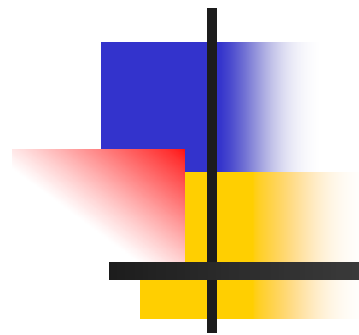
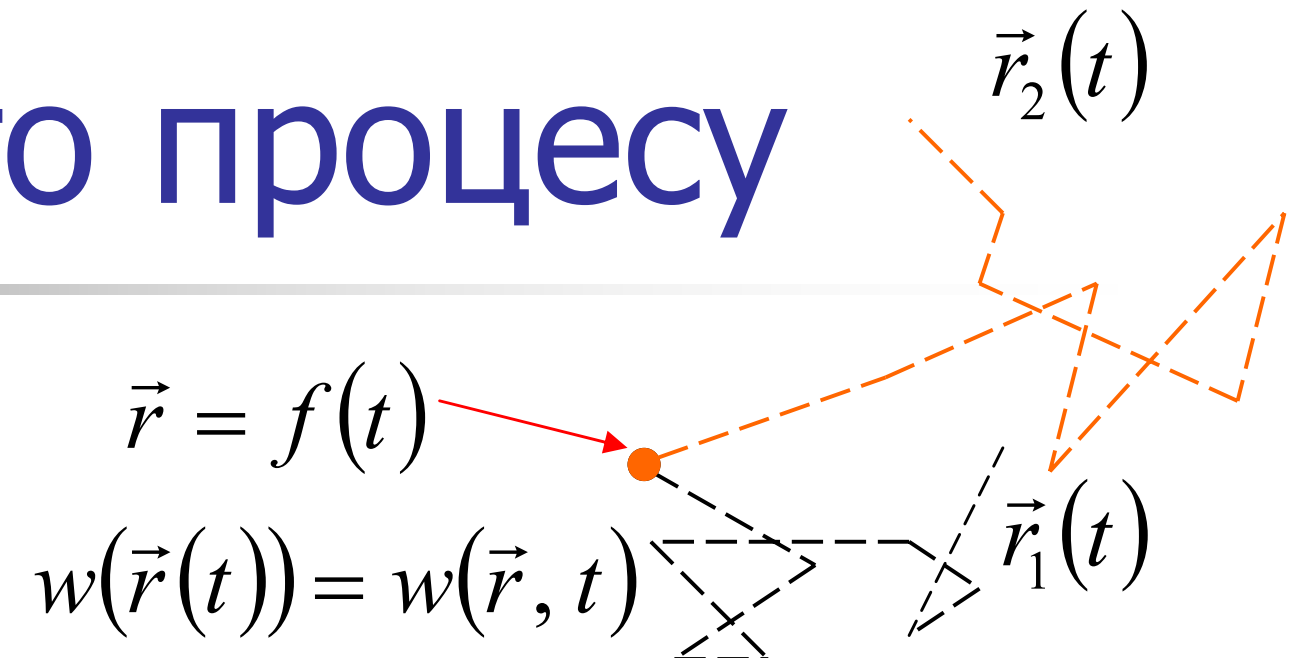
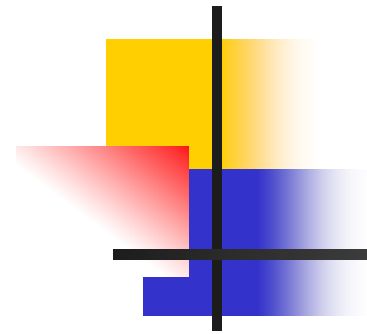


Комп'ютерна фізика



“Моделювання випадкових процесів”

Математичний опис фізичного процесу

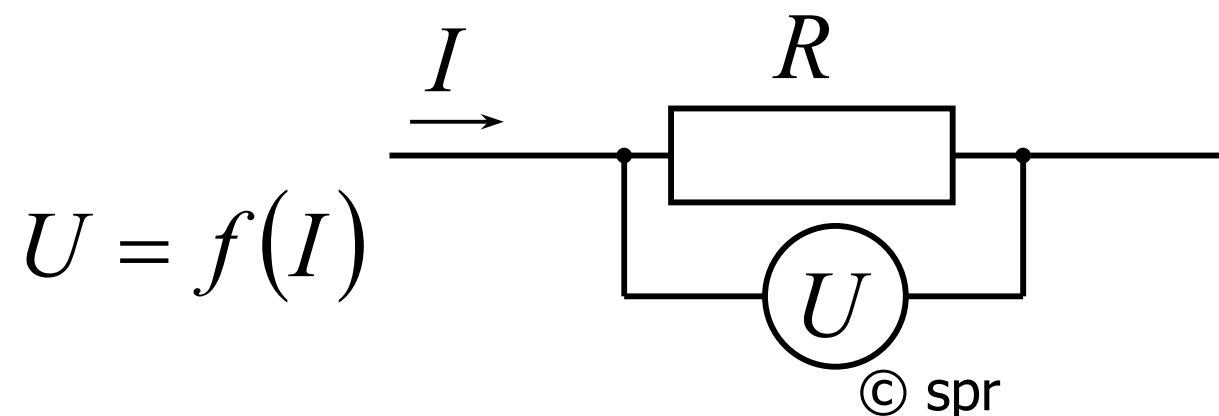


■ Статистичний

задають функцію густини імовірності $w(y, t)$
появи значення фізичної величини y в момент часу t .

■ Детермінований

тобто, є всі дані для запису часової залежності зміни фізичної величини y процесу $y = f(t)$



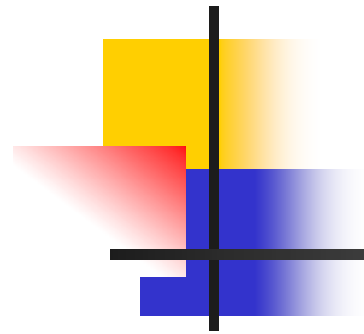
$$U = I \cdot R$$

$$I = f(t) \quad U = I(t) \cdot R$$

Випадкова природа фізичних процесів



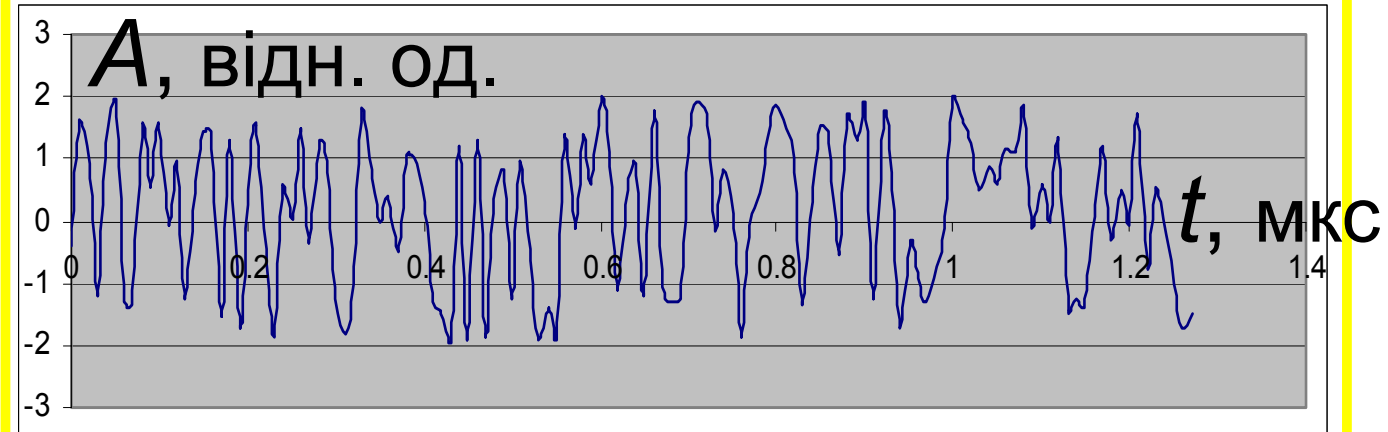
- Джерела випромінювання є генераторами шуму;
- Хаотична зміна параметрів систем і властивостей середовищ.



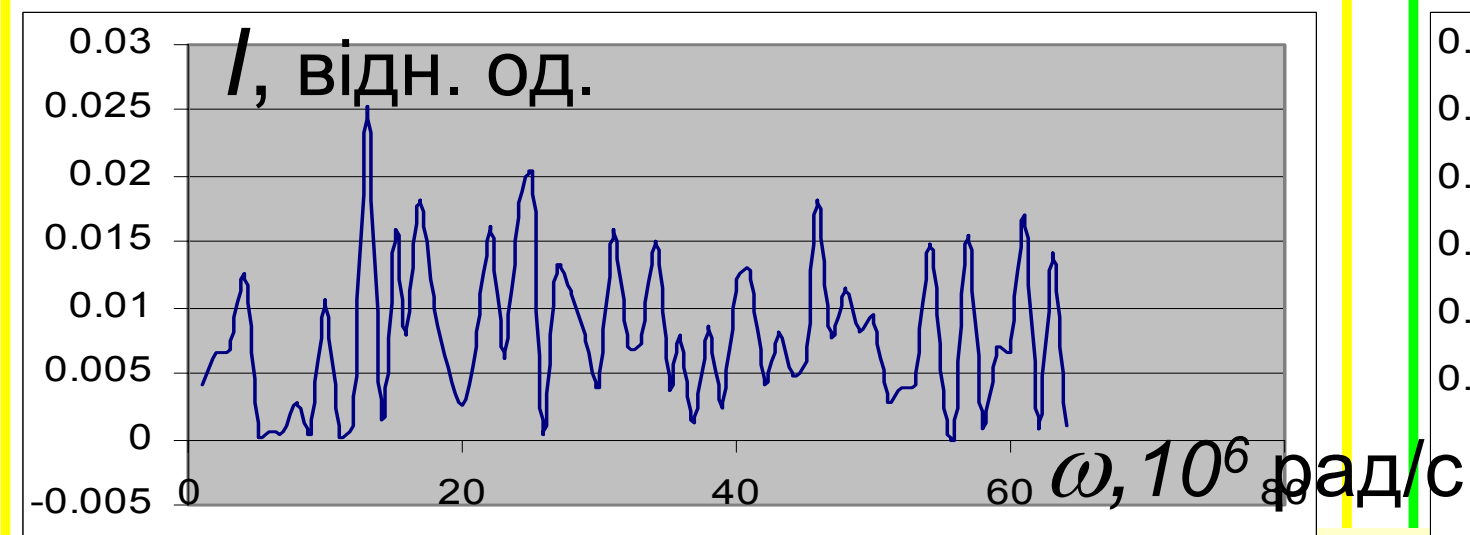
Шуми

- **“Небажаний” або “непотрібний” сигнал (звук вітру, шторму або натовпу, ...).**
- **Все, що не дозволяє, заважає, спотворює або змінює корисний сигнал (коливання відповідної природи, які не використовуються для випромінювання, прийому, передачі, детектування, відновлення сигналів, але нерозривно пов’язані з цією діяльністю).**
- **Дані без змісту (реклама під час фільму, оголошення на web-сторінці, спам у поштовій скринці ...).**

Шуми – неупорядковані коливання різної фізичної природи, які мають складну часову і спектральну характеристику.

