



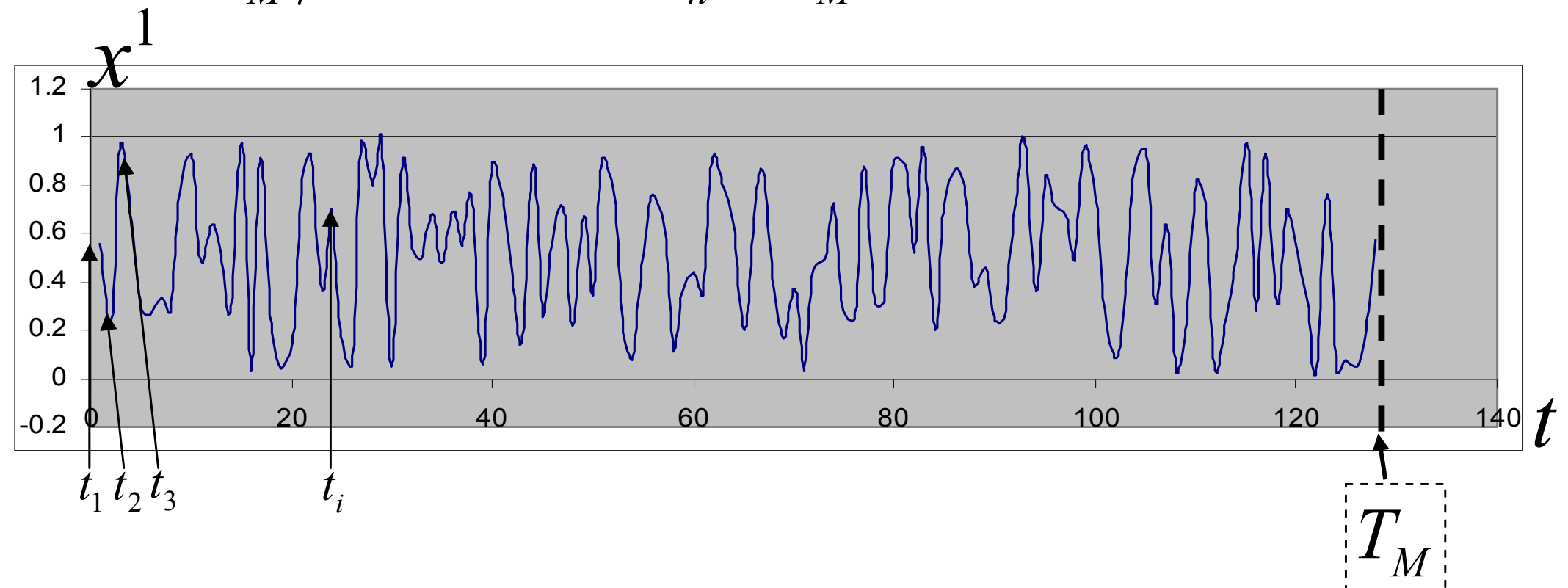
Комп'ютерна фізика

*“Моделювання випадкових
величин”*

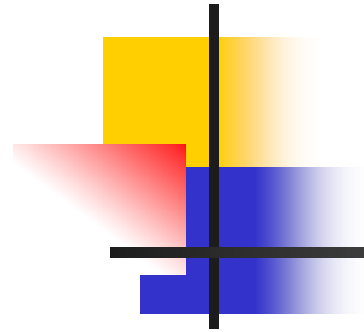
Моделювання реалізації випадкового процесу

$$x_j^{(i)} = x^{(i)}(t_j) \quad t_j \in [0, T_M] \quad \Delta t = t_{j+1} - t_j \quad j = 1 \div n$$

$$n = T_M / \Delta t + 1 \quad t_n = T_M$$



Ймовірність, густина розподілу, функція розподілу



Ймовірність – міра достовірності випадкової події.

$$0 \leq P_{\xi}(a, b) \leq 1$$

$$P_{\xi}(a, b) = 0$$

↓
неможлива подія

$$P_{\xi}(a, b) = 1$$

↓
достовірна подія

$$P_{\xi}(a, b) = \int_a^b p_{\xi}(x) dx = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a)$$

Розподіл – закон, який описує значення випадкової величини та ймовірності прийняття цих значень.

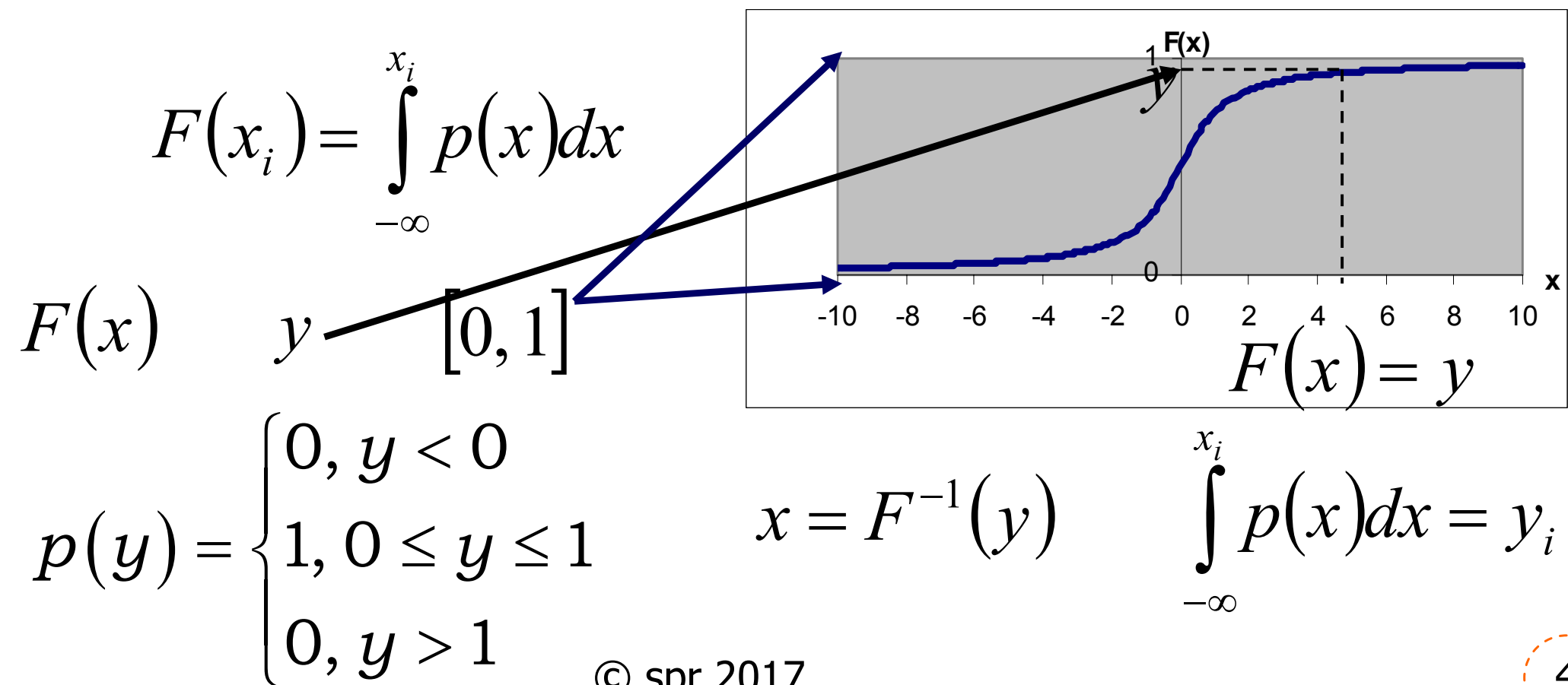
$F_{\xi}(x)$ – монотонна неспадająca функція

$$F_{\xi}(-\infty) = 0 \quad F_{\xi}(+\infty) = 1$$

$$F_{\xi}(b) = P_{\xi}(x < b) = \int_{-\infty}^b p_{\xi}(x) dx \quad \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x) dx = 1$$

Моделювання випадкових величин

Якщо випадкова величина x має функцію густини імовірності $p(x)$, то розподіл випадкової величини $y=F(x)$ **буде рівномірним** на інтервалі від 0 до 1.



Моделювання випадкових величин

Метод кускової апроксимації функції густини імовірності $p(x)$.

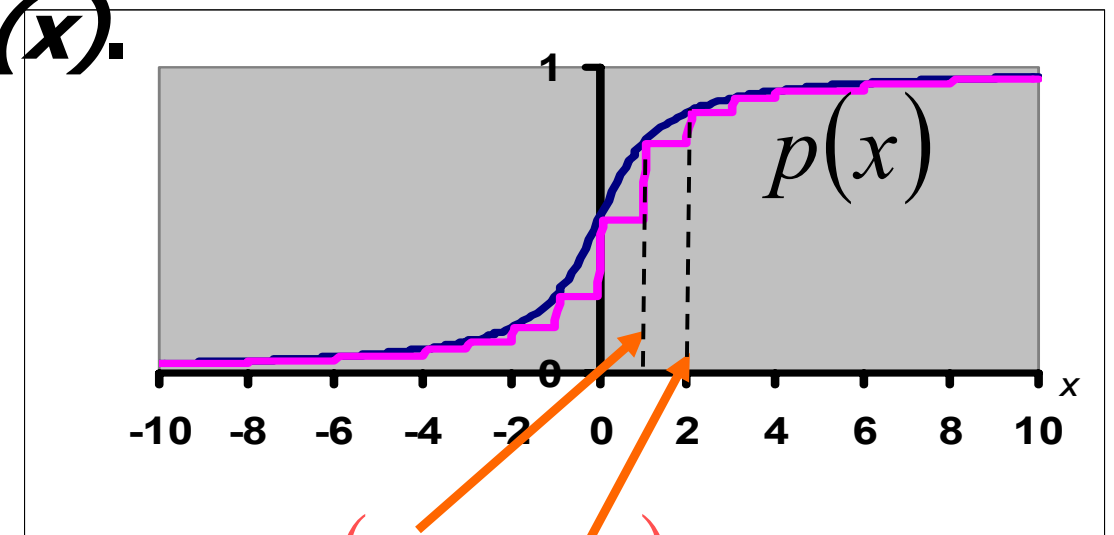
$$n \rightarrow \infty$$

$$x_i = a_k + (a_{k+1} - a_k)\xi_i$$

$$P(a_k, a_{k+1}) = \frac{1}{n}$$

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} p(x) dx = \frac{1}{n} \quad a_0 = \min(x)$$

