



# Комп'ютерна фізика

---

*“Моделювання випадкових  
процесів із заданими  
кореляційними  
властивостями”*

# Загальний опис випадкового процесу

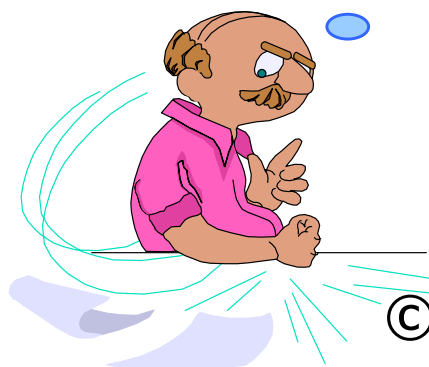
Випадковий процес повністю характеризує його багатовимірна функція густини ймовірності

$$p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$$

$$x_i = x(t_i) \quad \vec{x}_i = \vec{x}(t_i)$$

$$x(t) = \operatorname{Re}(x(t)) + i \operatorname{Im}(x(t))$$

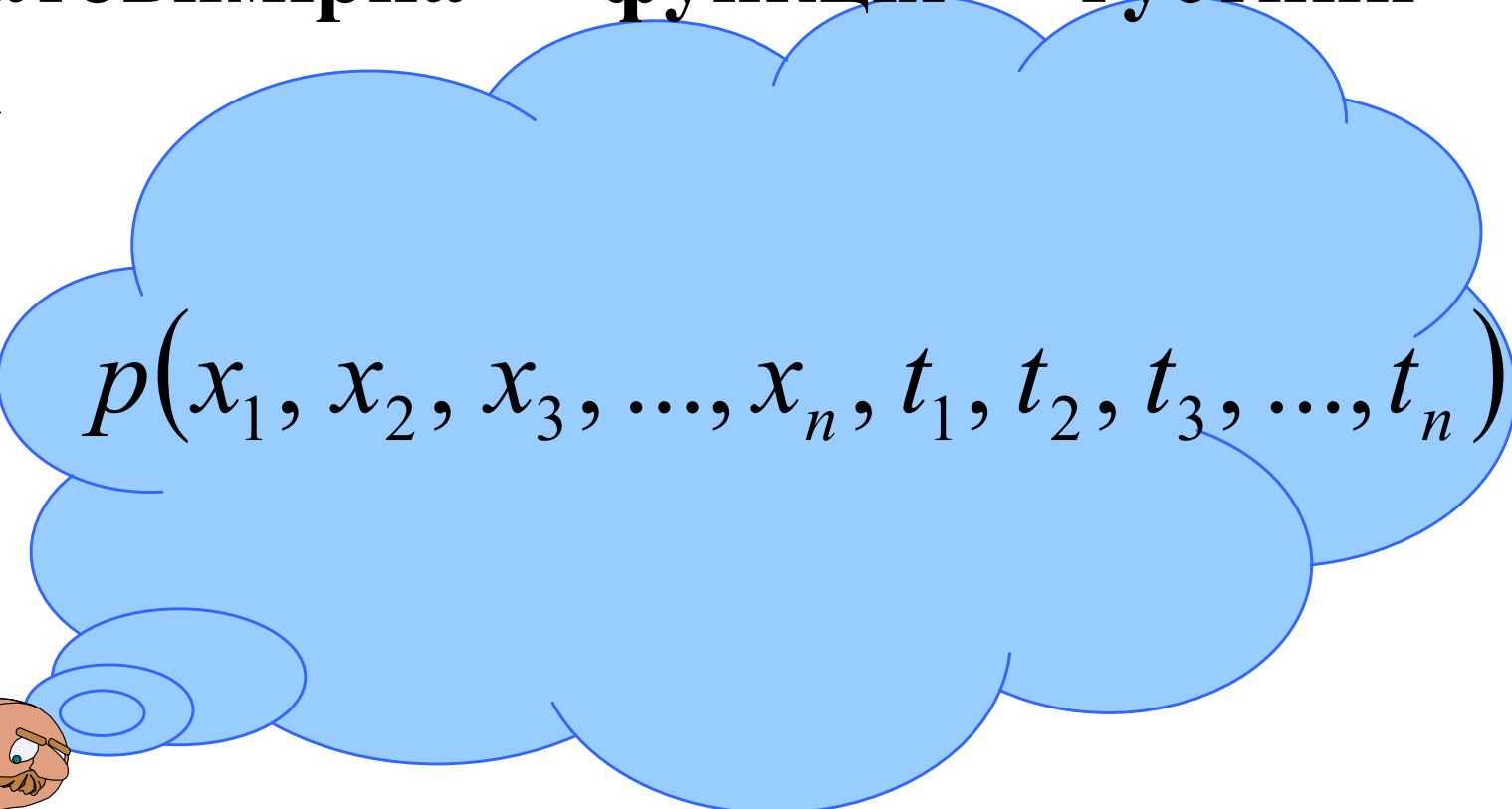
$$n \rightarrow \infty$$

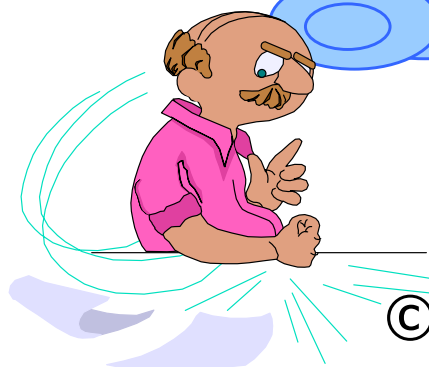




# Загальний опис випадкового процесу

**Випадковий процес повністю характеризує його багатовимірна функція густини імовірності**


$$p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$$



# Загальний опис випадкового процесу

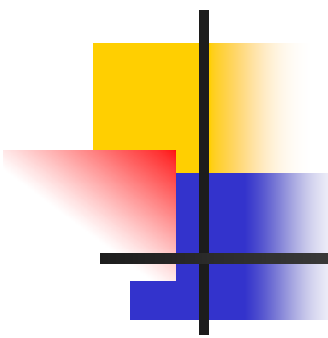
Невідома багатовимірна функція густини імовірності  $p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$

Невідома функція густини імовірності  $p(x, t)$

Невідомі моменти вище другого порядку  $M^n(x, t); n > 2$

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

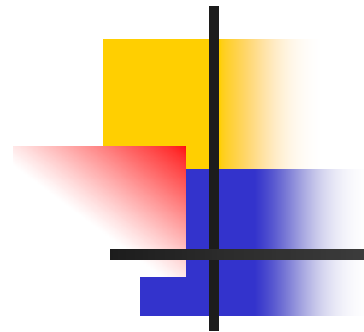
$Mx = a$        $Dx = \sigma^2$



# Опис випадкового процесу за кореляційними властивостями

- **моделювання нормальних випадкових процесів (достатньо знати кореляційну функцію);**