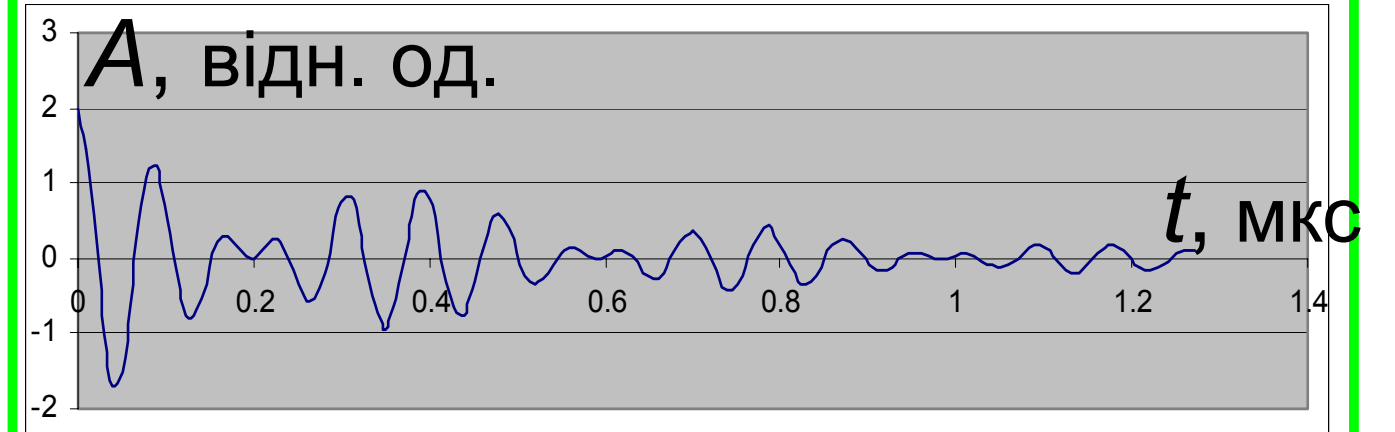


Шум

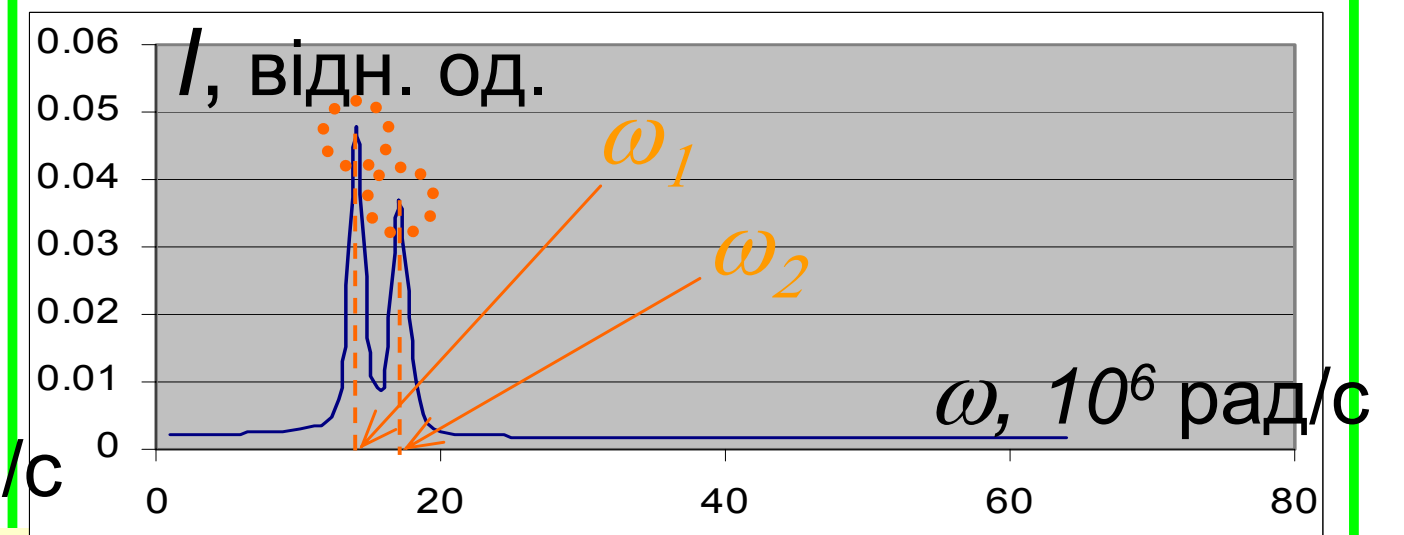


27-вер-17

Часова зміна амплітуди

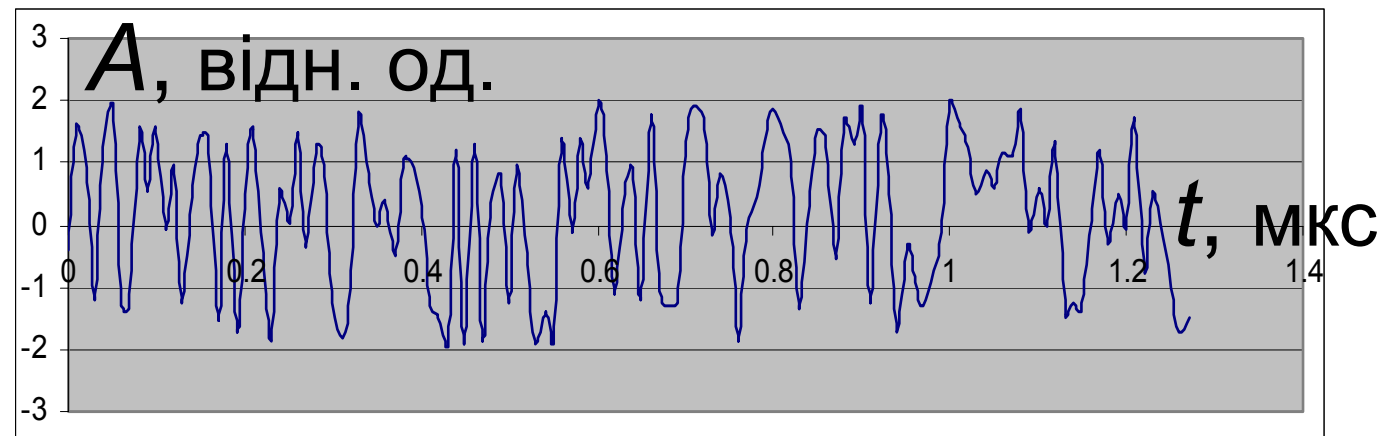


Сигнал СВІ

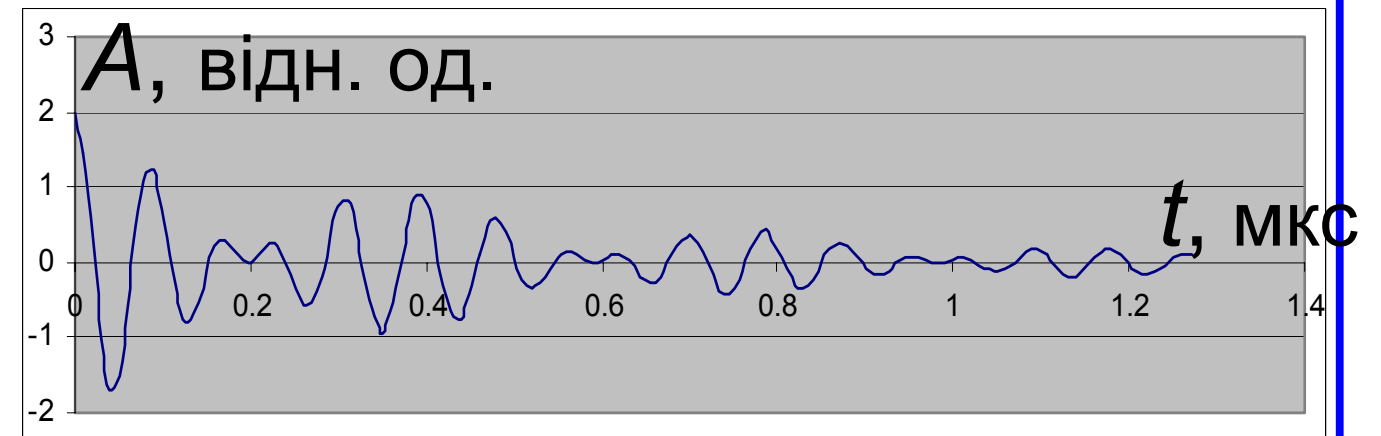


Спектр

Шуми – неупорядковані коливання різної фізичної природи, які мають складну часову і спектральну характеристику.



Шум



Часова зміна амплітуди

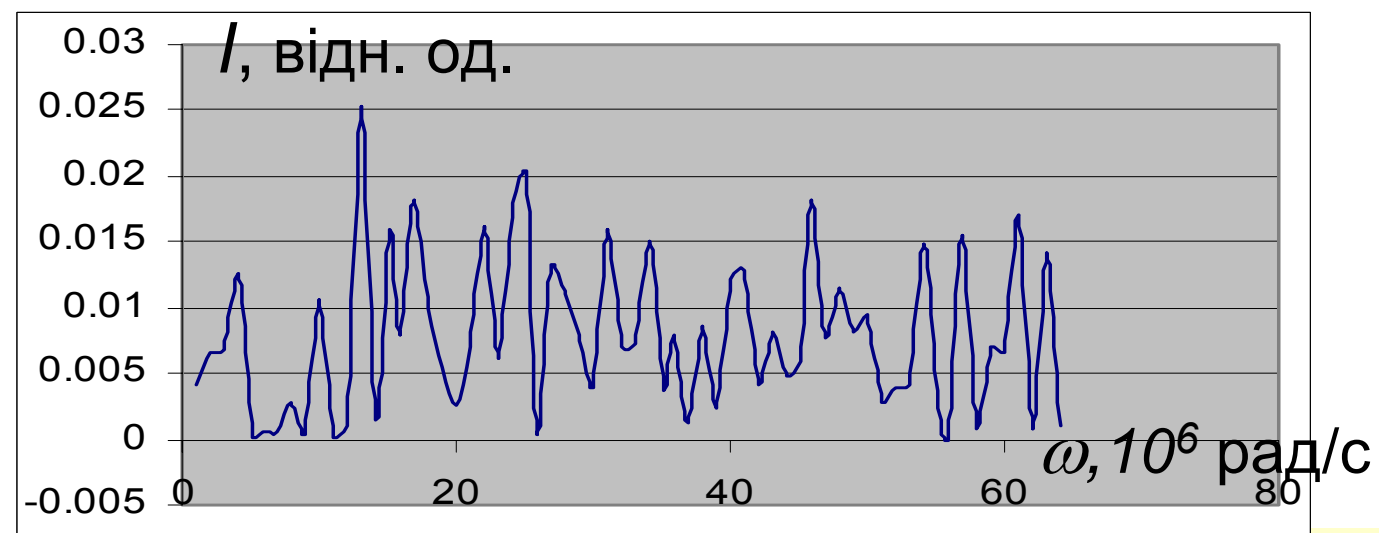
Сигнал СВІ

Особливість - випадкова природа зміни миттєвих значень величин, які описують шумовий процес. (як *часове* або просторове, так і спектральне представлення).