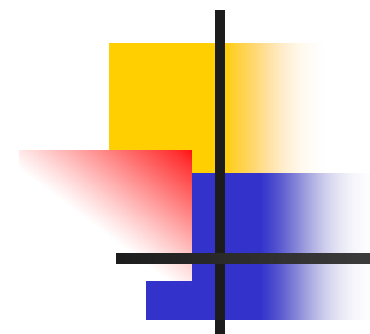
$$a_n = \max(x)$$



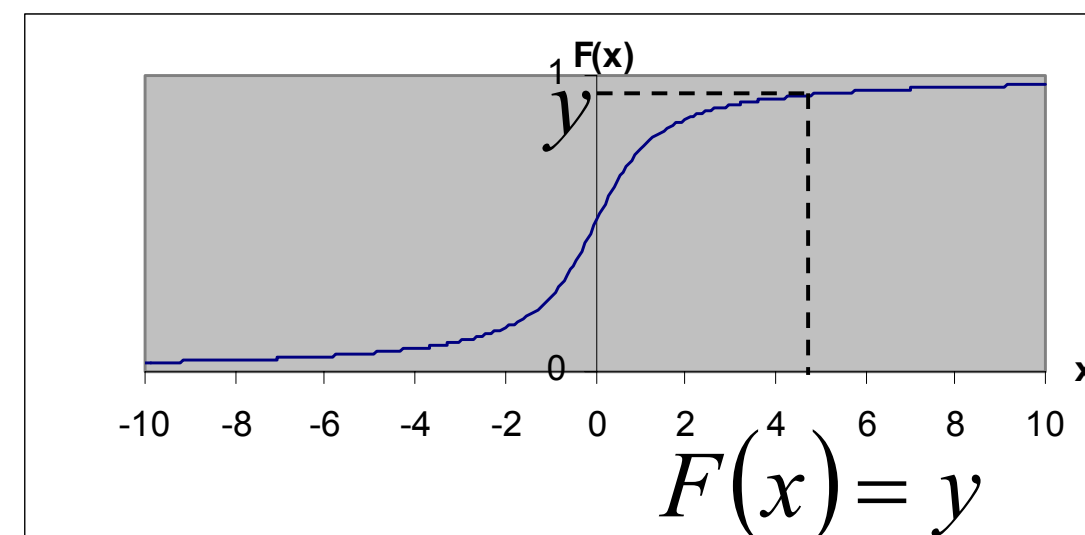
(a_k, a_{k+1})

$$\int_{a_0}^{a_1} p(x) dx = \frac{1}{n} \quad \int_{a_1}^{a_2} p(x) dx = \frac{1}{n}$$

$$n = 2^m \quad a_k \quad \xi_i \quad [0, 1]$$



Аналітичні і числові методи

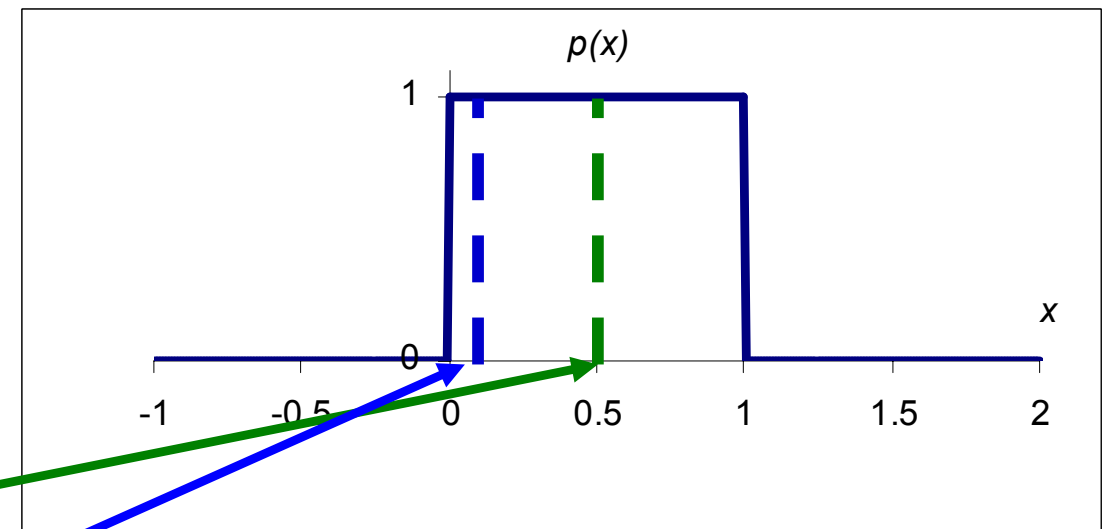


$$x = F^{-1}(y) \quad \int_{-\infty}^{x_i} p(x) dx = y_i$$

Моделювання випадкових величин з рівномірним розподілом $[0, 1]$.

$[0, 1]$

$$x \in [0, 1]$$
$$p(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < 0, x > 1 \end{cases}$$

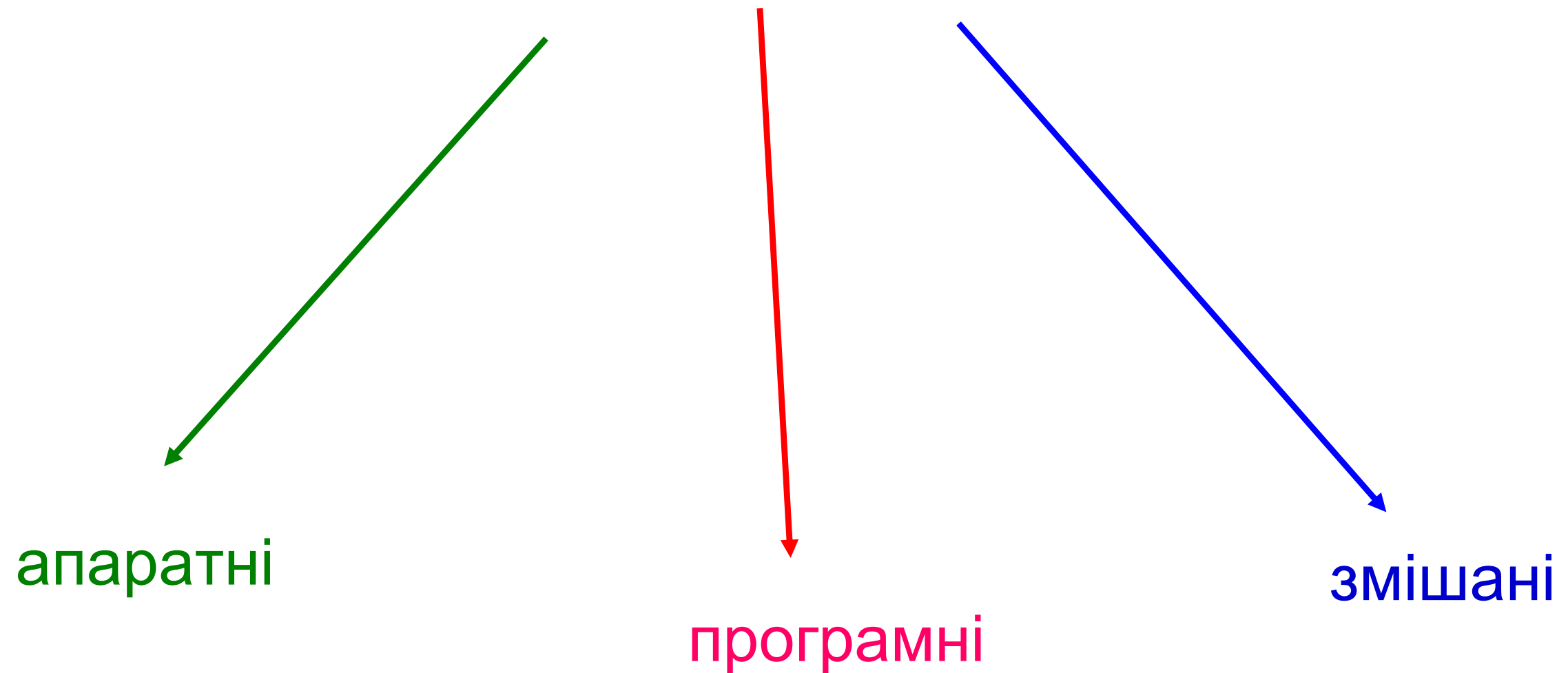


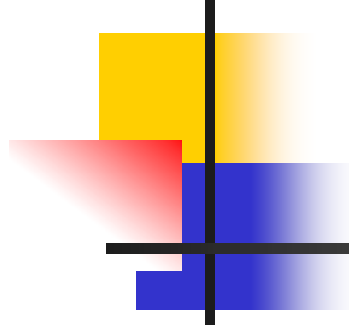
$$Mx = 0.5$$
$$Dx = \frac{1}{12}$$

$$y \in [a, b] \quad y = (b - a)x + a$$

$$p(y) = \begin{cases} \frac{1}{b - a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x < a, x > b \end{cases}$$

Моделювання випадкових величин з рівномірним розподілом $[0, 1]$.





Апаратні методи моделювання ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН.

Моменти апаратних подій

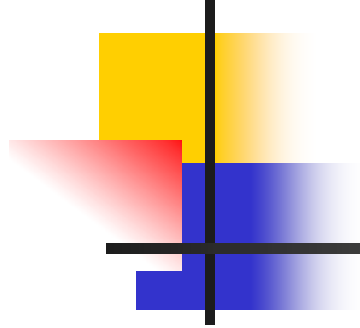
$$t_1, t_2, t_3, \dots, t_i, \dots, t_n$$

Випадкова величина x є функцією від
значення цих моментів:

$$x_i = f(t_i) \text{ або } x_i = f(\{t_n\})$$

$$x = f(t_1, t_2, t_3, \dots, t_i, \dots, t_n)$$

$$x_1 = f(t_1), x_2 = f(t_2), x_3 = f(t_3), \dots, x_n = f(t_n)$$

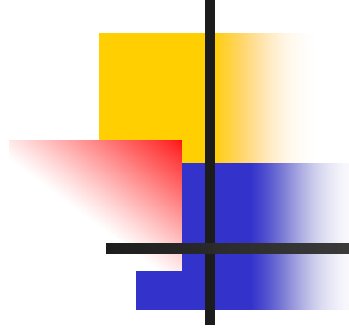


Апаратні методи моделювання випадкових величин.

Висока якість послідовності випадкових величин $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n$

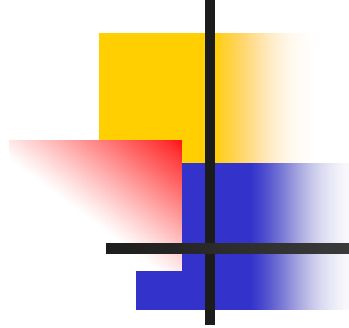
Унікальність значень випадкової величини x

Затримки при генерації великих масивів випадкових величин x_i



Програмні методи моделювання випадкових величин.

Програмна ітераційна процедура $x_i = \{f(y_n)\}_i$



Програмно-апаратні методи моделювання випадкових величин.

