

ВСТУП

В.1. Що вивчає синергетика?

Синергетика (від гр. $\sigma\upsilon\nu$ – спільний та $\epsilon\rho\chi\omicron\nu$ – діяльність) – це міждисциплінарний напрямок, що вивчає процеси в нелінійних дисипативних системах із розподіленими параметрами¹, причому ці системи є відкритими (тобто можуть обмінюватися з іншими системами енергією та речовиною) та далекими від термодинамічної рівноваги. Такі системи (середовища) ми надалі будемо називати **активними**. Їхня термодинамічна нерівноважність може забезпечуватись або за рахунок надходження енергії ззовні (протягом довільного часу), або за рахунок початкових умов (протягом обмеженого проміжку часу).

Загальновідомим аналогом подібних систем, але із зосередженими параметрами, є автогенератори. В автогенераторах за відсутності зовнішнього періодичного впливу можуть виникати та встановлюватися періодичні коливання, основні властивості яких (форма, амплітуда, період) визначаються властивостями автогенератора і не залежать від початкових умов. При цьому енергія на збудження коливань береться ззовні (за рахунок того, що система відкрита) або в самій системі (якщо вона в початковий момент часу далека від стану рівноваги). Прикладом системи першого типу може служити генератор електричних коливань, що живиться від зовнішньої батареї чи мережі, прикладом системи другого типу – годинник, що приводиться в дію гирею або деформованою пружиною. В обох випадках системи віддають назовні тепло, тобто в цьому сенсі обидві вони є відкритими.

¹ Нагадаємо, що системи з розподіленими параметрами формально мають континуум ступенів вільності та описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних.

Якщо кількість ступенів вільності автогенератора буде більшою за одиницю, то в ньому, крім періодичних коливань, можливі також стохастичні коливання (непередбачувана поведінка). Для виникнення стохастичних коливань необхідне поєднання фінитності руху системи та його нестійкості за Ляпуновим: як загодно мала зміна початкових умов (а вони в реальному житті завжди відомі з обмеженою точністю) з часом призводить до значної зміни руху системи¹.

Синергетика вивчає ефекти такого самого типу, але для систем із розподіленими параметрами. Тому відповідні явища є значно складнішими та різноманітнішими. Загалом можна говорити про виникнення в активних дисипативних нелінійних середовищах структур (інколи в літературі їх називають також **патернами**), які в загальному випадку змінюються з часом, причому властивості таких структур слабко залежать від початкових та граничних² умов і визначаються переважно властивостями самого середовища. Такі структури прийнято називати **дисипативними**. Названі структури можуть бути й нерегулярними в просторі та в часі – в такому випадку говорять про **турбулентний рух**.

Механізм виникнення дисипативних структур зводиться до того, що при значних відхиленнях від термодинамічної рівноваги стаціонарний однорідний стан відкритої системи втрачає стійкість, і від рівня флуктуацій починають наростати збурення. На нелінійній стадії процесу зростання амплітуди збурень припиняється, і формується регулярна (стаціонарна чи нестаціонарна) або турбулентна дисипативна структура. Відзначимо, що різкої межі між регулярними та турбулентними структурами не існує – вони можуть плавно переходити одна в одну при зміні параметрів системи.

¹ В загальному випадку причиною непередбачуваної поведінки системи може бути також дія флуктуацій (шумів), поява яких обумовлена або неможливістю точно описати динаміку системи з дуже великою кількістю ступенів вільності (наприклад, рух усіх молекул у газі чи всіх заряджених частинок у провіднику), або наявністю випадкового зовнішнього впливу.

² У випадку, коли розміри системи значно більші за характерні розміри дисипативних структур.

В.2. Основні типи регулярних дисипативних структур у нерівноважних середовищах

Регулярні (невипадкові) дисипативні структури можуть бути динамічними (такими, що змінюються в часі) та стаціонарними (незмінними в часі). З іншого боку, дисипативні структури можуть бути періодичними (в часі та/або в просторі) чи аперіодичними. Нарешті, динамічні дисипативні структури можуть ініціюватися зовнішнім впливом або виникати в активних системах спонтанно.

В багатьох випадках динамічні дисипативні структури належать до класу так званих **автохвиль**. Автохвилі – це хвилі, що можуть поширюватися в активних дисипативних середовищах без зміни своєї форми, причому основні характеристики таких хвиль (амплітуда, форма, швидкість) не залежать від початкових та граничних умов і визначаються лише властивостями середовища, в якому вони поширюються.

Найпростішим прикладом періодичної динамічної дисипативної структури може служити стаціонарна квазігармонічна хвиля в слабконелінійній активній лінії передачі, збуджуваній генератором із заданою частотою. В такій лінії хвиля малої амплітуди спочатку експоненціально зростає в просторі, а потім за рахунок нелінійності її амплітуда встановлюється на деякому фіксованому рівні (як у генераторі Ван-дер-Поля¹). Квазігармонічні автохвилі під дією зовнішнього джерела виникають і в так званих середовищах автоколивного типу. Такі середовища можна уявити собі як мережу зв'язаних автогенераторів.

Прикладами динамічних аперіодичних дисипативних структур є біжучі фронти (наприклад, лісова пожежа або будь-яка інша хвиля запалювання) та біжучі імпульси (наприклад, поширення імпульсу в нервовому волокні), що також можуть служи-

¹ Б. Ван-дер-Поль (Balthasar van der Pol, 1889–1959) – голландський дослідник та інженер. Найбільш відомий своїми піонерськими дослідженнями автогенераторів.

ти зразками автохвиль. Виникнення таких автохвиль, як і в попередніх прикладах, ініціюється зовнішнім впливом.

Особливе місце посідають автономні джерела періодичних автохвиль. До цього класу динамічних дисипативних структур належать, зокрема, джерела спіральних хвиль, або **ревербератори**, та джерела концентричних хвиль, які в залежності від механізму функціонування відомі як **пейсмейкери** (провідні центри) або **автопейсмейкери**.

Найвідомішим прикладом стаціонарних періодичних (у просторі) дисипативних структур є, напевне, конвективні вали та комірки Бенара¹ – просторово-періодичні течії типу вихорів, що за певних умов можуть виникнути в шарі в'язкої рідини, який підігрівається знизу. Процеси такого типу, що відбуваються в атмосфері, відіграють важливу роль у метеорології (їхнім наслідком є, зокрема, утворення періодичних структур у хмарах – рис. В.1).



Рис. В.1. Просторово періодичні структури в хмарах

¹ А. Бенар (Henri Bénard, 1874–1939) – французький фізик, лауреат премії Бурдена Французької академії наук (1929), найбільш відомий дослідженням конвекції в рідинах (конвекція Релея – Бенара).

Інший зразок періодичної стаціонарної дисипативної структури – це розшарування первісно однорідного потоку електронів, що рухається в плазмі, на окремі нитки. Вважається, що саме цей ефект визначає смугасту структуру полярних саяв (рис. В.2).



**Рис. В.2. Полярне саяво
зі смугастою структурою**

Можливі й аперіодичні стаціонарні дисипативні структури, коли середовище спонтанно розпадається на області з відмінними властивостями. Прикладом таких структур може служити виникнення низькоомних та високоомних областей у баретері (залізна нитка, вміщена в атмосферу водню, крізь яку пропускається струм) або вогнища горіння в реакторі з перемішуванням та обмеженим надходженням пального.

Ми обмежимося нижче розглядом лише тих дисипативних структур, що виникають у первісно однорідних середовищах. Однак у реальних ситуаціях виникнення структур може бути пов'язане з неоднорідністю системи. Так, при зустрічі повітря-

них мас із різною температурою в атмосфері утворюються циклони та антициклони – гігантські вихори, що обертаються в горизонтальній площині (рис. В.3). В центрі циклону повітря піднімається вгору, в центрі антициклону – навпаки, опускається вниз. Вихори меншого масштабу в атмосфері, що мають аналогічну природу, відомі як смерчі. Подібні за механізмом виникнення й вихори, що супроводжують турбулентну течію рідини.



Рис. В.3. Циклон

В.3. Турбулентність

Турбулентністю прийнято називати хаотичну динаміку в системах із розподіленими параметрами. Можна сказати, що турбулентність так само виникає в результаті руйнування регулярних (стаціонарних або нестаціонарних) дисипативних структур у нерівноважних розподілених системах, як хаотична динаміка виникає в результаті руйнування регулярних автоколивань у генераторах із зосередженими параметрами.

1.2. Виробництво ентропії в нерівноважних системах

Перейдемо тепер до розгляду відкритих систем. У цьому розділі буде розглянуте узагальнення другого початку термодинаміки на відкриті системи. Потім будуть записані загальні співвідношення для густини виробництва ентропії у відкритих системах. Наприкінці розділу вони будуть конкретизовані для випадку малих відхилень від положення рівноваги (випадок лінійної нерівноважної термодинаміки).

1.2.1. Ентропія у відкритих системах

Нагадаємо, що відкритими називають такі системи, які можуть обмінюватись із зовнішнім світом речовиною та енергією.

1.2.1.1. Узагальнення другого початку термодинаміки на відкриті системи

Другий початок термодинаміки може бути узагальнений і на відкриті системи. У цьому випадку повний приріст ентропії системи dS можна розбити на дві частини: $d_i S$, що описує ентропію, вироблену безпосередньо в системі, та $d_e S$, що описує перенесення ентропії через межі системи:

$$dS = d_i S + d_e S, \quad d_i S \geq 0. \quad (1.2.1)$$

Як бачимо, для відкритих систем приріст ентропії може бути як додатнім, так і від'ємним. Останнє можливо у випадку, коли потік ентропії за межі системи перевищує виробництво ентропії всередині системи.

1.2.1.2. Густина виробництва ентропії та потік ентропії

Виробництво ентропії в системі можна, враховуючи екстенсивність ентропії, записати як інтеграл по об'єму:

$$\frac{d_i S}{dt} = \int_{(V)} \sigma(S) dV \geq 0, \quad (1.2.2)$$

де $\sigma(S)$ – густина виробництва ентропії, тобто виробництво ентропії в одиниці об'єму за одиницю часу. Оскільки нерівність (1.2.2) справедлива для будь-якого об'єму, то $\sigma(S) \geq 0$. (1.2.3)

Потік ентропії визначається як

$$d_e S = \frac{dQ}{T}. \quad (1.2.4)$$

Потік ентропії через деяку замкнену поверхню Ω , що охоплює об'єм V , можна записати у формі інтегралу:

$$\frac{d_e S}{dt} = \Phi(S) = - \int_{(\Omega)} \varphi_n d\Omega, \quad (1.2.5)$$

де φ_n – компонента густини потоку φ ентропії вздовж зовнішньої нормалі до поверхні Ω . Знак потоку може бути довільним.

1.2.1.3. Рівняння балансу для ентропії

Як уже вказувалося, ентропія є екстенсивною величиною. Тому ентропію в об'ємі V можна записати як інтеграл по цьому об'єму від густини ентропії s :

$$S = \int_{(V)} s dV. \quad (1.2.6)$$

Тепер формально поділимо всі доданки у співвідношенні (1.2.1) на dt і замінимо S у лівій частині за допомогою співвідношення (1.2.6), а доданки в правій частині – за допомогою співвідношень (1.2.2) та (1.2.5), перетворивши інтеграл по поверхні в (1.2.5) в інтеграл по об'єму за допомогою теореми Остроградського - Гаусса. Отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} s \, dV = \int_{(V)} \sigma(S) \, dV - \int_{(V)} \operatorname{div} \vec{\phi} \, dV \quad (1.2.7)$$

Оскільки (1.2.7) залишається справедливим при довільному виборі об'єму інтегрування, то з рівності інтегралів випливає рівність підінтегральних виразів:

$$\sigma(S) = \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\phi}. \quad (1.2.8)$$

Співвідношення (1.2.8) має зміст рівняння балансу: зміна об'ємної густини ентропії s обумовлена локальним виробництвом ентропії $\sigma(S)$ та потоками ентропії з густиною ϕ . Зрозуміло, що обидві частини рівності (1.2.8) в силу умови (1.2.3) є невід'ємними.

2.1.1.2. Приклади активних ліній

Прикладами активних нелінійних середовищ можуть служити лампи біжучої та зворотної хвилі, численні плазмово-пучкові пристрої, квантові парамагнітні підсилювачі НВЧ діапазону, оптичні квантові підсилювачі та генератори, передавальні лінії на основі напівпровідникових та надпровідних тунельних діодів або діодів Ганна та інші.

У багатьох випадках активні середовища (зокрема, передавальні лінії) зручно подати у вигляді деяких еквівалентних схем (такий підхід, що використовується для отримання телеграфних рівнянь, добре відомий для звичайної пасивної двопровідної лінії). Розглянемо два приклади такого роду – розподілений тунельний діод на основі контакту метал-напівпровідник та нервово волокно, вздовж якого може поширюватись імпульс збудження.

Смушковий тунельний діод Есакі⁴. Вигляд ділянки такої лінії поданий на рис. 2.1.2 а, еквівалентна схема – на рис. 2.1.2 б. У цій схемі р-п перехід моделюється паралельним сполученням погонної ємності C та негативної погонної провідності g . Об'ємний опір напівпровідника враховується резистором r . Нагадаємо, що тунельний діод має N -подібну вольт-амперну характеристику (див. рис. 2.1.1 а) зі спадною ділянкою, якій відповідає від'ємний диференціальний опір, тобто є прикладом нелінійної провідності. Якщо робоча точка вибрана на цій ділянці, то для невеликих відхилень від неї тунельний діод можна замінити елементом з негативною провідністю, як це показано на рис. 2.1.2 б.