Шуми – неупорядковані коливання різної фізичної природи, які мають складну часову і спектральну характеристику.

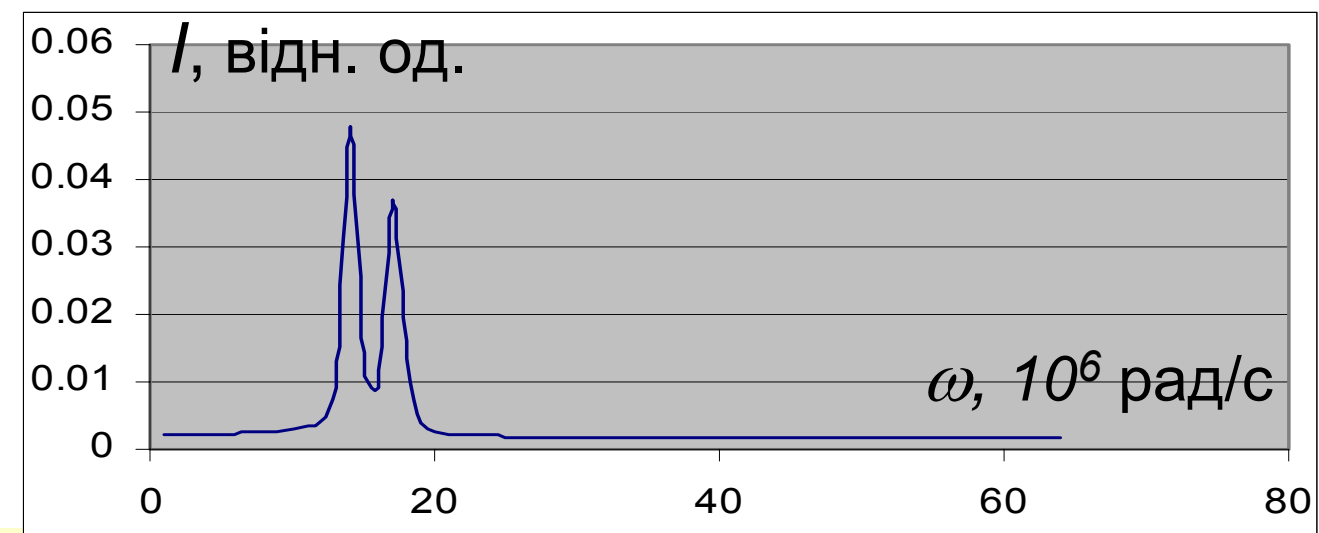
Особливість - випадкова природа зміни миттєвих значень величин, які описують шумовий процес (як часове або просторове, так і **спектральне** представлення).

Шум

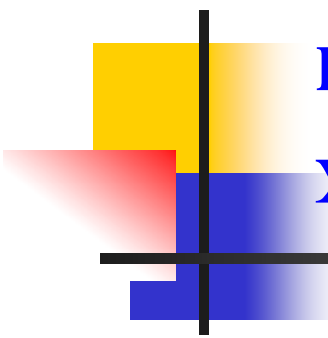


27-вер-17

Сигнал СВІ

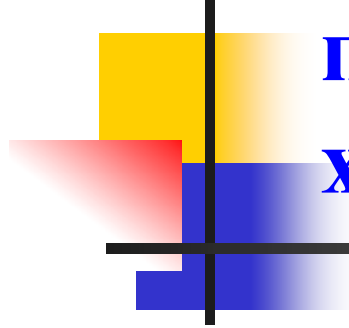


Спектр



Шуми – неупорядковані коливання різної фізичної природи, які мають складну часову і спектральну характеристику.

- **Флуктуації власних параметрів приладів визначають межу їх чутливості, власні шуми – точність вимірів і є причиною неможливості генерації монохроматичних коливань.**
- **Зменшення їх впливу (прийом і виділення сигналів на фоні шумів, оптимальне виявлення, підвищення точності).**
- **Шуми – джерела інформації.**

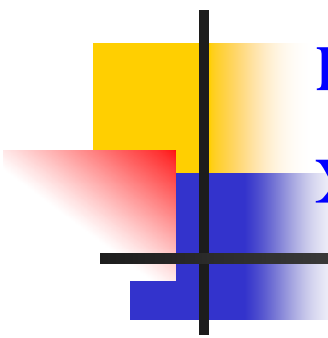


Шуми – неупорядковані коливання різної фізичної природи, які мають складну часову і спектральну характеристику.

Для опису шумів використовують статистичні параметри.

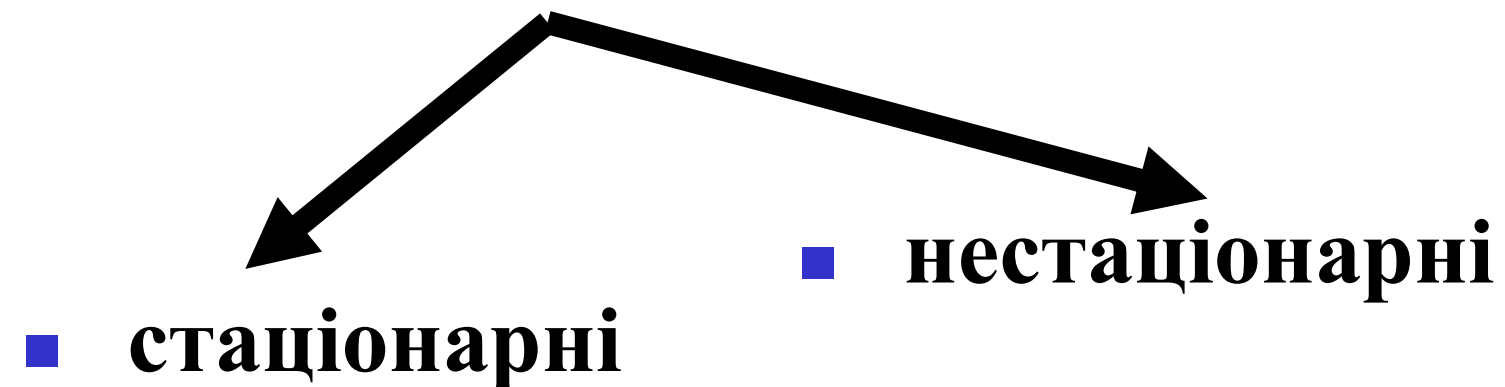
Для представлення шумів використовують випадкові процеси.

Моделювання випадкових процесів!



Шуми – неупорядковані коливання різної фізичної природи, які мають складну часову і спектральну характеристику.

- Найчастіше параметр має значення часу або координат простору.
- Часто використовують терміни випадкова функція, випадкове поле, випадкова послідовність.



Для опису багатьох явищ використовують наближення стаціонарних процесів, марковських процесів. (Д.3.)

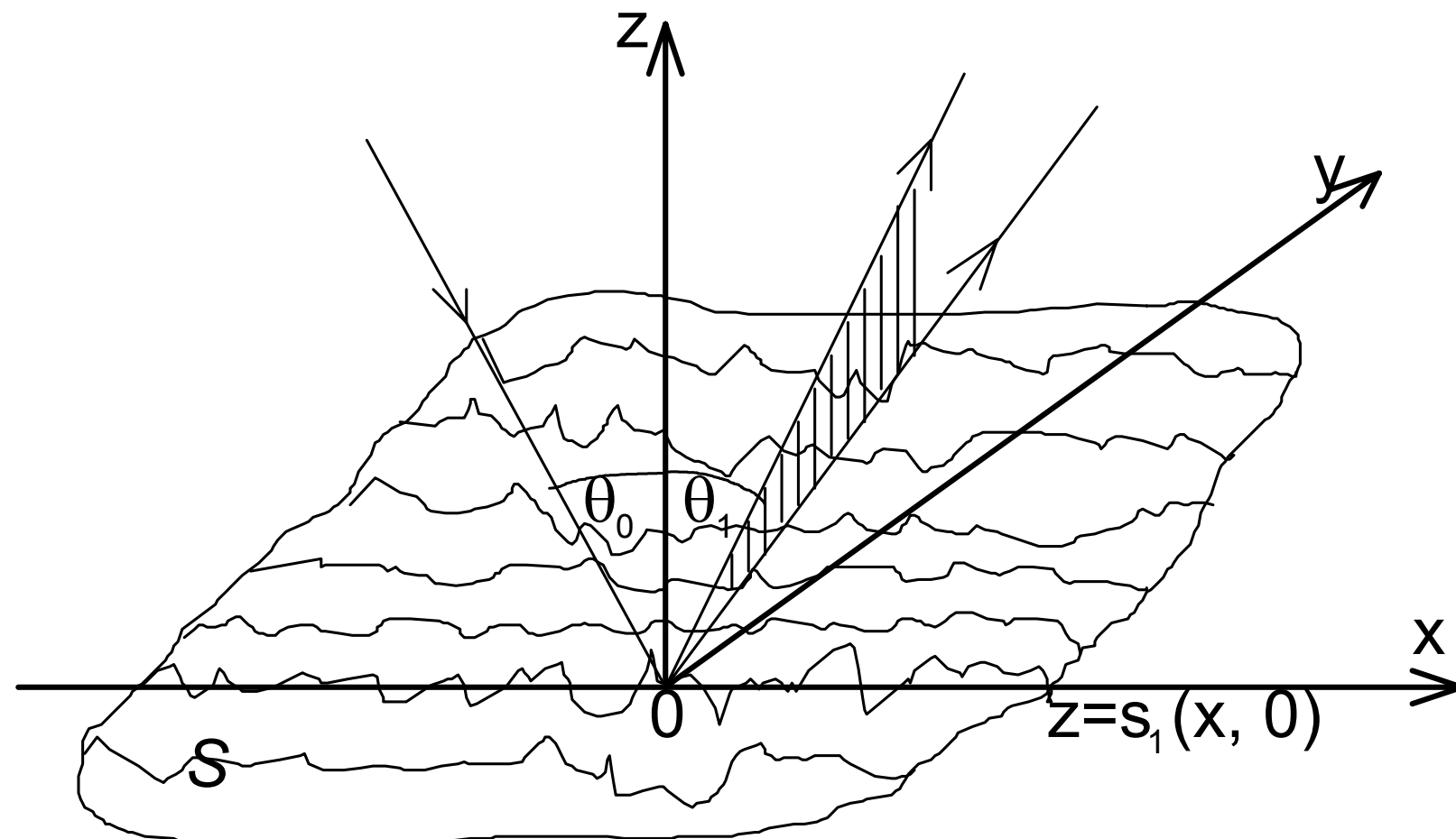


Оптика (XIX ст.)