Параметри процедури визначають через
моменти апаратних подій

$$t_1, t_2, t_3, \dots, t_i, \dots, t_n$$

Швидкість процедури

Можливість генерації великих масивів випадкових величин

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n$$

Повторюваність значень випадкових величин

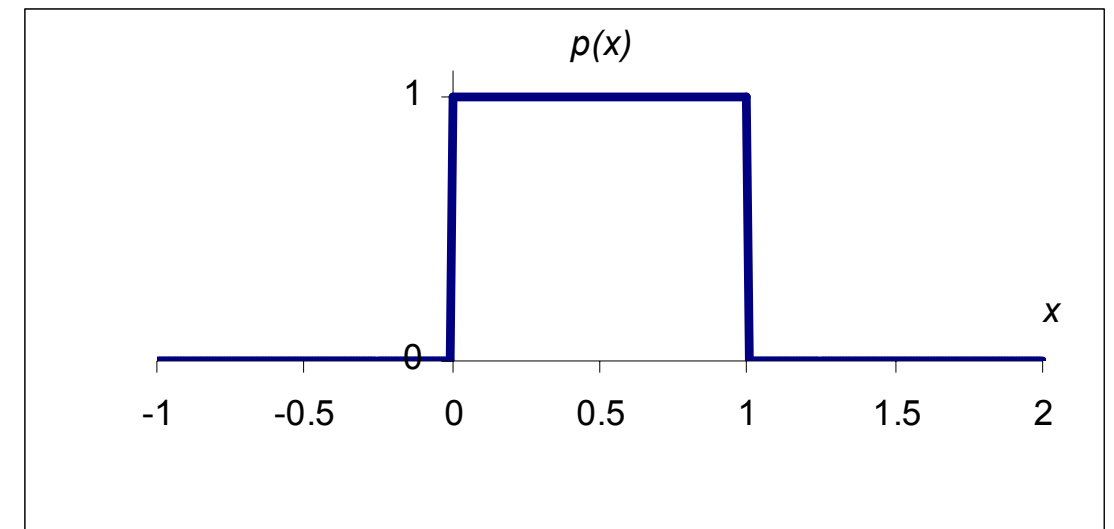
Величини $\{x\}$ є випадковою величиною для зовнішнього
спостерігача

Обовязковість перевірки параметрів послідовності
випадкових величин

Методи серединних квадратів і рекурентних співвідношень.

$$x \in [0, 1]$$

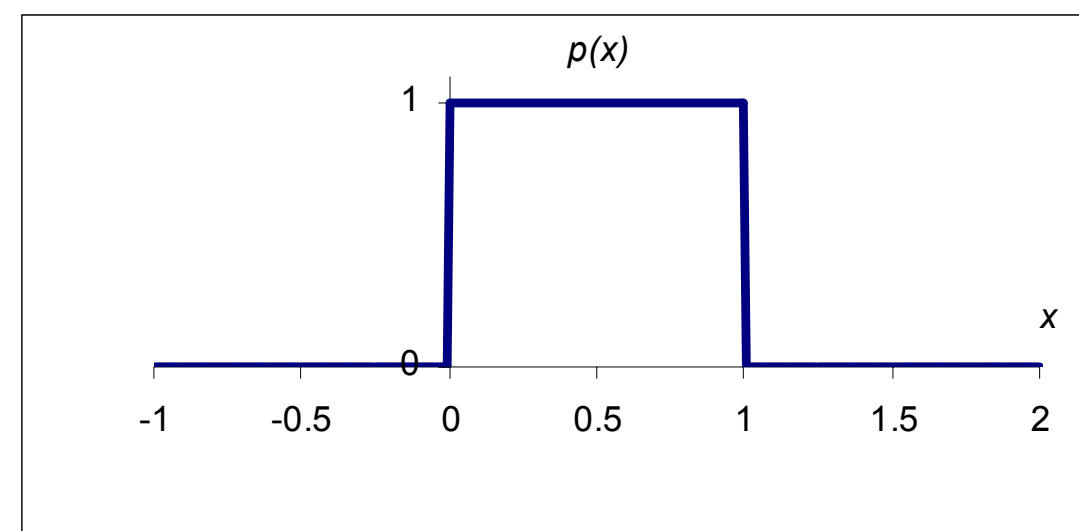
$$p(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < 0, x > 1 \end{cases}$$



Метод серединних квадратів.

$$x \in [0, 1]$$

$$p(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < 0, x > 1 \end{cases}$$



$$x_i = 0, C_3^{(i-1)} C_4^{(i-1)} C_5^{(i-1)} C_6^{(i-1)} \quad i = 0 \div n$$

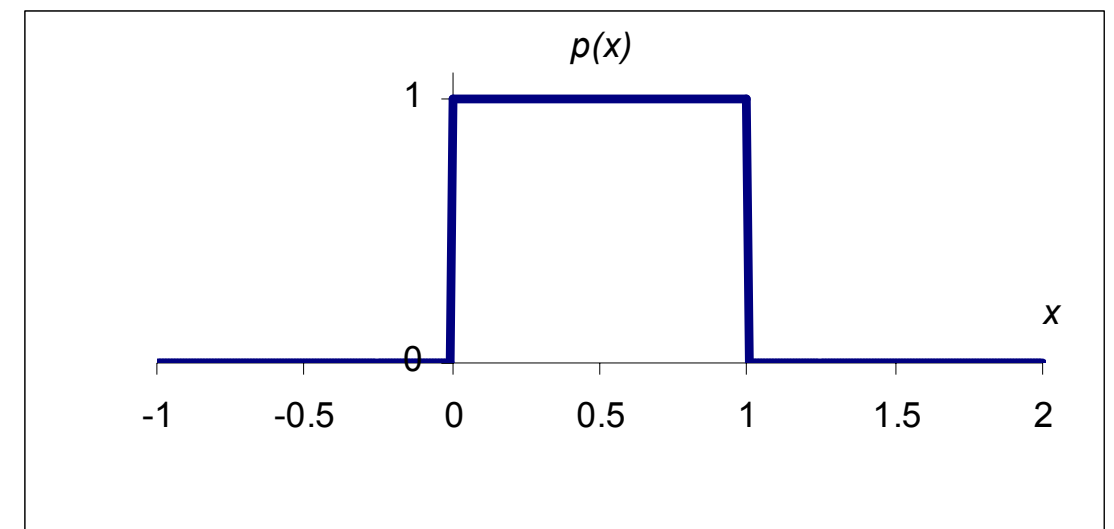
$$(x_{i-1})^2 = 0, C_1^{(i-1)} C_2^{(i-1)} C_3^{(i-1)} C_4^{(i-1)} C_5^{(i-1)} C_6^{(i-1)} C_7^{(i-1)} C_8^{(i-1)}$$

$$x_0 = 0, C_1^{(0)} C_2^{(0)} C_3^{(0)} C_4^{(0)}$$

Метод серединних квадратів.

$$x \in [0, 1]$$

$$p(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < 0, x > 1 \end{cases}$$



$$x_0 = 0,6789$$

$$(x_0)^2 = 0,46090521 = 0, C_1^{(0)} C_2^{(0)} C_3^{(0)} C_4^{(0)} C_5^{(0)} C_6^{(0)} C_7^{(0)} C_8^{(0)}$$

$$x_1 = 0, C_3^{(0)} C_4^{(0)} C_5^{(0)} C_6^{(0)} = 0,0905$$

$$(x_1)^2 = 0,00819025$$

$$x_2 = 0,8190$$

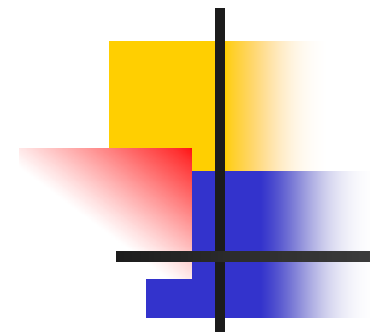
$$(x_2)^2 = 0,67076100$$

$$i = 0 \div n$$



Метод серединних квадратів.

i	x	$x \cdot x$
0	0,6789	0,46090521
1	0,0905	0,00819025
2	0,8190	0,67076100
3	0,0760	0,00577600
4	0,5776	0,33362176
5	0,3621	0,13111641
6	0,1116	0,01245456
7	0,2454	0,06022116
8	0,0221	0,00048841
9	0,0488	0,00238144
10	0,2381	0,05669161
11	0,6691	0,44769481
12	0,7694	0,59197636



Метод серединних квадратів.

Простота

Швидкість

Сильна залежність якості послідовності
від x_0

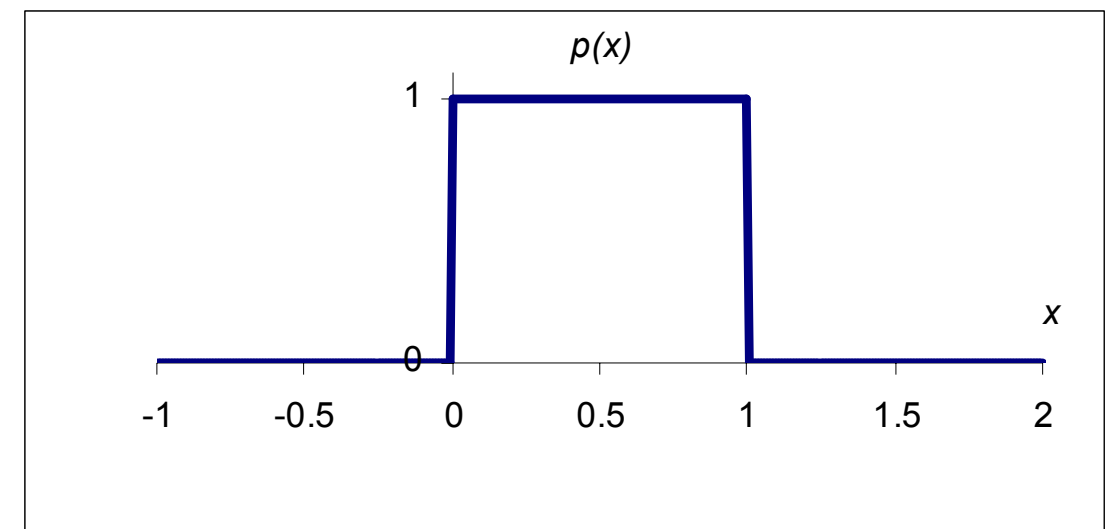
Нерівномірність ($N_{<1/2} = N_{>1/2} = 0,5$)

$$N_{<1/2} > N_{<1/2}$$

Метод рекурентних співвідношень.

$$x \in [0, 1]$$

$$p(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < 0, x > 1 \end{cases}$$



$$x_i = \frac{B_i}{M} \quad B_{i+1} = KB_i \pmod{M} \quad i = 0 \div n$$

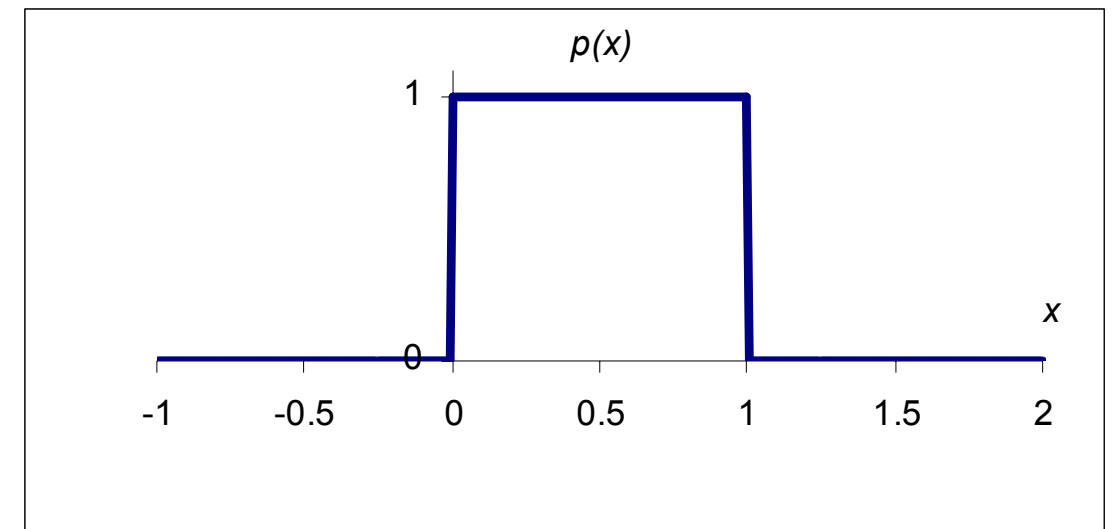
$$KB_i \pmod{M} - \text{це залишок від } \frac{KB_i}{M}$$

$$B_{i+1} = (KB_i + C) \pmod{M} \quad C, K, M > 0$$

Метод рекурентних співвідношень. Вибір значень параметрів C, K, M .

