бесконечно малом изменении потенциалов проводников. При этом изменяется также и электрическое поле, поэтому

$$\delta W_э = \varepsilon_0 \int (\vec{E} \cdot \delta\vec{E})\, dV.$$

Так как $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$, то подынтегральное выражение в этой формуле можно представить как

$$\vec{E} \cdot \delta\vec{E} = -\vec{E} \cdot \vec{\nabla}\delta\varphi = -\operatorname{div}(\varphi\delta\vec{E}) + \varphi\delta \operatorname{div}\vec{E}.$$

Учитывая, что в пространстве между проводниками $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ и применяя теорему Остроградского, получаем

$$\delta W_э = -\varepsilon_0 \int \varphi\,(\delta\vec{E} \cdot \vec{n})\, dS = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \delta Q_i. \qquad (48.8)$$

Здесь учтено, что потенциал каждого из проводников постоянен, кроме того, — $\varepsilon_0 \int (\delta\vec{E} \cdot \vec{n})\, dS_i = \delta Q_i$ ($\vec{n}$ — нормаль, внешняя относительно проводника).

Из формулы (48.8) следует, что

$$\varphi_i = \frac{\partial W_э}{\partial Q_i},$$

а так как

$$\frac{\partial^2 W_э}{\partial Q_j \partial Q_i} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial Q_j} = S_{ji} = \frac{\partial^2 W}{\partial Q_i \partial Q_j} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial Q_i} = S_{ij},$$

то матрица S_{ij} — симметрична, а значит, симметрична и обратная матрица C_{ij}.

В формуле (48.8) за независимые переменные выбраны заряды проводников. Если же представить в интеграле $\delta W_э = \varepsilon_0 \int \vec{E} \cdot \delta\vec{E} dV$ подынтегральное выражение в виде

$$\vec{E} \cdot \delta\vec{E} = -\operatorname{div}(\vec{E}\delta\varphi) + \delta\varphi \operatorname{div}\vec{E}$$

и выполнить аналогичные математические преобразования, то получим

$$\delta W_э = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta\varphi_i, \quad Q_i = \frac{\partial W_э}{\partial \varphi_i}.$$

Здесь за независимые переменные выбраны потенциалы проводников.

Вычислим теперь полную энергию электрического поля системы заряженных проводников. Согласно формуле (9.8),

$$W_э = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 dV.$$

Интегрирование здесь производится по объему, окружающему проводники, так как внутри самих проводников $\vec{E} = 0$. Учитывая, что $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$, эту формулу запишем в следующем виде:

$$W_э = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int \operatorname{div}(\varphi\vec{E})\, dV + \frac{\varepsilon_0}{2}\int \varphi \operatorname{div}\vec{E} dV.$$

Второй интеграл в правой части этого равенства равен нулю, так как $\operatorname{div}\vec{E} = 0$, а первый интеграл с помощью теоремы Остроградского преобразуется в интеграл по поверхности проводников и по бесконечно удаленной поверхности. Интеграл по бесконечно удаленной поверхности равен нулю и остаются только интегралы по поверхности проводников:

$$W_э = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \varphi E_n dS = \frac{\varepsilon_0}{2}\sum_i \varphi_i \int E_n dS_i.$$

Мы изменили знак поверхностного интеграла, так как в теореме Остроградского фигурирует нормаль, внешняя по отношению к объему интегрирования, а здесь $\vec{n}$ — нормаль, внутренняя относительно объема интегрирования, но внешняя относительно поверхности, ограничивающей проводник.

Так как, согласно (48.2), $\varepsilon_0 \int E_n dS_i = Q_i$, то

$$W_э = \frac{1}{2} \sum_j Q_j \varphi_j.$$

Подставляя в эту формулу выражение (48.7), имеем

$$W_э = \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij} \varphi_i \varphi_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} S_{ij} Q_i Q_j. \qquad (48.9)$$

Поскольку, согласно (9.8), $W_э > 0$, то квадратичная форма (48.9) должна быть существенно положительной. В частности, из этого факта следует, что все коэффициенты емкости положительные.

Можно доказать также, что все коэффициенты электростатической индукции C_{ij} $(i \neq j)$ отрицательны. Действительно, пусть все проводники, за исключением одного, заземлены и, следовательно, их потенциалы равны нулю. Тогда, согласно (48.7), заряды на заземленных проводниках будут равны $Q_i = C_{i1}\varphi_1$, $i \neq 1$, а на незаземленном проводнике $Q_1 = C_{11}\varphi_1$. Следовательно,

$$Q_i = \frac{C_{i1}}{C_{11}} Q_1.$$

Так как $C_{11} > 0$, а индуцированные на заземленных проводниках заряды Q_i должны иметь знак, противоположный знаку Q_1, то отсюда заключаем, что все $C_{ij} < 0$ при $i \neq j$.

В качестве примера вычислим коэффициент электростатической индукции для двух проводников с емкостями $C_1 = S_{11}^{-1}$ и $C_2 = S_{22}^{-1}$, расстояние между которыми R больше их размеров. Пусть один из проводников не заряжен, тогда приближенно

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{C_1} = S_{11} Q_1, \quad \varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi R \varepsilon_0} = S_{21} Q_1,$$

откуда

$$S_{11} = C_1^{-1}, \quad S_{12} = S_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Таким образом, учитывая, что $S_{22} = C_2^{-1}$, имеем

$$C_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \simeq C_1 \left(1 + \frac{C_1 C_2}{(4\pi\varepsilon_0 R)^2}\right),$$

$$C_{22} = \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \simeq C_2 \left(1 + \frac{C_1 C_2}{(4\pi\varepsilon_0 R)^2}\right),$$

$$C_{12} = -\frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \simeq -\frac{C_1 C_2}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Эти формулы представляют собой разложение точных выражений для емкостных коэффициентов в ряд по степеням $1/R$.

§ 49. Правила Кирхгофа

В случае медленно изменяющихся полей уравнения Максвелла можно значительно упростить. При этом для электрических цепей, содержащих катушки индуктивности, конденсаторы и резисторы, уравнения Максвелла сводятся к двум *правилам Кирхгофа*, с помощью которых можно полностью описать электромагнитные явления в линейных цепях токов низкой частоты.

Покажем, что токи в электрических цепях связаны с зарядами на поверхностях проводников (пластин конденсатора). Из уравнения непрерывности следует

$$\frac{d}{dt} \int \rho dV = -\int j_n dS.$$

Выберем поверхность интегрирования так, как показано на рис. 30. Величина $\int \rho dV = Q$ — заряд, сосредоточенный на поверхности пластины конденсатора. Так как в вакууме ток проводимости отсутствует, то интеграл по замкнутой поверхности сводится к интегралу по сечению проводника и поэтому $I = -\int j_n dS$, где I — полный ток, протекающий через сечение проводника. Знак «—» появляется из-за того, что положительным принято считать ток, текущий к пластине конденсатора, поэтому внешняя нормаль $\vec{n}$ к поверхности интегрирования направлена против тока. Таким образом,

$$\frac{dQ}{dt} = I. \qquad (49.1)$$

Это соотношение связывает токи, входящие в формулу (47.4), с зарядами, входящими в формулу (48.6).

В квазистационарном приближении из уравнения для вектора магнитной индукции $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ следует, что

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 \qquad (49.2)$$

на всех участках электрической цепи, кроме поверхности проводников (конденсаторов), на которых может существовать поверхностный

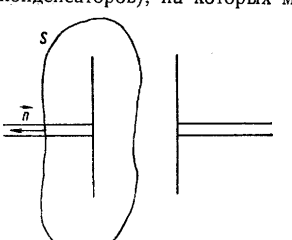
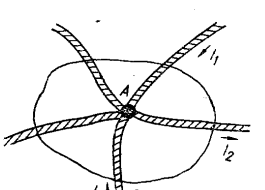


Рис. 30



31

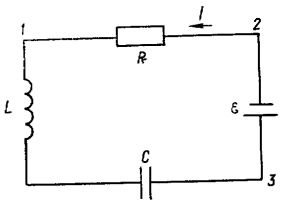


Рис. 32

заряд. Проинтегрируем уравнение (49.2) по некоторому объему, включающему в себя точку разветвления токов A (рис. 31), в которой соединены между собой несколько проводников с токами, и воспользуемся теоремой Остроградского. В результате получим

$$\int \operatorname{div} \vec{j} dV = \int j_n dS = 0.$$

Здесь S — поверхность, охватывающая точку A. Так как ток проходит только по проводникам, то

$$\int j_n dS = \sum_i \int j_n dS_i = \sum_i I_i = 0, \qquad (49.3)$$

где $I_i = -\int j_n dS_i$ — ток в i-м проводнике.

Формула (49.3) является математической формулировкой *первого правила Кирхгофа:* алгебраическая сумма токов в каждой точке разветвления цепи равна нулю. При этом токи, которые изображаются стрелками с направлением к точке разветвления, входят в уравнение (49.3) со знаком «+», а токи, направленные от точки разветвления — со знаком «—».

Для вывода второго правила Кирхгофа рассмотрим замкнутую электрическую цепь (контур), в которой проходит ток I. Цепь содержит участки с резистором, сопротивление которого R, катушку индуктивности L, конденсатор емкостью C и источник сторонней э. д. с. $\mathcal{E}$ (рис. 32).

Согласно закону электромагнитной индукции Фарадея, для всей электрической цепи справедливо равенство

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Разобьем интеграл по замкнутому контуру на три слагаемых (рис. 32)

$$\int_1^3 \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_3^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (49.4)$$

Рассмотрим каждое слагаемое в отдельности. На участке от *1* до *2* подключен резистор. Поэтому для вычисления интеграла $\int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l}$ воспользуемся законом Ома $\vec{E} = \vec{j}/\sigma$. В результате получим

$$\int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_2^1 \frac{\vec{j} \cdot d\vec{l}}{\sigma} = \frac{IL}{S\sigma} = IR. \qquad (49.5)$$

Здесь учтено, что в однородном проводнике плотность тока и его удельная проводимость постоянны по сечению S и поэтому

$$j = \frac{I}{S}, \quad R = \frac{L}{\sigma S},$$

где S — площадь поперечного сечения проводника, L — его длина.

Произведение IR называется *падением напряжения на резисторе* R. Именно такую разность потенциалов покажет вольтметр, если включить его между точками *1* и *2*. Очевидно, что в случае наличия в данном контуре нескольких последовательно включенных резисторов необходимо брать их сумму: $R = \sum_i R_i$.

Для того чтобы вычислить интеграл $\int_3^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$ на участке, содержащем источник сторонней э. д. с., воспользуемся формулой (31.7), из которой следует, что $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} - \vec{E}_{\text{стор}}$. Поэтому

$$\int_3^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_3^2 \frac{\vec{j} \cdot d\vec{l}}{\sigma} - \int_3^2 \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l}.$$

Выражение $\int_3^2 \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l}$ называется *сторонней э. д. с.* Согласно (49.5), $\int_3^2 \frac{\vec{j} \cdot d\vec{l}}{\sigma} = Ir$, где r — внутреннее сопротивление источника сторонней э. д. с. Таким образом,

$$\int_3^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = Ir - \mathcal{E}. \qquad (49.6)$$

На участке от точки *3* до точки *1*, где включен конденсатор, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$, поэтому

$$\int_3^1 \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_3^1 \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{l} = (\varphi_3 - \varphi_1) = \frac{Q}{C}. \qquad (49.7)$$

Величина Q/C называется *падением напряжения на емкости.*

Учитывая также, что, согласно (47.4), для изолированного контура

$$\frac{d\Phi}{dt} = L\frac{dI}{dt}, \qquad (49.8)$$

и подставляя (49.5) — (49.8) в (49.4), получим

$$L\frac{dI}{dt} + (R + r)I + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}. \qquad (49.9)$$

Выражение $L\frac{dI}{dt}$ называется *падением напряжения на индуктивности,* $I = \frac{dQ}{dt}$.

Формула (49.9) выражает собой *второе правило Кирхгофа* для линейной цепи квазистационарных токов: сумма сторонних э. д. с., взятая по некоторому замкнутому контуру, равна сумме падений напряжений на всех индуктивных, емкостных и омических элементах этого контура. Заметим, что если вблизи данного контура имеются другие контуры, то для вычисления падения напряжения на индуктивности следует пользоваться общей формулой (47.4).