- **простота моделювання негауссових процесів із нормальних випадкових процесів;**
- **моделювання процесів за експериментальним даним (можливий вимір кореляційних властивостей);**
- **складний теоретичний опис (встановлені лише спектральні характеристики);**
- **радіотехнічні задачі, в яких кінцевий результат залежить лише від кореляційних властивостей початкових процесів (перетворення сигналів лінійними системами).**

# Моделювання нестационарних процесів із заданими кореляційними властивостями.



Для (нестационарного) випадкового процесу  $x(t)$

$$x_i = x(t_i) \quad R(t_1, t_2) = M(x(t_1) \cdot x(t_2)) - M(x(t_1)) \cdot M(x(t_2))$$

$$R(t_1, t_2) = M(x_1 \cdot x_2) - M(x_1) \cdot M(x_2)$$

$$M^n(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^n p(x) dx$$

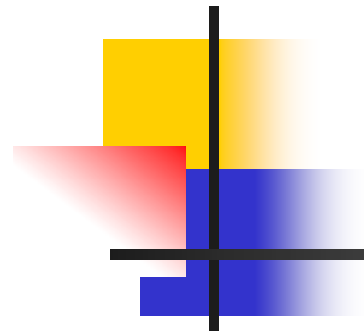
$$M(x(t)) = 0 \quad z(t) \quad M(z(t)) = m_z(t) \neq 0$$

$$y(t) = x(t) + m_z(t) \quad M(y(t)) = m_z(t)$$

$$M(y(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) p(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} m_z(t) p(x) dx = M(x(t)) + m_z(t) \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx$$

$$M(y(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) p(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) + m_z(t)) p(y) dy$$