$$x \in [0, 1]$$

$$p(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < 0, x > 1 \end{cases}$$



$$KB_i \leq M$$

$$KB_i + C \leq N_{\max} \quad i \quad KM + C \leq N_{\max}$$

$$K < \frac{N_{\max}}{M} \quad i \quad K < \frac{N_{\max} - C}{M} \quad T < M$$

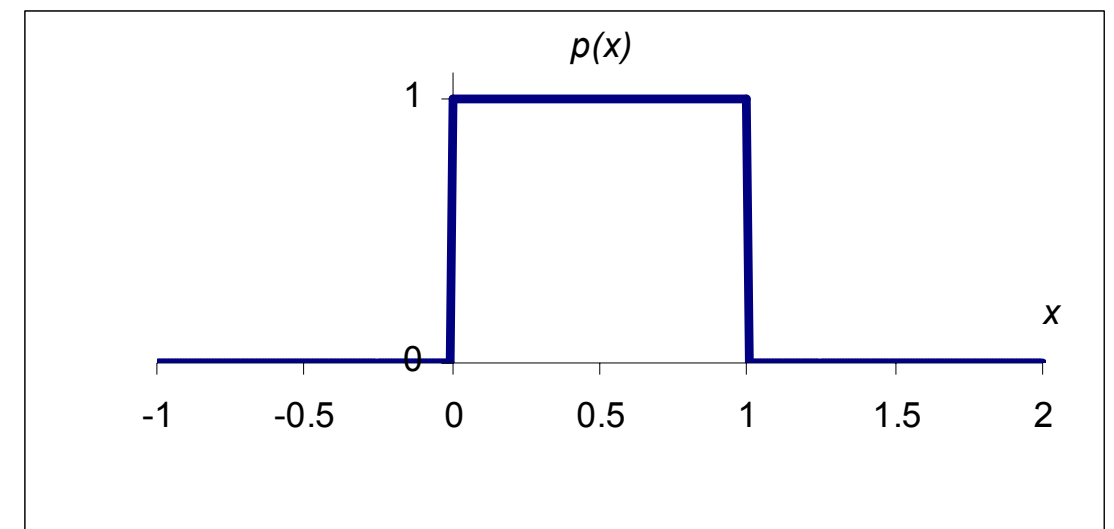
$$K = 23 \quad i \quad M = 10^8 \quad T = 5882352 \quad KB_0 < M \quad B_{i+1} = B_i K^x$$

$$27\text{-вер-17} \quad B_0 = M/5K$$

Метод рекурентних співвідношень. Вибір значень параметрів C, K, M .

$$x \in [0, 1]$$

$$p(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < 0, x > 1 \end{cases}$$



$$K = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \dots$$

B_0 – велике число

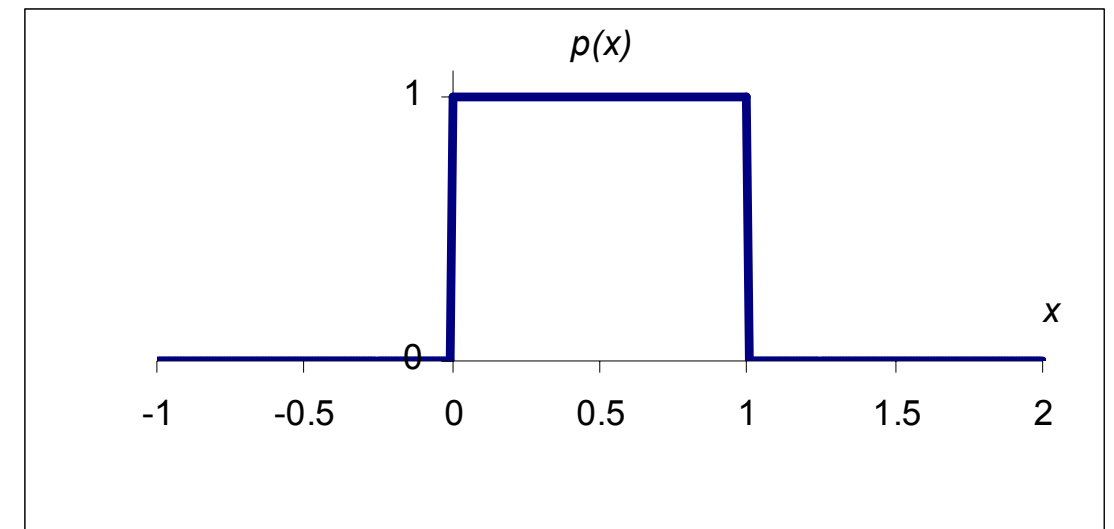
M – *парне*, але не кратне K

$$C \cong B_0$$

Приклади параметрів

$$x \in [0, 1]$$

$$p(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < 0, x > 1 \end{cases}$$



Apple

$$x_i = \frac{B_i}{M} \quad B_{i+1} = KB_i \pmod{M}$$

$$K = 16807$$

$$M = 2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647$$

Приклади параметрів

$$x \in [0, 1]$$

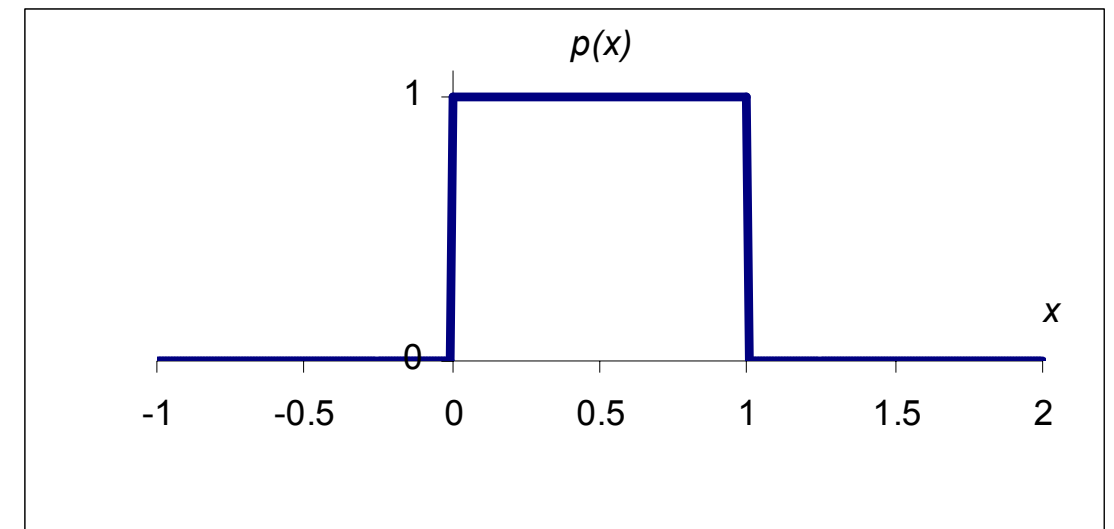
$$p(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < 0, x > 1 \end{cases}$$

ZX Spectrum

$$x_i = \frac{B_i}{M} \quad B_{i+1} = KB_i \pmod{M}$$

$$K = 75$$

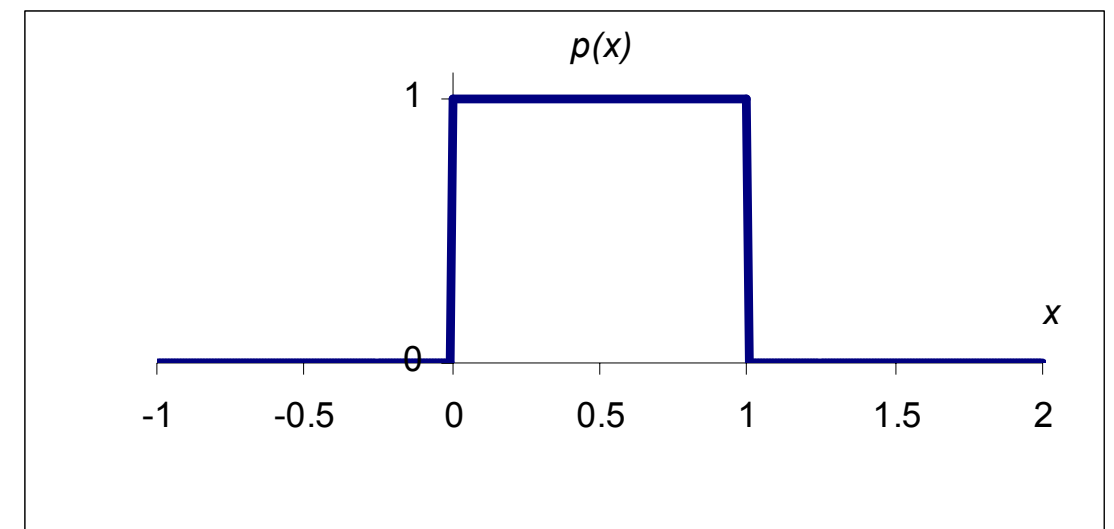
$$M = 2^{16} + 1 = 65537$$



Моделювання випадкових величин з рівномірним розподілом $[a, b]$.

$$x \quad [0, 1]$$

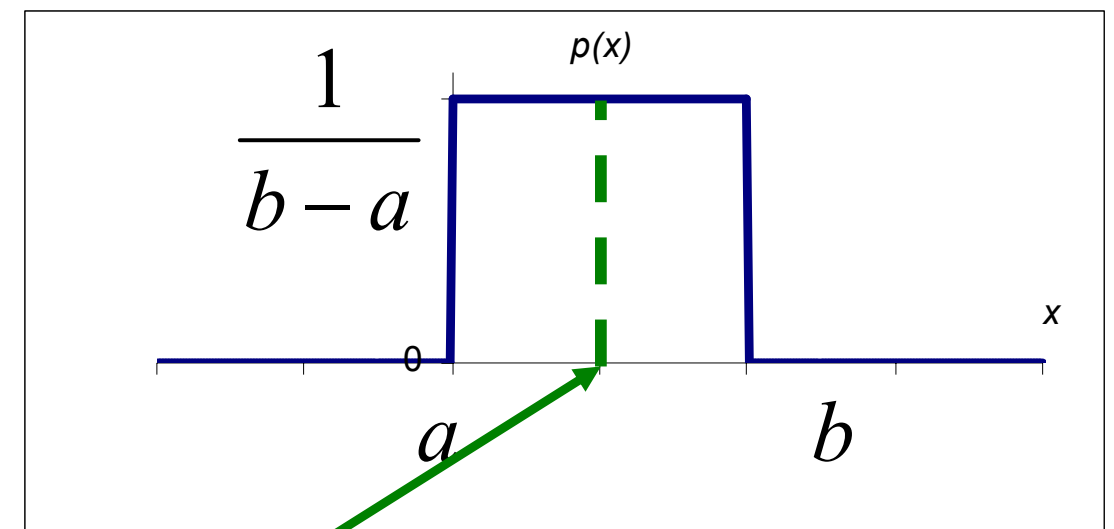
$$p(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < 0, x > 1 \end{cases}$$



$$y \quad [a, b]$$

$$p(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq y \leq b \\ 0, & y < a, y > b \end{cases}$$

Моделювання випадкових величин з рівномірним розподілом $[a, b]$.