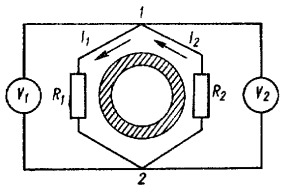


Рис. 33

В качестве примера применения правил Кирхгофа рассмотрим следующую задачу. Вне бесконечно длинного соленоида, ось которого перпендикулярна к плоскости страницы, установлены два резистора R_1 и R_2 и два одинаковых вольтметра V_1 и V_2 (рис. 33). Чему равны показания вольтметров?

Применим к замкнутому контуру, состоящему из резисторов R_1 и R_2, второе правило Кирхгофа

$$I_1R_1 + I_2R_2 = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad (49.10)$$

где $d\Phi/dt$ — скорость изменения магнитного потока через соленоид.

Так как через вольтметры ток практически не проходит, то, применяя к узлу 1 первое правило Кирхгофа, находим

$$I_1 - I_2 = 0. \qquad (49.11)$$

Для контура, состоящего из вольтметра V_1 и резистора R_1, второе правило Кирхгофа дает

$$\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l} - I_1R_1 = 0. \qquad (49.12)$$

Так как $\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l} = V_1$, то

$$V_1 = I_1R_1.$$

Для контура, состоящего из вольтметра V_2 и резистора R_2, имеем

$$\int_2^1 \vec{E}\cdot d\vec{l} - I_2R_2 = -V_2 - I_2R_2 = 0. \qquad (49.13)$$

Из формул (49.10) — (49.13) находим

$$V_1 = -\frac{d\Phi}{dt}\frac{R_1}{R_1+R_2}, \quad V_2 = \frac{d\Phi}{dt}\frac{R_2}{R_1+R_2}.$$

Заметим, что в любом случае $V_1 \neq V_2$. Даже при $R_1 = R_2$ величины V_1 и V_2 отличаются знаком.

§ 50. Длинные линии

Правила Кирхгофа являются по сути упрощенной записью уравнений Максвелла, справедливой для достаточно низких частот. В качестве примера применения правил Кирхгофа для расчета низкочастотных электрических цепей рассмотрим двухпроводную линию с сосредоточенными параметрами. Пусть длинная линия состоит из одинаковых ячеек длиной a с емкостью C, индуктивностью L, сопротивлением утечки r, сопротивлением линии R (рис. 34).

Для составления уравнений Кирхгофа рассмотрим сначала контур, содержащий цепочку rC и узел 1. Согласно правилам Кирхгофа,

$$J_n = J_{n1} + J_{n2},$$

$$-J_{n2}r + \frac{Q_n}{C} = 0,$$

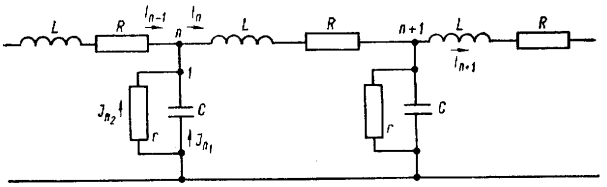


Рис. 34

где Q_n — заряд на конденсаторе. Учитывая, что, согласно (49.1), $J_{n1} = \frac{dQ_n}{dt}$, из этих уравнений получаем

$$J_n = \frac{dQ_n}{dt} + \frac{Q_n}{rC}. \qquad (50.1)$$

Применение первого правила Кирхгофа к узлам n и $n+1$ дает

$$\ldots,\ I_{n-1} - I_n + J_n = 0,\quad I_n - I_{n+1} + J_{n+1} = 0\ \ldots \qquad (50.2)$$

Вычитая из первого равенства второе и воспользовавшись соотношением (50.1), получаем

$$I_{n-1} - 2I_n + I_{n+1} = -J_n + J_{n+1} = -\frac{d}{dt}(Q_n - Q_{n+1}) - \frac{Q_n - Q_{n+1}}{rC}. \qquad (50.3)$$

На основании второго правила Кирхгофа, обходя n-й контур, содержащий катушку индуктивности L, резистор R и два конденсатора C, имеем

$$L\frac{dI_n}{dt} + RI_n + \frac{Q_n - Q_{n+1}}{C} = 0.$$

Исключив с помощью этого уравнения разность $Q_n - Q_{n+1}$ из уравнения (50.3), получаем

$$\frac{d^2I_n}{dt^2} + \frac{RI_n}{rLC} + \left(\frac{1}{rC} + \frac{R}{L}\right)\frac{dI_n}{dt} - \frac{1}{LC}(I_{n+1} - 2I_n + I_{n-1}) = 0. \qquad (50.4)$$

Решение этого разностного уравнения будем искать в виде

$$I_n = Aq^n e^{-i\omega t}, \qquad (50.5)$$

где величина A не зависит от n и t. Подставляя (50.5) в (50.4) и сокращая на общий множитель $q^n e^{-i\omega t}$, получаем уравнение

$$\omega^2 + \frac{1}{LC}(q - 2 + q^{-1}) + i\omega\left(\frac{1}{rC} + \frac{R}{L}\right) - \frac{R}{rLC} = 0,$$

которое при заданной частоте ω имеет два решения, удовлетворяющие квадратному уравнению

$$q^2 + \left[LC\omega^2 - 2 + i\omega\left(\frac{L}{r} + RC\right) - \frac{R}{r}\right]q + 1 = 0.$$

Рассмотрим случай, когда диссипацией, т. е. выделением тепла на резисторах R, и токами утечки можно пренебречь: $R \to 0$, $r \to \infty$.

Тогда это уравнение приобретает вид

$$q^2 + [-2 + LC\omega^2]\, q + 1 = 0. \qquad (50.6)$$

При $\omega < 2/\sqrt{LC}$ оно имеет два комплексно сопряженных корня q_1 и $q_2 = q_1^*$. Так как $q_1 q_2 = q_1 q_1^* = 1$, то $|q_1| = |q_2| = 1$. Представим эти корни в виде

$$q_1 = e^{i\varphi}, \quad q_2 = e^{-i\varphi},$$

где φ зависит от частоты.

Таким образом, имеем два линейно независимых решения уравнения (50.4):

$$I_n = A_1 e^{-i(\omega t - n\varphi)},$$
$$I_n = A_2 e^{-i(\omega t + n\varphi)}.$$

Каждое из этих решений описывает распространение колебаний от ячейки к ячейке: первое решение — слева направо; второе — справа налево. При этом $|I_n| = A_1$, значит, амплитуда колебаний тока во всех ячейках одинакова, а от ячейки к ячейке изменяется только фаза колебаний. Это связано с тем, что диссипация в уравнении (50.4) не учитывалась.

Если же $\omega > 2/\sqrt{LC}$, то уравнение (50.6) имеет два вещественных положительных корня, один из которых $q_1 < 1$, а другой $q_2 > 1$. Общее решение уравнения (50.4) запишем как сумму двух частных решений

$$I_n = (A_1 q^n + A_2 q^n)\, e^{-i\omega t}. \qquad (50.7)$$

Пусть заданы (граничные условия) амплитуда тока I_0 в ячейке с номером 0 и амплитуда тока — $I_{\text{вых}}$ на выходе в ячейке N. Тогда, подчиняя (50.7) граничным условиям, получаем

$$A_1 = \frac{q_2^N I_0 - I_{\text{вых}}}{q_2^N - q_1^N}, \quad A_2 = \frac{I_{\text{вых}} - q_1^N I_0}{q_2^N - q_1^N}.$$

Так как $q_2 > 1$, то при достаточно большом N можно положить $A_1 = I_0$, $A_2 \approx 0$. Другими словами, решение (50.7) при $N \to \infty$ можно записать в виде

$$I_n = I_0 q_1^n e^{-i\omega t}.$$

Поскольку $q_1 < 1$, следовательно, ток убывает по направлению от начала цепи к ее концу. Такое уменьшение тока, которое называют *непропусканием* или *реактивным отражением*, не имеет характера поглощения (так как не учтена диссипация), а представляет собой последовательное отражение электромагнитной волны от каждой ячейки. Это явление аналогично полному внутреннему отражению в оптике (§ 43) и используется для конструирования фильтров частоты.

Если же теперь рассмотреть случай $R \neq 0$, то обнаружим, что электромагнитные волны будут затухать, а их энергия переходить в джоулеву теплоту. К аналогичному явлению приводит и наличие токов утечки I_{n2} через сопротивление утечки r.

Рассмотрим теперь двухпроводную линию с распределенными параметрами, которую также можно разбить на малые участки $\Delta x = a$. Эта линия характеризуется емкостью и сопротивлением единицы длины проводника, а также сопротивлением утечки через воздух. Уравнение для длинной линии с распределенными параметрами можно получить из уравнения (50.4) следующим образом. Обозначим $I_n \equiv I(na) \equiv I(x_n)$, где $x_n = na$. Для дискретной системы переменная x_n изменяется скачком, но при предельном переходе ($a \to 0$) величина $x_n = x$ становится практически непрерывной переменной (декартовой координатой). Тогда, разлагая последнее слагаемое в (50.4) в ряд Тейлора по малой величине a, получаем

$$I_{n-1} - 2I_n + I_{n+1} = I(na - a) - 2I(na) + I(na + a) \approx \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} a^2.$$

Таким образом, в пределе $a = \Delta x \to 0$ разностное уравнение (50.4) переходит в дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + \left(\frac{R}{l} + \frac{1}{Cr}\right)\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{R}{LCr} I - \frac{a^2}{LC}\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = 0.$$

Обозначая $L/a = L^*$, $C/a = C^*$, $R/a = R^*$, $1/ra = 1/r^*$, где L^*, C^*, R^*, $1/r^*$ — электрические параметры длинной линии с распределенными параметрами, отнесенные к единице длины, имеем

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + \left(\frac{R^*}{L^*} + \frac{1}{C^* r^*}\right)\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{R^*}{L^* C^* r^*} - \frac{1}{L^* C^*}\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = 0.$$

Если пренебречь сопротивлением проводов ($R^* \to 0$) и считать сопротивление утечки очень большим ($r^* \to \infty$), то это уравнение будет иметь вид волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0, \qquad (50.8)$$

где $v^2 = 1/(L^* C^*)$. Его решение можно представить в виде суперпозиции плоских монохроматических волн вида

$$I = I_0 e^{i(-\omega t + \kappa x)},$$

причем $\omega^2 = v^2 \kappa^2$. Из этого дисперсионного уравнения следует, что при любых вещественных ω волновой вектор κ также вещественный, т. е. линия с распределенными параметрами, в отличие от линии с сосредоточенными параметрами, не обладает свойством частотного фильтра.

Рассмотрим, при каких условиях разностное уравнение (50.4) переходит в дифференциальное уравнение (50.8). Решение дисперсионного уравнения (50.6) при $\omega < 2/\sqrt{LC}$ может быть представлено в виде $q = e^{i\varphi} = e^{i\kappa a}$, где a — длина ячейки, а величина $\kappa = \varphi/a$ введена вместо φ. Причем $-\pi \leqslant \kappa < \pi$ (или $0 \leqslant \kappa < 2\pi$). Тогда при $\kappa a \ll 1$ дисперсионное уравнение (50.6) переходит в дисперсионное уравнение для линии с распределенными параметрами: $\omega^2 = v^2 \kappa^2$. Таким образом, переход от дискретного уравнения (50.4) к уравнению в частных производных (50.8) возможен тогда, когда изменение фазы при переходе от ячейки к ячейке мало, т. е. $\varphi = \kappa a = \omega a/v \ll 1$. А так как

линия с сосредоточенными параметрами является фильтром высоких частот, то при переходе к дифференциальному уравнению это ее свойство теряется.

§ 51. Уравнения магнитной гидродинамики

Уравнение движения вязкой несжимаемой среды (жидкости или газа) имеет вид [12. § 54]

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right] = -\vec{\nabla}p + \eta\Delta\vec{v} + \vec{f}, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0, \qquad (51.1)$$

где $\vec{f}$ — объемная плотность сил, p — давление, ρ — массовая плотность, которая в силу предположения о несжимаемости считается постоянной.

Если же жидкость или газ обладает заметной проводимостью и, кроме того, движется в магнитном поле, то в проводящей среде возникает ток (31.3). Благодаря этому на каждую единицу объема проводящей сплошной среды действует сила Ампера

$$\vec{f} = [\vec{j}, \vec{B}], \qquad (51.2)$$

которую необходимо учесть в правой части уравнения (51.1). В свою очередь, индуцированный ток (31.3), согласно уравнению $\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$, становится источником магнитного поля.