# Моделювання нестационарних процесів із заданими кореляційними властивостями.



Для (нестационарного) випадкового процесу  $x(t)$

$$R(t_1, t_2) = M(x(t_1) \cdot x(t_2)) - M(x(t_1)) \cdot M(x(t_2))$$

$$R(t_1, t_2) = M(x_1 \cdot x_2) - M(x_1) \cdot M(x_2)$$

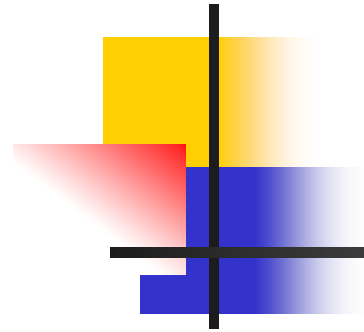
$$M(x(t)) = 0 \quad z(t) \quad M(z(t)) = m_z(t) \neq 0$$

$$y(t) = x(t) + m_z(t) \quad M(y(t)) = m_z(t)$$

$$R_y(t_1, t_2) = M \left[ \underbrace{(x(t_1) + m_z(t_1)) \cdot (x(t_2) + m_z(t_2))}_{\text{}} \right] - m_y(t_1) m_y(t_2)$$

$$R_y(t_1, t_2) = M(x_1 x_2)$$

# Моделювання нестационарних процесів із заданими кореляційними властивостями.



Для (нестационарного) випадкового процесу  $x(t)$

$$R(t_1, t_2) = M(x(t_1) \cdot x(t_2)) - M(x(t_1)) \cdot M(x(t_2))$$

$$R(t_1, t_2) = M(x_1 \cdot x_2) - M(x_1) \cdot M(x_2)$$

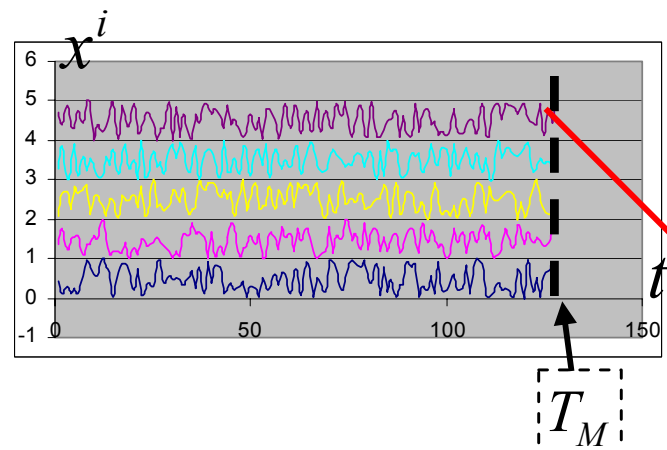
$$M(x(t)) = 0 \quad z(t) \quad M(z(t)) = m_z(t) \neq 0$$