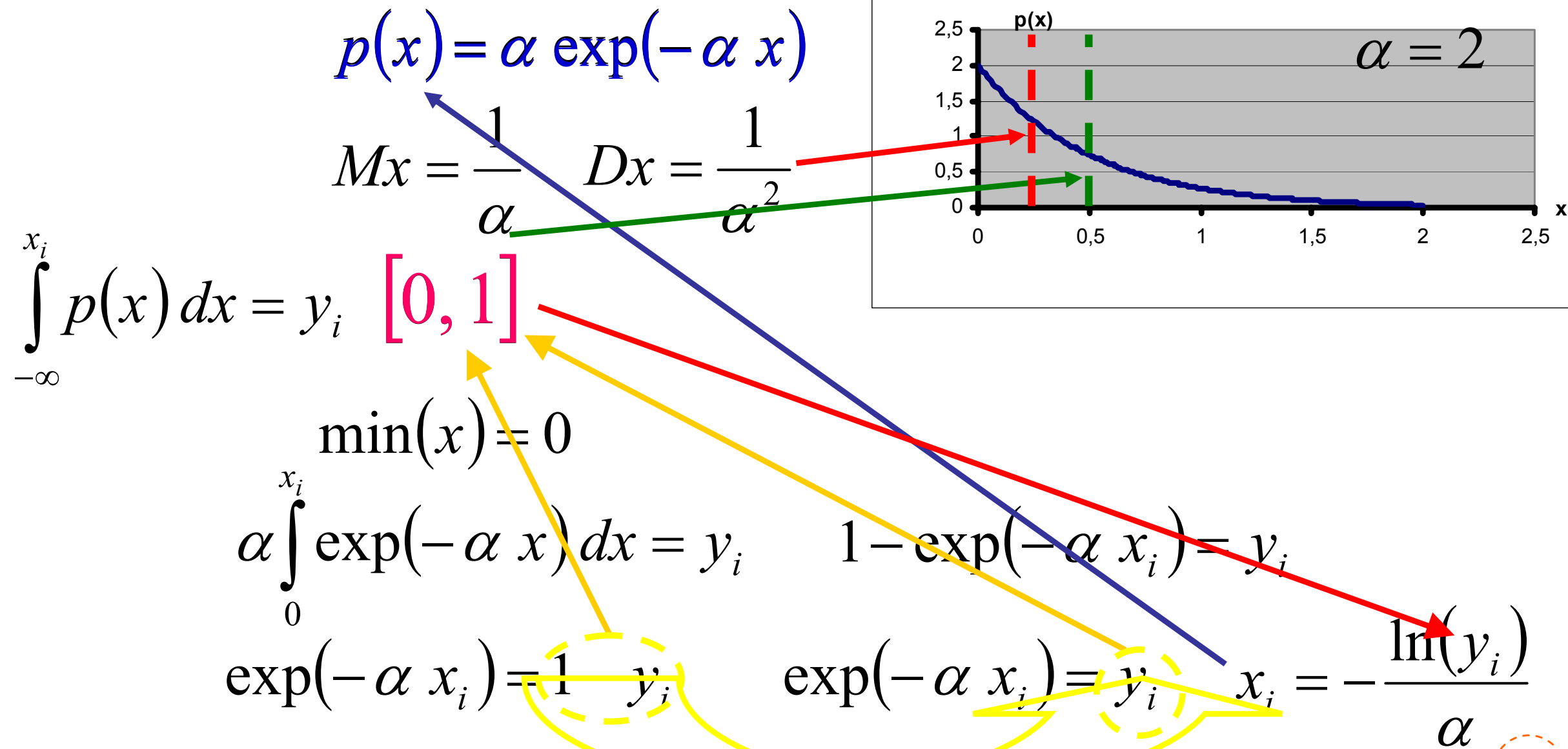


$$y \quad [a, b]$$
$$p(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq y \leq b \\ 0, & y < a, y > b \end{cases}$$

$$My = \frac{b+a}{2} \quad Dy = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$y = a + (b-a)x$$

Випадкова величина з експоненціальним розподілом.



Д.З.

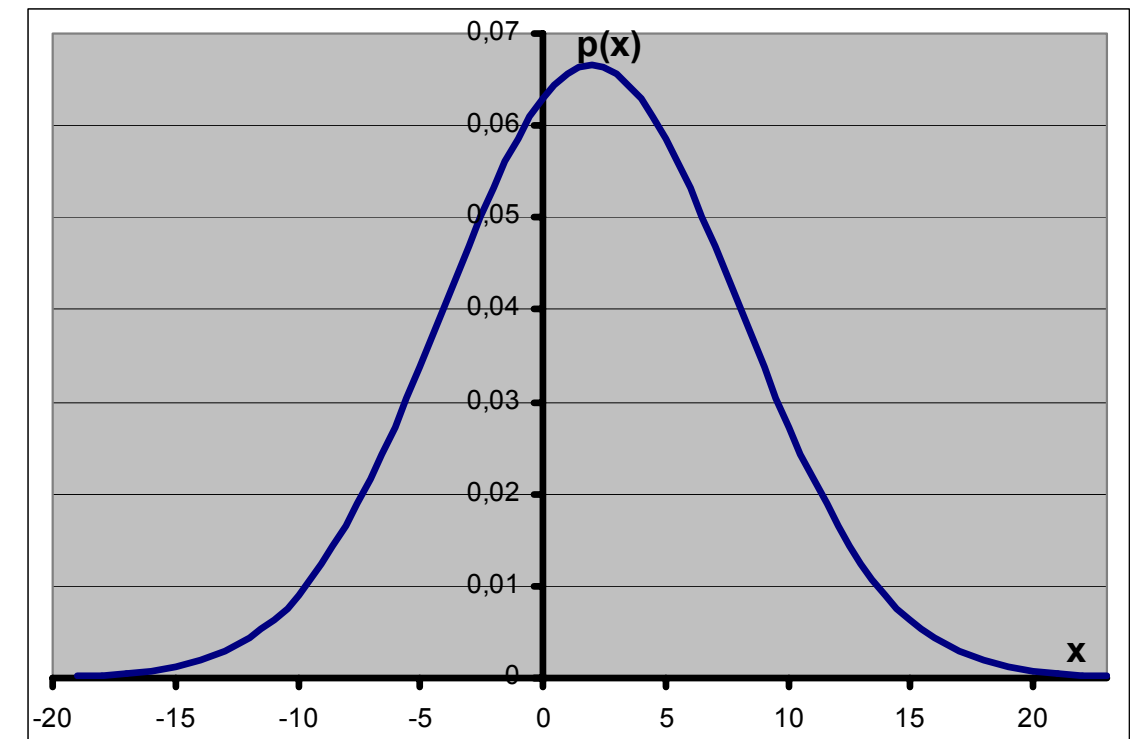
Випадкова величина з нормальним розподілом

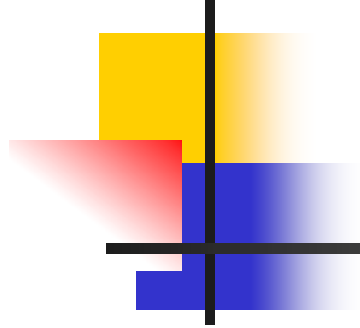
$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$Mx = a \quad Dx = \sigma^2$$

$$a = 2$$

$$\sigma = 6$$





Оцінка якості згенерованої послідовності випадкових чисел.

- **близькість математичного сподівання та дисперсії теоретичного та експериментального розподілів;**
- **близькість теоретичного та експериментального розподілів за критерієм χ^2 ;**
- **наявність не випадкової ділянки на основі нормованої автокореляційної функції.**



Аналіз нормованої автокореляційної функції.

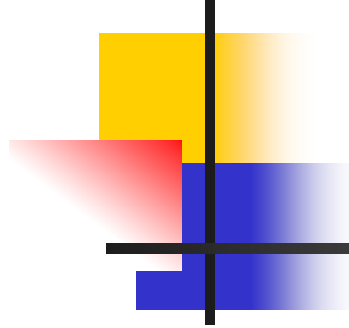
$$R(x_1, x_2) = M(x_1 \cdot x_2) - M(x_1) \cdot M(x_2)$$

$$0 \leq |R| \leq 1$$

$$|R| \rightarrow 0$$

$$|R| \rightarrow 1$$

$$|R| < k$$



Аналіз нормованої автокореляційної функції.

$$R_l = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m h_i h_{i+l-1} \quad h_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

h_i – нормоване центроване значення випадкової величини

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = Dx$$

Аналіз нормованої автокореляційної функції.

$$R_l = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m h_i h_{i+l} \quad h_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$0 \leq |R_l| \leq 1 \quad m = n - l$$

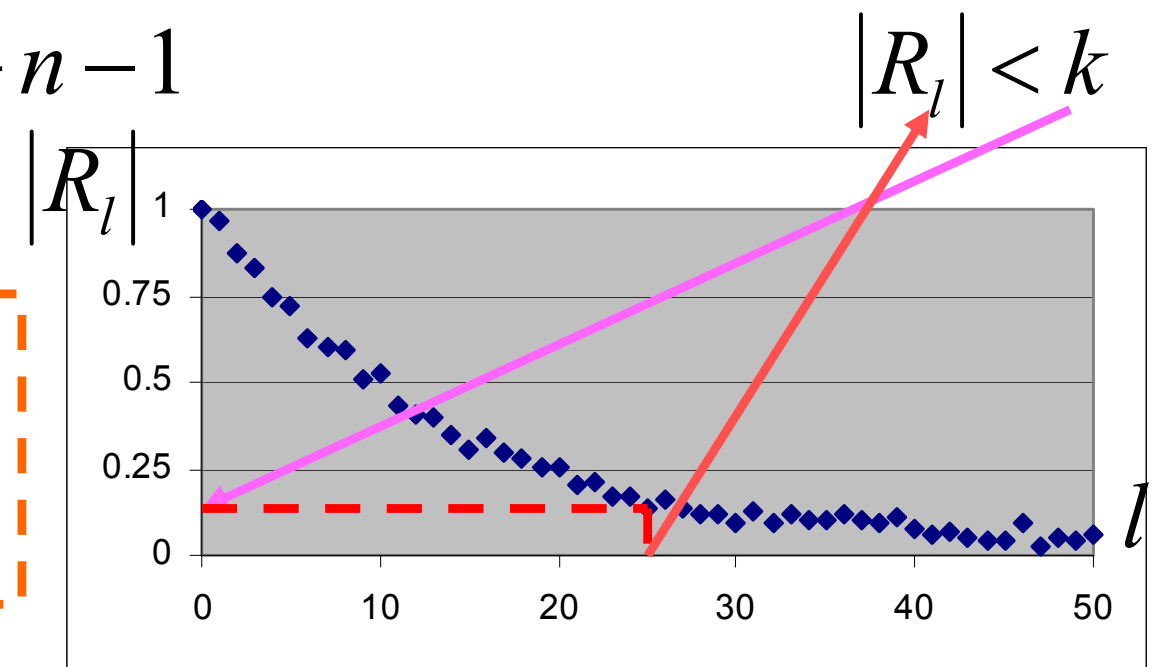
$$l \rightarrow \infty \quad R_l \rightarrow 0$$

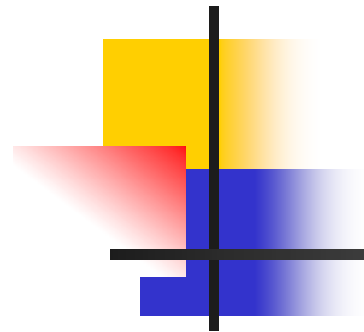
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

$$l = 0 \div n-1$$

$$\frac{|R_l| \sqrt{n-1}}{1 - R_l^2}$$

- розподіл Ст'юдента





Розподіл Ст'юдента

$$R_l = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m h_i h_{i+l-1} \quad h_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad \frac{|R_l| \sqrt{n-1}}{1 - R_l^2}$$

Випадкова величина x має розподіл Ст'юдента з α -степенями свободи ($\alpha > 0$)

$$p(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{\alpha\pi} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\alpha}\right)^{-\frac{(\alpha+1)}{2}}$$

Аналіз нормованої автокореляційної функції.