- дослідження газорозрядних і теплових джерел світла

Радіофізика – (XIX–XX ст.) дослідження випадкових явищ

- Розсіяння на випадкових поверхнях.





Радіофізика – (XIX–XX ст.) дослідження випадкових явищ

- Розсіяння на випадкових поверхнях.
- Шуми радіотехнічних пристроїв для навігації, локації, зв'язку.

Середнє значення квадрату напруги на кінцях провідника з опором R , який знаходиться у стані теплової рівноваги при температурі T , – $\overline{U^2} = 4kTR\Delta\nu$



Радіофізика – (XIX–XX ст.) дослідження випадкових явищ

- Розсіяння на випадкових поверхнях.
- Шуми радіотехнічних пристроїв для навігації, локації, зв'язку.
- Статистичні явища при випромінюванні, поширенні та прийомі електромагнітних хвиль.



Статистичний опис фізичного процесу

- Значення в момент часу t можна набути лише з певною імовірністю

$$P(x_1 < x \leq x_2, t) = \int_{x_1}^{x_2} w(x, t) dx$$

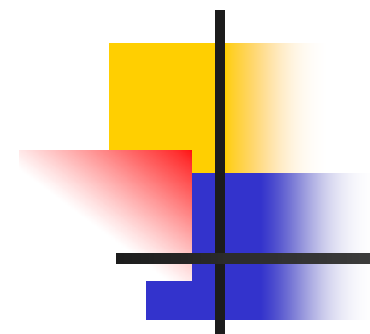
- Процес може бути комплексним

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

$$w(z, t) \begin{array}{l} \longrightarrow w_2(y, t) \\ \longrightarrow w_1(x, t) \end{array}$$

- Очевидно, що $\int_{-\infty}^{\infty} w(x, t) dx = 1$

Ймовірність, густина розподілу, функція розподілу



Ймовірність – міра достовірності випадкової події.
Розподіл – закон, який описує значення випадкової величини та ймовірності прийняття цих значень.

достовірна подія

$$P_{\xi}(a, b) = 1$$

$$P_{\xi}(a, b) = 0$$

неможлива подія

$$P_{\xi}(a, b) = \int_a^b p_{\xi}(x) dx = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a)$$

$$0 \leq P_{\xi}(a, b) \leq 1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x) dx = 1$$

$F_{\xi}(x)$ – монотонна неспадająca функція

$$F_{\xi}(-\infty) = 0 \quad F_{\xi}(+\infty) = 1$$

$$F_{\xi}(b) = P_{\xi}(x < b) = \int_{-\infty}^b p_{\xi}(x) dx$$

Загальний опис випадкового процесу

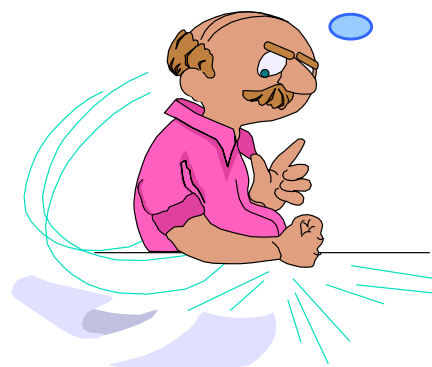
Випадковий процес повністю характеризує його багатовимірна функція густини імовірності

$$p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$$

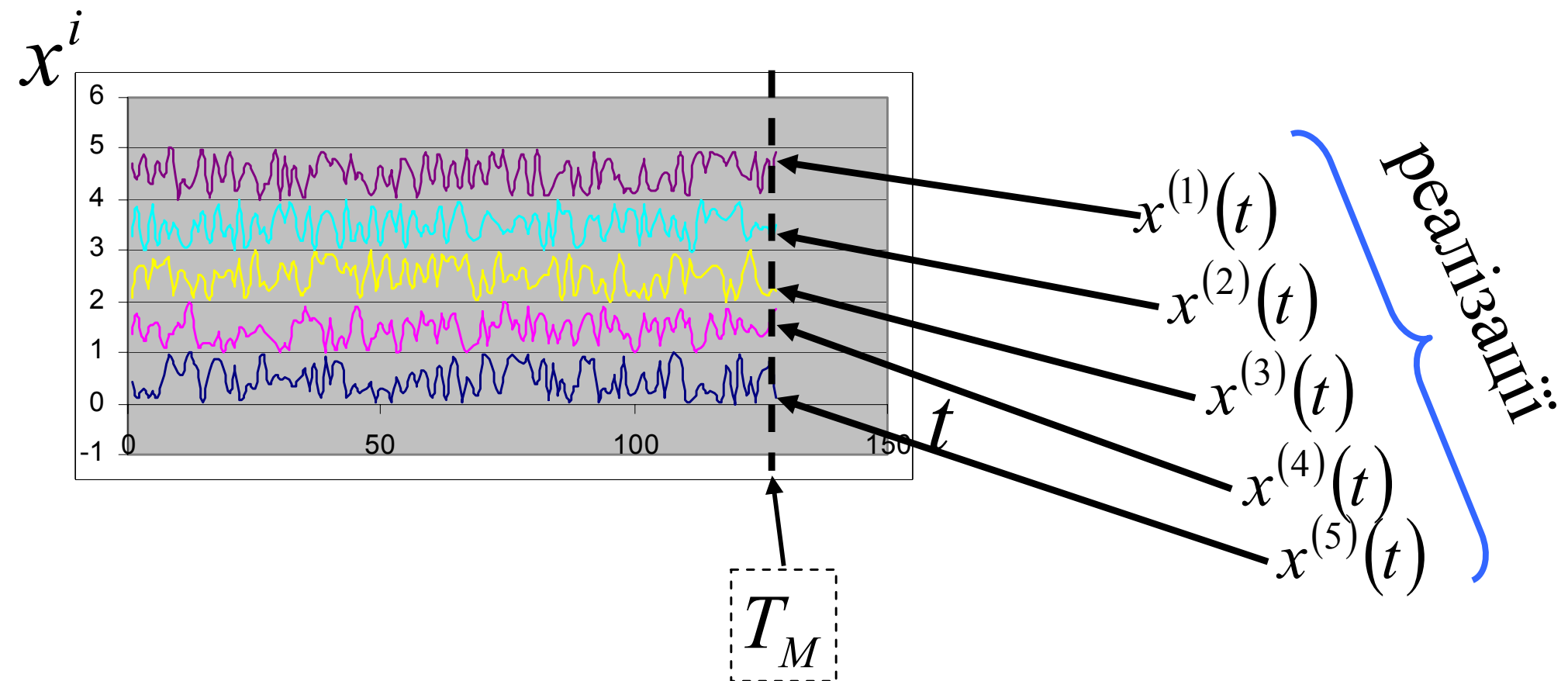
$$\vec{x}_i = \vec{x}(t_i)$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$x(t) = y(t) + iz(t)$$

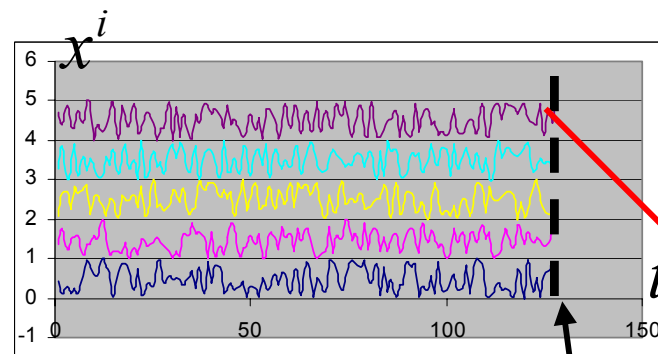


Реалізації випадкового процесу



Зафіксовану частину $x^{(i)}(\tau)$ $t_1 < \tau < t_2$, називають **реалізацією** випадкового процесу $x(t)$.