Таким образом, согласно уравнению (51.2), при пропускании тока через проводящую среду, которая находится во внешнем магнитном поле, возникает объемная сила. Эта сила приводит в движение проводящую среду (МГД-насос). Если же проводящую среду, которая находится в магнитном поле, привести в движение, то в ней, согласно формуле (31.3), возникает ток, плотность которого $\vec{j} = \sigma[\vec{v}, \vec{B}_0]$, где $\vec{B}_0$ — индукция внешнего поля, $\vec{v}$ — скорость движения проводящей среды. Это явление лежит в основе принципа действия магнитогидродинамических генераторов (МГД-генераторов).

Взаимодействие движущейся проводящей среды с электромагнитным полем приводит и к другим интересным физическим явлениям. Для их количественного расчета необходимо решать совместно систему уравнений (51.1) и уравнений для электромагнитного поля. Эта система называется уравнениями *магнитной гидродинамики*.

В магнитной гидродинамике обычно рассматриваются достаточно медленные изменения со временем всех величин, так что током смещения и эффектами запаздывания можно пренебречь (квазистационарное приближение), и поэтому индукция магнитного поля связана с создающим его током уравнениями

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0. \qquad (51.3)$$

Связь напряженности электрического поля, входящей в уравнение (51.3), с индукцией магнитного поля дается уравнением

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \qquad (51.4)$$

Таким образом, уравнения магнитной гидродинамики представляют собой связанную систему уравнений гидродинамики и электродинамики (51.1) — (51.4), которую необходимо дополнить соотношением $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}])$.

Система уравнений (51.1)—(51.4) при заданных проводимости σ и вязкости η является полной и позволяет в принципе по заданным начальным и граничным условиям находить пространственно-временное поведение любой из входящих в эти уравнения величин.

С помощью уравнений (51.3) и (31.3) можно исключить из уравнения (51.4) плотность тока $\vec{j}$ и напряженность электрического поля $\vec{E}$. Исключим сначала с помощью уравнения (31.3) $\vec{E}$. В результате получим

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\left(\frac{\vec{j}}{\sigma} - [\vec{v}, \vec{B}]\right) = -\frac{1}{\sigma}\operatorname{rot}\vec{j} + \operatorname{rot}[\vec{v}, \vec{B}]; \qquad (51.5)$$

при этом считаем, что проводимость σ не зависит от координат. Затем воспользуемся уравнениями (51.3), а также формулой $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{B} = -\Delta\vec{B} + \vec{\nabla}\operatorname{div}\vec{B}$ и перепишем уравнение (51.5) в следующем виде:

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0\sigma}\Delta\vec{B} + \operatorname{rot}[\vec{v}, \vec{B}]. \qquad (51.6)$$

Уравнения (51.6) отличаются от уравнения (46.7) вторым слагаемым, которое делает его нелинейным и учитывает влияние движения проводящей среды на магнитное поле.

Чтобы оценить, в каких случаях это влияние существенно, перепишем уравнение (51.6) в безразмерных величинах:

$$\frac{\partial\vec{B}'}{\partial\tau} = \operatorname{rot}'[\vec{v}', \vec{B}'] + \frac{1}{\mu_0\sigma v_0 l}\Delta'\vec{B}', \qquad (51.7)$$

где $\vec{B}' = \vec{B}/B_0$; $\vec{v}' = \vec{v}/v_0$; $\tau = tv_0/l$; l и v_0 — характерные для данной задачи длина и скорость.

Безразмерная величина

$$R_m = \mu_0\sigma v_0 l \qquad (51.8)$$

называется *магнитным числом Рейнольдса*. Из (51.7) следует, что при $R_m \ll 1$ доминирующим членом, определяющим изменение магнитного поля со временем, является второе слагаемое в правой части (51.7). Опуская штрихи, перепишем уравнение (51.7) в виде

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{R_m}\Delta\vec{B}. \qquad (51.9)$$

Отсюда следует, что если $R_m \ll 1$, то течение проводящей среды слабо искажает магнитное поле, которое поэтому можно считать заданным внешним источником. Действительно, из уравнения (51.9) следует, что любые возмущения магнитного поля рассасываются с диффузионным временем $T = lR_m/v_0 = \mu_0\sigma l^2$, и в конце концов магнитное поле

становится не зависящим от времени, а его распределение в пространстве в стационарном случае будет определяться характером внешних источников магнитного поля.

С помощью уравнения (51.3) можно исключить из формулы (51.2) ток и выразить объемную силу через индукцию магнитного поля:

$$\vec{f} = \frac{1}{\mu_0}[\mathrm{rot}\,\vec{B}, \vec{B}] = \frac{1}{\mu_0}\left[(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} - \frac{1}{2}\vec{\nabla}B^2\right]; \qquad (51.10)$$

здесь мы воспользовались формулой (12) приложения II.

Подставляя (51.10) в (51.1), получаем

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right] = -\vec{\nabla}\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \frac{1}{\mu_0}(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \eta\Delta\vec{v}. \qquad (51.11)$$

Слагаемое $B^2/2\mu_0$ называется *магнитным давлением*.

Уравнения (51.6), (51.11) вместе с условием несжимаемости $\mathrm{div}\,v = 0$ и уравнением состояния $p = p(\rho, T)$ представляют собой полную систему уравнений движения несжимаемой проводящей жидкости. Из этих уравнений следует, что наличие магнитного поля влияет на движение жидкости (слагаемое $\vec{f} = -\frac{1}{2\mu_0}\vec{\nabla}B^2 + \frac{1}{\mu_0}(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$ в (51.11)), а движение жидкости, в свою очередь, сказывается на величине магнитного поля (слагаемое $\mathrm{rot}\,[\vec{v}, \vec{B}]$ в (51.6)).

В качестве примера задач, решаемых с помощью магнитной гидродинамики, рассмотрим распространение малых возмущений в идеально проводящей среде ($\sigma \to \infty$), находящейся в однородном магнитном поле B_0. Так как проводящая среда считается идеальной, то можно пренебречь первым слагаемым уравнения (51.6). Предположим также, что вязкость среды настолько мала, что слагаемым $\eta\Delta\vec{v}$ в уравнении (51.11) также можно пренебречь. В этом случае система уравнений магнитной гидродинамики принимает вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \frac{1}{\rho\mu_0}[\mathrm{rot}\,\vec{B}, \vec{B}],\\ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\vec{v}) = 0,\\ \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,[\vec{v}, \vec{B}],\\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0.\end{gathered} \qquad (51.12)$$

Стационарным решением этой системы может быть

$$\vec{v} = \mathrm{const} = 0,\ p = p_0 = \mathrm{const},\ \vec{B} = \vec{B}_0 = \mathrm{const},\ \rho = \rho_0 = \mathrm{const},$$

что соответствует состоянию неподвижной жидкости во внешнем магнитном поле $\vec{B}_0$.

Рассмотрим, как будут вести себя в пространстве и времени малые возмущения этого состояния. Для этого положим

$$\vec{v} = \vec{v}',\ p = p_0 + p',\ \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}',$$
$$\rho = \rho_0 + \rho'. \qquad (51.13)$$

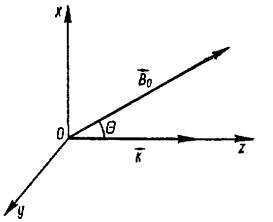


Рис. 35

Так как мы пренебрегли диссипативными процессами, то энтропия s в процессе движения не изменяется и поэтому

$$p \simeq p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s \rho' = p_0 + s^2\rho',$$

где $s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s$ — скорость звука в данной среде.

Подставим (51.13) в (51.12) и, считая величины $\vec{v}'$, p', ρ', $\vec{B}'$ малыми, получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial\vec{v}'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}p' - \frac{1}{\rho_0\mu_0}[\vec{B}_0, \mathrm{rot}\,\vec{B}'],\\ \frac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho_0\,\mathrm{div}\,\vec{v}' = 0,\\ \frac{\partial\vec{B}'}{\partial t} = \mathrm{rot}\,[\vec{v}', \vec{B}_0],\\ \mathrm{div}\,\vec{B}' = 0.\end{gathered} \qquad (51.14)$$

Решение системы уравнений (51.14) будем искать в виде плоских волн $e^{-i(\omega t - \vec{\kappa}\cdot\vec{r})}$. В этом случае эта система сводится к системе алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}-\omega\vec{B}' = [\vec{\kappa}, [\vec{v}', \vec{B}_0]],\quad \vec{\kappa}\cdot\vec{B}' = 0,\\ \omega\rho_0\vec{v}' = s^2\vec{\kappa}\rho' + \frac{1}{\mu_0}[\vec{B}_0, [\vec{\kappa}, \vec{B}']],\\ \omega\rho' = \rho_0\vec{\kappa}\cdot\vec{v}'.\end{gathered} \qquad (51.15)$$

Из первого уравнения следует, что вектор $\vec{B}'$ всегда перпендикулярен к направлению волнового вектора $\vec{\kappa}$, которое выберем за направление оси z (рис. 35). Плоскость, содержащую векторы $\vec{\kappa}$ и $\vec{B}_0$, выберем в качестве плоскости xz. Исключив $\rho' = \rho_0(\kappa/\omega)v_z$ из системы уравнений (51.15) и записывая эту систему уравнений в проекциях, получим

$$\omega B_y' + \kappa B_{0z}v_y' = 0,\qquad \omega B_x' + \kappa v_x'B_{0z} - B_{0x}\kappa v_z' = 0,$$
$$\rho_0\omega v_y' + B_y'\frac{B_{0z}}{\mu_0}\kappa = 0;\qquad -\omega v_z + \frac{s^2\kappa^2}{\omega}v_z' + \frac{1}{\mu_0\rho_0}\kappa B_{0x}B_x' = 0,$$
$$\rho_0\omega v_x + B_x\frac{B_{0z}}{\mu_0}\kappa = 0.$$

Таким образом, система уравнений (51.15) распалась на две группы, первая из которых содержит компоненты B'_y и v'_y, а вторая — B'_x, v'_x, v'_z.

Приравнивая нулю детерминант первой группы уравнений, получаем дисперсионное уравнение для *альфвеновских волн:*

$$\omega^2 = \kappa^2 \frac{B_{0z}^2}{\rho_0\mu_0} = \frac{\kappa^2 B_0^2}{\rho_0\mu_0}\cos^2\Theta, \quad \omega = \frac{(\vec{\kappa}\cdot\vec{B}_0)}{\sqrt{\rho_0\mu_0}}.$$

Альфвеновская волна характеризуется величинами B'_y и v'_y, поэтому можно сказать, что она поляризована перпендикулярно как к внешнему полю с индукцией $\vec{B}_0$, так и к волновому вектору $\vec{\kappa}$.

Фазовая скорость альфвеновской волны

$$v_\Phi = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{B_0}{\sqrt{\rho_0\mu_0}}\cos\Theta \ll c$$

и, согласно критерию (46.11), должна быть меньше скорости света. В противном случае пользоваться квазистационарным приближением нельзя. Групповая скорость этой волны

$$\vec{v}_{\text{гр}} = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{\kappa}} = \frac{\vec{B}_0}{\sqrt{\rho_0\mu_0}},$$

откуда следует, что волны этого типа распространяются в направлении вектора $\vec{B}_0$.

Приравнивая детерминант второй группы уравнений к нулю, имеем

$$(\omega^2 - s^2\kappa^2)\left(\omega^2 - \frac{\kappa^2 B_{0z}^2}{\mu_0\rho_0}\right) = \frac{\kappa^2\omega^2 B_{0x}^2}{\mu_0\rho_0} = \frac{\kappa^2\omega^2 B_0^2\sin^2\Theta}{\rho_0\mu_0}. \qquad (51.16)$$

Таким образом, существуют еще два типа волн. Если положить в (51.16) $\Theta = 0$, то получим дисперсионное уравнение чисто звуковой продольной волны

$$\omega^2 - s^2\kappa^2 = 0.$$

В ней испытывают колебания плотность и скорость, которая направлена вдоль волнового вектора $\vec{\kappa}$.

Кроме того, получаем также и дисперсионное уравнение $\omega^2 = \kappa^2 B_0^2/(\rho_0\mu_0)$ для второй альфвеновской волны с компонентами v'_x и B'_x. Обе альфвеновские волны имеют одинаковые дисперсионные уравнения, но отличаются поляризацией.

При $\Theta \neq 0$ эти волны связаны между собой, в результате чего они становятся *гибридными*. Другими словами, каждая мода представляет собой смесь двух типов волн: звуковой и альфвеновской.

§ 52. Течение Гартмана

Рассмотрим теперь задачу о стационарном течении несжимаемой, но вязкой и проводящей жидкости между двумя параллельными плоскостями, перпендикулярно которым приложено однородное магнитное

поле $\vec{B}_0$ (течение Гартмана). Расстояние между плоскостями равно L.