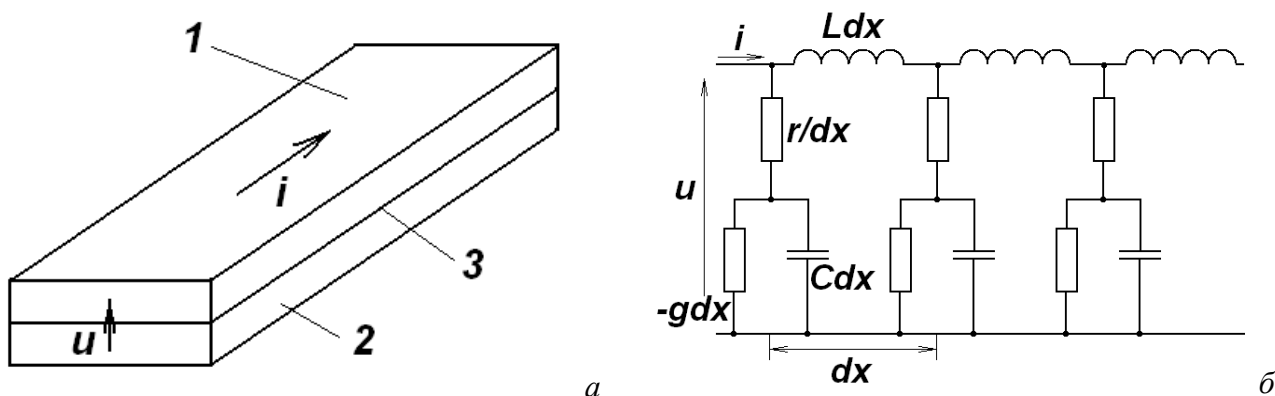


Рис.2.1.2. Смушковий тунельний діод Есакі: а – зовнішній вигляд (1 – металева підкладка, 2 – напівпровідник, 3 – тунельний перехід); б – еквівалентна схема.

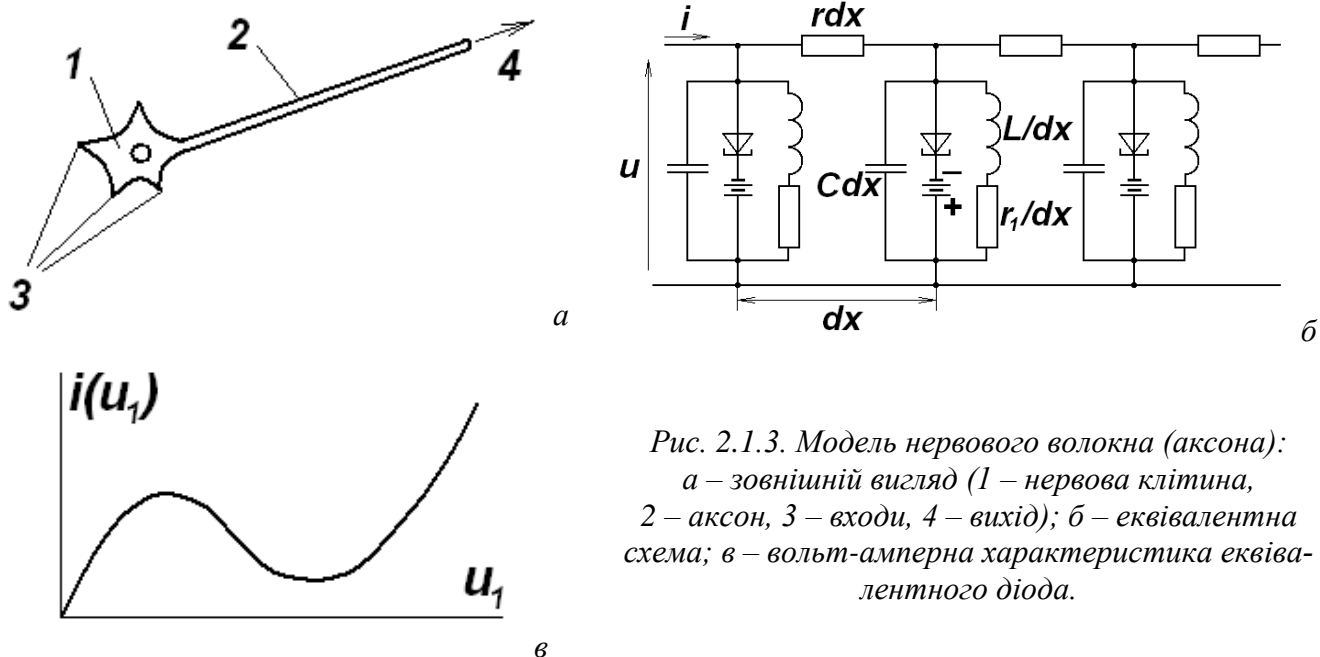
Поширення імпульсу збудження вздовж нервового волокна. Центральна нервова система складається з нервових клітин, або нейронів. Типовий нейрон складається з дендритів, які приймають імпульси від інших нейронів або чутливих клітин, тіла клітини, яке підтримує її життя, та аксона (відгалуження нервової клітини), який передає імпульси збудження іншим нейронам або клітинам м'язів (рис. 2.1.3 а). Аксон вкритий мембраною, чутливою до зміни прикладеної напруги. Вольт-амперна характеристика цієї мембрани нагадує ВАХ тунельного діода (рис. 2.1.3 в). Крім того, в струмі через мембрану можна виділити ємнісну та індуктивну складові. Нарешті, сама мембрана має деякий активний опір (рис. 2.1.3 б). Модель нервового волокна, яка вперше дозволила описати поширення в ньому нервових збуджень була запропонована в 1930-х – 1950-х рр. А. Ходжкіном⁵ та Е. Хакслі⁶. Цю модель можна розглядати як деякий частинний випадок середовища з відновленням (див. нижче п. 2.2.2). Але якщо в моделі середовища з відновленням еквівалентні тунельні діоди працюють, як ми пере-

⁴ Леона Есакі (Esaki Reona, нар. 1925) – японський фізик, Нобелівський лауреат (1973). Досліджував електронне тунелювання, винайшов тунельний діод.

⁵ А. Ходжкін (Sir Alan Lloyd Hodgkin, 1914 - 1998) – англійський нейрофізіолог та біофізик, член Королівського товариства, Нобелівський лауреат з фізіології та медицини (1963). В роки Другої світової війни займався розробкою радарів.

⁶ Е. Хакслі (Sir Andrew Fielding Huxley, 1917 - 2012) – англійський нейрофізіолог та біофізик, член Королівського товариства, Нобелівський лауреат з фізіології та медицини (1963).

конаємось, у ключовому режимі, то на даному етапі нас цікавитиме робота на ділянці вольт-амперної характеристики з від'ємним диференціальним опором.



2.1.1.3. Опис еквівалентної схеми лінії та отримання хвильового рівняння

Розглянемо поширення хвиль, збуджуваних гармонічним джерелом, уздовж найпростішої слабконелінійної активної лінії, еквівалентна схема якої подана на рис. 2.1.4 а. Реально в ролі нелінійних елементів (точніше, нелінійних провідностей) виступають, наприклад, тунельні діоди, вольт-амперні характеристики яких мають вигляд, показаний на рис. 2.1.3 в. Вважаючи, що робоча точка вибрана на середині ділянки з від'ємною провідністю, і цікавлячись лише змінною складовою струму, апроксимуємо вольт-амперну характеристику нелінійної провідності кубічним поліномом:

$$j(u) = -Su + \frac{Su^3}{3K^2}, \quad (2.1.1)$$

де параметр K визначає півширину ділянки з від'ємною провідністю (рис. 2.1.4 в).

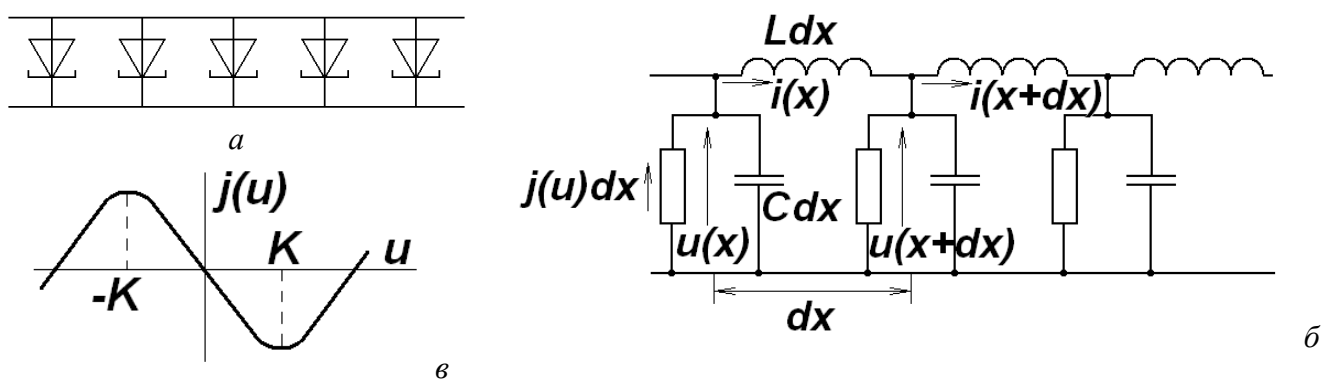


Рис. 2.1.4. Слабконелінійна активна лінія: а – принципова схема; б – еквівалентна схема; в – вольт-амперна характеристика активного елемента.

Аналог телеграфних рівнянь для лінії, еквівалентна схема якої подана на рис. 2.1.4 б, має вигляд:

Як видно з рис. 2.1.6, при невеликих початкових значеннях m_1 та m_2 спостерігається періодична зміна амплітуд зустрічних хвиль у просторі. Зокрема, при $m_1 = m_2 = 1/3$ обидві хвилі мають амплітуди, незалежні від координати. Навпаки, при великих початкових значеннях m_1 та m_2 півпростір $x < 0$ займає пряма хвиля (з амплітудою u_1), а півпростір $x > 0$ – зворотна (з амплітудою u_2).

* * *

За порушення умови (2.1.10) втрачає чинність припущення про поширення в лінії хвилі з малим згасанням, яке компенсується малою енергією, що надходить від активних елементів. Припущення про квазігармонічність хвиль також стає несправедливим. В результаті діапазон можливої поведінки хвиль у такій лінії значно розширюється. Зростає, відповідно, й складність аналізу процесів у таких лініях.

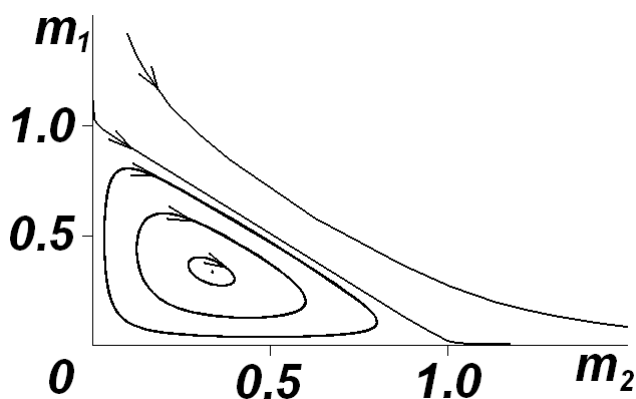


Рис. 2.1.6. Аналог фазового портрету взаємодії зустрічних хвиль в активній лінії.

На сьогодні розроблений аналіз лише деякого частинного випадку поведінки активних ліній (або активних середовищ), а саме стаціонарних хвиль у таких лініях, які поширюються без зміни своєї форми. Про хвилі такого типу йтиметься в наступному розділі 2.2.

Контрольні питання до підрозділу 2.1.1

1. Користуючись системою електромеханічних аналогій, запропонуйте механічні аналоги нелінійного опору та нелінійної провідності.
2. Чим, на Вашу думку, відрізняються активні лінії на базі активних провідностей та активних опорів?
3. Поясніть якісно, чому на високих частотах нелінійність активних ліній можна вважати слабкою.
4. Намалюйте миттєвий розподіл напруги вздовж активної лінії, в якій збуджені дві зустрічні хвилі, для різних початкових співвідношень між їхніми інтенсивностями. Як вони змінюватимуться з часом?

Задачі до підрозділу 2.1.1

2.1.1.1. Побудуйте розв'язок хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\alpha \left(1 - \frac{u^2}{K^2} \right) \frac{\partial u}{\partial t}$$

для задачі з початковими умовами (початкове збурення вважати гармонічним).

2.1.1.2*. Запропонуйте модель активної лінії з нелінійними опорами. Отримайте для неї хвильове рівняння. Побудуйте розв'язок цього рівняння для початкової та граничної задач, користуючись методом повільних амплітуд.

2.1.2. Фазові хвилі в автоколивних середовищах

Ознайомимося тепер зі ще одним типом (точніше, моделлю) слабконелінійних активних середовищ – середовищами автоколивного типу.