Моделювання реалізації випадкового процесу



$$x_j^{(i)} = x^{(i)}(t_j)$$

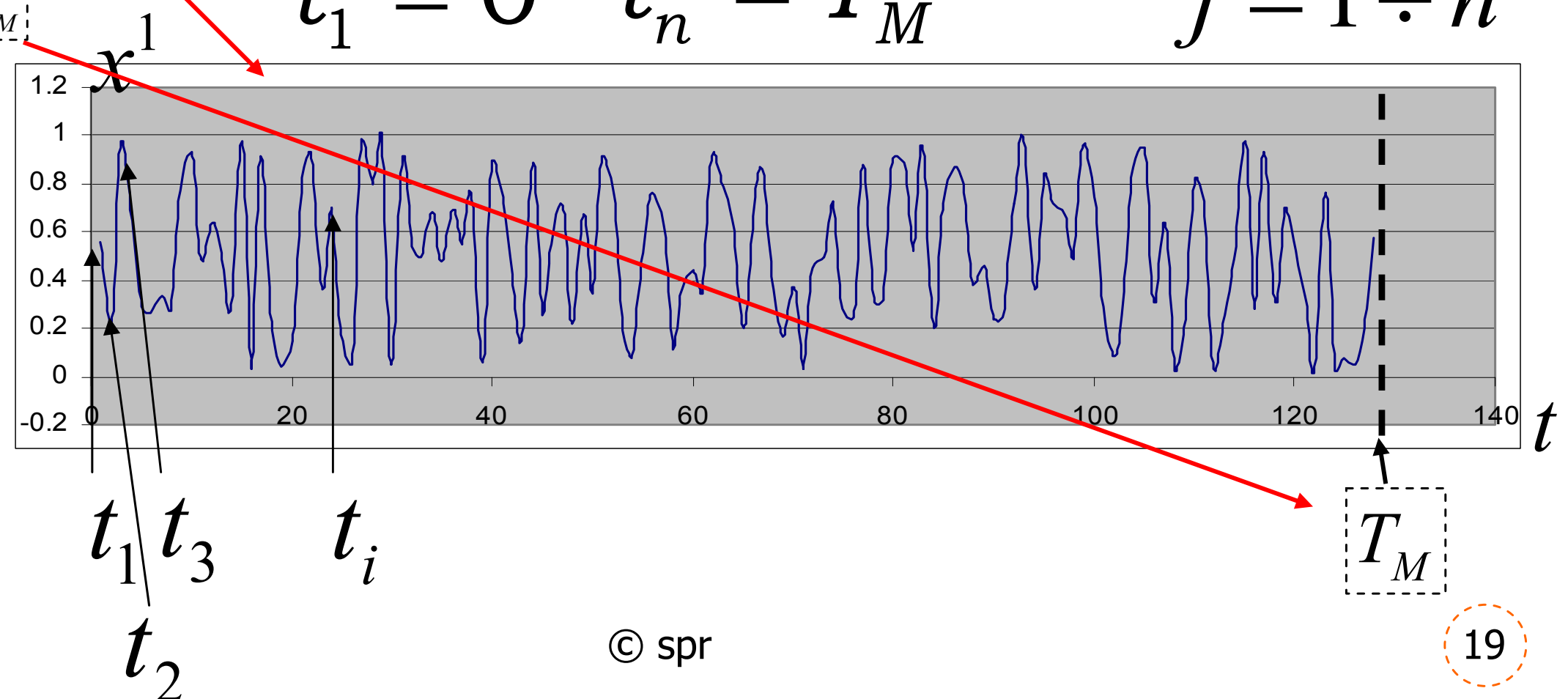
$$t_j \in [0, T_M]$$

$$n = T_M / \Delta t + 1$$

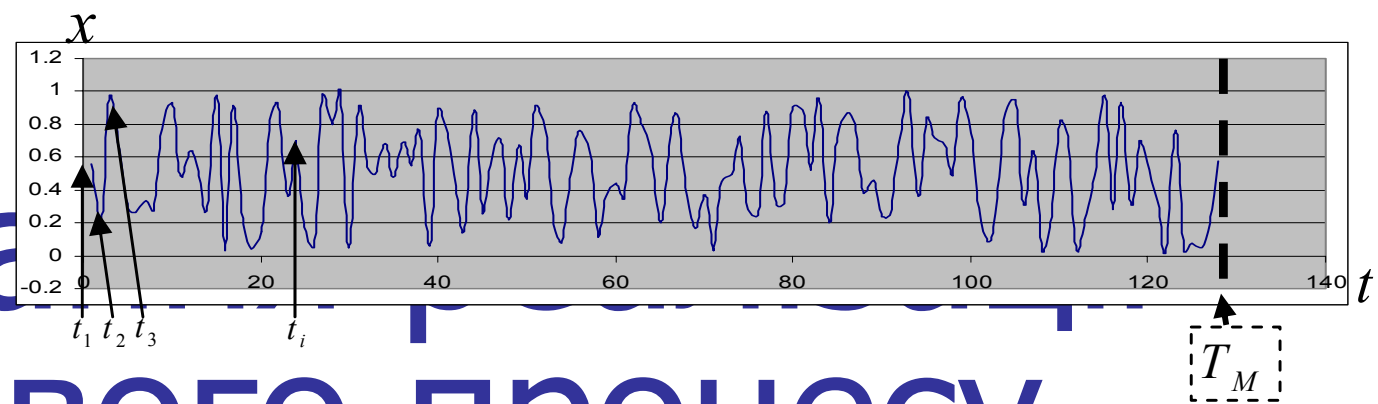
$$\Delta t = t_{j+1} - t_j$$

$$t_1 = 0 \quad t_n = T_M$$

$$j = 1 \div n$$



Моделювання випадкового процесу



$$p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, t_1, t_2, t_3, \dots, t_n) = p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_n = 1$$

$$p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) dx_{m+1} dx_{m+2} \dots dx_n$$

$m < n$
 $n - m$ разів

$$p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_j / x_k, \dots, x_n) = \frac{p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{p(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)}$$



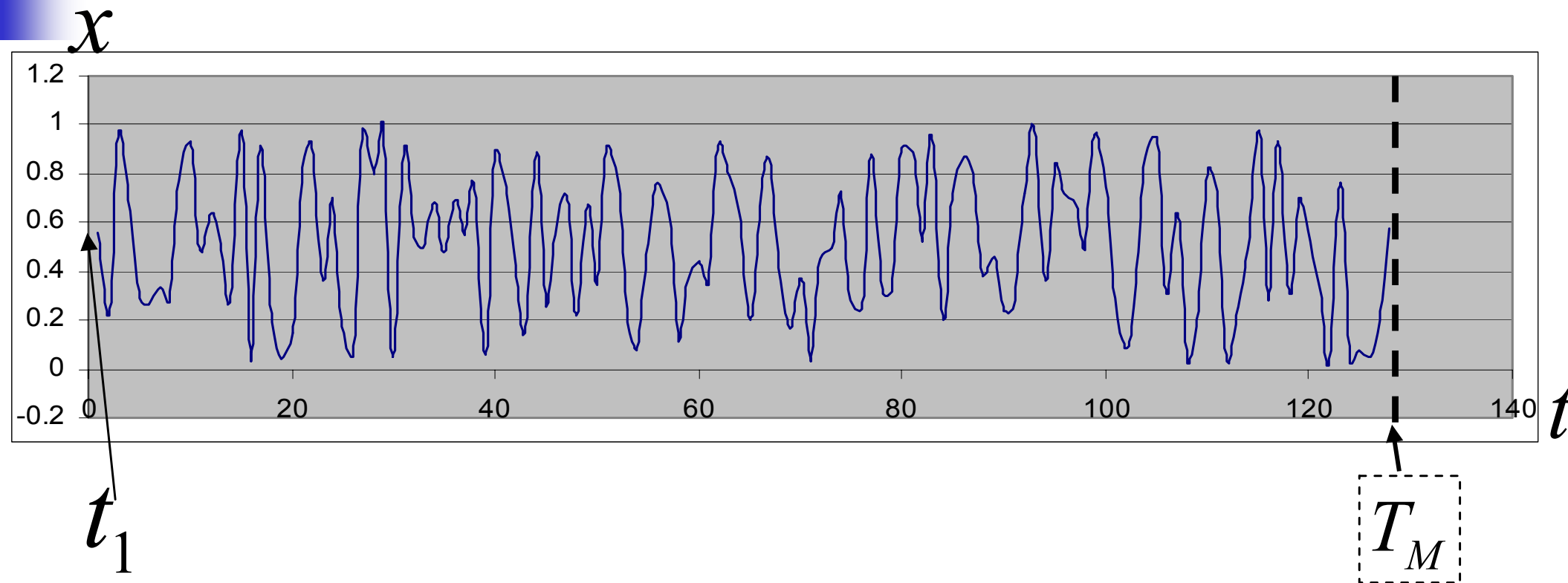
Методи моделювання



- метод відбору

- метод умовних розподілів

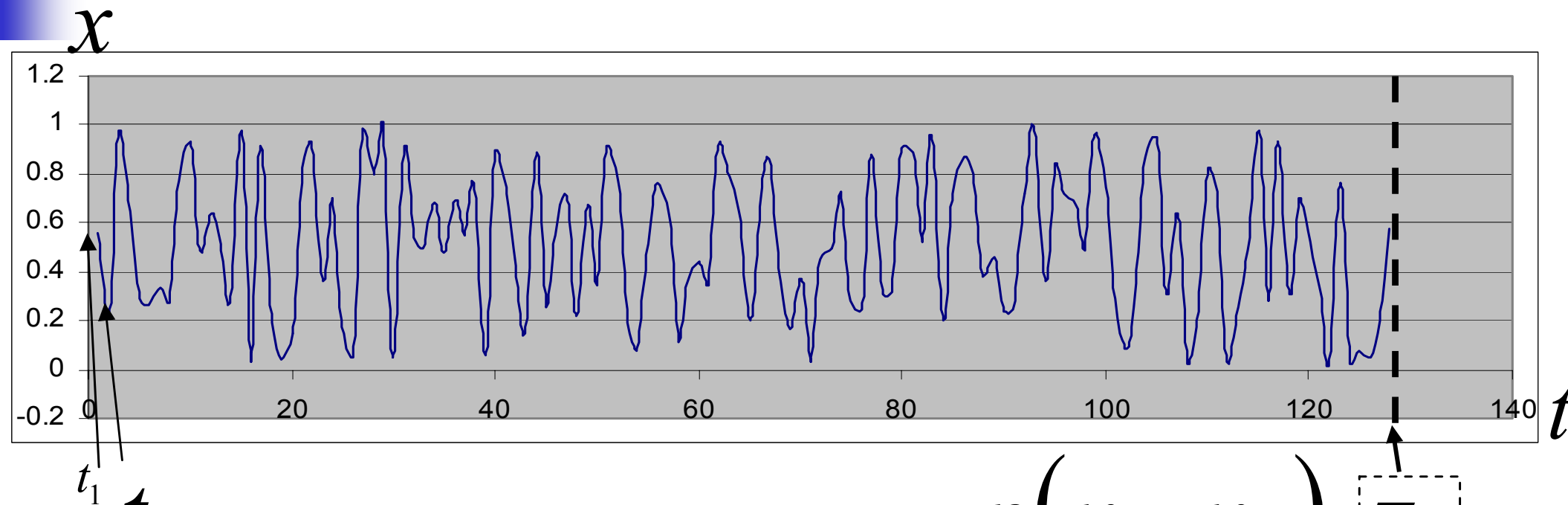
Метод умовних розподілів



$$x_1 = x(t_1)$$
$$p_1 = p(x_1)$$

n-1 раз

Метод умовних розподілів

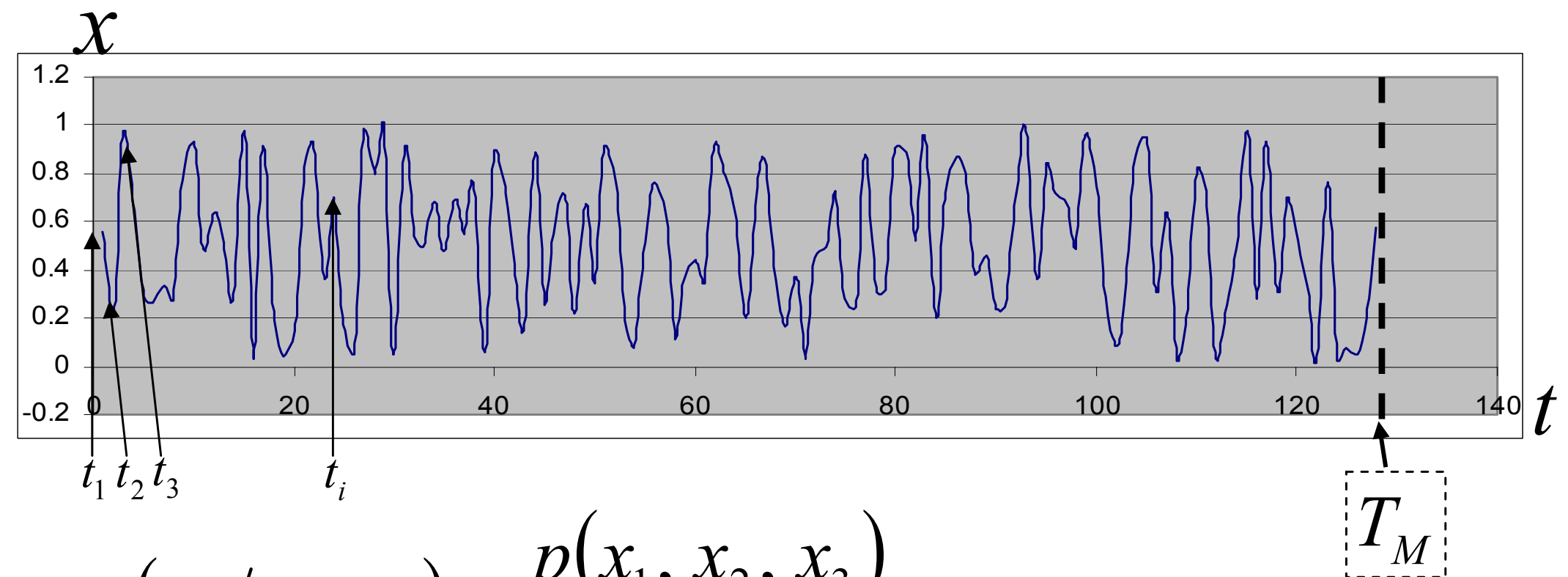


$$x_2 = x(t_2) \quad p_2 = p(x_2/x_1) = \frac{p(x_1, x_2)}{p(x_1)} \quad T_M$$

$$p(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) dx_3 dx_4 \dots dx_n$$