Из физических соображений следует, что скорость течения жидкости должна быть направлена параллельно плоскостям. Выберем это направление за направление оси y, а ось z направим перпендикулярно плоскостям (рис. 36). Очевидно, что

$$v_x = 0, \quad v_y(z) \neq 0, \quad v_z = 0.$$

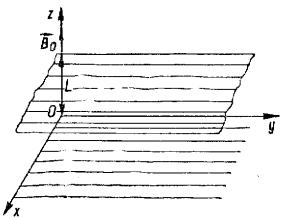


Рис. 36

Такое распределение скоростей удовлетворяет условию несжимаемости $\operatorname{div}\vec{v} = 0$, кроме того, $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial z}v_z = 0$. Таким образом, в стационарном случае $\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = 0\right)$ уравнение (51.11) приобретает вид

$$-\vec{\nabla}\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \frac{1}{\mu_0}(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \eta\Delta\vec{v} = 0. \qquad (52.1)$$

Наличие магнитного поля $\vec{B}_0$, направленного вдоль оси z, и скорости $\vec{v}$, направленной вдоль оси y, согласно уравнению $\vec{j} = \sigma[\vec{v}, \vec{B}]$, вызывает появление тока вдоль оси x. Этот ток, в свою очередь, согласно уравнению $\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$, приведет к появлению компоненты магнитного поля $B_y(z)$ вдоль оси y, которая также зависит только от z. Если учесть, что $B_x = 0$, то из уравнения $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ следует, что $\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$, и поэтому $B_z = B_0$, так как нормальная составляющая магнитного поля должна быть непрерывна при переходе через границу раздела двух сред. С учетом сказанного находим $(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} = B_0\frac{\partial\vec{B}}{\partial z}$. Затем из уравнения (51.6) получаем уравнение для B_y и v_y:

$$\frac{1}{\mu_0\sigma}\frac{d^2B_y}{dz^2} + B_0\frac{dv_y}{dz} = 0, \qquad (52.2)$$

а векторное уравнение (52.1) перепишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) = \frac{B_0}{\mu_0}\frac{dB_y}{dz} + \eta\frac{d^2v_y}{dz^2}, \qquad (52.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) = 0, \qquad (52.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) = 0. \qquad (52.5)$$

Из (52.4) и (52.5) следует, что сумма $p + B^2/2\mu_0$ зависит только от координаты y:

$$p + \frac{B^2}{2\mu_0} = P(y).$$

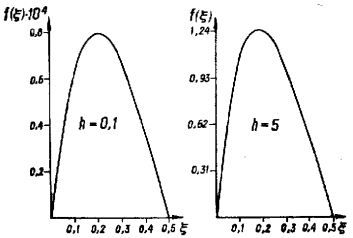


Рис. 37

Поскольку правая часть в (52.3) зависит только от z, а $P(y)$ — только от y, то

$$\frac{dP(y)}{dy} = \text{const} \equiv -a = \frac{B_0}{\mu_0}\frac{dB_y}{dz} + \eta\frac{d^2v_y}{dz^2}.$$

Таким образом, поставленная задача сведена к решению системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{1}{\mu_0\sigma}\frac{d^2B_y}{dz^2} + B_0\frac{dv_y}{dz} = 0, \quad \eta\frac{d^2v_y}{dz^2} + \frac{B_0}{\mu_0}\frac{dB_y}{dz} = -a \tag{52.6}$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} &v_y(0) = v_y(L) = 0 \quad \text{(условие прилипания)},\\ &B_y(0) = B_y(L) = 0 \quad \text{(непрерывность магнитного поля)}. \end{aligned} \tag{52.7}$$

В безразмерных величинах

$$B = \frac{B_y}{B_0}, \quad v = \frac{v_y}{v_0}, \quad v_0 = \frac{1}{\mu_0\sigma L}, \quad \xi = \frac{z}{L}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1$$

уравнения (52.6) и граничные условия (52.7) приобретают вид

$$\begin{aligned} &\frac{d^2B}{d\xi^2} + \frac{dv}{d\xi} = 0, \qquad \frac{d^2v}{d\xi^2} + h^2\frac{dB}{d\xi} = -A,\\ &v(0) = v(1) = 0, \qquad B(0) = B(1) = 0, \end{aligned} \tag{52.8}$$

где введены следующие обозначения: $h = B_0L\sqrt{\sigma/\eta}$ — безразмерное *число Гартмана;* $A = a\mu_0\sigma/hL^3$.

Решение системы уравнений (52.8), удовлетворяющее необходимым граничным условиям, имеет вид

$$\begin{aligned} v &= \frac{A}{2h}\left(\frac{e^{-h\xi}-1}{e^{-h}-1} - \frac{e^{h\xi}-1}{e^h-1}\right) = -\frac{A}{h^2}\left[\frac{df}{d\xi} - \left(\frac{df}{d\xi}\right)_0\right],\\ B &= \frac{A}{h^2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{e^{h\xi}-e^{h(1-\xi)}}{e^h-1}+1\right) - \xi\right] = \frac{A}{h^2}f(\xi). \end{aligned} \tag{52.9}$$

График функции $f(\xi) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{h\xi}-e^{h(1-\xi)}}{e^h-1}+1\right) - \xi$ для различных значений числа Гартмана h приведен на рис. 37. Следует обратить внимание на различный масштаб по оси ординат.

Критерием степени влияния магнитного поля на течение проводящей жидкости является значение числа Гартмана. При $h = B_0L\sqrt{\sigma/\eta} \ll 1$, разлагая экспоненты $e^{\pm h\xi}$ и $e^{\pm h}$ в ряд по величине h, из (52.9) получаем

$$v = \frac{A}{2}(\xi - \xi^2), \quad B \simeq \frac{A}{12}(\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3).$$

Следовательно, в случае слабого магнитного поля ($h \ll 1$) для поля скоростей получается результат обычной гидродинамики.

Для сильного магнитного поля ($h \gg 1$) из (52.9) имеем

$$v = -\frac{A}{2h}[e^{-h\xi} + e^{-h(1-\xi)} - 1],$$

$$B = \frac{A}{2h^2}[-e^{-h\xi} + e^{-h(1-\xi)} + 1] - \frac{A}{h^2}\xi.$$

Увеличение магнитного поля (точнее числа Гартмана) делает профиль скоростей более плоским и уменьшает скорость течения, так как

$$\frac{v\ (\text{при } h \ll 1)}{v\ (\text{при } h \gg 1)} \sim h \gg 1.$$

Используя найденное решение (52.9), с помощью формулы (51.3) находим

$$j_x = -\frac{B_0}{L\mu_0}\frac{dB}{d\xi},$$

причем $\int_0^1 j_x d\xi = 0$. Это означает, что токи в верхней половине проходят в направлении, противоположном токам в нижней половине.

С помощью формулы (31.3) можно вычислить напряженность электрического поля

$$E_x = \frac{j_x}{\sigma} - B_0v_z = -\frac{B_0}{\mu_0\sigma L}\left(\frac{dB}{d\xi} + v\right).$$

Таким образом, в направлении, поперечном к магнитному полю и направлению течения проводящей жидкости (или газа), возникает э. д. с. Средняя по поперечному сечению э. д. с. равна

$$\mathcal{E} = \bar{E}_xL = -\frac{B_0}{\mu_0\sigma}\int_0^1 v\,d\xi = -\frac{B_0}{\mu_0\sigma}\frac{A}{2h^2}\left(\frac{df}{d\xi}\right)_0 =$$

$$= -\frac{B_0A}{2\mu_0\sigma h}\left[\frac{e^h+1}{2(e^h-1)} - \frac{1}{h}\right].$$

Следовательно, если с помощью градиента давления создавать в магнитном поле течение проводящей жидкости, то в поперечном к ним направлении возникает э. д. с. (принцип работы МГД-генератора электрического тока). Если же в поперечном к магнитному полю направлении приложить электрическое поле, то в перпендикулярном к ним направлении возникает движение проводящей жидкости (принцип работы МГД-насоса).

1. Вычислить градиент функции $f(r)$, зависящий только от модуля радиуса-вектора $\vec{r}$.

2. Вычислить $\operatorname{div} \vec{r}$, $\operatorname{rot} \vec{r}$, $\operatorname{rot} \varphi(r) \cdot \vec{r}$.

3. Вычислить $\vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{r})$, $\vec{\nabla}\left(\frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^3}\right)$, $(\vec{p} \cdot \vec{\nabla})\vec{r}$, $\operatorname{div}[\vec{p}, \vec{r}]$, $\operatorname{rot}[\vec{r}, \vec{p}]$, где $\vec{p}$ — постоянный вектор.

4. Пользуясь теоремой Остроградского, вычислить интегралы

$$\vec{I}_1 = \int \vec{r}(\vec{A} \cdot \vec{n})\, dS, \quad \vec{I}_2 = \int (\vec{A} \cdot \vec{r})\vec{n} dS,$$

если объем, который охватывает замкнутая поверхность, равен V; $\vec{A}$ — постоянный вектор.

5. Показать, что $\int_V \vec{A} dV = 0$, если $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ внутри объема V, а $(\vec{A} \cdot \vec{n}) = 0$ на границе объема.

6. Показать, что дивергенция вектора

$$\vec{A} + \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int \frac{\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dV'$$

равна нулю.

7. Найти решение уравнения Лапласа в сферической системе координат, зависящее лишь от одной координаты r.

8. Записать уравнения Максвелла (32.1) — (32.4): а) в цилиндрической системе координат; б) в сферической системе координат.

9. В равномерно заряженном шаре с объемной плотностью заряда ρ имеется шарообразная полость, центр которой расположен на расстоянии a от центра шара. Найти напряженность электрического поля внутри полости, внутри шара и снаружи шара. Радиусы шара и полости равны соответственно R и R'.

10. Определить напряженность электрического поля внутри и снаружи шара, объемная плотность заряда которого меняется по закону $\rho = \alpha r^n$, где $n > -2$. Радиус шара R.

11. Найти напряженность электрического поля внутри и снаружи равномерно заряженного цилиндра радиуса R. Заряд единицы длины цилиндра равен $\varkappa$.

12. Слой непроводящего вещества, ограниченный двумя параллельными плоскостями, заряжен до объемной плотности ρ. Толщина слоя равна d. Найти напряженности электрического поля внутри и снаружи слоя.

13. Определить емкость конденсатора: а) сферического, б) плоского, в) цилиндрического. Между обкладками конденсаторов находится диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε.

14. Два длинных цилиндрических проводника с радиусами R_1 и R_2 расположены параллельно друг другу на расстоянии d. Рассчитать емкость единицы длины такой системы при условии, что $d \gg R_1$ и $d \gg R_2$.

15. Найти потенциал и напряженность электрического поля на оси плоского кольца, равномерно заряженного с поверхностной плотностью σ (внутренний радиус кольца R_1, внешний R_2). Рассмотреть предельные случаи: а) поле плоского диска ($R_1 \to 0$); б) поле заряженной плоскости ($R_1 \to 0$, $R_2 \to \infty$).

16. Определить потенциал, создаваемый электроном атома водорода, считая, что заряд электрона в основном состоянии распределен с объемной плотностью $\rho = \frac{e}{\pi a^3} e^{-2r/a}$, где a — постоянная.

17. Точечный заряд e находится на расстоянии d от проводящей сферы, имеющей потенциал V. Найти потенциал вне сферы и поверхностную плотность заряда на сфере.

18. Определить потенциал заряженной сферы радиуса R. Поверхностная плотность заряда меняется по закону $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$.

19. Определить потенциал и напряженность электрического поля равномерно поляризованного шара радиуса R. Удельный дипольный момент шара равен $\vec{P}$.

20. Проводящая заземленная сфера помещена в однородное электрическое поле напряженностью $\vec{E}_0$. Найти потенциал системы и плотность поверхностных зарядов на сфере.

21. Сфера равномерно заряжена с поверхностной плотностью σ, за исключением сегмента у полюса, ограниченного окружностью $\vartheta = \alpha$. Найти потенциал внутри и снаружи сферической поверхности.

22. Одна грань прямоугольного параллелепипеда находится под потенциалом V, все прочие грани имеют нулевой потенциал. Найти распределение потенциала внутри параллелепипеда.

23. У прямоугольного параллелепипеда со сторонами a, b и c две противоположные грани $z = 0$ и $z = c$ имеют потенциалы V_1 и V_2. Остальные грани заземлены. Определить потенциал внутри заданного параллелепипеда.

