СПІРАЛЬНІ ХВИЛІ В СЕРЕДОВИЩАХ ІЗ ВІДНОВЛЕННЯМ

ВСТУП (1слайд)

Середовища з відновленням (інакше їх називають збудливими середовищами) схожі на бістабільні(двох локально стабільних станів при однакових зовнішніх чинниках), але в них один із стаціонарних станів є метастабільним(відносно стійкий стан системи, в якому встановлюється локальна (обмежена), але не глобальна стійка рівновага що й намальовано на рисунку), так що через деякий скінчений проміжок часу після збудження середовища спонтанно переходять в основний стан.

Середовища з відновленням описуються системою двох нелінійних кінетичних рівнянь із дифузією:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = f_1(u,v) + D_1 \Delta u; \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = f_2(u,v) + D_2 \Delta v. \end{cases} \qquad (2.2.34)$$

Для стаціонарного однорідного випадку система (2.2.34) набуває вигляду

$$\begin{cases} f_1(u,v) = 0; \\ f_2(u,v) = 0. \end{cases} \qquad (2.2.34\text{ а})$$

Нас цікавитиме випадок, коли система (2.2.34 а) має єдиний стійкий розв'язок $u = u_0,\ v = v_0$.

Аналітичне дослідження системи (2.2.34) можливе тоді, коли характерні часи зміни величин u і v істотно відмінні. Нехай, наприклад, величина u змінюється швидко, а величина v – повільно. Тоді для останньої дифузією можна знехтувати, вважаючи, що помітні градієнти цієї величини не виникають. У результаті система (2.2.34) набирає вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = f_1(u,v) + D \Delta u; \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \mu f_2(u,v), \quad \mu << 1. \end{cases} \qquad (2.2.34\text{ б})$$

Систему рівнянь (2.2.34 б) можна розв'язувати шляхом виділення ділянок швидкого і повільного руху.

Для питань: **Стаціона́рний стан** дисипати́вної систе́ми — **стан** відкритої нелінійної дисипативної системи, при якому швидкості зміни всіх процесів дорівнюють нулю.

2слайд

Щоб зрозуміти механізм виникнення ревербератора в однорідному середовищі з відновленням розглянемо спочатку поширення біжучого імпульсу вздовж тонкого кільця радіуса R. Якщо кільце тонке, задачу можна вважати одновимірною. Їй відповідає той самий розв'язок, що й періодичній послідовності імпульсів із просторовим періодом L= 2πR . Швидкість імпульсів зростає із збільшенням L і прямує до граничного значення V0 , коли L стає значно більшим від довжини одиночного біжучого імпульсу.

При збільшенні зовнішнього радіуса кільця до нескінченності ми прийдемо до задачі про біжучий імпульс, що обертається навколо отвору радіусу R .

На перший погляд, фронт такого імпульсу являтиме собою промінь, що обертається з частотою ω . Але насправді це не так, бо в такому випадку далеко від кільця швидкість фронту необмежено зростатиме, тоді як вона має дорівнювати певній скінченій величині V0 (тут і нижче залежністю швидкості фронту від його кривини нехтуємо).

Отже, віддалені ділянки фронту відстають, в результаті чого сам фронт скручується в спіраль. Спіральна хвиля в середовищі з відновленням, що обертається навколо кільця, була вперше розглянута в роботі Н. Вінера та А. Розенблюта4 .

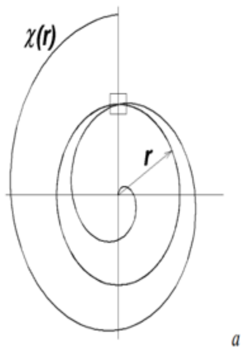
3слайд

Розрахунок форми фронту спіральної хвилі

Нехай у стаціонарному режимі спіраль незмінної форми обертається з кутовою швидкістю ω. Положення її фронту визначається співвідношенням $\varphi(r,t)=\omega t-\chi(r)$, де функція $\chi(r)$ визначає форму спіралі (рис. 2.3.2 а). Як видно з рис. 2.3.2б, швидкість Vτ точки перетину спіралі з кільцем r = const складає величину V0/cosα, де α – кут між нормаллю до хвильового фронту і дотичною до кільця.