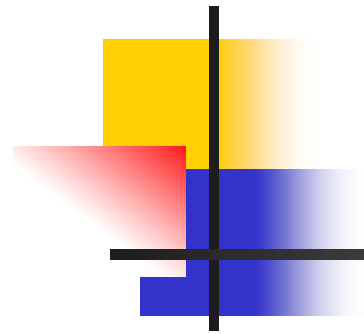
n-2 рази

Метод умовних розподілів



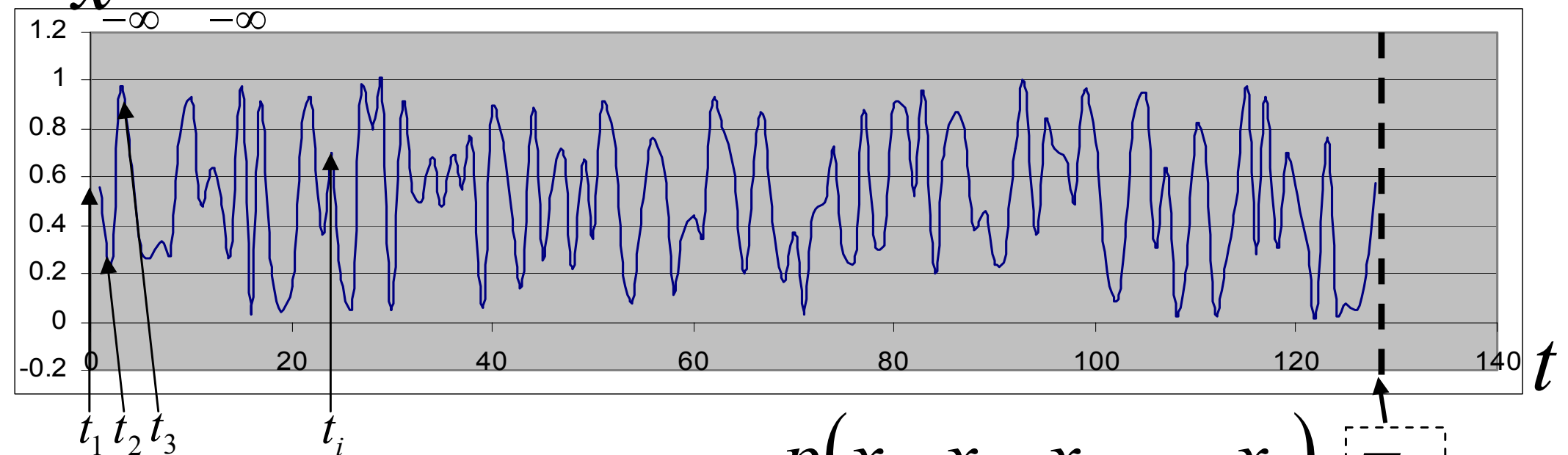
$$x_3 = x(t_3) \quad p_3 = p(x_3/x_1, x_2) = \frac{p(x_1, x_2, x_3)}{p(x_1, x_2)} \longrightarrow \text{попередній крок}$$

$$p(x_1, x_2, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) dx_4 dx_5 \dots dx_n$$



Метод умовних розподілів

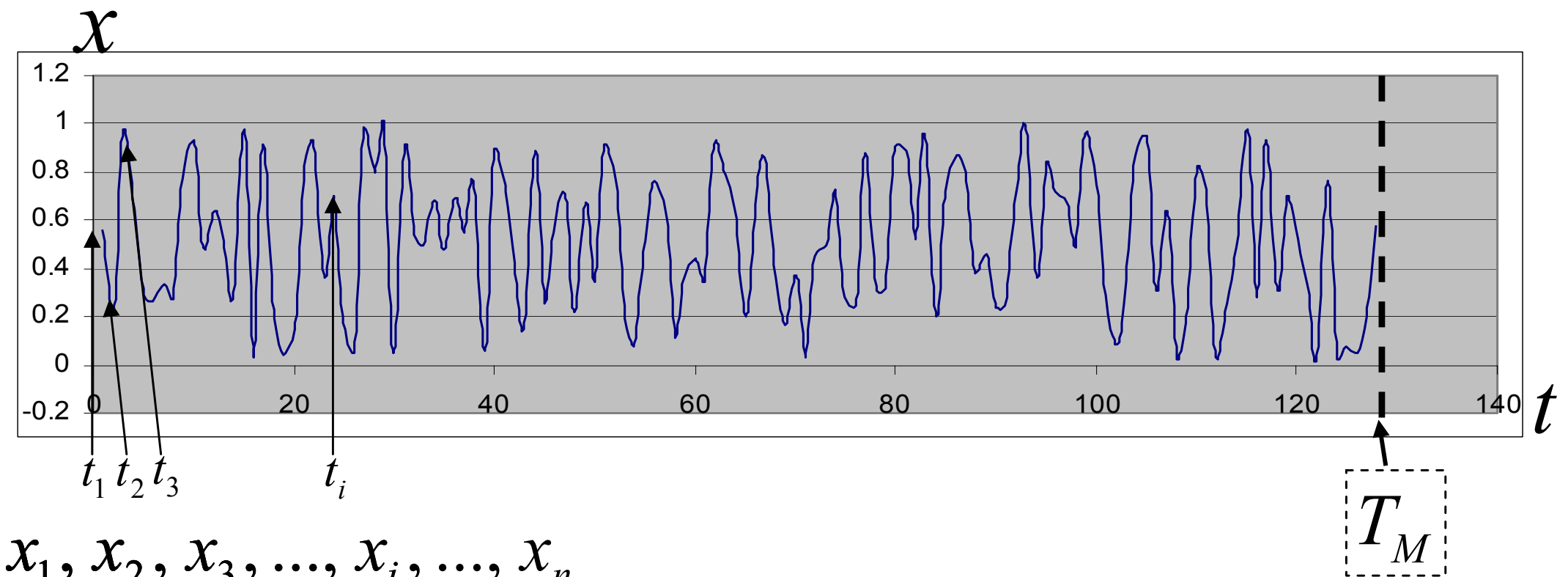
$$p(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i dx_{i+1} \dots dx_n$$



$$x_i = x(t_i) \quad p_i = p(x_i / x_1, x_2, x_3, \dots, x_{i-1}) = \frac{p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i)}{p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{i-1})} \quad T_M$$

$$p(x_1, x_2, \dots, x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{i+1} dx_{i+2} \dots dx_n$$