24. Определить потенциал поля, созданного точечным зарядом e и расположенной на расстоянии d от него однородной плоскопараллельной пластинкой толщиной a с диэлектрической проницаемостью ε. Рассмотреть случай, когда точечный заряд расположен на поверхности полубесконечного кристалла.

25. Найти квадрупольный момент эллипсоида, равномерно заряженного по объему с объемной плотностью заряда ρ.

26. Определить потенциал точечного заряда e, находящегося в однородной анизотропной среде с заданным тензором диэлектрической проницаемости.

27. Найти напряженность электрического поля внутри анизотропной диэлектрической пластинки, помещенной в однородное поле $\vec{E}_0$.

28. Вычислить энергию взаимодействия электронного облака атома водорода с протоном. Плотность заряда электронного облака равна $\rho = \frac{e}{\pi a^3} e^{-2r/a}$.

29. Вычислить энергию взаимодействия двух шаров, заряды которых e_1 и e_2 распределены сферически симметричным образом. Расстояние между центрами шаров равно a.

30. Обкладки шарового конденсатора, между которыми расположена проводящая среда с удельной электропроводностью σ^*, находятся под потенциалами φ_1 и φ_2. Вычислить ток, проходящий через конденсатор. Найти сопротивление R шарового слоя между пластинками, радиусы которых r_1 и r_2.

31. Найти напряженность магнитного поля внутри цилиндрической полости цилиндрического проводника, по которому течет ток, равномерно распределенный по его сечению с плотностью j. Оси цилиндра, образующего полость, и цилиндрического проводника параллельны и находятся друг от друга на расстоянии a.

32. В бесконечном прямом проводнике радиуса R течет ток плотностью a/ρ при $\rho \leqslant R$, где ρ — расстояние от оси проводника. Найти векторный потенциал и напряженность магнитного поля внутри и снаружи проводника.

33. Найти напряженность магнитного поля плоскости, по которой течет ток с поверхностной плотностью i, одинаковой в любой точке плоскости.

34. По двум параллельным плоскостям текут поверхностные токи с плотностью i. Найти напряженность магнитного поля в двух случаях: а) направления токов совпадают; б) токи текут в противоположных направлениях.

35. По двум бесконечным линейным проводникам, расстояние между которыми d, текут в противоположных направлениях токи силой I. Вычислить векторный потенциал системы.

36. Найти векторный потенциал и напряженность магнитного поля, создаваемого током I, текущим по кольцу радиуса R. Исследовать случай, когда точка наблюдения находится на оси кольца.

37. Найти векторы напряженности и магнитной индукции магнитного поля, создаваемого однородно намагниченным шаром с магнитным моментом единицы объема $\vec{J}$. Радиус шара R.

38. Найти магнитный момент шара, равномерно вращающегося с угловой скоростью $\vec{\Omega}$. Заряд e равномерно распределен по объему шара. Показать, что гиромагнитное отношение равно $e/(2m)$, где m — масса шара.

39. Сфера радиуса R вращается с угловой скоростью $\vec{\Omega}$ вокруг оси Oz. Поверхностная плотность заряда σ постоянна. Найти векторный потенциал и напряженность магнитного поля внутри и снаружи сферы.

40. Вычислить силу, с которой взаимодействуют два бесконечных параллельных провода, находящихся на расстоянии d друг от друга, по которым текут токи I_1 и I_2. Магнитная проницаемость среды μ.

41. Найти индуктивность L единицы длины линии, состоящей из двух коаксиальных цилиндров с радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), пространство между которыми заполнено веществом с магнитной проницаемостью μ.

42. Внутри цилиндра радиуса R_2 находится провод радиуса R_1, магнитная проницаемость которого равна μ_1. Между проводом и цилиндром — среда с магнитной проницаемостью μ_2. Определить индуктивность L единицы длины контура.

43. Показать, что постоянное однородное магнитное поле, индукция которого $\vec{B}$, можно описывать векторным потенциалом $\vec{A} = {}^1/_2\,[\vec{B}, \vec{r}]$.

44. Найти распределение электрического и магнитного полей внутри цилиндрического проводника, по которому течет периодический ток с частотой ω. Проводимость проводника σ^*.

45. Шар из магнетика находится в постоянном магнитном поле, напряженность которого внутри шара равна $\vec{H}_0$. Предполагая, что размеры шара намного меньше длины волны собственных колебаний магнитного момента, найти частоту этих колебаний.

46. Определить в магнитостатическом приближении собственные частоты колебаний пластинки из магнетика с металлическим покрытием, намагниченной нормально. Толщина пластинки d, напряженность постоянного магнитного поля $\vec{H}_0$.

47. Определить собственные частоты колебаний в магнитостатическом приближении пластинки из магнетика, намагниченной нормально, расположенной в вакууме. Толщина пластинки d, напряженность магнитного поля H_0.

48. Найти собственные частоты двух индуктивно связанных контуров с коэффициентами самоиндукции L_1 и L_2, коэффициентом взаимной индукции L_{12}, емкостями C_1 и C_2 и с равными нулю активными сопротивлениями.

49. Определить коэффициент затухания электромагнитных волн в среде при полном внутреннем отражении.

50. Плоскополяризованная волна падает нормально на поверхность немагнитной среды, имеющей диэлектрическую проницаемость ε и проводимость σ^*. Найти коэффициент отражения R. Рассмотреть предельный случай хорошего проводника.

51. Определить амплитуды волн, отраженной от плоскопараллельной пластины и прошедшей через нее. Толщина пластины d, диэлектрическая проницаемость ε. Найти условия, при которых отражение электромагнитных волн от пластины минимально.

52. Вдоль плоской границы раздела двух диэлектриков, имеющих противоположные по знаку диэлектрические проницаемости ε_1 и $-|\varepsilon_2|$, распространяется поверхностная волна, у которой напряженность магнитного поля перпендикулярна к направлению распространения (ТМ-волна). Определить закон дисперсии такой волны.

53. Электромагнитная волна падает под углом ϑ_1 на плоскую поверхность полубесконечного кристалла, оптическая ось которого перпендикулярна к поверхности кристалла. Определить направление распространения обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле.

54. Среда состоит из упруго связанных некоторыми центрами заряженных частиц, коэффициенты упругости которых различны в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Концентрация частиц N. Найти тензор диэлектрической проницаемости среды.

55. Вещество состоит из квазиупруго связанных электронов (концентрация N), находящихся в однородном магнитном поле с магнитной индукцией B_0. На вещество падает линейно поляризованная монохроматическая световая волна, волновой вектор которой направлен вдоль магнитного поля. Найти поворот плоскости поляризации электромагнитной волны, если волна прошла в веществе расстояние l.

56. Исследовать распространение электромагнитных волн в пространстве между проводящими плоскостями, разделенными диэлектриком. Расстояние между плоскостями d, диэлектрическая постоянная среды ε.

57. Определить связь между тангенциальными компонентами электрического и магнитного полей вблизи проводника.

58. Определить затухание ТН-волн в прямоугольном волноводе с размерами стенок a и b. Проводимость стенок волновода σ^*, магнитная проницаемость μ.

59. Найти закон дисперсии электромагнитных волн для волновода круглого сечения с идеально проводящими стенками. Радиус сечения R.

60. Рассмотреть распространение электромагнитных волн вдоль круглого цилиндрического диэлектрического волновода с диэлектрической проницаемостью ε. Радиус волновода R.

61. Определить напряженность электрического поля и собственные частоты электромагнитных волн в круглом цилиндрическом резонаторе. Радиус цилиндра R_1, расстояние между торцами d.

62. Найти полную интенсивность излучения линейной антенны, вдоль которой бежит волна тока $I_0 \cos(\omega t - kz)$ от точки $z = -l/2$ до точки $z = l/2$, где она полностью (без отражения) поглощается.

63. Рассмотреть распространение плоских волн в однородном изотропном диэлектрике, предполагая, что каждый элемент объема излучает сферическую волну, которая распространяется со скоростью c. Определить скорость распространения волн в среде.

64. Показать, что дипольное излучение при столкновении двух одинаковых частиц отсутствует.

65. Найти интенсивность излучения частицы массы m, движущейся по круговой орбите радиуса a под действием кулоновских сил. Ответ выразить через энергию частицы.

66. Определить время, в течение которого частица, движущаяся по круговой орбите, упадет на заряженный центр вследствие потери энергии на электромагнитное излучение.

67. Электрон пролетает на расстоянии d от неподвижного ядра, имеющего заряд $Z|e|$. Расстояние d настолько большое, что скорость движения электрона v меняется незначительно. Определить энергию, теряемую электроном на дипольное излучение.

68. Найти эффективное сечение рассеяния эллиптически поляризованной волны с частотой ω осциллятором, масса которого m, заряд e, собственная частота ω_0, коэффициент затухания γ.

69. Исследовать электромагнитное поле, создаваемое плоскостью $z = 0$, по которой проходит ток с поверхностной плотностью $\vec{i} = \vec{i}_0 e^{iq_x x + iq_y y + iq_z z}$.

70. Диполь с моментом $\vec{p}$, расположенный в начале координат, колеблется с частотой ω. В точке с радиусом-вектором $\vec{d}$ ($\vec{d} \perp \vec{p}$) находится частица с поляризуемостью β. Найти интенсивность излучения электромагнитных волн такой системой, предполагая, что $d \ll \lambda$, где λ — длина волны излучения.

71. Частица с зарядом e, движущаяся со скоростью $\vec{v}$, упруго отражается от некоторой плоскости. Определить длинноволновую часть спектра излучения в момент удара.

72. Заряженная частица тормозится в среде силой, пропорциональной скорости движения частицы. Найти энергию, излучаемую частицей в единицу времени в единицу телесного угла. Начальная скорость движения $\vec{v}_0$.

73. Показать, что два последовательных преобразования Лоренца в одном и том же направлении перестановочны и эквивалентны одному преобразованию Лоренца.

74. Считая, что при малых скоростях частицы выполняется условие $p^2 \ll m^2c^2$, где p — импульс частицы, найти приближенную зависимость энергии частицы от импульса с точностью до члена порядка $(p^2/(mc)^2)^2$.

75. Найти траекторию движения заряженной частицы в однородном электромагнитном поле с напряженностью $\vec{E}_0$. Рассмотреть предельный случай малых скоростей.

76. Рассмотреть траекторию движения заряженной частицы в однородном магнитном поле с магнитной индукцией $\vec{B}$.

77. Найти траекторию движения релятивистской частицы с зарядом e_1 и массой m в поле неподвижного точечного заряда e_2.

78. Частица массы M распадается на две с массами m_1 и m_2. Найти энергию распавшихся частиц в системе центра инерции.

79. Найти закон преобразования энергии и компонентов импульса частицы при переходе к системе, движущейся со скоростью v относительно первоначальной.

80. Найти связь между направлениями скорости частицы в системах, движущихся с относительной скоростью v.

81. Две частицы с массами покоя m_1 и m_2 и энергиями E_{01} и E_{02} упруго рассеиваются друг на друге. Считая, что вторая частица покоится, найти связь между углами рассеяния частиц в лабораторной системе и их энергиями после столкновения E_1 и E_2.

82. Определить зависимость частоты фотона, рассеянного на покоящемся электроне, от угла рассеяния (эффект Комптона).

83. Найти частоту фотона, излучаемого покоящимся возбужденным ядром с массой m, если энергия возбуждения ядра равна ΔE.

84. Показать, что аннигиляция электронно-позитронной пары с излучением одного фотона запрещена законом сохранения энергии-импульса.

85. Зеркало движется со скоростью v в направлении, противоположном собственной нормали. На зеркало падает луч света под углом ϑ. Определить направление отраженной волны и изменение частоты света при отражении.

86. Доказать, что если напряженности электрического и магнитного полей перпендикулярны в одной системе отсчета, то они перпендикулярны и во всех других инерциальных системах отсчета.

87. Найти закон преобразования компонент электрического и магнитного полей в вакууме при переходе к системе, движущейся со скоростью $\vec{v}$.

88. Найти систему отсчета, в которой векторы напряженности электрического и магнитного полей параллельны.

89. Получить выражение для потенциалов равномерно движущегося заряда посредством релятивистского преобразования статического кулоновского поля (потенциалы Лиенара — Вихерта).

90. Используя потенциалы Лиенара — Вихерта (задача 89), определить напряженности электрического и магнитного полей движущегося заряда.

91. Найти формулы преобразования для компонент тензора энергии-импульса.