Автоколивні середовища можна уявити собі як мережу зв'язаних між собою автогенераторів. Основна відмінність автоколивних середовищ від раніше розглянутих активних ліній – це наявність власної частоти, на якій (за відсутності зовнішнього впливу) відбуваються автоколивання. Прикладами таких середовищ можуть бути тонкі шари розчинів, у яких протікають реакції Білоусова - Жаботинського (див. п. 1.3.4), або серцевий м'яз, що зазнає регулярних скорочень.

Для кожного "елементарного генератора" стаціонарний стан (стан відсутності коливань) є нестійким. Від рівня флуктуацій або початкового збурення в ньому зростають квазігармонічні коливання на власній частоті. В усталеному режимі амплітуда цих коливань встановлюється на фіксованому рівні, який не залежить від початкових умов і визначається лише властивостями системи (як це має місце в квазігармонічному режимі автогенератора Ван-дер-Поля). Надалі ми будемо розглядати саме усталений режим "елементарних генераторів".

Якщо всі "елементарні генератори" коливаються з однаковою фазою, в автоколивному середовищі спостерігаються синфазні коливання в усьому просторі. Якщо фаза коливань змінюється в просторі, утворюються так звані фазові хвилі. Вони нагадують біжучий рядок світлової реклами, коли зміна кольору нерухомих локальних елементів рекламного щита створює ілюзію руху зображення як цілого.

Автоколивні середовища зовні дещо нагадують активні лінії, розглянуті в п. 2.1.1. В обох цих системах, наприклад, у певному діапазоні частот можуть існувати стаціонарні квазігармонічні хвилі, збуджувані деяким зовнішнім джерелом. Але за відсутності такого збудження в автоколивних середовищах відбуваються синфазні автоколивання, чого не буде в активних лініях. З іншого боку, для автоколивних середовищ можливий як м'який, так і жорсткий режим самозбудження (в останньому випадку стаціонарний однорідний стан залишається стійким щодо малих відхилень).

Як і у випадку активних ліній, ми обмежимося розглядом автохвильових середовищ зі слабкою нелінійністю, коли форму коливань можна вважати квазігармонічною.

Піонерські дослідження середовищ автоколивного типу були виконані в 1970-х – 1980-х роках Й. Курамото⁹.

2.1.2.1. Отримання модельного рівняння

Користуючись згаданою вище моделлю автоколивного середовища як мережі зв'язаних автогенераторів, спробуємо отримати модельне рівняння, що описує хвилі в такому середовищі.

Розглянемо спочатку окремий автогенератор. Будемо описувати його симетризованою системою двох рівнянь першого порядку (див. п. 1.1.5.2, рівняння (1.1.31)):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}(-\alpha + \gamma E)x - y = 0; \\ \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}(-\alpha + \gamma E)y + \omega_0^2 x = 0, \end{cases}$$

де, як і раніше, $E = (\omega_0^2 x^2 + y^2)/2$. Нагадаємо, що при малих α та γ ця система зводиться до узагальненого рівняння Релея – Ван-дер-Поля (1.1.32):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - (\alpha - \gamma E) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Введемо комплексну змінну $\eta = \omega_0 x - iy$. Тоді, помноживши перше з рівнянь на ω_0 , друге – на i та додавши їх, легко отримати рівняння для η :

$$\frac{d\eta}{dt} + \frac{1}{2}(-\alpha + \gamma E)\eta - i\omega_0 \eta = 0. \quad (2.1.19)$$

⁹ Й. Курамото (Kuramoto Yoshiki, нар. 1940) – японський фізик, професор університету Кіото, фахівець у галузі нелінійної динаміки.

де тепер можна вважати, що $E = |\eta|^2 / 2$.

Тепер розглянемо одновимірний ланцюжок зв'язаних автогенераторів, описуваних рівняннями типу (2.1.19). Природно припустити, що на автогенератор з номером n впливають лише його найближчі сусіди, причому однаковим чином. З урахуванням цієї обставини рівняння (2.1.19) можна переписати у формі

$$\frac{d\eta_n}{dt} + \frac{1}{2} \left(-\alpha + \gamma \frac{|\eta_n|^2}{2} \right) \eta_n - i\omega_0 \eta_n = \beta (\eta_{n-1} + \eta_{n+1}). \quad (2.1.19 \text{ а})$$

Нехай відстань між сусідніми автогенераторами дорівнює a . Перейдемо до моделі неперервного середовища, в якому $\eta = \eta(z, t)$, де z – координата. Тоді, розклавши залежність $\eta(z \pm a, t)$ в ряд Тейлора за малим параметром a , отримаємо:

$$\eta_{n\pm 1} \equiv \eta(z \pm a, t) \approx \eta(z, t) \pm \frac{\partial \eta}{\partial z} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} a^2. \quad (2.1.20)$$

З урахуванням (2.1.20) перепишемо (2.1.19 а) у формі

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left[\frac{1}{2} \left(\tilde{\alpha} - \gamma \frac{|\eta|^2}{2} \right) + i\omega_0 \right] \eta + D \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}, \quad (2.1.21)$$

де використані позначення

$$\tilde{\alpha} = \alpha + 4\beta, \quad D = \beta a^2. \quad (2.1.22)$$

Рівняння (2.1.21) має форму нелінійного кінетичного рівняння з дифузиею (див. нижче п. 2.2.1.4). Оскільки функція $\eta = \eta(z, t)$ є комплексною, рівняння (2.1.21) еквівалентне до системи двох дійсних рівнянь такого самого типу.

2.1.2.2. λ - ω модель автоколивного середовища

Розглянемо середовище, яке описується змінними $u = u(\vec{r}, t)$, $v = v(\vec{r}, t)$. Введемо замість них одну комплексну змінну $\eta = u + iv$. Нехай вона задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = [\lambda(\rho) + i\omega(\rho)]\eta + (D_1 - iD_2)\Delta\eta, \quad \rho = |\eta|. \quad (2.1.23)$$

Функція $\lambda(\rho)$ повинна бути монотонно спадною і проходити через нуль при деякому значенні аргументу $\rho = \rho_0$ (рис. 2.1.7). Функцію $\omega(\rho)$ вважатимемо додатною.

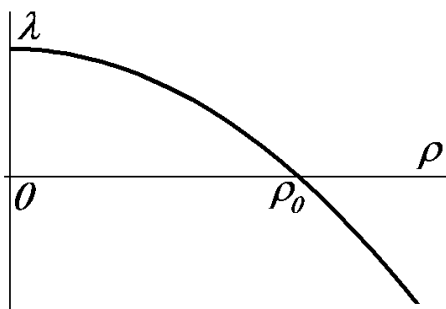


Рис. 2.1.7. Вигляд функції $\lambda(\rho)$.

Рівняння (2.1.23), яке можна розглядати як безпосереднє узагальнення отриманого вище рівняння (2.1.21), відповідає λ - ω моделі, що описує широкий клас автоколивних середовищ.

Частинним випадком λ - ω моделі є також відоме в літературі узагальнене рівняння Гінзбурга – Ландау (це рівняння для хвильової функції, запропоноване в 1950 році

В.Л. Гінзбург¹⁰ та Л.Д. Ландау¹¹, описує поведінку надпровідника в магнітному полі в області температур поблизу точки переходу в надпровідний стан):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = (\alpha_1 + i\alpha_2)\eta - (\beta_1 + i\beta_2)|\eta|^2\eta + (D_1 - iD_2)\Delta\eta. \quad (2.1.24)$$

Воно зводиться до рівняння λ - ω моделі, якщо покласти $\lambda(\rho) = \alpha_1 - \beta_1\rho^2$, $\omega(\rho) = \alpha_2 - \beta_2\rho^2$.

Щоб з'ясувати властивості середовища, описуваного рівнянням (2.1.23), перейдемо від комплексної змінної η до дійсних змінних ρ та φ , які вводяться із співвідношення $\eta = \rho \exp(i\varphi)$.

Врахуємо, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [\rho \exp(i\varphi)] &= \frac{\partial \rho}{\partial x} \exp(i\varphi) + i \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rho \exp(i\varphi), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\rho \exp(i\varphi)] &= \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \exp(i\varphi) + 2i \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \exp(i\varphi) - \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \exp(i\varphi) + i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \rho \exp(i\varphi), \end{aligned}$$

і, отже,

$$\Delta [\rho \exp(i\varphi)] = [(\Delta \rho) + 2i(\nabla \rho \cdot \nabla \varphi) - \rho(\nabla \varphi)^2 + i\rho(\Delta \varphi)] \exp(i\varphi). \quad (2.1.25)$$

Підставимо співвідношення $\eta = \rho \exp(i\varphi)$ з урахуванням (2.1.25) до (2.1.23), скороти-мо на $\exp(i\varphi)$ і окремо прирівняємо до нуля дійсну та уявну частини отриманого виразу. Таким чином початкове комплексне рівняння (2.1.23) зводиться до системи двох дійсних рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \lambda(\rho)\rho + D_1 [\Delta \rho - \rho(\nabla \varphi)^2] + D_2 [2(\nabla \rho \cdot \nabla \varphi) + \rho \Delta \varphi]; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega(\rho) + D_1 \left[\frac{2}{\rho} (\nabla \rho \cdot \nabla \varphi) + \Delta \varphi \right] + D_2 \left[-\frac{\Delta \rho}{\rho} + (\nabla \varphi)^2 \right]. \end{cases} \quad (2.1.26)$$

2.1.2.3. Однорідний розв'язок рівняння λ - ω моделі та його стійкість

Знайдемо однорідний стаціонарний розв'язок першого з рівнянь (2.1.26). За умов $\partial \rho / \partial t = 0$, $\partial \rho / \partial x_i = 0$, $\partial \varphi / \partial x_i = 0$ воно зводиться до вигляду $\rho \lambda(\rho) = 0$, звідки $\rho_1 = 0$ або $\rho_2 = \rho_0$.

Для з'ясування стійкості отриманих коренів підставимо до першого з рівнянь (2.1.26) розв'язок у формі $\rho(\vec{r}, t) = \rho_{1,2} + \delta \rho \exp[\alpha_{1,2} t - i(\vec{k} \vec{r})]$, вважаючи другий доданок малим. Після лінеаризації з урахуванням умови $\partial \varphi / \partial x_i = 0$ можна отримати відповідно

$$\alpha_1 = \lambda(0) - k^2 D_1 \quad (2.1.27)$$

та

$$\alpha_2 = \rho_0 \left. \frac{d\lambda}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} - k^2 D_1 \quad (2.1.28)$$

¹⁰ В.Л. Гінзбург (Віталій Лазаревич Гінзбург, 1916 - 2009) – видатний російський фізик, академік АН СРСР та РАН, Нобелівський лауреат (2003). Основні роботи присвячені радіофізиці, фізиці плазми, астрофізиці.

¹¹ Л.Д. Ландау (Лев Давидович Ландау, 1908 - 1968) – геніальний російський фізик-теоретик, академік АН СРСР, лауреат Сталінської (1946, 1949, 1953), Ленінської (1962) та Нобелівської (1962) премій. Створив наукову школу світового рівня. Автор фундаментального курсу теоретичної фізики (разом з Є.М.Ліфшицем). Власні роботи характеризуються надзвичайно широкою тематикою. Зробив видатний внесок у квантову механіку (теорія надплинності), магнетизм, фізику плазми, теорію фазових переходів та ряд інших областей.

Розділ 2.2. Автохвилі в сильнелінійних середовищах, ініційовані зовнішнім збудженням

Розглянувши ініційовані зовнішнім збудженням автохвилі в слабконелінійних середовищах, перейдемо тепер до аналізу аналогічних автохвиль у сильнелінійних середовищах.

В загальному випадку питання про характер хвиль у таких середовищах залишається відкритим. Достатньо вивченими можуть вважатися лише автохвилі, що поширюються без зміни своєї форми, яка тепер, як і амплітуда, не залежить від граничних чи початкових умов, а визначається властивостями середовища (нагадаємо, що в слабконелінійних середовищах високочастотні хвилі, збуджувані зовнішнім джерелом, були квазігармонічними, і лише їхня усталена амплітуда визначалася властивостями середовища).

Ми обмежимося розглядом двох моделей сильнелінійних середовищ, які найбільш поширені в літературі і можуть вважатися найбільш дослідженими. Це бістабільні середовища і збудливі середовища (середовища з відновленням).

У цьому розділі йтиметься про біжучі автохвилі в бістабільних середовищах та в середовищах із відновленням (збудливих середовищах) – відповідно хвилі перекидання, або біжучі фронти, та біжучі імпульси чи періодичні послідовності таких імпульсів.

2.2.1. Біжучі фронти

Як уже говорилося, біжучі фронти спостерігаються в бістабільних середовищах. Бістабільні середовища – це такі середовища, які характеризуються двома стійкими однорідними стаціонарними станами рівноваги. Відповідно автохвилі в таких середовищах являють собою хвилі перемикання (фазових переходів) з одного стійкого стаціонарного стану в інший (у певному сенсі більш "енергетично вигідний"), тобто їх можна розглядати як результат розвитку деякої нестійкості.

Користуючись поняттями, запозиченими з радіоелектроніки, найпростіше одновимірне бістабільне середовище можна грубо уявити собі як ланцюжок тригерів, які знаходяться в однаковому стані. Під дією зовнішнього сигналу – імпульсу запуску – тригер на кінці ланцюжка переходить в інший стан і одночасно формує (наприклад, за допомогою RC-ланки) імпульс запуску для наступного елемента ланцюжка. Таким чином, уздовж ланцюжка може бігти хвиля перекидання.