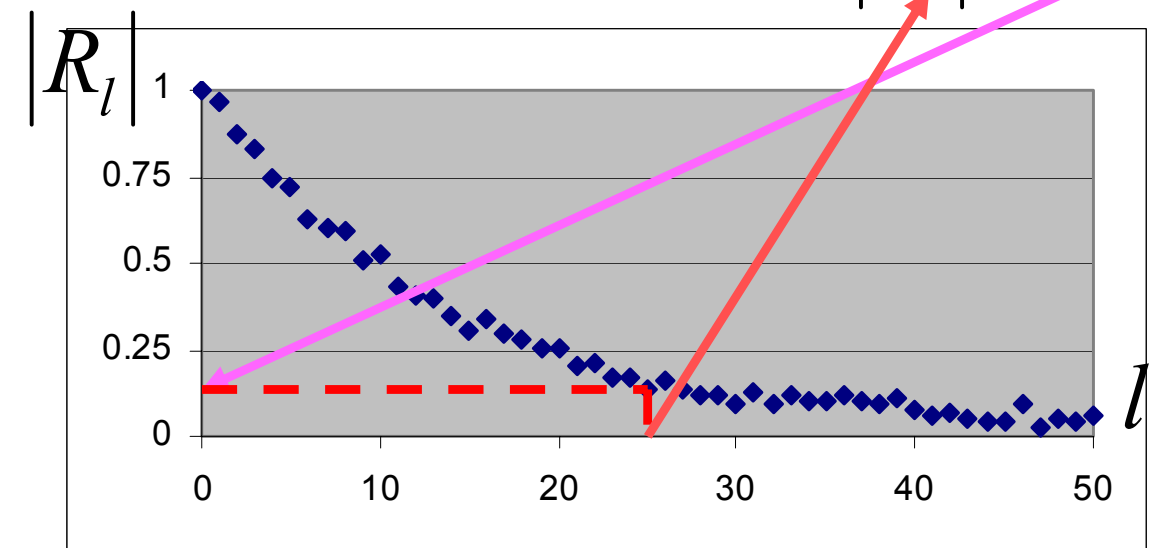
$$R_l = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m h_i h_{i+l-1} \quad h_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad \begin{matrix} n & 0 \leq |R_l| \leq 1 & m = n - l + 1 \\ l & l = 1 \div n - 1 & R_l \rightarrow 0 \end{matrix} \quad |R_l| < k$$

$$|R_l| < t_{\nu q} \frac{1 - R_l^2}{\sqrt{n-1}} \quad l = l_{\text{випадк}}$$

$$q = 0.1; 0.05; 0.01 \quad t_{\nu q}$$

$$\nu = n - 1$$



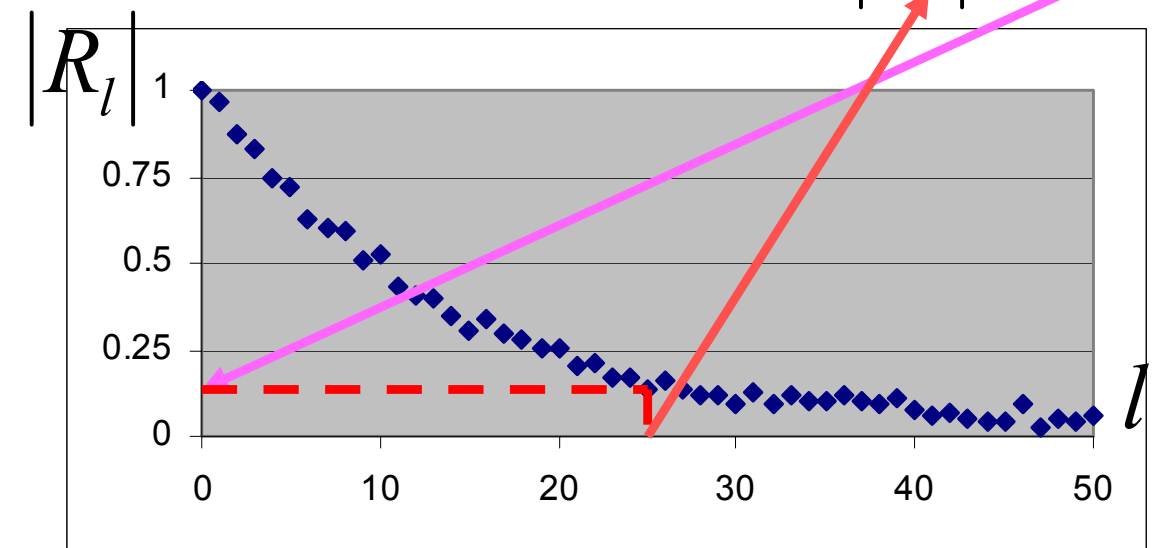
Аналіз нормованої автокореляційної функції.

$$R_l = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m h_i h_{i+l-1} \quad h_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

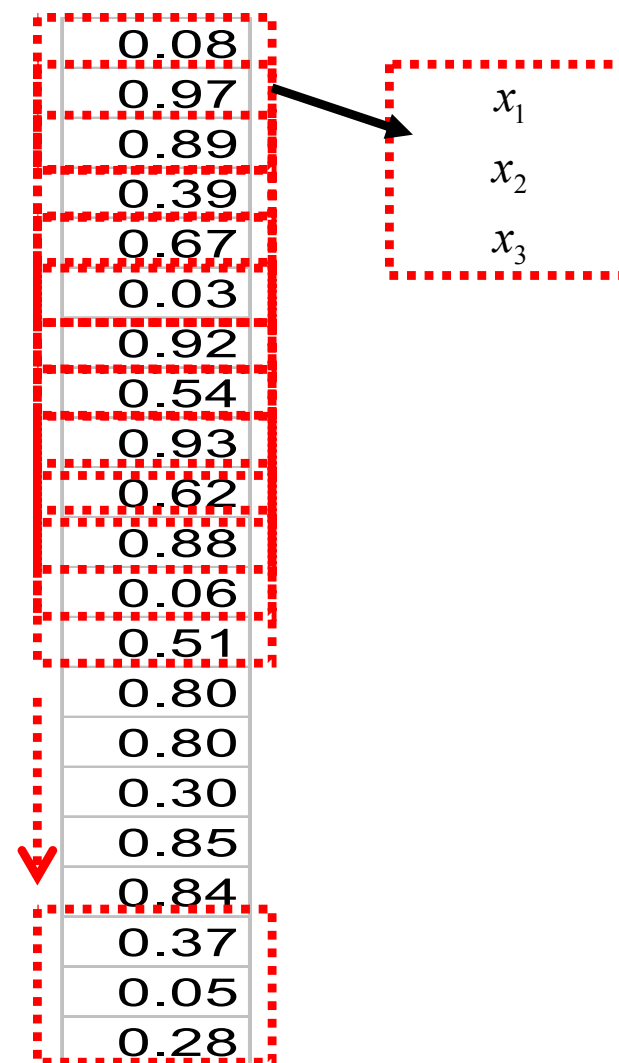
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad \begin{matrix} n & 0 \leq |R_l| \leq 1 & m = n - l + 1 \\ l & l = 1 \div n - 1 & R_l \rightarrow 0 \end{matrix} \quad |R_l| < k$$

$$|R_l| < t_{\nu q} \frac{1 - R_l^2}{\sqrt{n-1}} \quad l = l_{\text{випадк}}$$

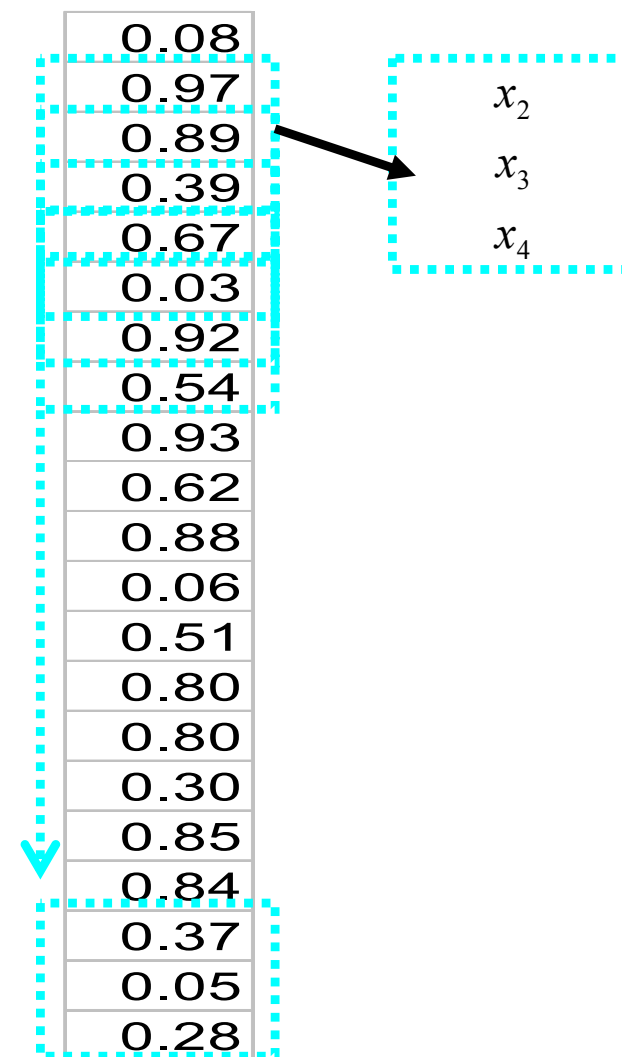
Зв'язок відсутній, з ймовірністю $1 - q$.