92. Показать, что волновое уравнение не является инвариантным относительно преобразования Галилея и инвариантно относительно преобразования Лоренца.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Формулы Стокса и Остроградского

Чрезвычайно большую роль в изучении классической электродинамики играют две формулы математического анализа: формула Стокса и формула Остроградского. Учитывая важность этих формул и следствий, вытекающих из них, приведем нестрогое, но простое доказательство справедливости этих формул. Более полное и строгое доказательство можно найти в книге [14, гл. 7].

1. Формула Стокса

Теорема 1. Пусть S — односвязная поверхность, границей которой является контур $L = L' + L''$, $\vec{n}$ — положительная нормаль к поверхности S, $\vec{\tau}$ — касательная к контуру L (рис. 38). Тогда если функция $\varphi(x, y, z)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные, то для нее имеет место формула Стокса

$$\iint\limits_S \left(n_y \frac{\partial \varphi}{\partial z} - n_z \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dS = \oint\limits_L \varphi \tau_x dl. \tag{1}$$

Здесь слева стоит интеграл по поверхности (n_y, n_z — компоненты нормали на оси декартовой системы координат); справа — интеграл по замкнутому контуру (τ_x — компонента единичного вектора, касательного к контуру L).

Доказательство. Поверхность S можно представить графиком дифференцируемой функции $z = z(x, y)$. В этом случае с учетом ориентаций единичных нормалей по отношению к S n_y и n_z могут быть найдены по формулам

$$n_y = \frac{-q}{\sqrt{1+q^2+p^2}}, \quad n_z = \frac{1}{\sqrt{1+q^2+p^2}}, \tag{2}$$

где $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

С помощью соотношений (2) перепишем левую часть равенства (1), обозначив ее

$$I = \iint\limits_S \left(n_y \frac{\partial \varphi}{\partial z} - n_z \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dS = -\iint\limits_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + q \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) n_z dS. \tag{3}$$

Так как на поверхности S функция $\varphi(x, y, z)$ принимает значение $\varphi(x, y, z(x, y))$, то, используя правила дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{\partial}{\partial y}[\varphi(x, y, z(x, y))] = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + q\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Учитывая, что $n_z dS = dxdy$, запишем формулу (3) как

$$I = -\iint \frac{\partial}{\partial y}[\varphi(x, y, z(x, y))]\, dxdy = -\int dx \int \frac{\partial P}{\partial y} dy,$$

где $P(x, y) = \varphi(x, y, z(x, y))$ — значения функции $\varphi(x, y, z)$, которые она принимает в точках поверхности S.

Выполним в этой формуле интегрирование по y:

$$I = -\int\limits_a^b dx\, [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))]. \tag{4}$$

При указанном на рис. 38 обходе контура $L = L' + L^a$ первый интеграл берется по части контура, которую мы обозначили L', по часовой стрелке. Поэтому его можно записать следующим образом:

$$-\int_a^b dx P(x, y_2(x)) = \int_b^a P(x, y_2(x))\, dx.$$

Здесь в правой части интегрирование выполняется при обходе контура против часовой стрелки. Второе слагаемое в (4) представляет собой интеграл по второй части контура L^a при таком же направлении обхода.

Подставляя это выражение в (4), получаем

$$I = \int_b^a dx P(x, y_2(x)) + \int_a^b P(x, y_1(x))\, dx = \oint_L \varphi dx.$$

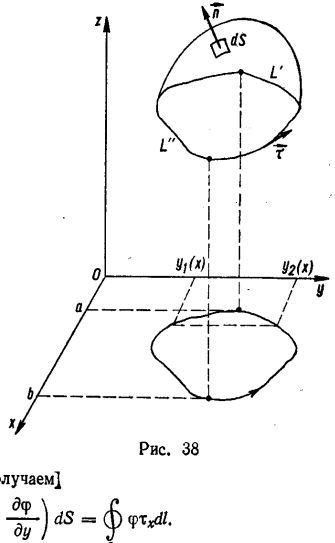


Рис. 38

Но так как $dx = \tau_x dl$, то окончательно получаем

$$I = \iint \left(n_y \frac{\partial \varphi}{\partial z} - n_z \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dS = \oint_L \varphi \tau_x dl.$$

Таким образом, формула (1) доказана. Аналогично доказываются и две другие формулы:

$$\iint \left(n_z \frac{\partial \varphi}{\partial x} - n_x \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dS = \oint_L \varphi \tau_y dl,$$

$$\iint \left(n_x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - n_y \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dS = \oint_L \varphi \tau_z dl.$$

Рассмотрим теперь следующий интеграл по контуру L:

$$\oint_L \varphi \vec{\tau} dl = \oint_L \varphi d\vec{l}.$$

Здесь введено обозначение $\vec{\tau} dl = d\vec{l}$. Применим к этому выражению теорему Стокса

$$\oint_L \varphi d\vec{l} = \oint_L \varphi \vec{\tau} dl = \vec{i} \oint_L \varphi \tau_x dl + \vec{j} \oint_L \varphi \tau_y dl + \vec{k} \oint_L \varphi \tau_z dl =$$

$$= \vec{i} \iint \left(n_y \frac{\partial \varphi}{\partial z} - n_z \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dS + \vec{j} \iint \left(n_z \frac{\partial \varphi}{\partial x} - n_x \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dS +$$

$$+ \vec{k} \iint \left(n_x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - n_y \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dS.$$

С помощью обозначения

$$\vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}$$

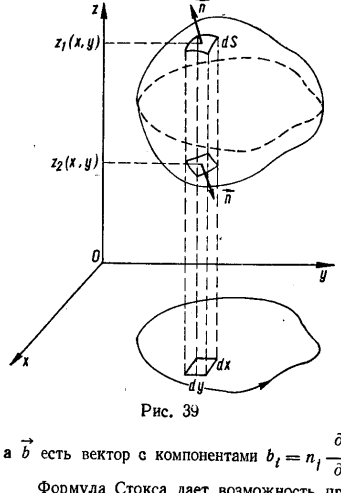


Рис. 39

это равенство можно записать в более компактном виде:

$$\oint_L \varphi d\vec{l} = \iint [\vec{n}, \vec{\nabla} \varphi]\, dS. \quad (5)$$

Аналогично получаются и другие равенства, например,

$$\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} dS, \quad (6)$$

$$\oint_L [\vec{a}, d\vec{l}] = \iint (\vec{b} + \vec{n} \operatorname{div} \vec{a})\, dS, \quad (7)$$

где

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) \vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) \vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) \vec{k},$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

а $\vec{b}$ есть вектор с компонентами $b_l = n_j \frac{\partial a_j}{\partial x_l}$.

Формула Стокса дает возможность преобразовывать интегралы определенного вида по контуру L в интегралы по поверхности и наоборот. Очевидно, что интеграл по данному контуру может быть преобразован в интеграл по любой поверхности, натянутой на данный контур.

2. Формула Остроградского

Теорема 2. Пусть S — замкнутая поверхность, $\vec{n}$ — внешняя нормаль к ней (рис. 39). Тогда если функция $\varphi(x, y, z)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные, то для нее имеет место формула

$$\iiint \frac{\partial \varphi}{\partial z} dV = \iint \varphi n_z dS. \quad (8)$$

Здесь слева стоит интеграл по объему, заключенному внутри замкнутой поверхности S; справа — интеграл по этой поверхности.

Доказательство. Левую часть формулы обозначим через I и запишем ее в виде повторного интеграла

$$I = \iint dxdy \int \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz. \quad (9)$$

Выполним в этой формуле интегрирование по z:

$$I = \iint [\varphi(x, y, z_1(x, y)) - \varphi(x, y, z_2(x, y))]\, dxdy.$$

Интеграл (9) есть сумма интегралов по верхней части поверхности S, уравнение которой есть $z_1(x, y)$, и нижней, уравнение которой $z_2(x, y)$. Поскольку в окрестности точки $z_1(x, y)$, $dxdy = n_z dS$, а в окрестности точки $z_2(x, y)$, $dxdy = -n_z dS$, так как нормаль к этой площадке направлена против внешней нормали, то формулу (9) можно переписать в виде

$$I = \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial z} dV = \iint \varphi n_z dS.$$

Таким образом, формула (9) доказана.

Аналогично доказываются и две другие формулы:

$$\iiint \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dV = \iint \varphi n_y dS,$$

$$\iiint \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dV = \iint \varphi n_x dS.$$

Рассмотрим теперь следующий интеграл по замкнутой поверхности:

$$\iint \varphi \vec{n} dS = \vec{i} \iint \varphi n_x dS + \vec{j} \iint \varphi n_y dS + \vec{k} \iint \varphi n_z dS =$$

$$= \vec{i} \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dV + \vec{j} \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dV + \vec{k} \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dV = \iiint \vec{\nabla} \varphi dV.$$

Аналогично получаем и другие равенства. Например,

$$\iint \varphi \vec{n} dS = \iiint \vec{\nabla} \varphi dV, \tag{10}$$

$$\iint \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \iiint \operatorname{div} \vec{a} dV, \tag{11}$$

$$\iint [\vec{n}, \vec{a}]\, dS = \iiint \operatorname{rot} \vec{a} dV, \tag{12}$$

$$\iint (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} dS = \iiint \Delta \vec{a} dV, \tag{13}$$

$$\iint p_{ij} n_j dS = \iiint \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}\, dV. \tag{14}$$

В последней формуле p_{ij} — тензор второго ранга.

Формула Остроградского дает возможность преобразовывать интегралы определенного вида по поверхности в интегралы по объему и наоборот.

Приложение II

Некоторые наиболее употребительные обозначения и формулы векторного анализа

$$(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} = a_x \frac{\partial \vec{b}}{\partial x} + a_y \frac{\partial \vec{b}}{\partial y} + a_z \frac{\partial \vec{b}}{\partial z}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \vec{\nabla} \varphi = \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \tag{2}$$

$$\Delta \vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial z^2}, \tag{3}$$

$$\operatorname{rot} \vec{\nabla} \varphi = 0, \tag{4}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0, \tag{5}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} = \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{a} - \Delta \vec{a}, \tag{6}$$

$$\operatorname{div} (\varphi \vec{a}) = \varphi \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \varphi, \tag{7}$$

$$\vec{\nabla} (\varphi f) = \varphi \vec{\nabla} f + f \vec{\nabla} \varphi, \tag{8}$$

$$\operatorname{rot} (\varphi \vec{a}) = \varphi \operatorname{rot} \vec{a} + [\vec{\nabla} \varphi, \vec{a}], \tag{9}$$

$$\operatorname{div} [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{b} \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \operatorname{rot} \vec{b}, \tag{10}$$

$$\vec{\nabla} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} + [\vec{a}, \operatorname{rot} \vec{b}] + [\vec{b}, \operatorname{rot} \vec{a}], \tag{11}$$

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla} a^2 = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} + [\vec{a}, \operatorname{rot} \vec{a}], \tag{12}$$

$$\operatorname{rot} [\vec{a}, \vec{b}] = (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + \vec{a} \operatorname{div} \vec{b} - \vec{b} \operatorname{div} \vec{a}. \tag{13}$$

Приложение III

Криволинейные координаты

Многие задачи физики можно решить проще, если вместо декартовых координат пользоваться другими координатами, которые естественным образом связаны с той или иной задачей. Так, например, в задачах с осевой симметрией удобно пользоваться цилиндрической системой координат; если задача имеет сферическую симметрию — сферической системой координат и т. д. Такие координаты называются криволинейными в отличие от декартовых, прямолинейных координат.

Поскольку векторы и операции над ними (div, rot и др.) определяются в декартовой системе координат, то необходимо иметь формулы, выражающие эти операции в произвольной системе координат.

1. Проекция вектора в произвольной системе координат. Пусть задана криволинейная система координат

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3), \\ y &= y(q_1, q_2, q_3), \\ z &= z(q_1, q_2, q_3) \end{aligned} \tag{1}$$

или в векторном виде

$$\vec{r} = x(q_1, q_2, q_3) \vec{i} + y(q_1, q_2, q_3) \vec{j} + z(q_1, q_2, q_3) \vec{k}.$$

Производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} &= \frac{\partial x}{\partial q_1} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \vec{k}, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} &= \frac{\partial x}{\partial q_2} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_2} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_2} \vec{k}, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} &= \frac{\partial x}{\partial q_3} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_3} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_3} \vec{k} \end{aligned} \tag{2}$$

в общем случае образуют тройку линейно независимых векторов, поскольку якобиан перехода (1) отличен от нуля. Модули этих векторов соответственно равны

$$\begin{aligned} H_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}, \\ H_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}, \\ H_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2} \end{aligned} \tag{3}$$

и называются параметрами Ламе.