$$y(t) = x(t) + m_z(t) \quad M(y(t)) = m_z(t)$$

$$R_y(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2)$$

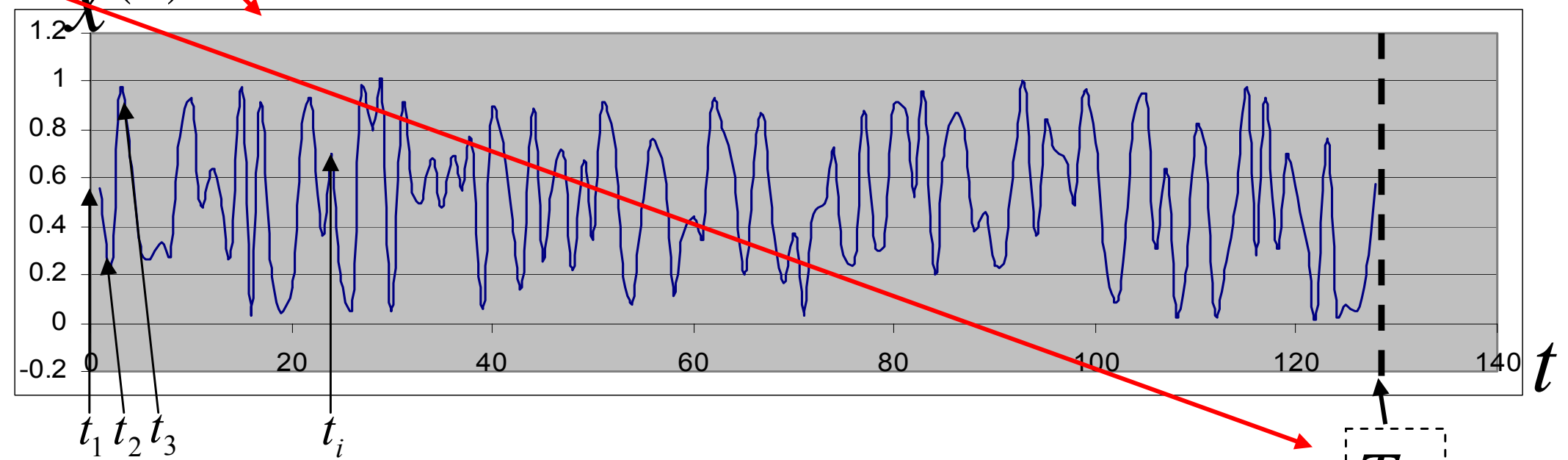


# Моделювання реалізації випадкового процесу



$$x_j^{(k)} = x^{(k)}(t_j) \quad t_j \in [0, T_M] \quad \Delta t = t_{j+1} - t_j \quad j = 1 \div n$$

$$n = T_M / \Delta t + 1 \quad \vec{X} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$



$$R \quad R_{ij} = R(t_i, t_j) \quad 0 \leq t_i, t_j \leq T_M$$

$T_M$

# Моделювання нестационарних процесів із заданими кореляційними властивостями.

Для нестационарного випадкового процесу  $x(t)$

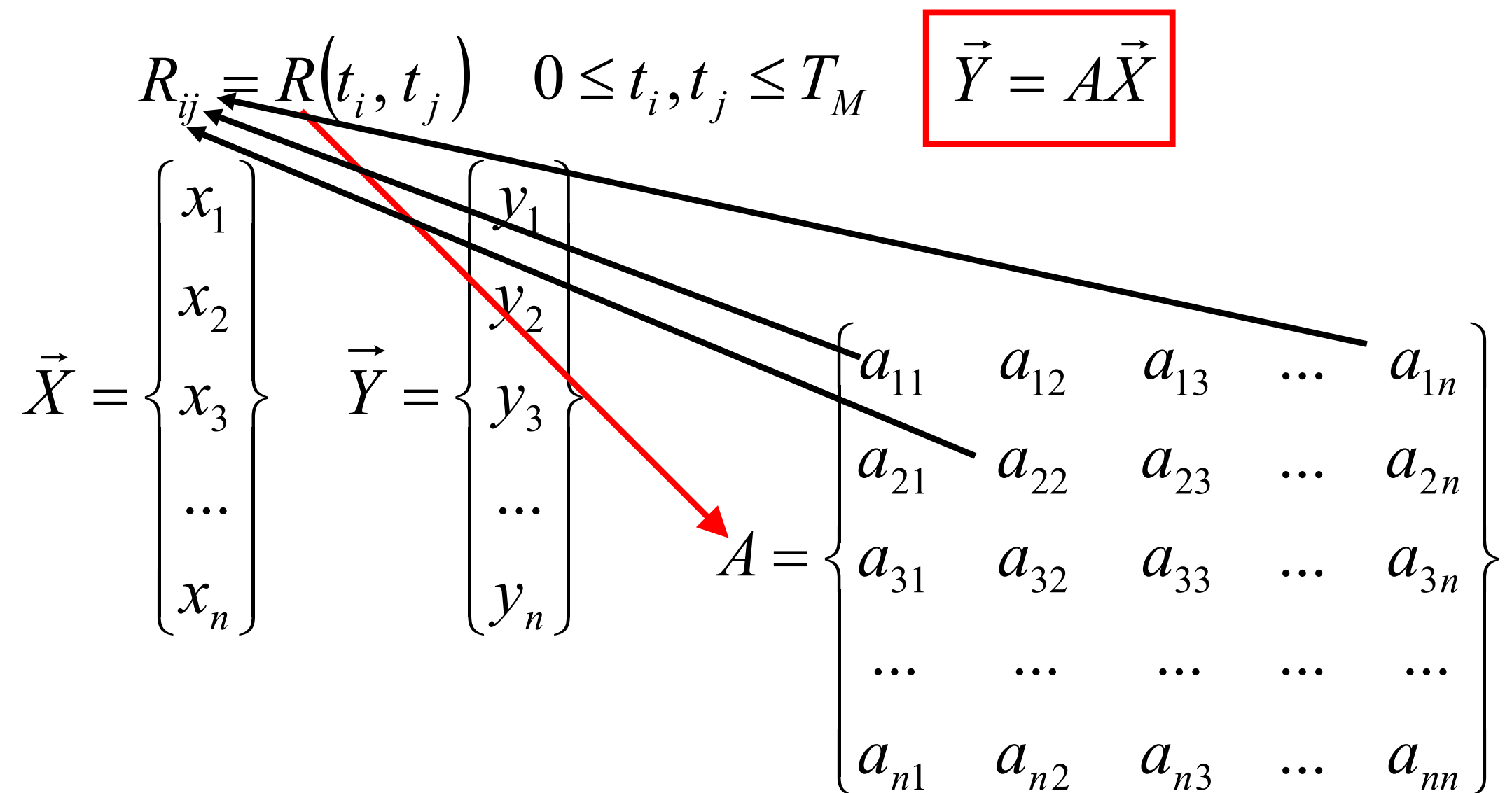
$$R(t_1, t_2) = M(x(t_1) \cdot x(t_2)) = M(x_1 \cdot x_2)$$