Розглянемо спершу кілька прикладів бістабільних середовищ і запишемо для кожного з них рівняння руху.

2.2.1.1. Горіння в розподіленій системі (ланцюжку пальників)

Розглянемо деяку комірку (пальник), всередині якої може протікати процес горіння. Запас горючої суміші підтримується постійним за рахунок надходження від зовнішнього джерела. Нехай за одиницю часу при горінні виділяється кількість теплоти $q(T)$, залежність якої від температури горіння T має ступінчатий характер (рис. 2.2.1).

Якщо комірка ізольована, то вся виділена теплота йде на її нагрівання. Тому зміна температури (за умови, що надходження пального до комірки стало) визначатиметься рівнянням

$$\frac{dT}{dt} = \frac{q(T)}{C}, \quad (2.2.1)$$

де C – теплоємність пальника. Рівняння (2.2.1) описує необмежене зростання температури пальника з часом після його запалювання, оскільки $q(T) > 0$ при $T > T_c$.

Але в реальності температура комірки, зрозуміло, не буде необмежено зростати, оскільки існує теплообмін із навколишнім середовищем. Якщо навколишнє середовище має температуру T_0 , то рівняння для температури пальника з урахуванням теплообміну можна записати у вигляді

$$\frac{dT}{dt} = \frac{q(T)}{C} - \gamma(T - T_0) \equiv f(T), \quad (2.2.2)$$

де γ – коефіцієнт теплообміну, а права частина – $f(T)$ – носить назву кінетичної функції. Побудова графіка кінетичної функції показана на рис. 2.2.2.

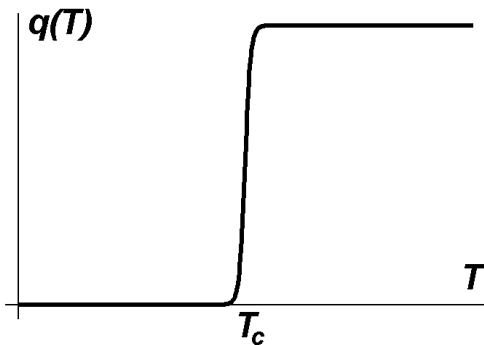


Рис. 2.2.1. Кількість теплоти, що виділяється в пальнику за одиницю часу, як функція його температури (T_c – температура запалювання).

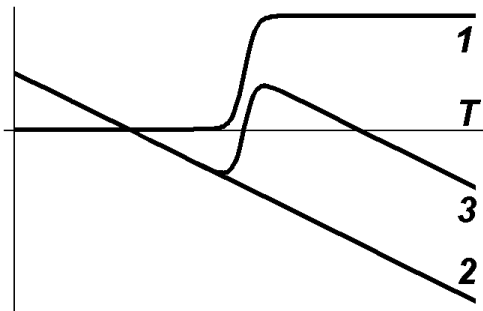


Рис. 2.2.2. Температурні залежності тепло-виділення (крива 1), втрат на теплообмін (крива 2) та сумарної кінетичної функції (крива 3).

Вигляд кінетичної функції для різних значень параметрів моделі показано на рис. 2.2.3 а-в. Якщо температура навколишнього середовища дуже низька, запалювання взагалі неможливе (рис. 2.2.3 а). Якщо температура навколишнього середовища перевищує температуру запалювання, то єдино можливий стаціонарний стан – горіння (рис. 2.2.3 б). Нарешті, в деякому проміжному діапазоні значень система формально має три стаціонарні однорідні стани – T_0 , T_c та T_1 (рис. 2.2.3 в).

Для дослідження стійкості однорідних стаціонарних станів лінеаризуємо рівняння (2.2.2) поблизу відповідних точок T_i :

$$\frac{dT}{dt} = (T - T_i) f'(T_i), \quad f'(T_i) \equiv \left. \frac{df(T)}{dT} \right|_{T=T_i} \equiv \frac{1}{\tau_i}. \quad (2.2.3)$$

Якщо $f'(T_i) < 0$, то, як випливає з (2.2.3), малі відхилення від стаціонарних станів експоненціально згасатимуть із характерним часом τ_i , тобто відповідні точки (T_0 та T_1 на рис. 2.2.3 в) є стійкими. Навпаки, при $f'(T_i) > 0$ малі відхилення експоненціально зростатимуть, тобто відповідна точка (T_c на рис. 2.2.3 в) є нестійкою.

Точка T_0 відповідає відсутності горіння, коли температура комірки збігається з температурою навколишнього середовища. Точка T_1 відповідає стаціонарному горінню, коли все виділене за одиницю часу тепло відходить у навколишнє середовище внаслідок теплообміну. Нарешті, точка T_c , яка відповідає температурі запалювання, служить межею областей притягання точок T_0 та T_1 . Справді, при $f(T) > 0$ температура системи з часом зростатиме, при

$f(T) < 0$ – навпаки, спадатиме. Таким чином, якщо в початковий момент часу виконана умова $T < T_c$, то в системі встановлюється температура T_0 , в протилежному випадку – температура T_1 (це видно з рис. 2.2.3 в).

Зазначимо, що відкритий характер досліджуваної системи зумовлений неперервним надходженням до неї палива ззовні. Очевидно, величина $q(T)$ при $T > T_c$ пропорційна кількості палива, що надходить у систему за одиницю часу (принаймні, в стаціонарному режимі горіння). Тому, якщо надходження палива припиниться, крива 1 на рис. 2.2.2 зіллється з віссю абсцис, а крива 3 – відповідно з кривою 2. В результаті в системі залишиться єдиний стаціонарний стан – стан відсутності горіння. Отже, саме цей стан відповідає термодинамічній гілці розв'язку (див. п. 1.3.2.1). Стан же стаціонарного горіння принципово зумовлений нерівноважністю системи.

Якщо тепер замість відокремленого пальника розглядати ланцюжок таких пальників, розташованих на малих віддальх один від одного, то в рівнянні (2.2.2) необхідно врахувати теплопровідність. Остаточно отримаємо:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = f(T) + D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.2.4)$$

(D – коефіцієнт теплопровідності).

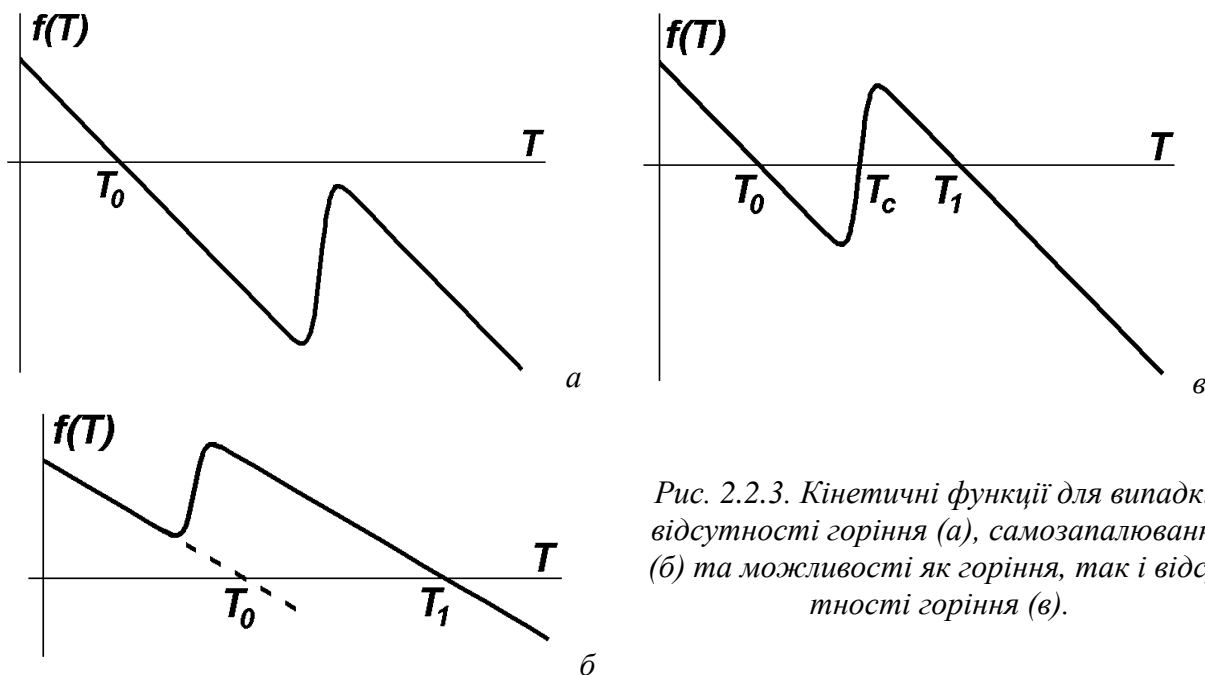


Рис. 2.2.3. Кінетичні функції для випадків відсутності горіння (а), самозапалювання (б) та можливості як горіння, так і відсутності горіння (в).

Звернемо увагу на те, що в рівнянні (2.2.4) теплопровідність, по суті, врахована двічі: один раз – у явному вигляді (останній, дифузійний доданок у правій частині), і ще раз – у неявному вигляді, в кінетичній функції (доданок $-\gamma(T - T_0)$ у рівнянні (2.2.2), що описує теплообмін з навколишнім середовищем). Для однорідних станів системи дифузійний доданок зникає, а теплообмінний доданок у кінетичній функції зберігається. Це означає, що рівняння (2.2.4) фактично описує горіння в деякому стрижні або ланцюжку. Дифузійний доданок описує теплообмін у напрямку x уздовж цього ланцюжка, а теплообмінний доданок – у поперечному напрямку.

2.2.1.2. Хімічна реакція автокаталітичного типу (модель Шльогля)

Розглянемо деяку гіпотетичну хімічну реакцію автокаталітичного типу (див. вище п. 1.3.2.3), відому як модель Шльогля (див. вище задачу 1.3.2):



Відзначимо, що ця реакція належить до автокаталітичного типу (пор. з п. 1.3.2.3) – пряма реакція, описувана першим із рівнянь (2.2.5), зводиться до перетворення речовини A в речовину X , причому остання служить і каталізатором цієї реакції.

Нехай спершу реакція протікає в реакторі з перемішуванням, де концентрації реагентів підтримуються однорідними в усьому об'ємі.

Для протікання першої з реакцій (2.2.5) у прямому напрямку необхідне зіткнення однієї молекули сорту A та двох молекул сорту X . Ймовірність такого процесу пропорційна добутку AX^2 , де літери позначають концентрації відповідних речовин. Елементарний акт даної реакції приводить до народження однієї молекули сорту X . Тоді внесок у зміну концентрації речовини X за одиницю часу буде K_1AX^2 . Врахувавши подібним чином внески трьох інших реакцій, можна записати кінетичне рівняння для концентрації речовини X у вигляді

$$\frac{dX}{dt} = K_1AX^2 - K_2X^3 - K_3X + K_4B \equiv f(X). \quad (2.2.6)$$

Якщо величини K_1A , K_2 , K_3 та K_4B приблизно однакові за величиною, то графік кінетичної функції $f(x)$ (рис. 2.2.4) матиме якісно ту саму форму, що й у попередньому прикладі.

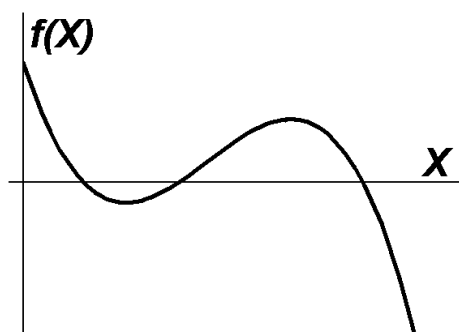


Рис. 2.2.4. Кінетична функція для концентрації речовини X у реакції Шльогля.

Ми розглядали концентрації речовин A та B як задані. Це можливо тоді, коли вони підтримуються штучно, тобто "сировина" A надходить ззовні, а "кінцевий продукт" B , навпаки, виводиться з реактора. Така система є відкритою.

В ізольованій системі з часом встановиться стан термодинамічної рівноваги, коли швидкості прямих і зворотних реакцій, описуваних кожним з рівнянь (2.2.5), однакові. Це можливо лише тоді, коли концентрації "сировини" і "кінцевого продукту" пов'язані співвідношенням $K_1A/K_2 = K_4B/K_3$. Тоді рівняння (2.2.6) має єдиний однорідний стаціонарний розв'язок $X = K_1A/K_2 = K_4B/K_3$, що прямує до нуля при малих значеннях B . Отже, він відповідає меншому стійкому стаціонарному розв'язку на рис. 2.2.4, і останній може розглядатися як термодинамічна гілка. Більший стійкий стаціонарний розв'язок, якщо він існує, породжується відкритим характером досліджуваної системи.