Если каждый из векторов (2) разделить соответственно на его модуль (3)

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}, \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}, \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}, \tag{4}$$

то получим тройку единичных векторов, которые можно выбрать за базис.

В общем случае этот базис неортогональный, но в дальнейшем будем пользоваться такими специальными криволинейными системами координат, базис которых, определяемый формулами (4), является ортогональным. Базис ортогональных криволинейных систем координат имеет следующие свойства:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0,$$

$$\vec{e}_1 = [\vec{e}_2, \vec{e}_3], \quad \vec{e}_2 = [\vec{e}_3, \vec{e}_1], \quad \vec{e}_3 = [\vec{e}_1, \vec{e}_2].$$

Связь между декартовым базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ определяется формулами (2) — (4).

Рассмотрим частный случай цилиндрической системы координат. Формулы (1) для этой системы имеют вид

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z$$

или в векторном виде

$$\vec{r} = \rho\cos\varphi\,\vec{i} + \rho\sin\varphi\,\vec{j} + z\vec{k}.$$

Если обозначить $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$, то в соответствии с формулами (3) параметры Ламе будут

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1.$$

По формулам (4) находим связь между декартовым и цилиндрическим базисом, который обозначим $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$:

$$\vec{e}_\rho = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi,$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi, \tag{5}$$

$$\vec{e}_z = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{k}.$$

Непосредственной проверкой устанавливаем, что базис ортогональный:

$$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_\rho = 0.$$

Из формулы (5) находим

$$\vec{i} = -\vec{e}_\varphi\sin\varphi + \vec{e}_\rho\cos\varphi,$$

$$\vec{j} = \vec{e}_\varphi\cos\varphi + \vec{e}_\rho\sin\varphi, \tag{6}$$

$$\vec{k} = \vec{e}_z.$$

Теперь можно найти проекцию любого вектора $\vec{a}$ на базис криволинейной системы координат:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = a_\rho\vec{e}_\rho + a_\varphi\vec{e}_\varphi + a_z\vec{e}_z. \tag{7}$$

Подставляя формулы (5) в выражение (7), получаем

$$a_x = a_\rho\cos\varphi - a_\varphi\sin\varphi,$$

$$a_y = a_\rho\sin\varphi + a_\varphi\cos\varphi, \tag{8}$$

$$a_z = a_z.$$

Аналогично находим связь между декартовым базисом и базисом сферической системы координат:

$$x = r\cos\varphi\sin\Theta,$$

$$y = r\sin\Theta\sin\varphi,$$

$$z = r\cos\Theta.$$

Приводим для справок готовый результат:

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r\sin\Theta,$$

$$\vec{e}_r = \vec{i}\sin\Theta\cos\varphi + \vec{j}\sin\Theta\sin\varphi + \vec{k}\cos\Theta,$$

$$\vec{e}_\varphi = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi,$$

$$\vec{e}_\Theta = \vec{i}\cos\Theta\cos\varphi + \vec{j}\cos\Theta\sin\varphi - \vec{k}\sin\Theta.$$

Этот базис также ортогонален, т. е.

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\Theta = \vec{e}_\Theta \cdot \vec{e}_r = 0.$$

Проекции вектора a связаны между собой соотношениями

$$a_x = a_r\sin\Theta\cos\varphi + a_\Theta\cos\Theta\cos\varphi - a_\varphi\sin\varphi,$$

$$a_y = a_r\sin\Theta\sin\varphi + a_\Theta\cos\Theta\sin\varphi + a_\varphi\cos\varphi,$$

$$a_z = a_r\cos\Theta - a_\Theta\sin\Theta,$$

или

$$a_r = a_x\sin\Theta\cos\varphi + a_y\sin\Theta\sin\varphi + a_z\cos\Theta,$$

$$a_\Theta = a_x\cos\Theta\cos\varphi + a_y\cos\Theta\sin\varphi - a_z\sin\Theta,$$

$$a_\varphi = -a_x\sin\varphi + a_y\cos\varphi.$$

2. Операция $\vec{\nabla}$ в криволинейной системе координат. Операция $\vec{\nabla}$ в декартовой системе координат определяется следующим образом:

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = \left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q_3}\frac{\partial q_3}{\partial x}\right)\vec{i} +$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial q_3}\frac{\partial q_3}{\partial y}\right)\vec{j} +$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial q_3}\frac{\partial q_3}{\partial z}\right)\vec{k} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial q_1}\left(\frac{\partial q_1}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial q_1}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial q_1}{\partial z}\vec{k}\right) + \frac{\partial f}{\partial q_2}\left(\frac{\partial q_2}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial q_2}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial q_2}{\partial z}\vec{k}\right) +$$

$$+\frac{\partial f}{\partial q_3}\left(\frac{\partial q_3}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial q_3}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial q_3}{\partial z}\vec{k}\right) = \frac{\partial f}{\partial q_1}\vec{\nabla}q_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}\vec{\nabla}q_2 + \frac{\partial f}{\partial q_3}\vec{\nabla}q_3. \tag{9}$$

Рассмотрим вектор $\vec{\nabla}q_1$. Скалярные произведения его на орты $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ соответственно равны:

$$(\vec{\nabla}q_1 \cdot \vec{e}_1) = \frac{1}{H_1}\left(\frac{\partial q_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial q_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{\partial q_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right) = \frac{1}{H_1}\frac{\partial q_1}{\partial q_1} = \frac{1}{H_1},$$

$$(\vec{\nabla}q_1 \cdot \vec{e}_2) = \frac{1}{H_2}\left(\frac{\partial q_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial q_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial q_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_2}\right) = \frac{1}{H_2}\frac{\partial q_1}{\partial q_2} = 0,$$

$$(\vec{\nabla}q_1 \cdot \vec{e}_3) = 0,$$

откуда делаем вывод, что вектор $\vec{\nabla}q_1$ совпадает по направлению с $\vec{e}_1$, а его модуль равен $1/H_1$. Отсюда следует, что

$$\vec{\nabla}q_1 = \frac{1}{H_1}\vec{e}_1. \tag{10}$$

Аналогично находим

$$\vec{\nabla}q_2 = \frac{1}{H_2}\vec{e}_2, \quad \vec{\nabla}q_3 = \frac{1}{H_3}\vec{e}_3.$$

Подставляя найденные формулы в (9), получаем

$$\vec{\nabla}f = \frac{1}{H_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\vec{e}_3. \tag{11}$$

Для цилиндрической системы координат

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1,$$

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z. \tag{12}$$

Для сферической системы координат

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r\sin\Theta,$$

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \Theta}\vec{e}_\Theta + \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi. \tag{13}$$

3. Операция div *в криволинейной системе координат.* В декартовой системе координат операция div определяется как

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{14}$$

Если разложить вектор $\vec{a}$ вдоль ортов криволинейной системы координат и воспользоваться формулой (7) приложения II, то найдем

$$\operatorname{div}(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) =$$

$$= a_1 \operatorname{div}\vec{e}_1 + a_2 \operatorname{div}\vec{e}_2 + a_3 \operatorname{div}\vec{e}_3 + \vec{e}_1 \cdot \vec{\nabla}a_1 + \vec{e}_2 \cdot \vec{\nabla}a_2 + \vec{e}_3 \cdot \vec{\nabla}a_3.$$

Вычислим $\operatorname{div}\vec{e}_1$, $\operatorname{div}\vec{e}_2$, $\operatorname{div}\vec{e}_3$. Для этого применим к формуле (10) операцию rot:

$$\operatorname{rot}(\vec{\nabla}q_1) = \operatorname{rot}\left[\frac{1}{H_1}\vec{e}_1\right]. \tag{15}$$

Воспользовавшись формулами (4) и (9) приложения II, найдем

$$0 = \frac{1}{H_1}\operatorname{rot}\vec{e}_1 - \frac{1}{H_1^2}[\vec{\nabla}H_1, \vec{e}_1],$$

откуда

$$\operatorname{rot}\vec{e}_1 = \frac{1}{H_1}[\vec{\nabla}H_1, \vec{e}_1]. \tag{16}$$

Согласно формуле (11),

$$\vec{\nabla}H_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\vec{e}_3. \tag{17}$$

Подставляя выражение (17) в (16) и пользуясь свойствами ортогональности базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, имеем

$$\operatorname{rot}\vec{e}_1 = \frac{1}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\vec{e}_2 - \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\vec{e}_3. \tag{18}$$

Аналогично находим

$$\operatorname{rot}\vec{e}_2 = \frac{1}{H_2H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\vec{e}_3 - \frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\vec{e}_1, \tag{19}$$

$$\operatorname{rot}\vec{e}_3 = \frac{1}{H_3H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\vec{e}_1 - \frac{1}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\vec{e}_2. \tag{20}$$

Поскольку $\vec{e}_1 = [\vec{e}_2, \vec{e}_3]$, то воспользовавшись формулой (10) приложения II, имеем

$$\operatorname{div}\vec{e}_1 = \operatorname{div}[\vec{e}_2, \vec{e}_3] = \vec{e}_3 \cdot \operatorname{rot}\vec{e}_2 - \vec{e}_2 \cdot \operatorname{rot}\vec{e}_3. \tag{21}$$

Подставляя формулы (19) и (18) в (21), находим

$$\operatorname{div}\vec{e}_1 = \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_1H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}. \tag{22}$$

Аналогично получим

$$\operatorname{div}\vec{e}_2 = \frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2} + \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}, \tag{23}$$

$$\operatorname{div}\vec{e}_3 = \frac{1}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3} + \frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}. \tag{24}$$

Используя формулы (22) — (24), а также выражения для $\vec{\nabla}q_1, \vec{\nabla}q_2, \vec{\nabla}q_3$, согласно формулам (11) в (14), после алгебраических преобразований имеем

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(a_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(a_2H_1H_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(a_3H_1H_2)\right]. \tag{25}$$

Подставим в выражение (25) параметры Ламе для цилиндрической системы координат:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho a_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{26}$$

Аналогично для сферической системы координат

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2a_r) + \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial \Theta}(\sin\Theta a_\Theta) + \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}. \tag{27}$$

4. Операция rot *в криволинейных координатах.* Используя формулу (9) приложения II, имеем

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \operatorname{rot}(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) =$$

$$= a_1 \operatorname{rot}\vec{e}_1 + a_2 \operatorname{rot}\vec{e}_2 + a_3 \operatorname{rot}\vec{e}_3 + [\vec{\nabla}a_1, \vec{e}_1] + [\vec{\nabla}a_2, \vec{e}_2] + [\vec{\nabla}a_3, \vec{e}_3]. \tag{28}$$

Подставляя формулы (18) — (20) и (11) в выражение (28), после алгебраических преобразований найдем

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(a_3H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(a_2H_2)\right]\vec{e}_1 +$$

$$+ \frac{1}{H_1H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(a_1H_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(a_3H_3)\right]\vec{e}_2 + \frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(a_2H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(a_1H_1)\right]\vec{e}_3.$$

Приводим для справок выражение $\operatorname{rot}\vec{a}$ в цилиндрических координатах:

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho+\left(\frac{\partial a_\rho}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial\rho}\right)\vec{e}_\varphi+$$
$$+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho a_\varphi)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_z, \qquad (29)$$

в сферических координатах:

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\frac{1}{r\sin\Theta}\left[\frac{\partial}{\partial\Theta}(\sin\Theta a_\varphi)-\frac{\partial a_\Theta}{\partial\varphi}\right]\vec{e}_r+$$
$$+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi)\right]\vec{e}_\Theta+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_\Theta)-\frac{\partial a_r}{\partial\Theta}\right]\vec{e}_\varphi. \qquad (30)$$

5. Операция Δf в криволинейных координатах. Поскольку $\Delta f\equiv\operatorname{div}\vec{\nabla}f$, то подставляя $\vec{\nabla}f$, согласно формулам (11) и (25), находим

$$\operatorname{div}\vec{\nabla}f\equiv\Delta f=$$
$$=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\right)}{\partial q_1}+\frac{\partial\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right)}{\partial q_2}+\frac{\partial\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\right)}{\partial q_3}\right].$$

В цилиндрических координатах

$$\Delta f=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=$$
$$=\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \qquad (31)$$

В сферических координатах

$$\Delta f=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial f}{\partial\Theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\Theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}. \qquad (32)$$

6. Операция $\Delta\vec{a}$ в криволинейных координатах. Операция $\Delta\vec{a}=\frac{\partial^2\vec{a}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{a}}{\partial y^2}+$ $+\frac{\partial^2\vec{a}}{\partial z^2}$ в криволинейной системе координат определяется с помощью формулы (6) приложения II:

$$\Delta\vec{a}=\vec{\nabla}\operatorname{div}\vec{a}-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}.$$

Поскольку общая формула очень громоздка, приведем для справок выражение для $\Delta\vec{a}$ в цилиндрической системе координат:

$$\Delta\vec{a}=\left(\Delta a_\rho-\frac{a_\rho}{\rho^2}-\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_\rho+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\Delta a_\varphi-\frac{a_\varphi}{\rho^2}+\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_\varphi+\Delta a_z\vec{e}_z, \qquad (33)$$

и в сферической системе координат:

$$\Delta\vec{a}=\left[\Delta a_r+\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(ra_r)-\frac{2}{r}\operatorname{div}\vec{a}\right]\vec{e}_r+$$
$$+\left[\Delta a_\Theta+\frac{2}{r^2}\left(\frac{\partial a_r}{\partial\Theta}-\frac{a_\Theta}{2\sin^2\Theta}-\frac{\cos\Theta}{\sin^2\Theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right)\right]\vec{e}_\Theta+$$
$$+\left[\Delta a_\varphi+\frac{2}{r^2\sin\Theta}\left(\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}+\operatorname{ctg}\Theta\frac{\partial a_\Theta}{\partial\varphi}-\frac{a_\varphi}{2\sin\Theta}\right)\right]\vec{e}_\varphi. \qquad (34)$$

Операция Δ в формулах (33) и (34) такая же, как и в формулах (31) и (32) соответственно.