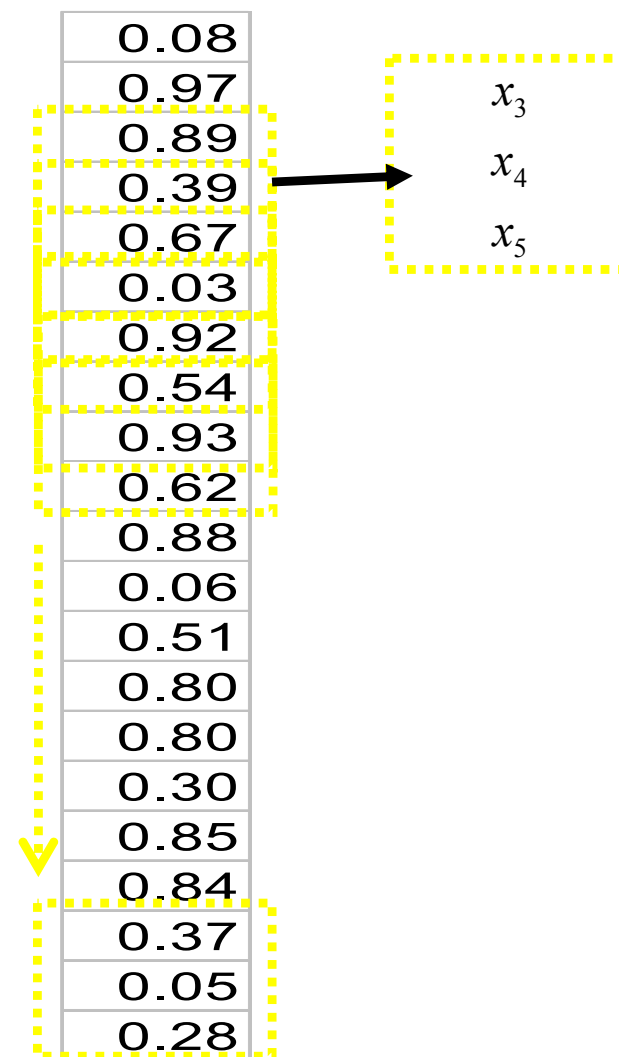
Пошук невинпадкової ділянки за допомогою ковзаючого вікна (оцінка).



Наявність невинпадкової ділянки за ДОПОМОГОЮ КОВЗАЮЧОГО ВІКНА.



Наявність не випадкової ділянки за допомогою ковзаючого вікна.



Близькість математичного сподівання та дисперсії теоретичного та експериментального розподілів

$$Mx \quad Dx \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=n'}^n x_i}{n - n' + 1} \quad Sx = \frac{\sum_{i=n'}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - n'}$$

- близькість **оцінки** математичного сподівання і його **теоретичного** значення

$$Mx \longleftrightarrow \bar{x}$$

$$\frac{|\bar{x} - Mx| \sqrt{n - n'}}{\sigma}$$

Близькість математичного сподівання та дисперсії теоретичного та експериментального розподілів

$$Mx \quad Dx \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=n'}^n x_i}{n - n' + 1} \quad Sx = \frac{\sum_{i=n'}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - n'}$$

- близькість оцінки математичного сподівання і його теоретичного значення

Розподіл Ст'юдента - $\frac{|\bar{x} - Mx| \sqrt{n - n'}}{\sigma}$

Випадкова величина x має розподіл Ст'юдента з α -степенями свободи ($\alpha > 0$)

27-вер-17

$$p(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{\alpha\pi}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\alpha}\right)^{-\frac{(\alpha+1)}{2}}$$

© spr 2017

Близькість математичного сподівання та дисперсії теоретичного та експериментального розподілів

$$Mx \quad Dx \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=n'}^n x_i}{n - n' + 1} \quad Sx = \frac{\sum_{i=n'}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - n'}$$

- близькість оцінки математичного сподівання і його теоретичного значення

$$\sigma = \sqrt{Sx}$$

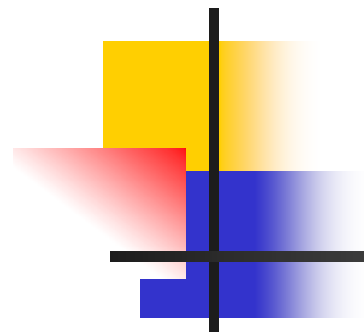
$$|\bar{x} - Mx| \leq t_{\nu q} \frac{\sigma}{\sqrt{n - n'}}$$

$$q = 0.1; 0.05; 0.01$$

- близькість **оцінки** дисперсії та його **теоретичного** значення

$$Dx \longleftrightarrow Sx$$

$$\text{Розподіл } \chi^2 - \frac{Sx(n - n')}{Dx}$$



Розподіл χ^2

$$x_i \quad m_i, \sigma \quad \xi = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Випадкова величина ξ має розподіл χ^2 з параметром нецентральності m і n степенями свободи

$$p(x) = \frac{\exp\left(\frac{x+m}{2}\right)}{2^{n/2}} 2^{n/2-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{mx}{4}\right)^j}{j! \Gamma\left(j + \frac{n}{2}\right)}$$

$$m = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n m_i^2$$

Близькість математичного сподівання та дисперсії теоретичного та експериментального розподілів

$$Mx \quad Dx \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=n'}^n x_i}{n - n' + 1} \quad Sx = \frac{\sum_{i=n'}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - n'}$$

- **близькість оцінки математичного сподівання і його теоретичного значення**

$$\sigma = \sqrt{Sx} \quad |x - Mx| \leq t_{\nu q} \frac{\sigma}{\sqrt{n - n'}}$$

- **близькість оцінки дисперсії та його теоретичного значення**

$$Sx \leq \frac{Dx \chi_{qv}^2}{n - n'}$$

$$\chi_{qv}^2 \quad q = 0.1; 0.05; 0.01 \quad \nu = n - n'$$

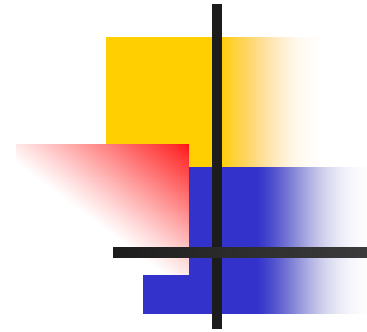
Д.3.

Випадкові величини із різними розподілами

$$p_1(x) \neq p_2(x)$$

$$M_1x = M_2x \quad D_1x = D_2x$$

Близькість теоретичного та експериментального розподілів за критерієм χ^2 .



$$n \quad k \quad k = 1 + 3.21 \lg n$$

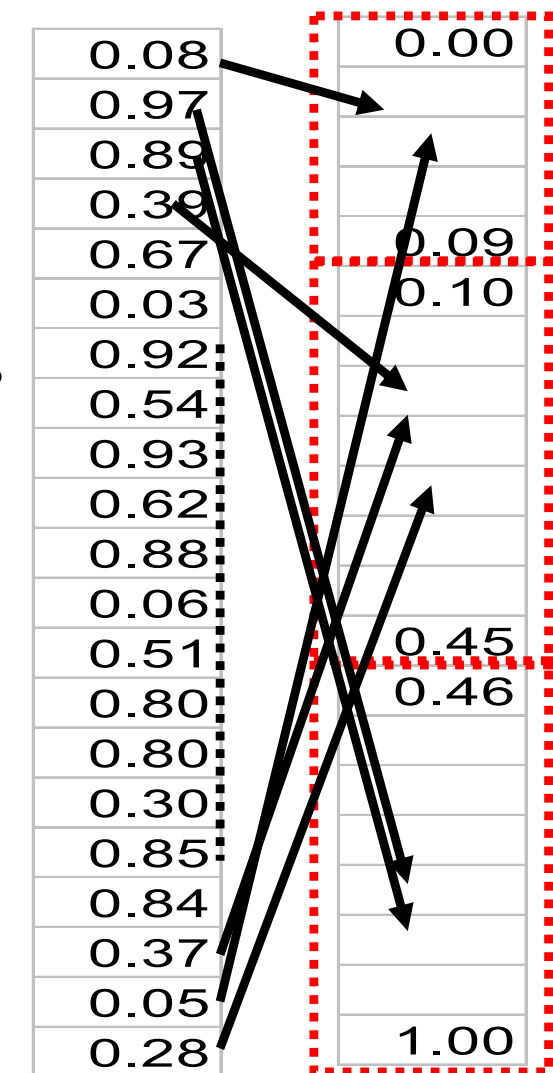
$$n_i \quad i = 1 \div k \quad nP_i - \text{теоретична кількість} \\ P_i$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{(nP_i - n_i)^2}{nP_i} = \chi^2 \quad R[a; b]$$

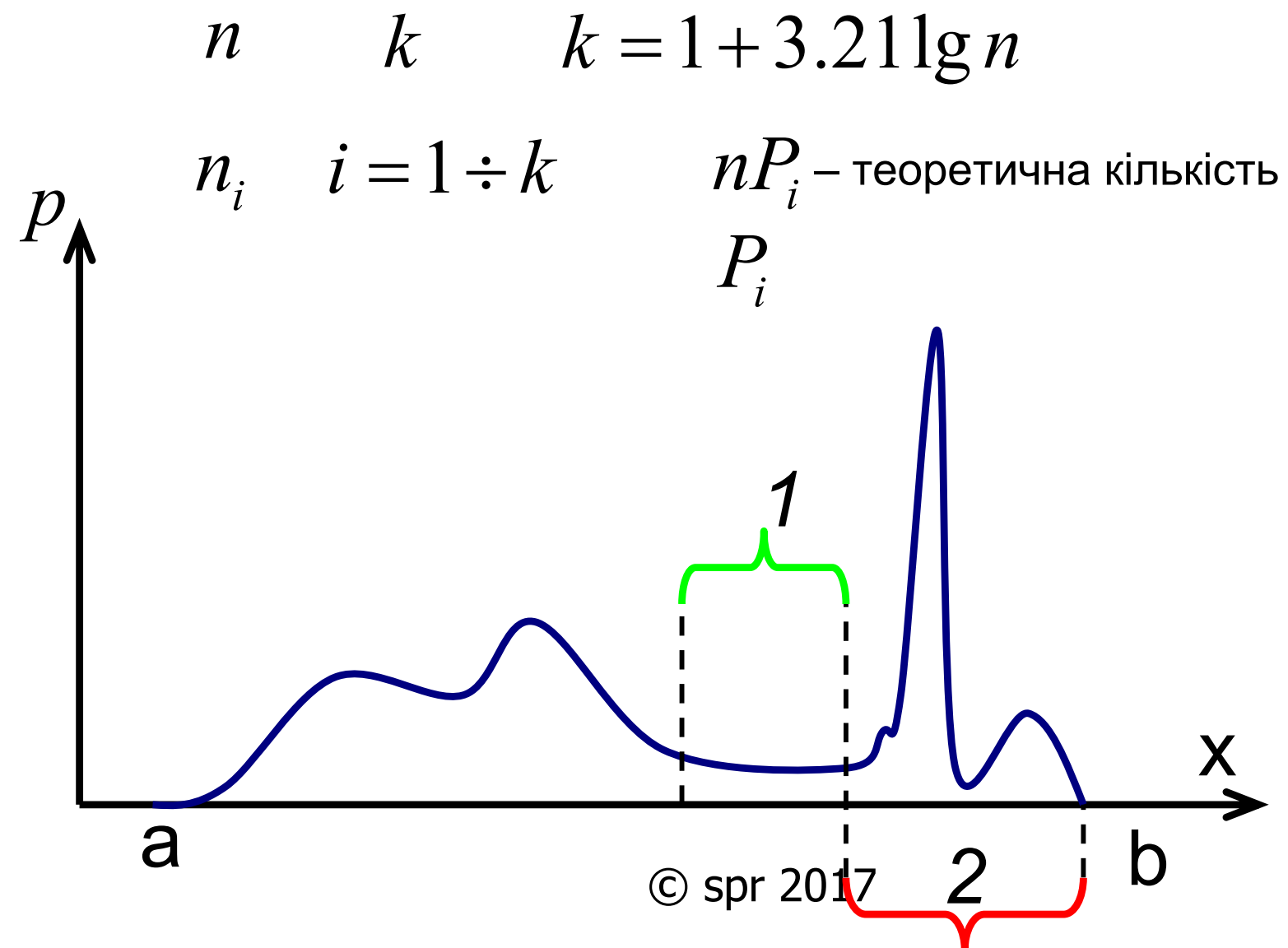
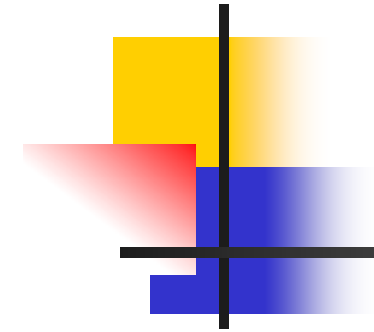
$$\chi^2 \leq \chi_{qv}^2 \quad P_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{b - a}$$