Нехай тепер реакція протікає в одновимірному реакторі без перемішування, так що концентрація реагентів змінюється вздовж реактора (в напрямку x). Якщо врахувати дифузії молекул у реакторі, то замість (2.2.6) отримаємо:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = f(X) + D \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}. \quad (2.2.7)$$

2.2.1.3. Експансія популяції тварин, що розмножуються статевим шляхом

Нехай густина розселення деяких тварин – n . Нехай вони розмножуються статевим шляхом, тобто приріст кількості особин пропорційний до ймовірності їхніх зустрічей ($\sim n^2$). Тоді з урахуванням смертності і територіального розростання популяції можна записати рівняння для густини розселення у формі

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha m(n)n^2 - \gamma n + D\Delta n. \quad (2.2.8)$$

Тут враховано, що швидкість розмноження пропорційна масі їжі $m(n)$, яка надходить у систему за одиницю часу в розрахунку на одну особину. Очевидно, $m(n)$ зменшується із зростанням густини розселення n . Нехай, наприклад,

$$m(n) = m_0 \exp(-n/n_0). \quad (2.2.9)$$

Вигляд кінетичної функції

$$f(n) = \alpha m_0 n^2 \exp(-n/n_0) - \gamma n \quad (2.2.10)$$

при деякому наборі параметрів подано на рис. 2.2.5. Він якісно подібний до кінетичних функцій для розглянутих раніше випадків (рис. 2.2.3 в, рис. 2.2.4). Точки $n=0$ та $n=n_1$ відповідають стійким стаціонарним станам, точка $n=n_c$ – нестійкому. При малих n майже не відбуваються зустрічі тварин, популяція не зростає. При $n=n_1$ зростання популяції обмежується вичерпанням харчових ресурсів.

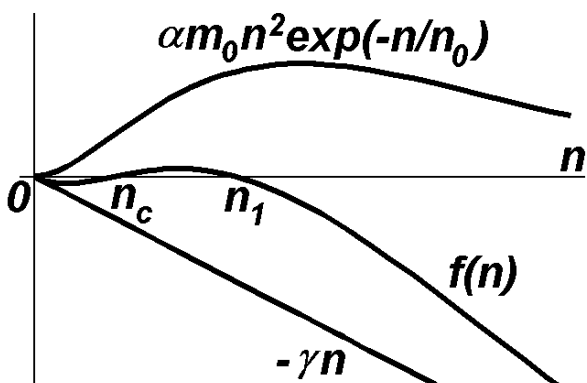


Рис. 2.2.5. Побудова кінетичної функції для популяції, що розмножується статевим шляхом в умовах обмежених харчових ресурсів.

Нерівноважність аналізованої екологічної системи зумовлена надходженням до неї харчових ресурсів. Тому розв'язок $n=0$, що зберігається при $m(n)=0$, є термодинамічною гілкою, а розв'язок $n=n_1$ зумовлений відкритим характером системи.

Таким чином, в усіх розглянутих нами вище (п.п. 2.2.1-2.2.3) прикладах бістабільних систем кінетична функція має вигляд, аналогічний поданому на рис. 2.2.3 в. В усіх випадках маємо дві стійкі стаціонарні точки, а між ними – нестійку. Менше значення змінної в стійкому стаціонарному стані відповідає термодинамічній гілці, більше зумовлене нерівноважністю (відкритим характером) системи. Таким чином, бістабільність розглянутих систем є наслідком їхньої відкритості.

2.2.1.4. Нелінійні кінетичні рівняння дифузійного типу

Всі розібрані вище приклади (як і розглянута раніше $\lambda-\omega$ модель – див. вище пп.2.1.2.1-2.1.2.2) приводять до рівнянь (у більш загальному випадку – систем рівнянь) вигляду

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i(\vec{u}) + D_i \Delta u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \vec{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \quad (2.2.11)$$

– нелінійних кінетичних рівнянь дифузійного типу. Назва пов'язана з тим, що при $D_i = 0$

рівняння (2.2.11) переходять у рівняння, що описують зміну величин u_i в часі – так зване кінетичне рівняння з нелінійною кінетичною функцією $f_i(\vec{u})$. Навпаки, при $f_i(\vec{u}) = 0$ рівняння (2.2.11) переходять у звичайні рівняння дифузії. В загальному випадку дифузія є нелінійною, тобто коефіцієнти дифузії залежать від змінної \vec{u} . В анізотропних середовищах замість скалярних коефіцієнтів дифузії D_i матимемо тензор D_{ij} .

Рівняння типу (2.2.11) можна розглядати як узагальнення рівняння неперервності для величини u за наявності джерел. В цьому сенсі воно аналогічне до рівняння балансу ентропії в диференціальній формі (1.2.12). Додаткове припущення полягає в тому, що потоки \vec{J}_i досліджуваних величин u_i пропорційні їхнім градієнтам, $\vec{J}_i = -D_i \nabla u_i$, де ∇u_i виступають у ролі узагальнених термодинамічних сил (див. п. 1.2.3.1). Ця підстановка в найпростішому випадку, коли D_i не залежать від \vec{u} , перетворює дивергенцію потоку u_i на відповідний лапласіан. У найбільш загальному випадку нелінійної дифузії в анізотропних середовищах отримаємо:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i(\vec{u}) + \nabla \left(\sum_j D_{ij}(\vec{u}) \nabla u_j \right) \quad (2.2.11 \text{ а})$$

(враховано, що потік компоненти u_j може бути зумовлений не лише градієнтом цієї компоненти, але й градієнтами інших компонент u_j).

Нелінійні кінетичні рівняння дифузійного типу – одна з універсальних моделей для опису автоколивних процесів. Саме такими рівняннями описуються процеси в активних середовищах найрізноманітнішої природи. Наприклад, таку форму мають рівняння, що описують динаміку брюсселятора (див. рівняння (1.3.23)) та орегонатора (див. рівняння (1.3.38)). Втім, слід відзначити, що в деяких задачах про самоорганізацію в рівняннях може фігурувати не перша, а друга похідна за часом. В цьому випадку, очевидно, слід говорити не про рівняння дифузійного типу, а про нелінійні хвильові рівняння (прикладом може бути розглянуте раніше рівняння для хвиль в активній лінії, див. п.2.1.1.3).

Для опису бістабільних середовищ досить одного рівняння вигляду (2.2.11). В усіх розглянутих прикладах бістабільних середовищ рівняння такого типу має два стійкі стаціонарні однорідні розв'язки (див. п. 2.2.1.1).

Рівняння такого вигляду вперше було запропоноване в 1937 році незалежно Р. Фішером¹ і А.М. Колмогоровим², І.Г. Петровським³ та М.С. Піскуновим⁴ при розгляді задач про поширення біологічних популяцій, або так звану генетичну дифузію (див. нижче п.2.2.1.9). У 1938 році це рівняння застосували Я.Б. Зельдович⁵ та Д.А. Франк-Каменецький⁶ для опису поширення полум'я (коли кінетична функція має форму полінома). Відтоді його називають рівнянням Фішера – Колмогорова – Петровського – Піскунова або рівнянням Зельдовича – Франк-Каменецького.

¹ Р. Фішер (Sir Ronald Aylmer Fisher, 1890 - 1962) – великий англійський та австралійський учений, статистик, біолог-еволюціоніст, євгенік та генетик. Член Королівського товариства.

² А.М. Колмогоров (Андрей Николаевич Колмогоров, 1903 - 1987) – геніальний російський математик, академік АН СРСР, лауреат Сталінської премії, Герой Соціалістичної Праці. Один з творців сучасної теорії ймовірностей. Отримав ряд визначних результатів у топології, математичній логіці, теорії складності алгоритмів. Один з творців теорії турбулентності та теорії динамічного хаосу.

³ І.Г. Петровський (Іван Георгієвич Петровський, 1901 - 1973) – визначний російський математик, академік АН СРСР, лауреат Сталінської премії, ректор Московського державного університету (1951-1973). Займався, зокрема, теорією ймовірностей, теорією диференціальних рівнянь, математичною фізикою.

⁴ М.С. Піскунов (Николай Семенович Пискунов, 1908 - 1977) – російський математик і механік.

⁵ Я.Б. Зельдович (Яков Борисович Зельдович, 1914 - 1987) – російський фізик-теоретик та фізико-хімік, академік АН СРСР, лауреат Сталінських (1943, 1949, 1951, 1953) та Ленінської (1957) премії, тричі Герой Соціалістичної Праці. Один з творців атомної та водневої бомби (в СРСР). Найвідоміші роботи присвячені горінню, детонації, ядерній фізиці та астрофізиці.

⁶ Д.А. Франк-Каменецький (Давид Альбертович Франк-Каменецький, 1910 - 1970) – російський фізик-теоретик, тричі лауреат Державної премії СРСР. Основні роботи присвячені теорії горіння та вибуху, хімічній кінетиці та технології, астрофізиці, фізиці плазми. Брав участь у розробці ядерної зброї.

2.2.1.5. Біжучий фронт (хвиля перемикання): якісний вигляд і швидкість

Розглянемо одновимірне нелінійне кінетичне рівняння з дифузією для бістабільного середовища:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.2.12)$$

Будемо шукати його розв'язок у вигляді стаціонарної хвилі, тобто хвилі, що поширюється в просторі з постійною швидкістю без зміни своєї форми: $u = u(\xi)$, $\xi = x - V_0 t$ (так званий автомодельний розв'язок). Оскільки ні форма, ні величина швидкості такої хвилі не залежать від початкових чи граничних умов, її можна зарахувати до автохвиль. Автохвилю такого типу називають біжучим фронтом, або хвилею перемикання (чи хвилею перекидання). Стосовно горіння, коли мова йде про перехід з низькотемпературного стану у високотемпературний, говорять про хвилю запалювання. Коли, навпаки, йдеться про перехід від високотемпературного стану до низькотемпературного, говорять про хвилю гасіння.

Після підстановки автомодельного розв'язку рівняння (2.2.12) зводиться до вигляду

$$D \frac{d^2 u}{d\xi^2} + V_0 \frac{du}{d\xi} + f(u) = 0. \quad (2.2.13)$$

Перш ніж розв'язувати рівняння (2.2.13), обговоримо гаданий вигляд цього розв'язку якісно. Нехай в області $\xi \rightarrow +\infty$ реалізується стійкий стан $u = u_3$, а в області $\xi \rightarrow -\infty$ – стан $u = u_1$ (рис. 2.2.6 а). У випадку горіння в розподіленій системі (див. п. 2.2.1.1) $u = u_3$ – це стан горіння (висока температура), $u = u_1$ – відповідно, відсутність горіння (низька температура). Тоді в перехідній області температура поступово зростатиме при зростанні ξ . Відзначимо ще, що при $\xi \rightarrow \pm\infty$ реалізуються стаціонарні однорідні стани, тому в цих областях кожен з доданків у рівнянні (2.2.13) окремо дорівнює нулю. Зокрема, в області горіння все тепло, що виділяється, витрачається на теплообмін із навколишнім середовищем. Навпаки, в перехідній області, де значення u відмінне як від u_1 та u_3 , так і від u_2 (крім однієї єдиної точки), кінетична функція відмінна від нуля. Там, де вона додатна, тобто ближче до області горіння, тепло виділяється; там, де вона від'ємна, тобто ближче до області, де горіння немає, – навпаки, поглинається (рис. 2.2.6).

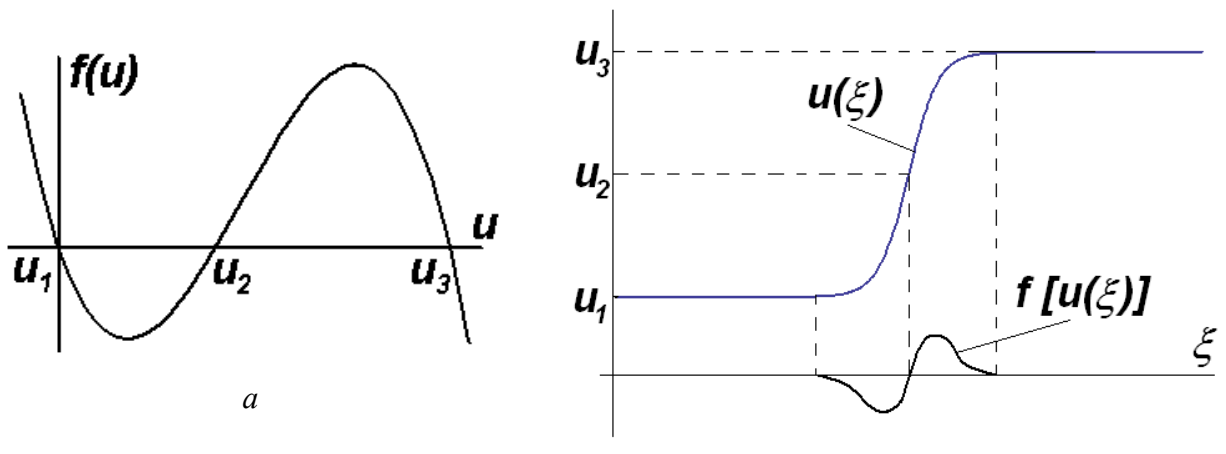


Рис. 2.2.6. До аналізу стаціонарної хвилі перемикання: а – вигляд кінетичної функції, б – гаданий профіль хвилі та виділення й поглинання тепла на фронті хвилі перемикання.