Метод умовних розподілів

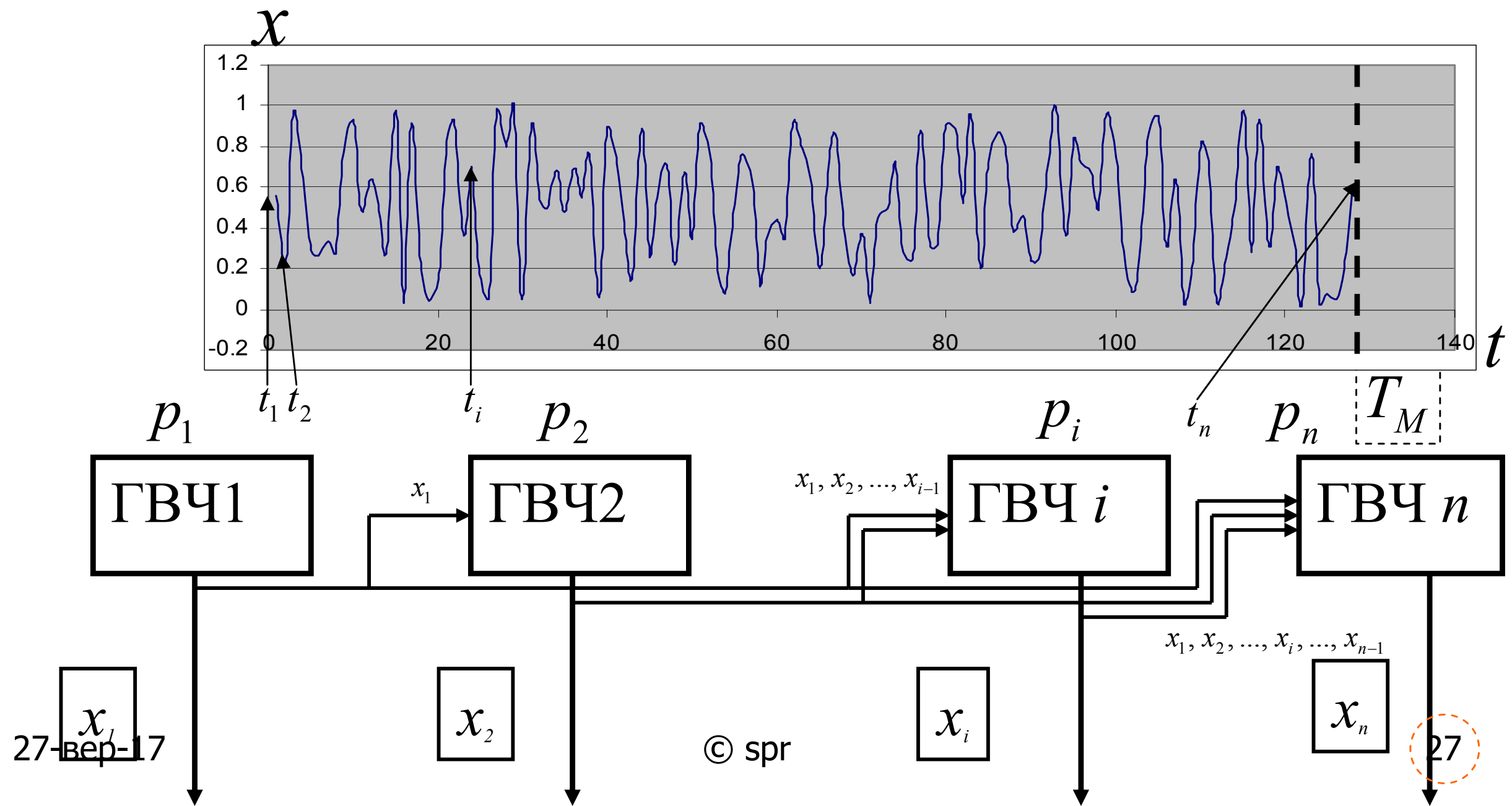


$x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n$

$p_1, p_2, p_3, \dots, p_i, \dots, p_n$

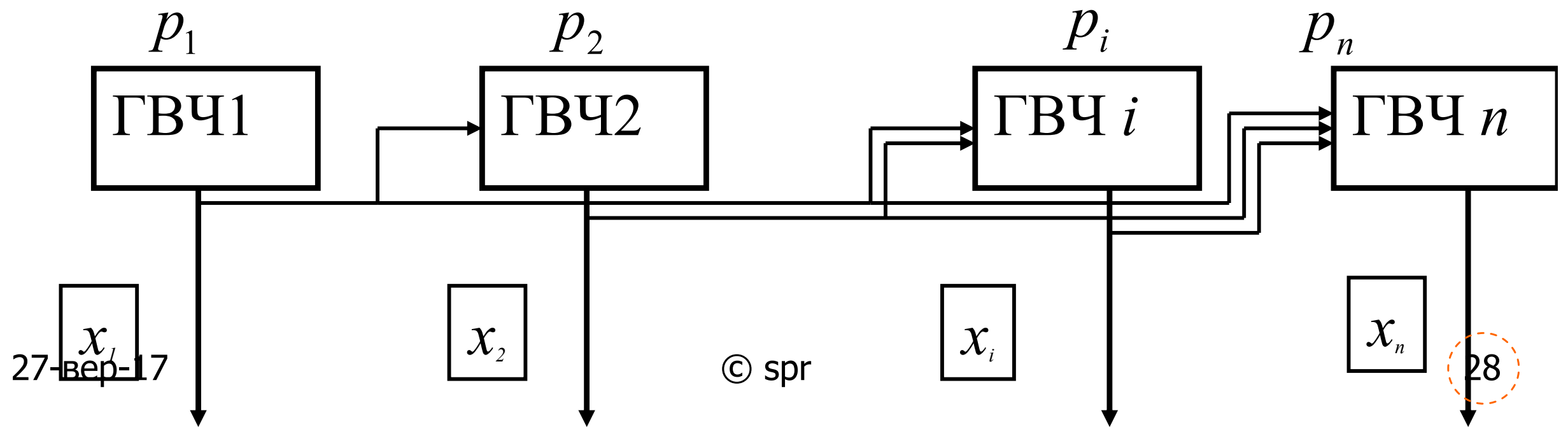
генератори випадкових чисел $p_1, p_2, p_3, \dots, p_i, \dots, p_n$

Схема методу умовних розподілів



Недоліки методу умовних розподілів

- необхідно n ГВЧ з різними густинами розподілу;
- Параметрична $p_2, p_3, \dots, p_i, \dots, p_n$; залежність
- Зміна залежності для різних x_i .



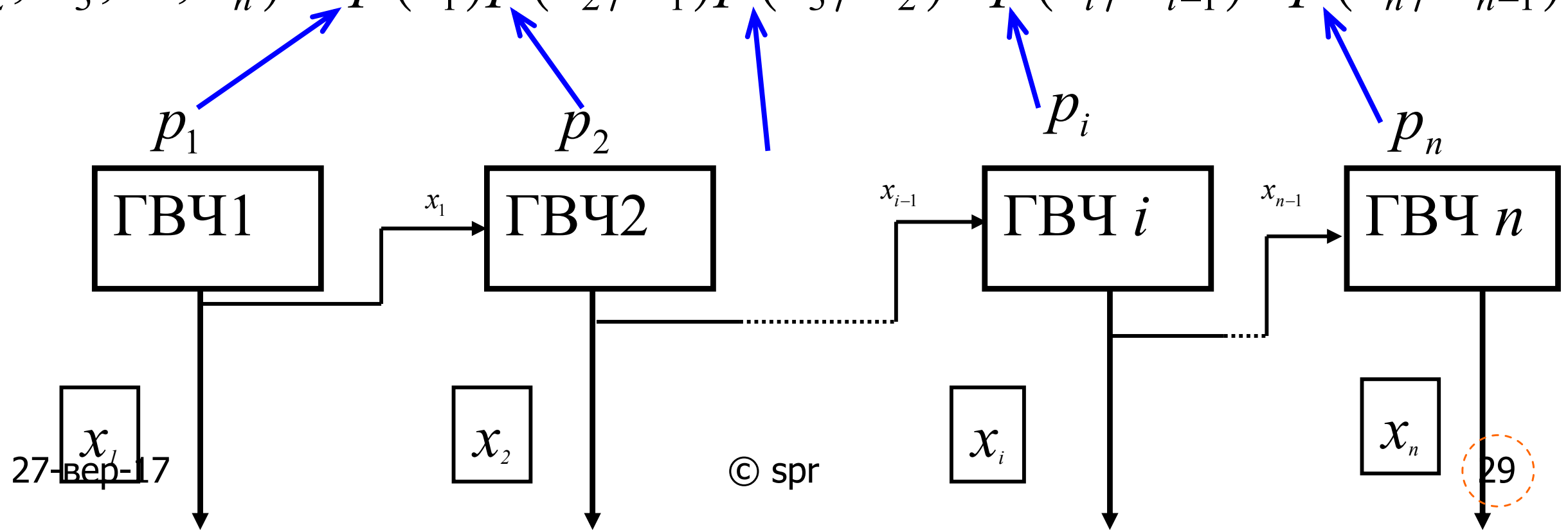
Моделювання марковських процесів методом умовних розподілів

Випадкова функція, розподіл якої у наступний момент часу визначається її значенням у попередній відлік.

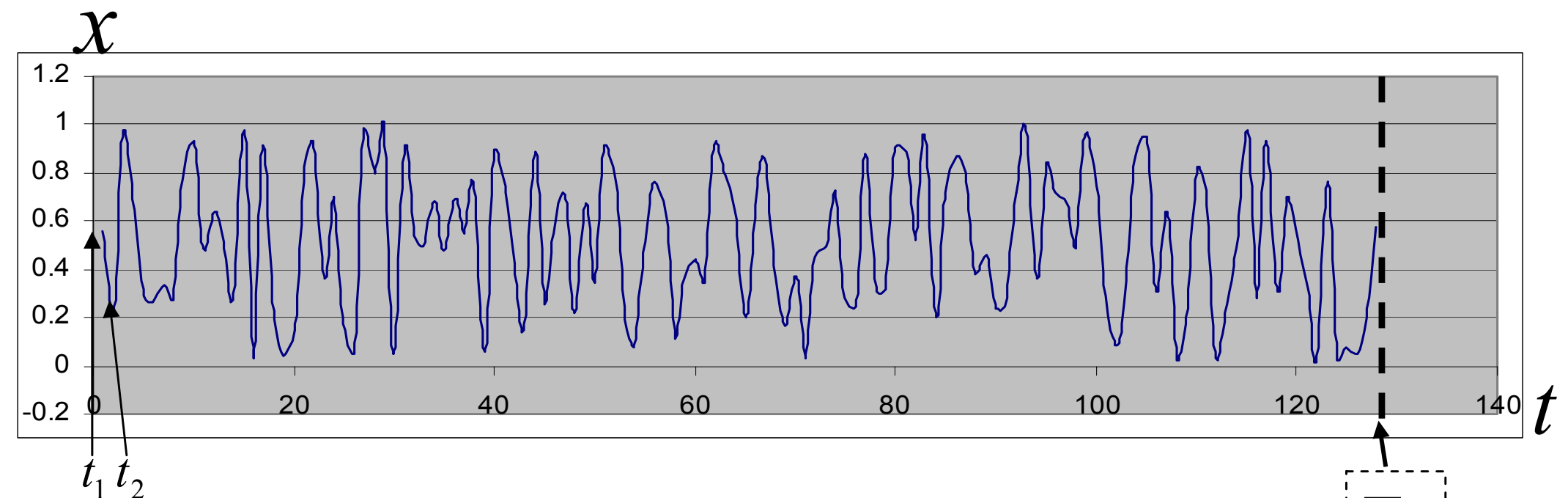
$$p(x_k/x_1, x_2, x_3, \dots, x_j) = p(x_k/x_j)$$

$$p(x_i) \text{ і } p(x_j)$$

$$p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = p(x_1)p(x_2/x_1)p(x_3/x_2) \dots p(x_i/x_{i-1}) \dots p(x_n/x_{n-1})$$



Метод відбору (Неймана)



- Для кожного відліку ГВЧ з рівномірним розподілом генерується випадкове число;
- Це число приймається як миттєве значення процесу пропорційно $p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$;
- Повторення попередніх кроків.



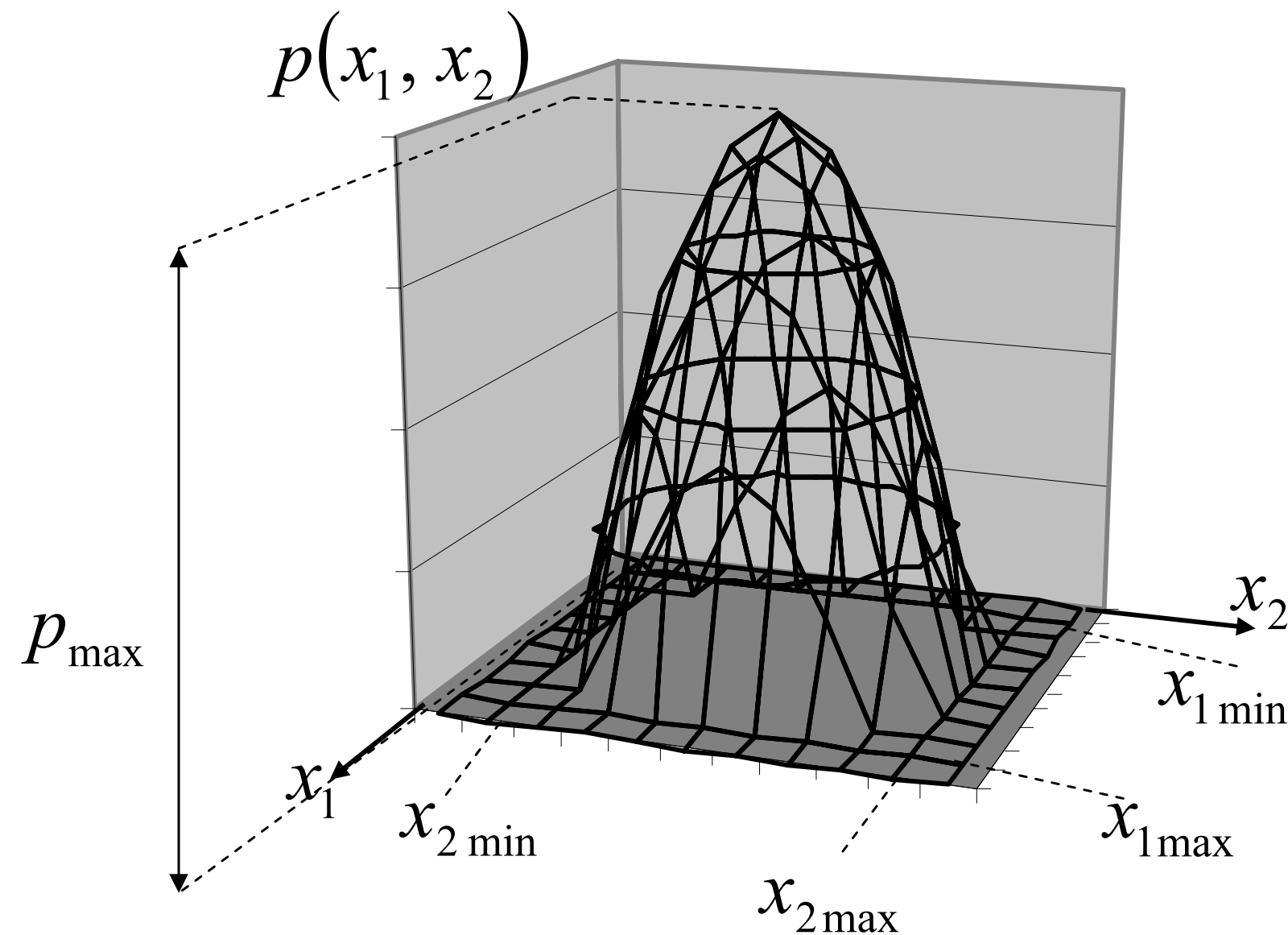
Метод відбору (Неймана)