$$q = 0.1; 0.05; 0.01 \quad x_0 = a \quad x_k = b$$

$$\nu = k - 1$$

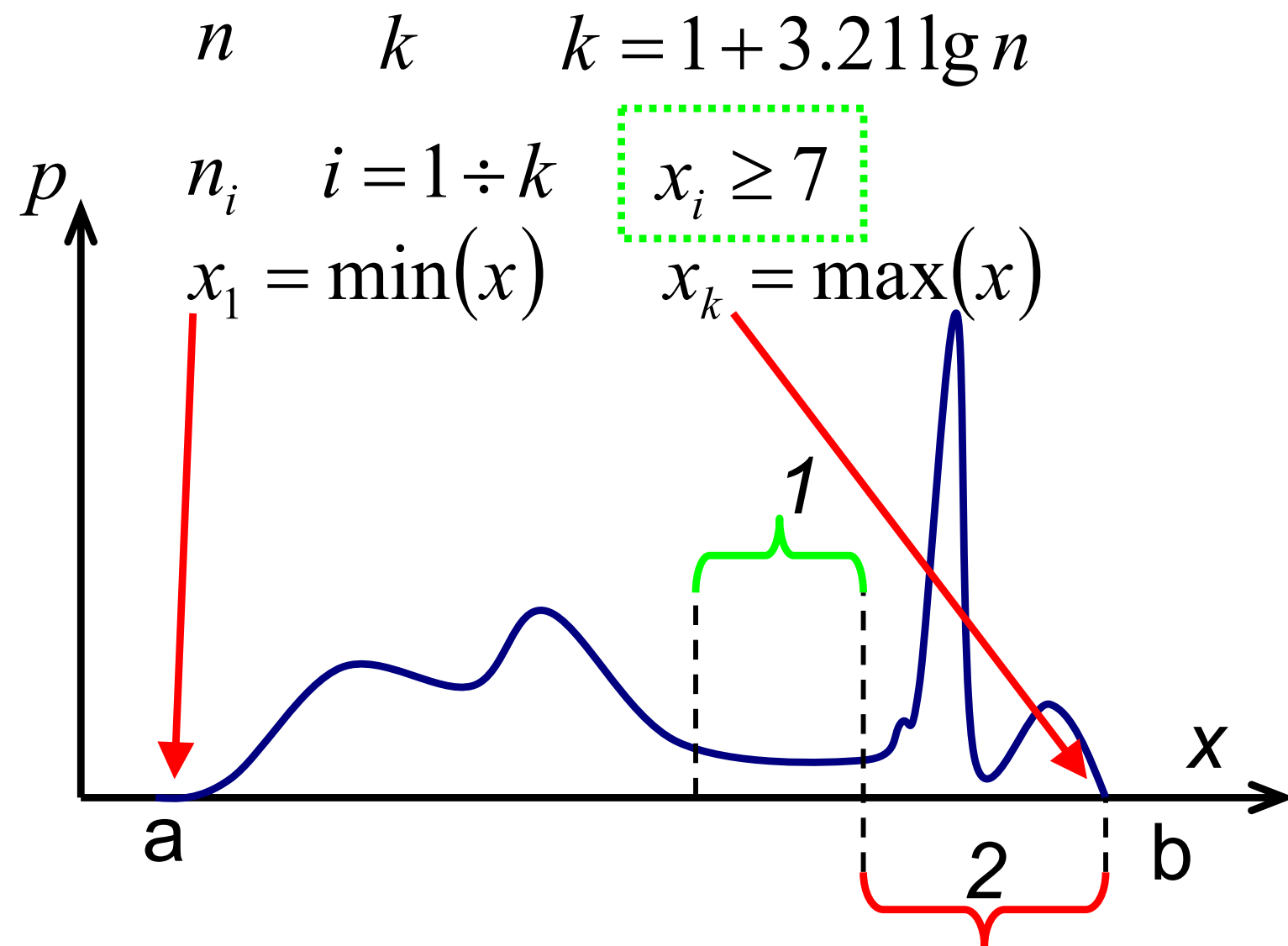


Близькість теоретичного та експериментального розподілів за критерієм χ^2 .



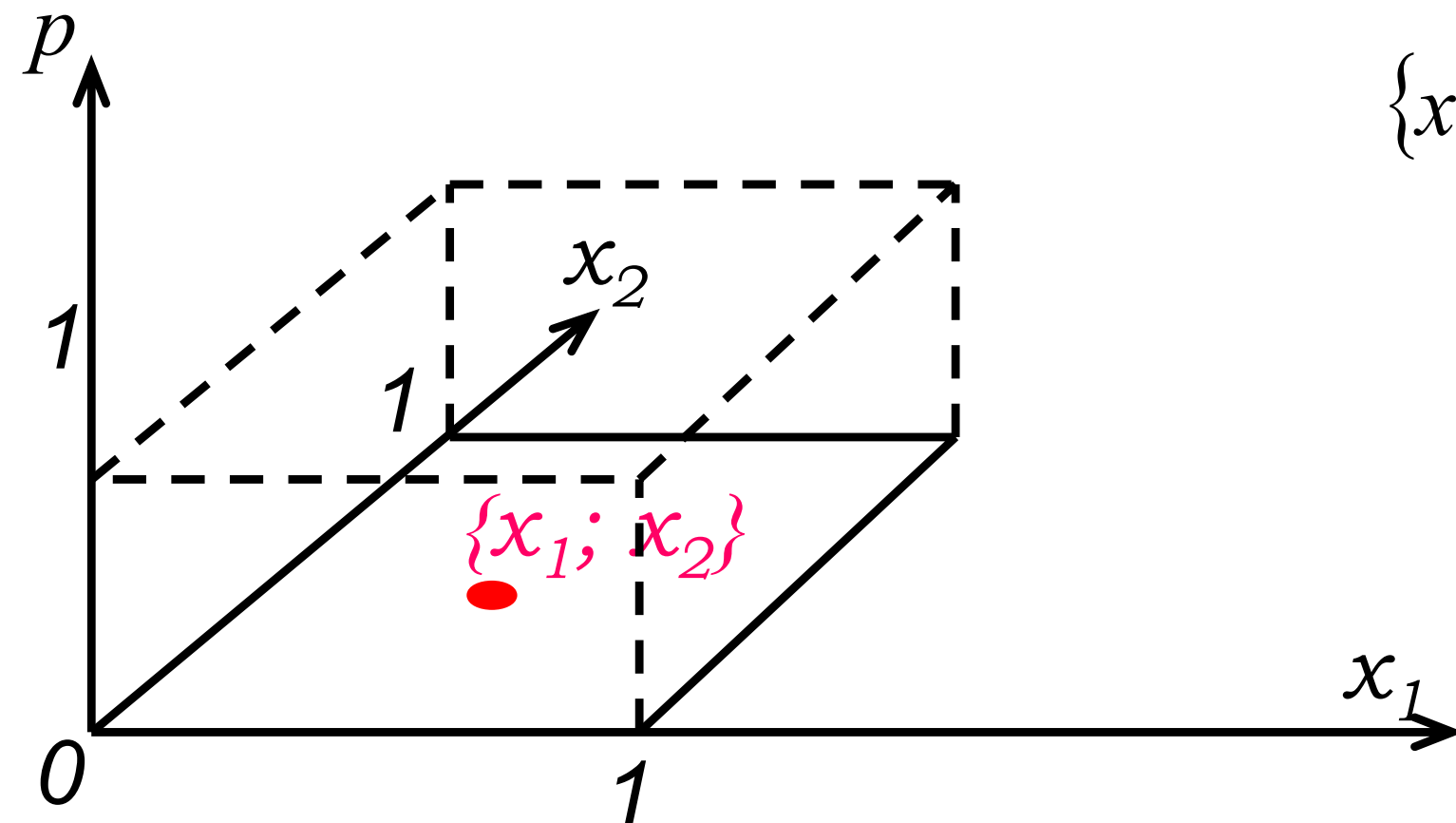
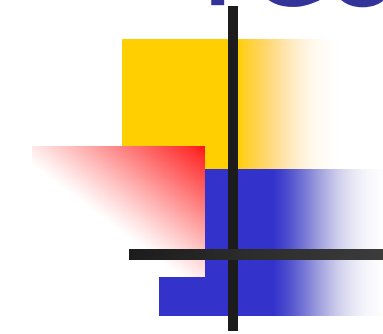
0.08	0.00
0.97	
0.89	
0.39	0.09
0.67	0.10
0.03	
0.92	
0.54	
0.93	
0.62	
0.88	
0.06	
0.51	0.45
0.80	0.46
0.80	
0.30	
0.85	
0.84	
0.37	
0.05	
0.28	1.00

Вибір інтервалів для оцінки близькості теоретичного та експериментального розподілів за критерієм χ^2 .



- Швидкістю зростання і/або спадання функції $p(x)$ на ділянці $x_i \div x_{i+1}$.
- Точність отримання випадкової величини на ділянці $x_i \div x_{i+1}$.
- Перевірка генератора випадкових чисел $x_i \in R[0, 1]$ при функціональному перетворенні

Багатовимірна оцінка близькості теоретичного та експериментального розподілів за критерієм χ^2 .



$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots, x_{n-1}, x_n$$

$$\{x_1, x_2\} \{x_3, x_4\} \{x_5, x_6\} \dots \{x_{n-1}, x_n\}$$

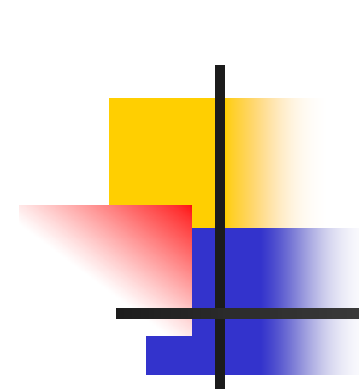
Багатовимірна оцінка близькості теоретичного та експериментального розподілів за критерієм χ^2 .

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots, x_{n-1}, x_n$$

$$\{x_1, x_2\} \{x_3, x_4\} \{x_5, x_6\} \dots \{x_{n-1}, x_n\}$$

$$\{x_1, x_2, x_3\} \{x_4, x_5, x_6\} \dots \{x_{n-2}, x_{n-1}, x_n\}$$

$$\{x_1, x_2, , , , , , , x_i, , , , , , , x_n\}$$



Дякую за увагу!

Статичні копії лекцій

<https://drive.google.com/file/d/0B5eap9XK45K-ZXNJaHZob0Y2aIE>