Тепер повернемося до рівняння (2.2.13). Помноживши його на $(du/d\xi)^n$, отримаємо:

$$D \frac{d^2 u}{d\xi^2} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^n + V_0 \left(\frac{du}{d\xi} \right)^{n+1} + f[u(\xi)] \left(\frac{du}{d\xi} \right)^n = 0,$$

або

$$\frac{D}{n+1} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^{n+1} + V_0 \left(\frac{du}{d\xi} \right)^{n+1} + f(u) \left(\frac{du}{d\xi} \right)^n = 0. \quad (2.2.14)$$

Тут використане очевидне співвідношення

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^{n+1} = (n+1) \left(\frac{du}{d\xi} \right)^n \frac{d^2 u}{d\xi^2}.$$

Тепер проінтегруємо рівняння (2.2.14) по ξ в нескінченних межах:

$$\frac{D}{2} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^{n+1} \Big|_{-\infty}^{\infty} + V_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^{n+1} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left(\frac{du}{d\xi} \right)^n d\xi = 0. \quad (2.2.15)$$

З урахуванням накладених вище граничних умов перший доданок у цьому рівнянні дорівнює нулю, оскільки при $\xi \rightarrow \pm\infty$ стан системи є однорідним. Тому рівняння (2.2.15) набуває вигляду

$$V_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^{n+1} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left(\frac{du}{d\xi} \right)^n d\xi = 0, \quad (2.2.16)$$

і з нього можна знайти швидкість стаціонарної хвилі:

$$V_0 = - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left(\frac{du}{d\xi} \right)^n d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^{n+1} d\xi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.17)$$

Хоча формула (2.2.17) не дозволяє безпосередньо розрахувати швидкість біжучого фронту, вона, тим не менше, дозволяє зробити деякі якісні висновки.

Перш за все, в обидва інтеграли (як у чисельнику, так і в знаменнику) дає внесок тільки область фронту хвилі перемикавання (лише в цій області величини $f(u)$ та $du/d\xi$ відмінні від нуля). Таким чином, швидкість хвилі перемикавання (як за величиною, так і за напрямком) повністю визначається процесами на її фронті. Можна також відзначити, що функція $du/d\xi$ має бути такою, щоб інтеграл у чисельнику (2.2.17) перетворювався на нуль одночасно для всіх можливих значень n .

Найпростішого вигляду формула (2.2.17) набуває при $n = 0$:

$$V_0 = - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f[u(\xi)] d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{d\xi} d\xi} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f[u(\xi)] d\xi}{u_3 - u_1}. \quad (2.2.17 \text{ а})$$

У цьому випадку вона допускає наочну інтерпретацію.

Для бістабільних середовищ завжди виконана умова $u_3 > u_1$, тому знак швидкості визначається знаком чисельника формули (2.2.17 а). Нагадаємо, що в моделі горіння в розподіленій системі (див. п. 2.2.1.1) кінетична функція $f(u)$ визначає кількість теплоти на одиницю довжини системи, яка виділяється (або зникає) в результаті горіння та теплообміну з навколишнім середовищем (у напрямку y). Тоді інтеграл у чисельнику (2.2.17 а) – це повна кількість теплоти, що виділяється (зникає внаслідок теплообміну в напрямку y) на фронті ударної хвилі. Якщо ця величина дорівнює нулеві, то потік тепла в напрямку x за межами фронту відсутній, швидкість хвилі також перетворюється на нуль, і утворюється стаціонарна

дисипативна структура (див. нижче п. 2.4.3). Якщо на фронті переважає тепловиділення, виникає потік тепла в бік низькотемпературної області, і отримуємо хвилю запалювання (область горіння зростає). В протилежному випадку виникає потік тепла від високотемпературної області, в результаті отримуємо хвилю гасіння (область горіння зменшується).

В результаті поширення хвилі перемикання (супроводжуваної потоком тепла) температура середовища змінюється на величину $\Delta u = u_3 - u_1$, яку можна ототожнити з густиною тепла в потоці (з точністю до погонної теплоємності). Тоді добуток $V_0 \Delta u$ визначає густину теплового потоку, що супроводжує хвилю перемикання.

Запропонована інтерпретація легко переноситься на інші типи бістабільних середовищ – треба лише говорити не про кількість теплоти, а про фізичну величину, кількість якої визначається змінною u .

Інколи формулою (2.2.17) користуються при $n = 1$. У цьому випадку її можна записати у формі

$$V_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{du}{d\xi} d\xi}{\int_{u_1}^{u_3} \frac{du}{d\xi} du} = \frac{\int_{u_1}^{u_3} f(u) du}{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 d\xi}. \quad (2.2.17 \text{ б})$$

Для інтерпретації формули (2.2.17 б) знову звернемося до рівняння (2.2.13). Його можна формально розглядати як рівняння дисипативного нелінійного осцилятора, в якому ξ відіграє роль часу, u – роль координати, «нелінійна сила» $f(u)$ визначається потенціалом

$$\Phi(u) = \int f(u) du, \quad (2.2.18)$$

а швидкість хвилі V_0 відіграє роль параметра дисипації. Вважатимемо надалі, що $\Phi(u_3) > \Phi(u_1)$, тобто “різниця потенціалів” між точками u_1 та u_3 додатна:

$$\Delta\Phi \equiv \int_{u_1}^{u_3} f(u) du > 0. \quad (2.2.18 \text{ а})$$

Для випадку $V_0 = 0$ неважко, знаючи вигляд “нелінійної сили” $f(u)$ (рис. 2.2.7 а), а, отже, й “потенціалу” $\Phi(u)$ (рис. 2.2.7 б), побудувати „фазовий портрет” системи (рис. 2.2.7 в).

Нас цікавить випадок, коли система переходить зі стану u_1 до стану u_3 . Це можливо лише тоді, коли тертя від’ємне, а енергія, що виділяється в результаті такого тертя при переході між точками u_1 і u_3 , точно дорівнює відповідній «різниці потенціалів»:

$$\int_{u_1}^{u_3} V_0 \frac{du}{d\xi} du = \int_{u_1}^{u_3} f(u) du, \quad (2.2.19)$$

де враховано, що аналогом сила тертя є величина $V_0 du/d\xi$. Тоді з (2.2.19) можна знайти швидкість стаціонарної хвилі. В результаті приходимо до формули (2.2.17 б).

„Фазовий портрет” системи з урахуванням від’ємного тертя поданий на рис. 2.2.7 г. Біжучому фронту на ньому відповідає сепаратриса, що йде із сідла в сідло.

Дана інтерпретація носить досить формальний характер і не є цілком вдалою. Незрозуміло, наприклад, чому станам стійкої рівноваги відповідають не мінімуми, а максимуми потенціалу і, відповідно, сідлові точки на „фазовому портреті”. Тим не менше, вона часто використовується в літературі. Можливо, це зумовлено її універсальним характером – вона не пов’язана з конкретними властивостями моделі бістабільного середовища, в якому поширюється стаціонарна автохвиля, описувана нелінійним кінетичним рівнянням із дифузєю (2.2.12).

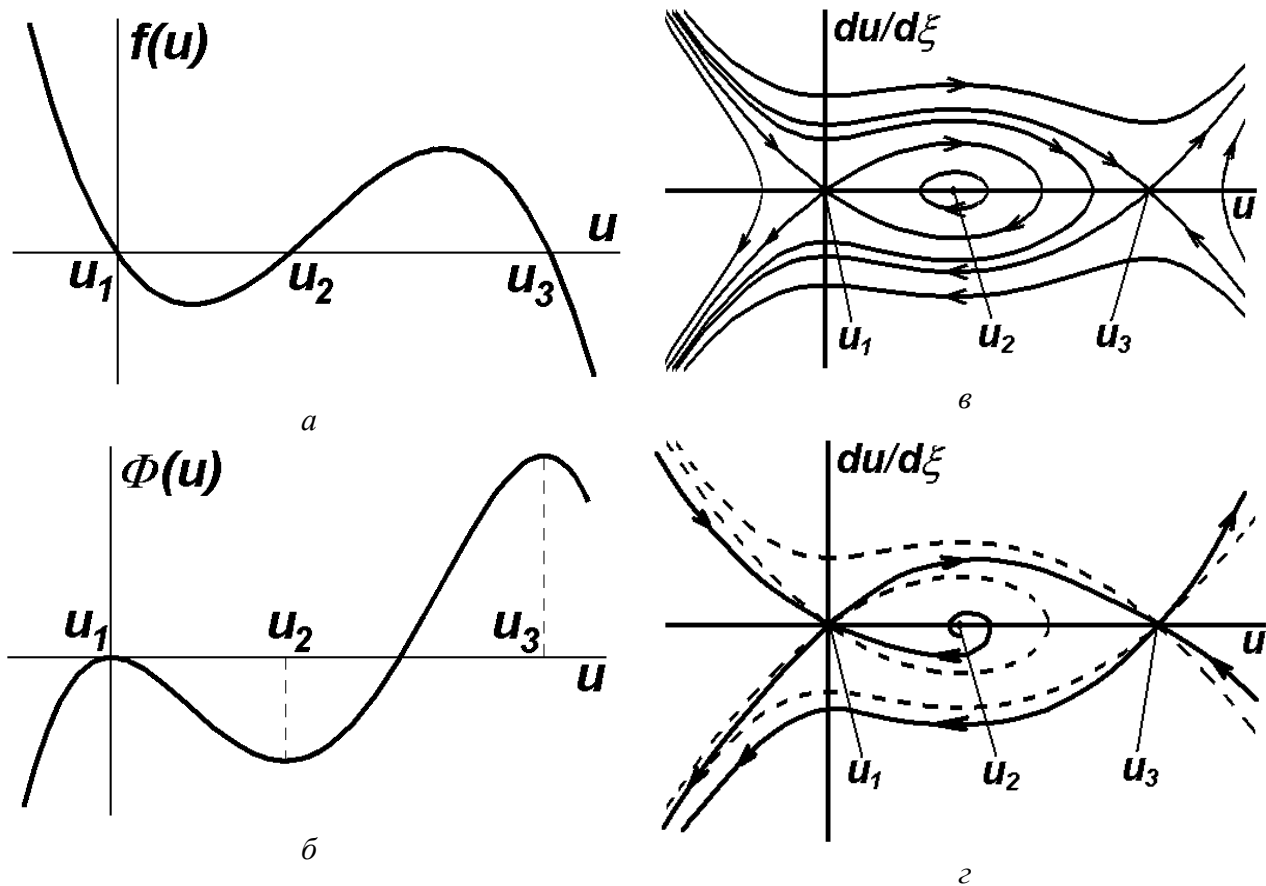


Рис. 2.2.6. До побудови фазового портрету стаціонарної хвилі перекидання: а – вигляд кінетичної функції; б – хід потенціалу; в – фазовий портрет без урахування дисипації; г – фазовий портрет з урахуванням від'ємної дисипації.

2.2.1.6. Вигляд хвилі перемикавання для модельної кінетичної функції

Рівняння (2.2.13) вдається проінтегрувати, якщо обрати модельну функцію $f(u)$ у формі полінома

$$f(u) = u(u - u_0)(1 - u), \quad 0 < u_0 < 1 \quad (2.2.20)$$

(пор. з формулою (2.2.6)). Тоді задачу можна аналітично розв'язати до кінця.

Рівняння для стаціонарної хвилі (2.2.13) з урахуванням (2.2.19) набуває вигляду

$$D \frac{d^2 u}{d\xi^2} + V_0 \frac{du}{d\xi} + u(u - u_0)(1 - u) = 0. \quad (2.2.13 \text{ а})$$

У фазових змінних ($w = du/d\xi$) це рівняння записується у формі

$$Dw \frac{dw}{du} + V_0 w + u(u - u_0)(1 - u) = 0. \quad (2.2.13 \text{ б})$$

Вільний доданок у рівнянні (2.2.13 б) є поліномом третього ступеню. Тому його розв'язок можна також шукати у формі полінома. Порівняння першого доданку з останнім показує, що це має бути поліном другого ступеню.

Шукаємо розв'язок (2.2.13 б) у вигляді:

$$w(u) = \sigma u(1 - u). \quad (2.2.21)$$

Після підстановки (2.2.21) до (2.2.13 б) отримаємо:

$$D\sigma^2 u(1 - u)(1 - 2u) + \sigma V_0 u(1 - u) + u(u - u_0)(1 - u) = 0, \quad (2.2.13 \text{ в})$$

або

$$u(-2D\sigma^2 + 1) + (D\sigma^2 + \sigma V_0 - u_0) = 0. \quad (2.2.13 \text{ г})$$

Це – поліном першого ступеню. Для того, щоб він дорівнював нулеві, повинні дорів-

значеннях параметра u_0 .

2.2.1.9. На плоскому фронті хвилі перекидання утворилося викривлення з радіусом кривини R . Оцініть час його релаксації.

2.2.1.10. Поширення в просторі популяції, що розмножується діленням, описується модельним рівнянням

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha m(n)n + D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2},$$

де

$$m(n) = \begin{cases} M - \beta n, & 0 < n < M/\beta; \\ 0, & n \geq M/\beta \end{cases}$$

– функція, що характеризує харчові ресурси. Розрахувати швидкість та форму профілю хвилі переходу з одного стаціонарного стану в інший (хвилі заселення).

2.2.1.11. Поширення в просторі популяції, що розмножується статевим шляхом, описується модельним рівнянням

$$\frac{\partial n}{\partial t} = m(n)n^2 + D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2},$$

де

$$m(n) = \begin{cases} M - \beta n, & 0 < n < M/\beta; \\ 0, & n \geq M/\beta \end{cases}$$

– функція, що характеризує харчові ресурси.

а) Побудувати фазовий портрет для стаціонарних хвиль системи.

б) Розрахувати форму стаціонарної хвилі, її швидкість і ширину фронту.