$$M(x(t)) = 0$$

$$t_i \quad i = 1 \div n \quad 0 \leq t_i \leq T_M \quad \vec{X} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

$$x_i = x(t_i) \quad R \quad R_{ij} = R(t_i, t_j) \quad 0 \leq t_i, t_j \leq T_M$$

# Метод лінійного перетворення.

$$R_{ij} = R(t_i, t_j) \quad 0 \leq t_i, t_j \leq T_M \quad \boxed{\vec{Y} = A\vec{X}}$$
$$\vec{X} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad \vec{Y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{Bmatrix} \quad A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{Bmatrix}$$


# Метод лінійного перетворення.

$$i = 1 \div n$$

$$M(x_i) = 0 \quad D(x_i) = 1$$

$$M(x_i \cdot x_j) = \theta_{ij} \quad i \neq j$$

$$D(x) = M^2(M(x) - x)$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (M(x) - x)^2 p(x) dx$$

$$R \longrightarrow A$$

$$a_{ij} = f(R_{ij})$$

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{Bmatrix}$$



# Метод лінійного перетворення.

$$\vec{Y} = A\vec{X}$$

$$\vec{Y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{Bmatrix} \quad A = \begin{Bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{Bmatrix} \quad \vec{X} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix}$$



# Метод лінійного перетворення.

$$\vec{Y} = A\vec{X}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \\ &\dots \\ y_i &= a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{ii}x_i \\ &\dots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$



# Метод лінійного перетворення.

$$D(x_i) = 1$$

$$y_1 = a_{11}x_1$$

$$R_{11} = M(y_1^2) = M(a_{11}^2 x_1^2) = a_{11}^2 M(x_1^2) = a_{11}^2 D(x_1) = a_{11}^2$$

$$R_{ij} = R(t_i, t_j) \quad R = \left\{ \begin{array}{ccccc} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & \dots & R_{2n} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & \dots & R_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & R_{n3} & \dots & R_{nn} \end{array} \right\}$$



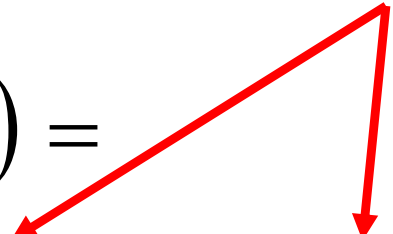
# Метод лінійного перетворення.