кут π/2- α можна записати через похідну функції, що описує форму фронту:

$$tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\alpha=\frac{d\left[r(\varphi)\right]}{d(r\varphi)}=\frac{1}{r}\frac{dr(\varphi)}{d\varphi}=\frac{1}{r}\left[\frac{d\chi(r)}{dr}\right]^{-1} \quad (2.3.10)$$



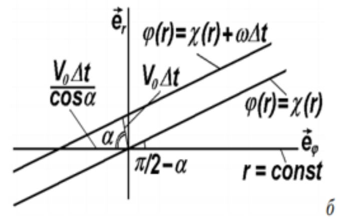


Рис. 2.3.2. Форма фронту спіральної хвилі χ(r) та її перетин з лінією r=const (рисунок праворуч є збільшеним фрагментом лівого рисунку).

(враховано, що на рис. 2.3.2б по осі абсцис відкладена величина rφ, по осі ординат – r).

Тоді з (2.3.10) можна знайти cos α :

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+r^2\left(d\chi/dr\right)^2}}. \quad (2.3.11)$$

4слайд

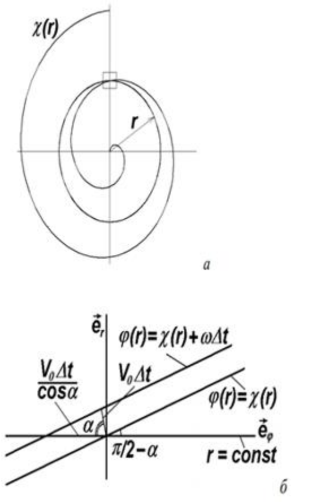


Рис. 2.3.2. Форма фронту спіральної хвилі χ(r) та її перетин з лінією r=const (рисунок внизу є збільшеним фрагментом верхнього рисунку).

Таким чином,

$$V_\tau = \frac{V_0}{\cos\alpha} = V_0\sqrt{1 + r^2\left(d\chi/dr\right)^2}\,. \qquad (2.3.12)$$

З іншого боку, оскільки спіраль обертається як ціле з частотою ω, то $V_\tau = \omega r$. Підставивши останнє співвідношення до (2.3.12), отримуємо рівняння щодо невідомої функції $d\chi(r)/dr$ у формі

$$\omega r = V_0\sqrt{1 + r^2\left(d\chi/dr\right)^2}\,. \qquad (2.3.13)$$

Частоту ω обертання спіралі визначимо з умови, що до центрального отвору радіусу R фронт підходить під прямим кутом ($\alpha = \pi/2$), тобто $V_0 = \omega R$. Тоді (2.3.13) набуває вигляду:

$$r = R\sqrt{1 + r^2\left(d\chi/dr\right)^2}\,. \qquad (2.3.14)$$

Розв'язавши (2.3.14) щодо $d\chi(r)/dr$, отримаємо диференціальне рівняння, яке визначає форму фронту спіральної хвилі:

$$\left(\frac{d\chi}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{R^2}\,. \qquad (2.3.15)$$

Таким чином, форма спіралі визначається співвідношенням

$$\chi(r) = \int_R^r \sqrt{\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2}}\,dr\,. \qquad (2.3.16)$$

Спіральні хвилі в неоднорідних та нестаціонарних середовищах

У неоднорідному середовищі з відновленням спостерігається ефект дрейфу спіральної хвилі: за певних умов її центр рухається по прямій лінії в напрямку, який визначається напрямком зміни властивостей середовища та деякими параметрами цього середовища. Швидкість такого дрейфу прямо пропорційна до швидкості поширення біжучого імпульсу та обернено пропорційна до характерного розміру неоднорідності. Якщо властивості активного середовища з часом змінюються – наприклад, модулюються за періодичним законом із деякою частотою, то центр спіральної хвилі буде рухатися по колу, радіус якого пропорційний до глибини модуляції та обернено пропорційний до різниці частот спіральної хвилі та модуляції. Коли ця різниця дорівнює нулеві (випадок резонансу), центр спіралі рухатиметься по прямій. Швидкість руху в обох випадках пропорційна добутку швидкості поширення біжучого імпульсу на глибину модуляції. Описане явище спостерігалося в експерименті, коли шар розчину, в якому відбувалася світлочутлива реакція Бєлоусова – Жаботинського, піддавали періодичному освітленню. Природа обох згаданих ефектів пов'язана з тим, що радіус ядра спіральної хвилі складним чином (в загальному випадку – із запізненням) залежить від властивостей активного середовища. В результаті внутрішній край спіралі рухатиметься вже не по колу, а по деякій незамкненій кривій (в найпростішому випадку дрейфу та резонансу – по кривій типу трохоїди; траєкторії такого типу виходять при накладанні обертового та поступального руху).