$$p(x_1, x_2) \quad x_1, x_2 \quad x_1 \in \{x_{1 \min}, x_{1 \max}\} \quad x_2 \in \{x_{2 \min}, x_{2 \max}\}$$

$$x_{\max} \quad i \quad x_{\min} \quad x_{i \max} = \max(x_i) \quad x_{i \min} = \min(x_i)$$

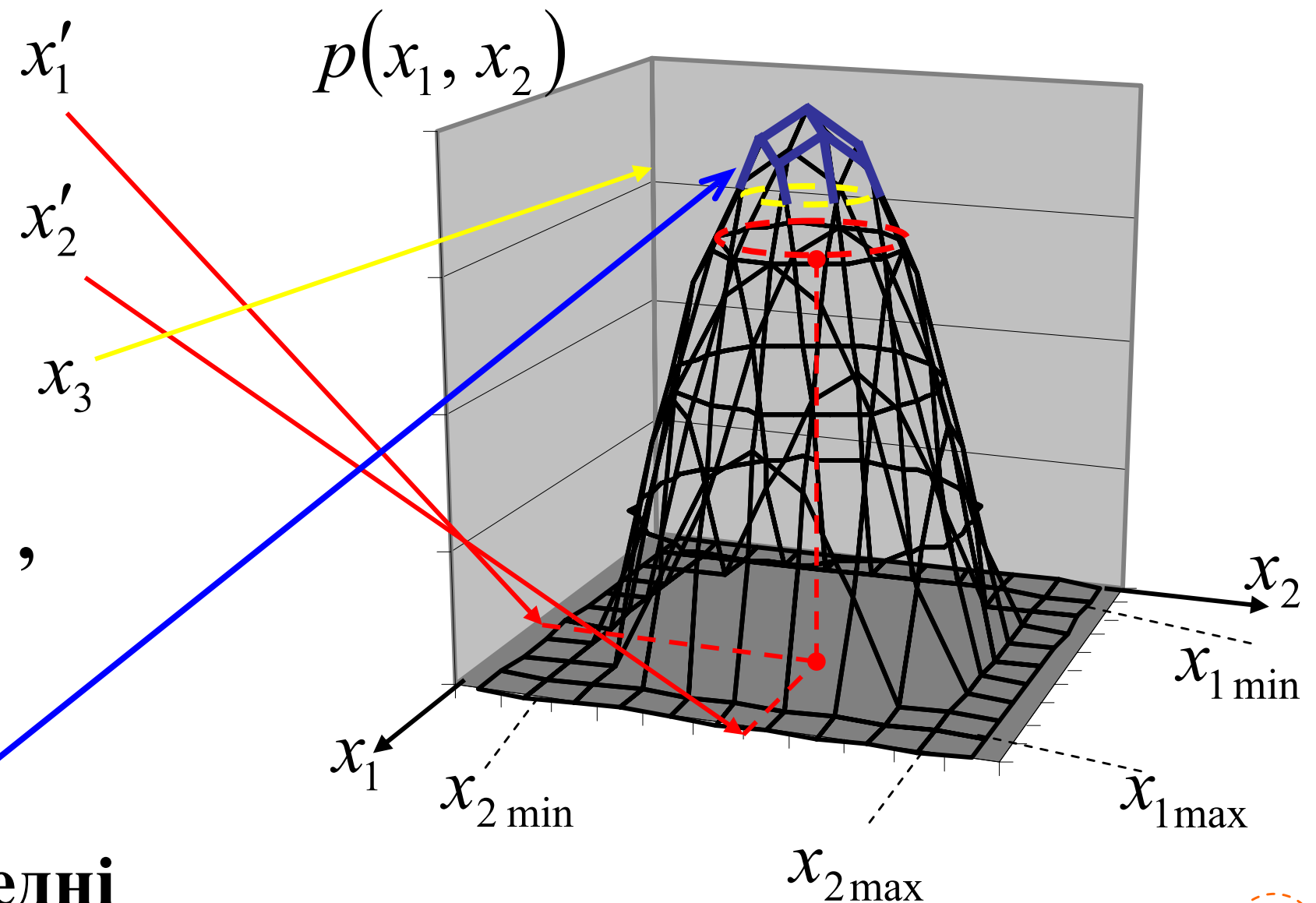
$$p_{\max} \quad p_{\max} = \max(p(x_1, x_2))$$

Метод відбору (Неймана)



Метод відбору (Неймана)

- Генеруємо випадкове число $R(x_{1 \min}, x_{1 \max})$
- Генеруємо випадкове число $R(x_{2 \min}, x_{2 \max})$
- Генеруємо випадкове число $R(0, p_{\max})$
- Якщо $p(x'_1, x'_2) \leq x_3$, то x'_1 і x'_2 - миттєві значення процесу
- Якщо $p(x'_1, x'_2) > x_3$, то повторюємо попередні пункти

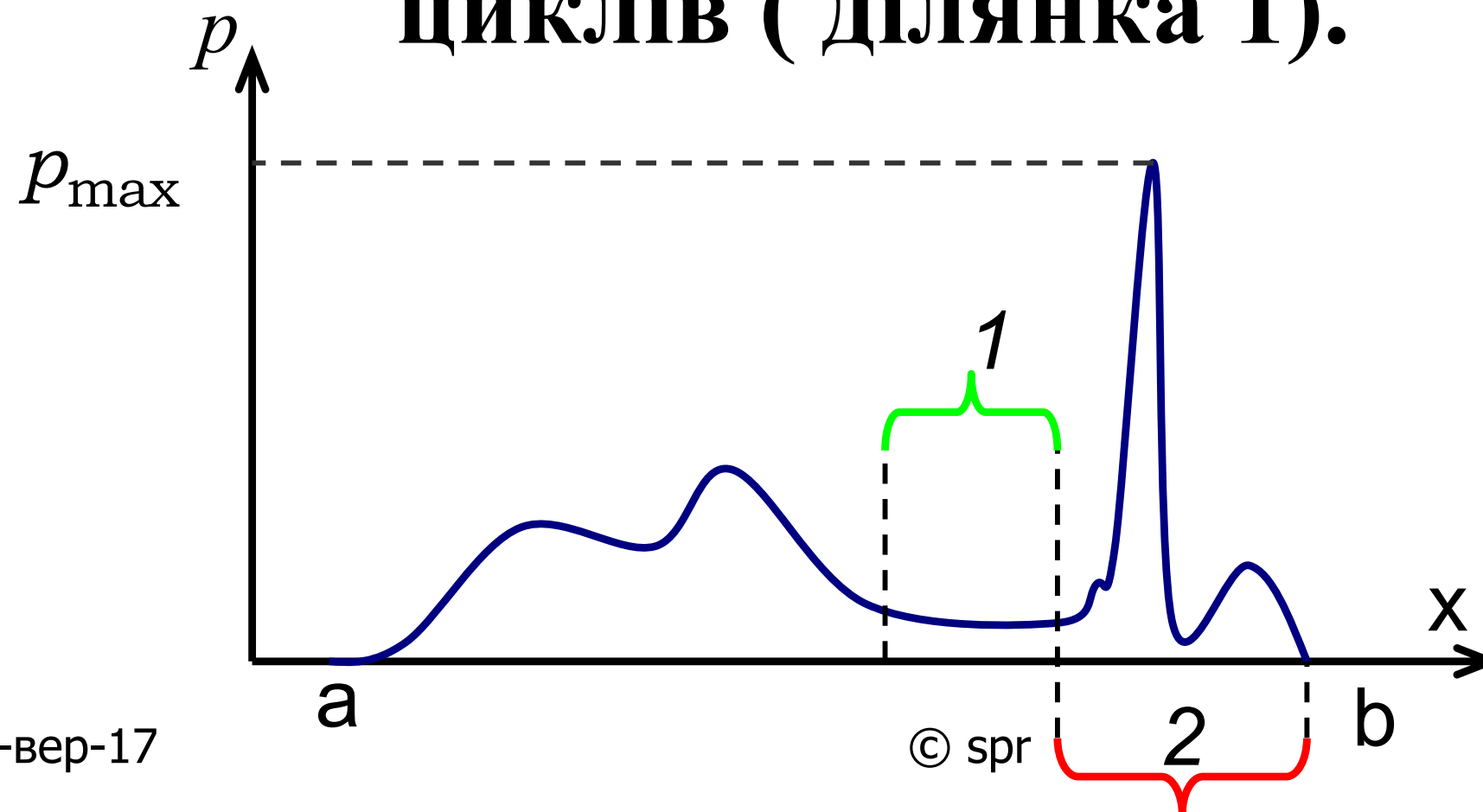


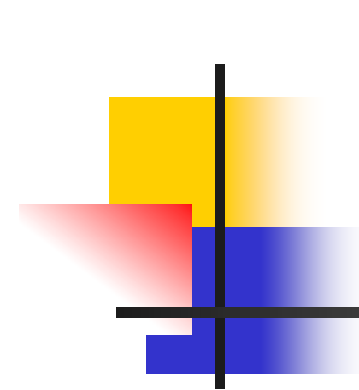
Переваги методу відбору (Неймана)

- необхідно ГВЧ лише з рівномірним розподілом;
- необхідно лише один ГВЧ
- Генерація випадкового процесу з будь-якою $p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n)$.

Недоліки методу відбору (Неймана)

- Ефективність;
- Велика кількість холостих циклів (ділянка 1).





Дякую за увагу!

Статичні копії лекцій