$$y_1 = a_{11}x_1 \rightarrow R_{11} = a_{11}^2$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

$$\begin{aligned} R_{12} &= M(y_1 y_2) = M(a_{11}x_1(a_{21}x_1 + a_{22}x_2)) = \\ &= a_{11}M(a_{21}x_1x_1 + a_{22}x_1x_2) = a_{11}a_{21}\underbrace{M(x_1^2)}_1 + a_{11}a_{22}\underbrace{M(x_1x_2)}_0 = \\ &= a_{11}a_{21} \end{aligned}$$

$M(x_i x_j) = \delta_{ij}$







# Метод лінійного перетворення.

---

$$y_1 = a_{11}x_1 \quad R_{11} = a_{11}^2 \quad R_{12} = a_{11}a_{21}$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

$$\begin{aligned} R_{22} &= M(y_2^2) = M((a_{21}x_1 + a_{22}x_2)(a_{21}x_1 + a_{22}x_2)) = \\ &= a_{21}^2 + a_{22}^2 \end{aligned}$$



# Метод лінійного перетворення.

---

$$y_1 = a_{11}x_1 \quad R_{11} = a_{11}^2 \quad R_{12} = a_{11}a_{21}$$

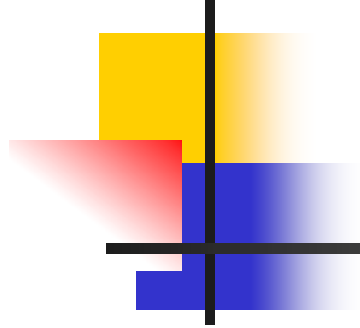
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \xrightarrow{\text{pink}} R_{22} = a_{21}^2 + a_{22}^2$$

$$y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \xrightarrow{\text{pink}} R_{31}, R_{32}, R_{33}$$

.....