Аберрация света 130, 131

Брюстера угол 215

Векторный потенциал магнитного поля 25, 49, 68, 69, 71, 124
Волновод металлический 203
Волноводы 203
Волны альфвеновские 256
— гибридные 208, 209, 256
— замедленные 234
Восприимчивость линейная 13, 37, 184
— квадратичная 184

Геометрической оптики приближение 197
Гиромагнитное отношение 32
Градиентное преобразование второго рода 51
Граничные условия 159
Групповая скорость 195, 220

Д'Аламбера оператор 124
Деполяризующее поле 162
Джоуля — Ленца закон 152
Дипольное приближение 75
Дипольный момент 14, 16, 76, 77, 78, 162
Дисперсионное уравнение 62, 63, 208, 219
Дисперсия диэлектрической проницаемости 179
Диффузионный ток 153
Диэлектрик 144
Диэлектрическая восприимчивость 146
— проницаемость 146
Доплера эффект 130
— — поперечный 130

Емкость конденсатора 242

Импульс 192, 194
Импульса электромагнитного поля объемная плотность 47

Калибровка кулоновская 51
— Лоренца 51
— поперечная 51
Калибровочная инвариантность 47, 49
Квадрупольный момент 16, 17
Квазистационарное приближение 78, 230, 233, 236
Кирхгофа правило второе 247
— — первое 246
Ковариантные компоненты 121, 122
Контравариантные компоненты 121, 122, 123
Коэффициент взаимной емкости 237
— — индукции 237
— емкости 242
— самоиндукции 237
— электромеханической связи 236
— электростатической индукции 242
Крамерса — Кронига соотношения 180, 181
Круговая поляризация 65
Кулона закон 7

Лапласа уравнение 12
Линейно поляризованные волны 63, 72
Локальное поле 170
Лоренц — Лоренца формула 173
Лоренца преобразование 105, 106, 107, 109, 110, 120, 127
— сила 35, 126
— функция распределения 96
Лучистого трения коэффициент 95
— — сила 94

Магнитная восприимчивость 150
— гидродинамика 252
— постоянная 21
— проницаемость 150
Магнитное давление 254
Магнитной индукции вектор 22, 23, 26
Магнитный момент 29
Магнитостатики уравнения 159
Матрица емкостных коэффициентов 242
Мода 208
Момент импульса электромагнитного поля 140

Наблюдения точка 8
Направленности диаграмма 203
Напряженность магнитного поля 78, 150
— электрического поля 8, 10, 12, 14
Нелинейность квадратичная 184, 221
Необыкновенная волна 219

Одноосные кристаллы 218
Оптическая ось кристалла 218
Оптически неоднородная среда 196

Падение напряжения на емкости 247
— — — индуктивности 247
— — — резонаторе 247
Пакет волновой 192
Парадокс часов 132
Параметрический резонанс 222, 224
Плазма 185
— замагниченная 187
Плазменные продольные колебания 188
Плоскополяризованные волны 63, 64, 188
Пойнтинга вектор 44
Показатель преломления 183
Поляризация 62
— круговая 65
Постоянная тонкой структуры 36, 202
Потенциал запаздывающий 54
— опережающий 54
— скалярный 8, 9, 14, 49, 51
Потенциалы Лиенара — Вихерта 81, 83
Преломления закон 200
Принцип относительности Галилея 101
— причинности 52, 180
— суперпозиции 8
Пуассона уравнение 12

Реактивное отражение 250
Реакция излучения 94
Резонатор 208, 210, 211
Резонатора собственные частоты 210
Рейнольдса магнитное число 257

Симметрия калибровочная 50
Синхронизм пространственный 223
Синхротронное излучение 116
Скин-эффект 231
Снелля (Снеллиуса) закон 200
Сторонняя э. д. с. 247

Тензор диэлектрической проницаемости 147, 217
— метрический 121
— натяжения максвелловский 47
— плотности энергии импульса 138
— пьезомодулей 147
— спиновой плотности 142
Ток намагничения 28, 149
— смещения 146
Токи Фуко 232

Ферма принцип 199, 200
Френеля формулы 214, 215
Фронт плоской волны 61

Циклотронное излучение 116
Циркулярно поляризованная волна 65, 189, 190

Частота граничная 207
Черенкова — Вавилова излучение 201
Черенковский угол 202
Четырехмерный вектор 110

Эйконал 198
Эйкональное приближение 197
Электрическая постоянная 7
Электрический потенциал 7
Электрического поля напряженность 8, 78
Электрической силы объемная плотность 9
Электрона классический радиус 99
Электронная циклотронная частота 187
Электростатики уравнение 159
Энергии электромагнитного поля объемная плотность 44
Энергия покоя 113
— связи 113
Эффективное сечение 92

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля.— М.: Наука, 1973.— 904 с.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред.— М.: Наука, 1982.— 623 с.
3. *Сугаков В. И.* Теоретична фізика. Електродинаміка.— К.: Вища шк. Головне вид-во, 1974.— 272 с.
4. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества.— М.: Наука, 1976.— 616 с.
5. *Терлецкий Я. П., Рыбаков Ю. П.* Электродинамика.— М.: Высш. шк., 1980.— 335. с.
6. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика.— М.: Мир, 1965.— 702 с.
7. *Пановский В., Филипс М.* Классическая электродинамика.— М.; Физматгиз, 1963.— 432 с.
8. *Матвеев А. Н.* Электродинамика.— М.: Высш. шк., 1980.— 383 с.
9. *Де Гроот С., Сатторп Л. Г.* Электродинамика.— М.: Наука, 1982.— 560 с.
10. *Стреттон Дж. А.* Теория электромагнетизма.— М.; Л.: ГТТИ, 1948.— 539 с.
11. *Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н.* Классическая электродинамика.— М.: Наука, 1985.— 400 с.
12. *Федорченко А. М.* Теоретическая физика. Классическая механика.— К.: Вища шк. Головное изд-во, 1983.— 351 с.
13. *Федорченко А. М., Коцаренко Н. Я.* Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах.— М.: Наука, 1981.— 176 с.
14. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа.— М.: Наука, 1980.— Ч. 2.— 447 с.
15. *Новожилов Ю. В., Яппа Ю. А.* Электродинамика.— М.: Наука, 1978.— 352 с.

Предисловие 3

Часть I

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Глава 1. Экспериментальные основы и математическая формулировка фундаментальных законов классической электродинамики 5

§ 1. Закон Кулона. Принцип суперпозиции 5
§ 2. Теорема Гаусса. Уравнение Пуассона 9
§ 3. Разложение скалярного потенциала по мультиполям. Электрический диполь. Квадруполь 14
§ 4. Закон Био — Савара — Лапласа — Ампера — Эрстеда. Магнитное поле. Вектор магнитной индукции 18
§ 5. Разложение векторного потенциала по мультиполям. Магнитный диполь 28
§ 6. Природа электрического поля. Закон сохранения заряда 33
§ 7. Закон электромагнитной индукции Фарадея 36
§ 8. Полная система уравнений классической электродинамики. Системы единиц 40

Глава 2. Закон сохранения и методы описания электромагнитного поля 43

§ 9. Энергия, импульс и момент импульса электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга 43
§ 10. Скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля. Калибровочная инвариантность уравнений Максвелла 49
§ 11. Запаздывающие и опережающие потенциалы 52
§ 12. Спектральное разложение. Комплексное представление физических величин 55
§ 13. Плоская монохроматическая электромагнитная волна 60
§ 14. Электромагнитное поле как совокупность гармонических осцилляторов 66

Глава 3. Излучение и распространение электромагнитных волн 72

§ 15. Электрическое дипольное излучение 72
§ 16. Электрическое квадрупольное и магнитное дипольное излучение . . . 78
§ 17. Электромагнитное поле ускоренно движущегося заряда. Потенциалы Лиенара — Вихерта 81
§ 18. Энергия, излучаемая ускоренно движущейся заряженной частицей . . . 87
§ 19. Рассеяние электромагнитных волн свободными зарядами 90
§ 20. Реакция излучения. Радиационная ширина спектральных линий . . . 93
§ 21. Дифракция электромагнитных волн. Формула Грина 96

Глава 4. Основы специальной теории относительности 101

§ 22. Экспериментальные основы теории относительности. Преобразование Лоренца 101
§ 23. Основы релятивистской классической механики 108
§ 24. Функция Лагранжа для релятивистской заряженной частицы в электромагнитном поле 117
§ 25. Релятивистская инвариантность уравнений Максвелла 119

§ 26. Преобразование Лоренца для полей. Эффект Доплера. Аберрация света. Опыт Физо 127
§ 27. Принцип наименьшего действия для электромагнитного поля 133
§ 28. Законы сохранения в четырехмерной форме 137

Часть II

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Глава 5. Модель сплошной среды в электродинамике 144

§ 29. Диэлектрики 144
§ 30. Магнетики 148
§ 31. Проводники. Сверхпроводники 151
§ 32. Система уравнений Максвелла в сплошной среде. Граничные условия . . 155
§ 33. Термодинамические соотношения для вещества в электрическом и магнитном полях 162
§ 34. Силы, действующие на диэлектрики, магнетики и проводники 165
§ 35. Теория локального поля 169
§ 36. Электродинамика движущихся сред 173

Глава 6. Распространение электромагнитных волн в сплошных средах 177

§ 37. Частотная дисперсия диэлектрической проницаемости. Соотношения Крамерса — Кронига 177
§ 38. Диэлектрическая проницаемость разреженной плазмы 185
§ 39. Распространение электромагнитных сигналов в диспергирующей среде. Групповая скорость 191
§ 40. Геометрическая оптика. Эйкональное приближение 196
§ 41. Излучение Черенкова — Вавилова 200
§ 42. Распространение волн в ограниченных средах. Волноводы и резонаторы 202
§ 43. Преломление и отражение электромагнитных волн на границе раздела двух диэлектриков. Формулы Френеля 211
§ 44. Распространение плоских монохроматических волн в анизотропных кристаллах. Кристаллооптика 217
§ 45. Нелинейные эффекты в оптике. Генерация второй гармоники 221

Глава 7. Квазистационарные электромагнитные поля 230

§ 46. Квазистационарное приближение для магнитного поля. Скин-эффект 230
§ 47. Электродвижущая сила индукции в случае линейных проводников и квазистационарных полей 236
§ 48. Емкость системы проводников 239
§ 49. Правила Кирхгофа 245
§ 50. Длинные линии 248
§ 51. Уравнения магнитной гидродинамики 252
§ 52. Течение Гартмана 256

Задачи для самостоятельной работы 260

Приложения 265

Приложение I. Формулы Стокса и Остроградского 265
Приложение II. Некоторые наиболее употребительные обозначения и формулы векторного анализа 268
Приложение III. Криволинейные координаты 269

Предметный указатель 275

Список рекомендуемой литературы 277