2.2.1.12. Поширення в просторі популяції, що розмножується статевим шляхом, описується (з урахуванням природної смертності) модельним рівнянням

$$\frac{\partial n}{\partial t} = m(n)n^2 - \alpha n + D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2},$$

де

$$m(n) = \begin{cases} M - \beta n, & 0 < n < M/\beta; \\ 0, & n \geq M/\beta \end{cases}$$

– функція, що характеризує харчові ресурси.

а) Побудувати фазовий портрет для стаціонарних хвиль системи. До якого типу вони належать?

б) Розрахувати форму стаціонарної хвилі, її швидкість і ширину фронту.

2.2.1.13*. Для двовимірного бістабільного середовища побудуйте числовий розв'язок, що відповідає поширенню хвилі перекидання від колового джерела. Побудуйте залежність швидкості хвилі перекидання від радіусу кривини її фронту і порівняйте її з результатом аналітичного розрахунку.

2.2.2. Біжучі імпульси

Перейдемо тепер до розгляду автохвиль у середовищах із відновленням.

Середовища з відновленням (інакше їх називають збудливими середовищами) схожі на бістабільні, але в них один із стаціонарних станів є метастабільним, так що через деякий скінчений проміжок часу після збудження середовища спонтанно переходять в основний стан. Автохвилі в таких середовищах можна уявити собі як послідовність двох хвиль перекидання. Перша з них переводить систему з основного стану в метастабільний, а друга – знову в основний. Такі автохвилі дістали назву біжучих імпульсів.

Відзначимо, що в початковий момент часу (на передньому фронті біжучого імпульсу)

метастабільний стан є більш "енергетично вигідним". Тому перехід у цей стан можна розглядати як результат розвитку деякої нестійкості. Однак із часом метастабільний стан змінює свій характер, так що тепер більш "енергетично вигідним" стає основний стан. В результаті знову розвивається нестійкість, і система повертається до основного стану, після чого цей стан поступово відновлює свій первісний характер.

Прикладами середовищ із відновленням можуть служити, наприклад, ліс, що знову виростає після лісової пожежі, нервово волокно, що може збуджуватись зовнішнім подразником, а потім спонтанно переходити в стан спокою, та інші.

Користуючись уявленнями, запозиченими з радіоелектроніки, найпростіше одновимірне середовище з відновленням можна уявити собі як ланцюжок мультивібраторів у режимі очікування. Імпульс запуску, що надходить на вхід крайнього в ланцюжку мультивібратора, переводить його з основного стану в збуджений (метастабільний). При цьому на його виході одночасно формується імпульс запуску, що надходить на вхід наступного мультивібратора. В результаті вздовж ланцюжка біжить хвиля перекидання. Через деякий час мультивібратори починають спонтанно переходити в основний стан. В результаті вздовж ланцюжка біжить нова хвиля перекидання. Після завершення відповідних перехідних процесів ланцюжок може реагувати на новий імпульс запуску.

Історично перше дослідження біжучих імпульсів у середовищі з відновленням було виконане, як уже згадувалося (п. 2.1.1.2), А. Ходжкіном та Е. Хакслі – вони експериментально дослідили поширення імпульсу збудження в гігантському аксоні (нервовому волокні) кальмара, запропонувавши математичну модель цього процесу (модель Ходжкіна – Хакслі)⁸.

Ми почнемо наш розгляд з найпростішого типу автохвиль у середовищах із відновленням, а саме одиночних біжучих імпульсів, а в наступному підрозділі розглянемо періодичні послідовності таких імпульсів.

2.2.2.1. Рівняння, що описують середовища з відновленням

Середовища з відновленням описуються системою двох нелінійних кінетичних рівнянь із дифузійною:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = f_1(u, v) + D_1 \Delta u; \\ \frac{\partial v}{\partial t} = f_2(u, v) + D_2 \Delta v. \end{cases} \quad (2.2.34)$$

Для стаціонарного однорідного випадку система (2.2.34) набуває вигляду

$$\begin{cases} f_1(u, v) = 0; \\ f_2(u, v) = 0. \end{cases} \quad (2.2.34 \text{ а})$$

Нас цікавитиме випадок, коли система (2.2.34 а) має єдиний стійкий розв'язок $u = u_0, v = v_0$.

Аналітичне дослідження системи (2.2.34) можливе тоді, коли характерні часи зміни величин u і v істотно відмінні. Нехай, наприклад, величина u змінюється швидко, а величина v – повільно. Тоді для останньої дифузійною можна знехтувати, вважаючи, що помітні градієнти цієї величини не виникають. У результаті система (2.2.34) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = f_1(u, v) + D \Delta u; \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \mu f_2(u, v), \quad \mu \ll 1. \end{cases} \quad (2.2.34 \text{ б})$$

Систему рівнянь (2.2.34 б) можна розв'язувати шляхом виділення ділянок швидкого і повільного руху.

⁸ Hodgkin, A., and Huxley, A. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.* **117**, 500–544. (1952).

2.2.2.2. Горіння з виділенням інгібітору (модель Фітц-Х'ю – Нагумо)

Конкретизуємо модель середовища з відновленням. Розглянемо знову середовище, в якому можливий процес горіння (див. п. 2.2.1.1). Нехай тепер горіння супроводжується виділенням інгібітору. Інгібітор – це речовина, що пригнічує процес горіння (зокрема, зменшує тепловиділення при горінні). Якщо інгібітор, який виділяється, буде накопичуватися, то через деякий час горіння стане неможливим. Щоб забезпечити відновлення середовища, вважаємо, що за відсутності горіння інгібітор з часом може розпадатись (або вивітрюватися), так що його рівноважна концентрація, яка встановлюється в результаті балансу між виділенням і розпадом, є монотонно зростаючою функцією температури.

Виділення інгібітору при горінні робить метастабільним стаціонарний стан горіння, який у моделі без інгібітору був стійким. Справді, поступове накопичення інгібітору при горінні з часом робить горіння неможливим, тобто бістабільність зникає, і система спонтанно переходить у стан відсутності горіння. Але через деякий час після цього інгібітор розпадається, і система знову набуває властивості бістабільності.

Поведінка середовища, де горіння супроводжується виділенням такого інгібітору, описується системою двох нелінійних кінетичних рівнянь із дифузією вигляду (2.2.34). Апроксимуючи кінетичну функцію для температури кубічним поліномом, як це було зроблено вище (п. 2.2.1.6), і вважаючи, що рівноважна концентрація інгібітору прямо пропорційна температурі, відрахованій від температури навколишнього середовища (вона відповідає відсутності горіння і, відповідно, нульовій концентрації інгібітору), ці рівняння можна подати у формі:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha T(1-T)(T-T_0) - \beta n + \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}; \quad (2.2.35)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n - \gamma T}{\tau} + D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2},$$

де n – концентрація інгібітору, а параметр T_0 задовольняє умові $0 < T_0 < 1/2$ (за виконання цієї умови при $n = 0$ "енергетично вигідним" є поширення хвилі запалювання).

Рівняння (2.2.35) відповідають широко відомій у літературі моделі Фітц-Х'ю – Нагумо⁹, запропонованій для опису поширення імпульсів збудження в нервових волокнах. З математичної точки зору вона є спрощеним варіантом згаданої вище моделі Ходжкіна – Хакслі.

2.2.2.3. Біжучий імпульс (якісний розгляд)

Розглянемо тепер якісно біжучий імпульс у середовищі, описуваному рівняннями (2.2.35), де горіння супроводжується виділенням інгібітору.

Нехай при $n = 0$ „різниця потенціалів”

$$\Delta\Phi \equiv \int_{T_1}^{T_2} f_1(T, n) dT, \quad f_1(T, n) = \alpha T(1-T)(T-T_0) - \beta n, \quad (2.2.36)$$

між станами $T = 0$ і $T = 1$ додатна, $\Delta\Phi > 0$, так що середовище може перейти зі стану $T = 0$ у стан $T = 1$. Тоді, якщо на межі активного середовища є область горіння, від неї побіжить хвиля запалювання. Іншими словами, при $n = 0$ на фронті хвилі перекидання виділяється теплота, в результаті чого область горіння розширюється. Але за фронтом хвилі запалювання почнеться виділення інгібітору. Зростання концентрації інгібітору спричинить „опускання” графіка кінетичної функції $f_1(T, n) = f_1(T, n = 0) - \beta n$ (рис. 2.2.12 а). Коли концентрація інгібітору перевищить деяке порогове значення, знак „різниць потенціалів” зміниться, в результаті чого стан горіння перестане бути „енергетично вигідним”, і за хвилею запалювання по-

⁹ Див.: FitzHugh R. Mathematical models of excitation and propagation in nerve. // Biological Engineering. Ed. by H.P.Schwan. N.Y. Mc.Graw-Hill, 1965. Pp.1-85. Р. Фітц-Х'ю (Richard FitzHugh, 1922 - 2007) – американський біофізик. Й. Нагумо (Jin-Ichi Nagumo, 1926-1999) – японський фізик і електроінженер, професор Токійського університету. Модель Фітц-Х'ю – Нагумо запропонована першим з авторів для опису біологічної системи (1961), а другим – для електронної схеми (1962).

біжить хвиля гасіння. Це означає, що тепловиділення на фронті зміниться поглинанням тепла (за рахунок теплопередачі в напрямку, перпендикулярному до напрямку хвилі перекидання). Таким чином, на певній віддалі від біжучого фронту запалювання горіння припиниться, і сформується біжучий фронт гасіння.

Легко зрозуміти, що швидкість хвилі гасіння v_e в усталеному режимі має дорівнювати швидкості хвилі запалювання v_i ¹⁰. Нехай, наприклад, $v_e < v_i$. Тоді довжина імпульсу горіння буде збільшуватися. В результаті на його задньому фронті зростатиме концентрація інгібітору, збільшуватиметься „негативна різниця потенціалів” і, відповідно до формули (2.2.17), v_e зростатиме. Якщо ж $v_e > v_i$, імпульс горіння буде вкорочуватися, що спричинить зменшення швидкості його заднього фронту.

Як видно з рис. 2.2.12 а, в моделі Фітц-Х'ю – Нагумо зростання концентрації інгібітору приводить до зменшення як температури горіння, так і температури, що відповідає стаціонарному стану відсутності горіння. Тому температура в кінці імпульсу горіння буде дещо меншою, ніж на його початку, а температура за заднім фронтом імпульсу горіння – нижчою, ніж перед переднім.

Крім того, за заднім фронтом горіння буде висока концентрація інгібітору, який розкладається протягом деякого часу релаксації (в біофізиці його називають часом рефрактерності).

В результаті формується так званий біжучий імпульс, профіль якого (в нерухомій точці спостереження) якісно зображено на рис. 2.2.12 б. По суті, він являє собою пару хвиль перекидання, що йдуть одна за одною.

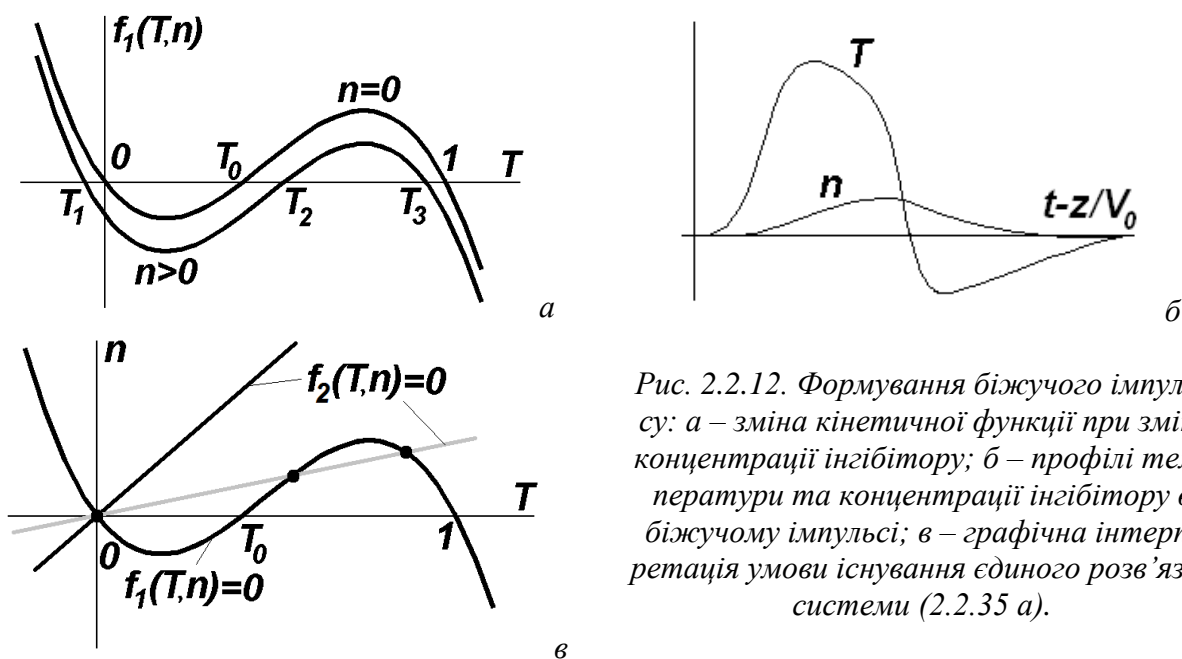


Рис. 2.2.12. Формування біжучого імпульсу: а – зміна кінетичної функції при зміні концентрації інгібітору; б – профілі температури та концентрації інгібітору в біжучому імпульсі; в – графічна інтерпретація умови існування єдиного розв'язку системи (2.2.35 а).