$$y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n$$

$$R_{n1}, R_{n2}, R_{n3}, \dots, R_{ni}, \dots, R_{nn}$$



# Алгоритм обчислення коефіцієнтів лінійного перетворення.

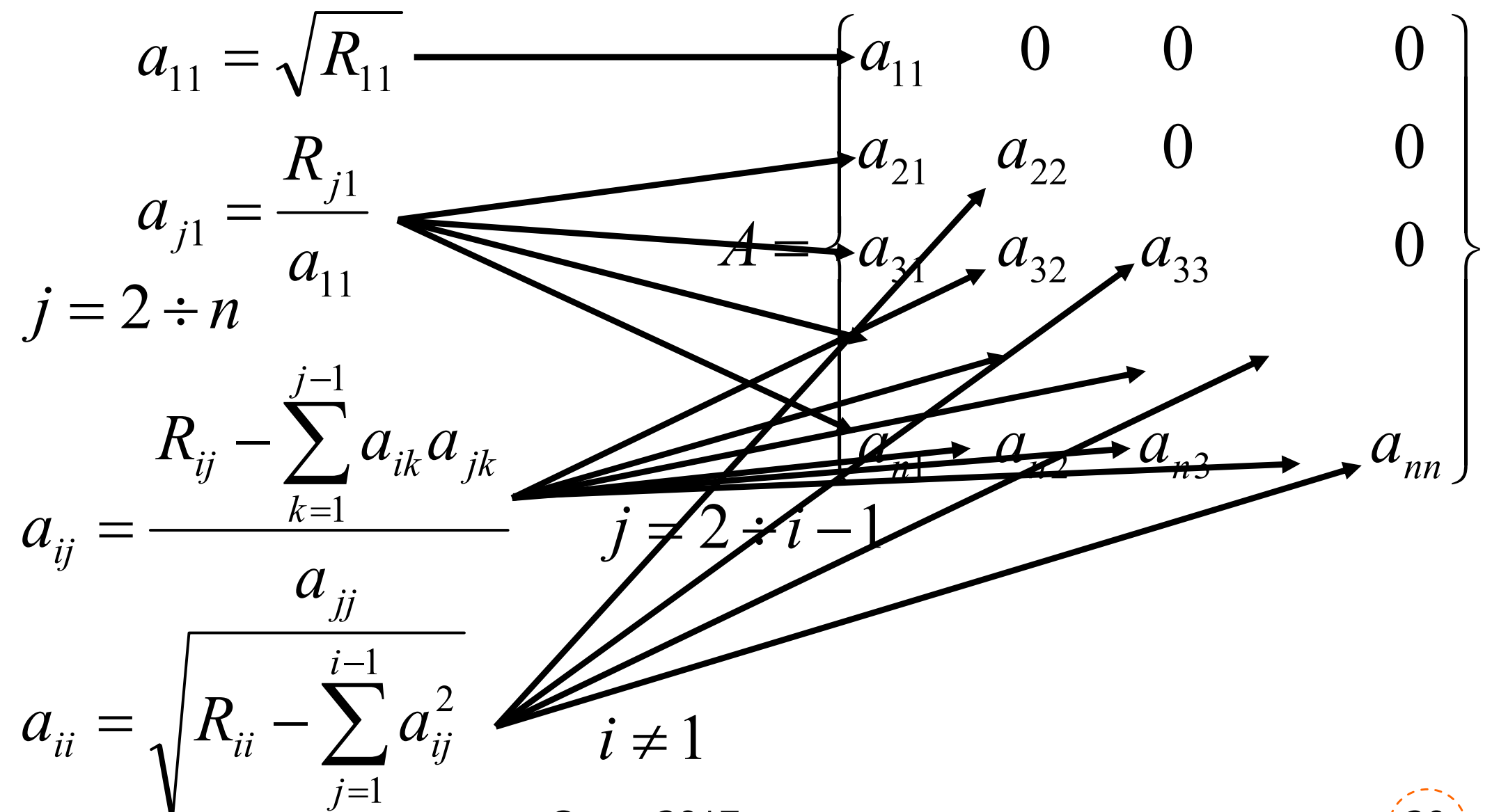
$$a_{11} = \sqrt{R_{11}}$$

$$a_{j1} = \frac{R_{j1}}{a_{11}} \quad j = 2 \div n$$

$$a_{ij} = \frac{R_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik} a_{jk}}{a_{jj}} \quad j = 2 \div i - 1$$

$$a_{ii} = \sqrt{R_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^2} \quad i \neq 1$$

# Схема методу лінійного перетворення.



# Схема методу лінійного перетворення.

$$\begin{aligned}
 & a_{11} = \sqrt{R_{11}} \\
 & a_{j1} = \frac{R_{j1}}{a_{11}} \quad j = 2 \div n \\
 & a_{ij} = \frac{R_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik} a_{jk}}{a_{jj}} \quad j = 2 \div i-1 \\
 & a_{ii} = \sqrt{R_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^2} \quad i \neq 1
 \end{aligned}$$

$A = \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{Bmatrix}$



# Властивості методу лінійного перетворення.

- **довільний закон розподілу для датчика випадкових чисел;  $\vec{X} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n\}$**
- **можливість моделювання нормальних випадкових процесів;**
- **необхідність розрахунків для моделювання процесів за новими часовими відліками.**



# Метод канонічного розкладу.

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(t) \quad a_i \quad \varphi_i(t)$$

$$M(a_i a_j) = 0 \quad i \neq j$$

$$M(a_i) = 0 \quad M(x(t)) = 0$$

$$\int_0^{T_M} R(t_1, t_2) \varphi_i(t_2) dt_2 = \alpha_i \varphi_i(t_1) \quad M(a_i^2) = \alpha_i \quad i = 1 \div \infty$$

$$\int_0^{T_M} \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt = \delta_{ij}$$

# Метод канонічного розкладу. (алгоритм)

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(t) \quad \int_0^{T_M} R(t_1, t_2) \varphi_i(t_2) dt_2 = \alpha_i \varphi_i(t_1)$$

Знаходимо розв'язки  $\varphi_i(t)$

$$a_i \quad M(a_i) = 0 \quad M(a_i^2) = \alpha_i \quad i = 1 \div \infty$$

$$\begin{matrix} x(t) \\ R(t_1, t_2) \end{matrix}$$





# Характеристики методу канонічного розкладу.

---

- **МОЖЛИВІСТЬ МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ процесів у довільні проміжки часу;**
- **необхідність використання нескінченної кількості функцій, випадкових коефіцієнтів, операцій;**
- **аналітичний розв'язок рівняння із знаходженням власних функцій і власних чисел можливий лише для обмеженого класу кореляційних функцій.**

# Наближений метод канонічного розкладу.

$$x(t) \xrightarrow{R} x'(t) \quad R \neq R'$$

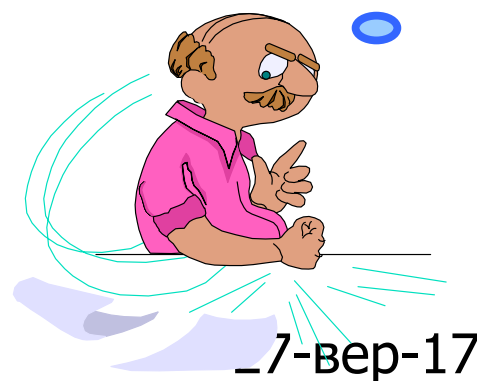
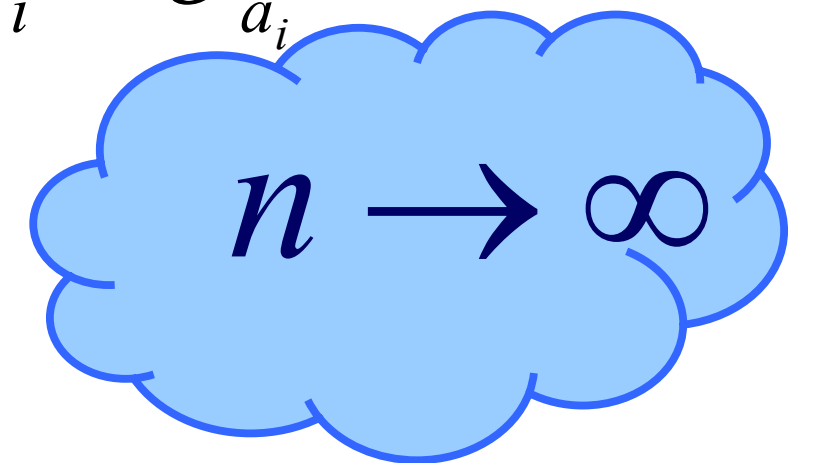
$$R(t_1, t_2) = R'(t_1, t_2) \quad t_1, t_2, t_3, \dots, t_i, \dots, t_n$$

$$x'(t) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(t) \quad M(a_i) = 0 \quad \sigma_i = \sigma_{a_i}$$

$$\sigma_1^2 = R(t_{11}, t_{21}) \quad \varphi_1(t) = \frac{R(t, t_{21})}{\sigma_1^2}$$

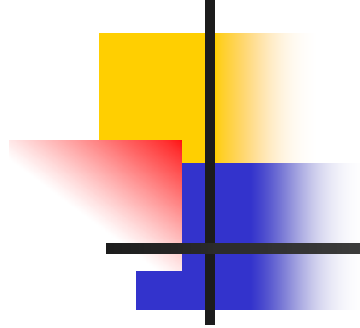
$$\sigma_i^2 = R(t_{1i}, t_{2i}) - \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_j^2 \varphi_j(t_i) \quad i = 2 \div n$$

$$\varphi_i(t) = \frac{1}{\sigma_i^2} \left( R(t, t_{2i}) - \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_j^2 \varphi_j(t) \varphi_j(t_i) \right)$$



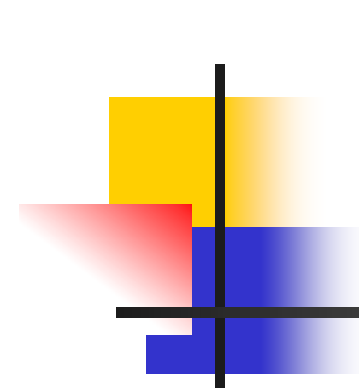
\_7-вер-17

© spr 2017



# Характеристики наближеного методу канонічного розкладу.

- **МОЖЛИВІСТЬ МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ процесів у довільні проміжки часу;**
- **відсутність необхідності розв'язання інтегрального рівняння, простота алгоритмізації;**
- **методична похибка моделювання із-за неповної рівності кореляційних функцій.**



# Дякую за увагу!

---

## Статичні копії лекцій