2.2.2.4. Розрахунок параметрів біжучого імпульсу: використані наближення

Перш за все з'ясуємо, чи має середовище, описуване рівняннями (2.2.35), єдиний стаціонарний однорідний стан. Система рівнянь для параметрів однорідного стаціонарного стану (2.2.34 а) набуває вигляду

$$\begin{cases} \alpha T(1-T)(T-T_0) - \beta n = 0; \\ n - \gamma T = 0. \end{cases} \quad (2.2.35 \text{ а})$$

Вона зводиться до рівняння

¹⁰ Індеси походять від англійських слів ignition (запалювання) та extinction (гасіння).

$$\alpha T(1-T)(T-T_0) - \beta \gamma T = 0, \quad (2.2.36)$$

яке має єдиний дійсний корінь $T = 0$ (і, відповідно, $n = 0$) за виконання умови

$$(1-T_0)^2 < 4\beta\gamma/\alpha \quad (2.2.37)$$

(див. рис. 2.2.12 в; нахил світлої лінії відповідає існуванню трьох коренів, нахил темної лінії, що задовольняє умову (2.2.37) – існуванню лише одного кореня).

Систему (2.2.35) вдається розв'язати аналітично в тому випадку, якщо дифузією інгібітору можна знехтувати, а характерний час зміни концентрації інгібітору (за порядком величини він визначається параметром τ) значно перевищує характерний час зміни температури Δt (2.2.26). В цьому випадку можна вважати, що

– просторова зміна концентрації інгібітору є настільки плавною, що його дифузією можна знехтувати;

– в областях фронтів імпульсу горіння концентрація інгібітору залишається незмінною, а в усіх інших областях просторова і часова зміна температури є настільки плавною, що похідними в першому рівнянні системи (2.2.35) можна знехтувати.

З урахуванням першого з висловлених припущень після переходу до автомодельної змінної $\xi = z - V_0 t$ система (2.2.35) набуває вигляду

$$\begin{cases} \chi \frac{d^2 T}{d\xi^2} + V_0 \frac{dT}{d\xi} + \alpha T(T-T_0)(1-T) - \beta n = 0; \\ V_0 \frac{dn}{d\xi} = \frac{n - \gamma T}{\tau}. \end{cases} \quad (2.2.35 \text{ б})$$

Фронти біжучого імпульсу описуються першим рівнянням системи (2.2.35 б) при $n = \text{const}$. Проміжки між фронтами, де просторова та часова зміна температури є повільною, описуються редукованою системою (2.2.35 б):

$$\begin{cases} \beta n = \alpha T(T-T_0)(1-T); \\ V_0 \frac{dn}{d\xi} = \frac{n - \gamma T}{\tau}. \end{cases} \quad (2.2.35 \text{ в})$$

Зазначимо, що описаний вище підхід відповідає відомому методу розв'язання диференціальних рівнянь чи систем таких рівнянь методом виділення ділянок швидкого та повільного руху. На ділянках швидкого руху старші похідні в рівнянні суттєві, на ділянках же повільного руху ними можна знехтувати (пор. системи (2.2.35 б) та (2.2.35 в)).

Розв'язок першого рівняння системи (2.2.35 б) при $n = 0$ нам уже відомий – це хвиля перекидання вигляду (2.2.23),

$$T(\xi) = \frac{\exp[-\sigma(\xi - \xi_0)]}{1 + \exp[-\sigma(\xi - \xi_0)]}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\alpha}{2\chi}} \quad (2.2.38)$$

(ξ_0 – константа інтегрування), що рухається зі швидкістю (див. (2.2.22 а))

$$V_0 = \sqrt{\frac{\alpha\chi}{2}} (1 - 2T_0). \quad (2.2.39)$$

Тепер, знаючи ширину фронту хвилі запалювання $1/\sigma$ та швидкість цієї хвилі V_0 , можна конкретизувати умову чинності даного розрахунку:

$$\tau \gg \Delta t \equiv \frac{1}{\sigma V_0} = \frac{1}{\alpha(1/2 - T_0)} \quad (2.2.40)$$

(характерний час зміни концентрації інгібітору τ значно більший від тривалості фронту біжучого імпульсу Δt).

2.2.2.5. Імпульс горіння

Перейдемо тепер до аналізу імпульсу горіння. Лінеаризуємо праву частину першого

в) шестикутної форми. Для автоколивного середовища змодельовати на ньому спіральну хвилю.

2.3.4. Пейсмерери в автоколивних середовищах

Як уже згадувалося, пейсмерерами, або провідними центрами називають джерела концентричних хвиль у середовищах автоколивного типу, що виникають на локальних неоднорідностях, причому ці неоднорідності характеризуються підвищеною частотою автоколивань. Справді, в лабораторних експериментах пейсмерери, придушені за рахунок впливу коротших фазових хвиль, після припинення впливу знову виникали на тому самому місці. Це дає підстави вважати, що причиною виникнення пейсмерерів є деякі локальні неоднорідності середовища. З іншого боку, якісно зрозуміло, що такі неоднорідності якраз і можуть служити джерелами фазових хвиль, якщо їхня частота перевищує частоту синфазних коливань навколишнього середовища (див. п. 2.1.2.8).

Експериментально пейсмерери в середовищі з реакцією Белоусова - Жаботинського вперше дослідив, як уже згадувалося, А. Вінфрі (див. п. 1.3.4.1). Теорія пейсмерерів, заснована на рівнянні для фазових хвиль, побудована Й. Курамото⁶.

2.3.4.1. Опис моделі та вихідні рівняння

Спробуємо описати виникнення пейсмерера в рамках $\lambda - \omega$ моделі. Для цього розглянемо плоский центральносиметричний шар, в якому $\omega_0 = \omega_0(r)$ (r – радіус у полярній системі координат, початок відліку якої суміщений із центром симетрії). Нехай неоднорідність зосереджена в області з характерними розмірами r_0 поблизу початку координат, так що $\omega_0(r \rightarrow \infty) = \omega_\infty$ і $\omega_0(r \leq r_0) = \omega_\infty + \delta\omega$ (рис. 2.3.6). Тоді, врахувавши в базовому рівнянні $\lambda - \omega$ моделі (2.1.23) залежність $\omega_0(r)$, поклавши $\varphi(r, t) = \omega_\infty t + \psi(r, t)$ і виконавши перетворення, аналогічні до розглянутих у пп. 2.1.2.2 та 2.1.2.4, можна отримати аналог рівняння для фазових хвиль (2.1.34), що враховує неоднорідність середовища:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \omega_0(r) - \omega_\infty + a(\nabla \psi)^2 + b\Delta \psi. \quad (2.3.28)$$

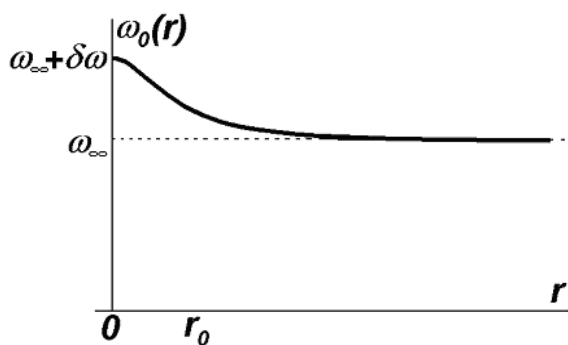


Рис. 2.3.6. Радіальна залежність частоти автоколивань в області виникнення пейсмерера.

Рівняння (2.3.28) еквівалентне до рівняння для $\lambda - \omega$ моделі (2.1.23) за умови

$$r_0 \gg \sqrt{b\tau_\rho} \quad (2.3.29)$$

(пор. з (2.1.37)).

Знову скористаємося заміною (2.1.38)

$$\psi(r, t) = \frac{b}{a} \ln Q(r, t).$$

Тоді з (2.3.28) можна отримати аналог рівняння (2.1.41 а) для $Q(r, t)$ у формі

⁶ Y. Kuramoto. Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Berlin: Springer, 1984.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = b\Delta Q + \frac{a}{b}[\omega_0(r) - \omega_\infty]Q. \quad (2.3.30)$$

2.3.4.2. Аналогія з частинкою в потенціальній ямі

Формально рівняння (2.3.30) для пейсмейкера еквівалентне нестационарному рівнянню Шрьодінгера⁷

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi - U(r) \Psi, \quad (2.3.30 \text{ а})$$

яке описує рух частинки в полі із заданим потенціалом $U(r)$. Рівняння (2.3.30 а) переходить у (2.3.30), якщо зробити заміни

$$\Psi \rightarrow Q, \quad -\frac{t}{i\hbar} \rightarrow t, \quad \frac{\hbar^2}{2m} \rightarrow b, \quad U(r) = -\frac{a}{b}[\omega_0(r) - \omega_\infty]. \quad (2.3.31)$$

У розглядуваній моделі в області $r \leq r_0$ маємо $\omega_0(r) > \omega_\infty$. В термінах квантової механіки це означає виникнення потенціальної ями – області, в якій $U(r) < 0$.

Рівняння (2.3.30) – лінійне (на відміну від рівняння (2.3.28)) диференціальне рівняння в частинних похідних, але його коефіцієнти залежать від координат. Якщо спробувати шукати розв'язок цього рівняння за методом розділення змінних, то рівняння для функції, залежної від часу, буде не тільки лінійним, але й зі стаціонарними коефіцієнтами. Отже, залежність від часу можна шукати в експоненціальній формі. Тоді загальний розв'язок рівняння (2.3.30) можна шукати у формі

$$Q(\vec{r}, t) = \sum_n C_n \mu_n(r) \exp(\lambda_n t), \quad (2.3.32)$$

де λ_n і $\mu_n(r)$ – відповідно власні числа і власні функції для рівняння

$$b\Delta \mu_n + \frac{a}{b}[\omega_0(r) - \omega_\infty] \mu_n = \lambda_n \mu_n, \quad (2.3.33)$$

яке легко отримати підстановкою (2.3.32) до (2.3.30).

Додатні значення λ_n у квантовомеханічній задачі відповідають зв'язаним станам частинки в потенціальній ямі. Від'ємні значення, що відповідають інфінітному рухові частинки, утворюють суцільний спектр, але вони неістотні, бо відповідні експоненти в (2.3.32) швидко згасають.

Оскільки в аналізованому випадку $U(r \rightarrow \infty) = 0$, то в розв'язку (2.3.32) існує власне значення $\lambda_0 = 0$ і відповідна власна функція $\mu_0(r)$.

Умова $U(r \rightarrow \infty) = 0$ дає змогу знайти асимптотику функцій $\mu_n(r)$ при $r \rightarrow \infty$. Справді, з урахуванням аксіальної симетрії задачі рівняння (2.3.33) набуває вигляду

$$b \left(\frac{d^2 \mu_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \mu_n}{dr} \right) + \frac{a}{b}[\omega_0(r) - \omega_\infty] \mu_n = \lambda_n \mu_n. \quad (2.3.33 \text{ а})$$

При $r \rightarrow \infty$ замість (2.3.33 а) отримаємо рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$b \frac{d^2 \mu_n}{dr^2} = \lambda_n \mu_n. \quad (2.3.33 \text{ б})$$

Розв'язок рівняння (2.3.33 б) при $\lambda_n > 0$ з урахуванням того, що при $r \rightarrow \infty$ він має залишатись обмеженим, за умови $r \gg r_n$ може бути записаний у формі

⁷ Е. Шрьодінгер (Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger, 1887 - 1961) – великий австрійський фізик-теоретик, один з творців квантової механіки. Лауреат Нобелівської премії з фізики (1933), професор університетів у Берліні, Оксфорді, Граці й Генті, з 1939 року – директор заснованого ним Інституту вищих досліджень (Institute for advanced studies) в Дубліні.

$$\mu_n(r) = \exp\left(-\frac{r}{r_n}\right), \quad r_n = \sqrt{\frac{b}{\lambda_n}}. \quad (2.3.34)$$

З урахуванням тієї самої умови для $\lambda_0 = 0$ при $r \gg r_0$ можна покласти $\mu_0 \approx 1$ (нагадаємо, що r_0 – це розмір потенціальної ями).

Нехай у потенціальній ямі є всього один зв'язаний стан, тобто існує лише одне додатне власне значення λ_1 , якому відповідає власна функція μ_1 . Тоді, нехтуючи згасаючим внеском від суцільного спектру, отримаємо при $r \gg r_0$:

$$\psi(r, t) = \frac{b}{a} \ln \left[C_0 + C_1 \exp \left(\lambda_1 t - \sqrt{\frac{\lambda_1}{b}} r \right) \right]. \quad (2.3.35)$$

Цей розв'язок описує пейскекер, що народжується (див. рис. 2.3.7 а, б). Справді, якщо

$$\lambda_1 t - \sqrt{\frac{\lambda_1}{b}} r \gg 1, \quad (2.3.36)$$

або

$$r < R(t) = \sqrt{\lambda_1 b} t, \quad (2.3.37)$$

то константою C_0 можна знехтувати поруч із експонентою, і (2.3.35) набуває вигляду:

$$\psi(r, t) \approx \frac{b \lambda_1 t}{a} - \frac{\sqrt{\lambda_1 b}}{a} r. \quad (2.3.35 \text{ а})$$

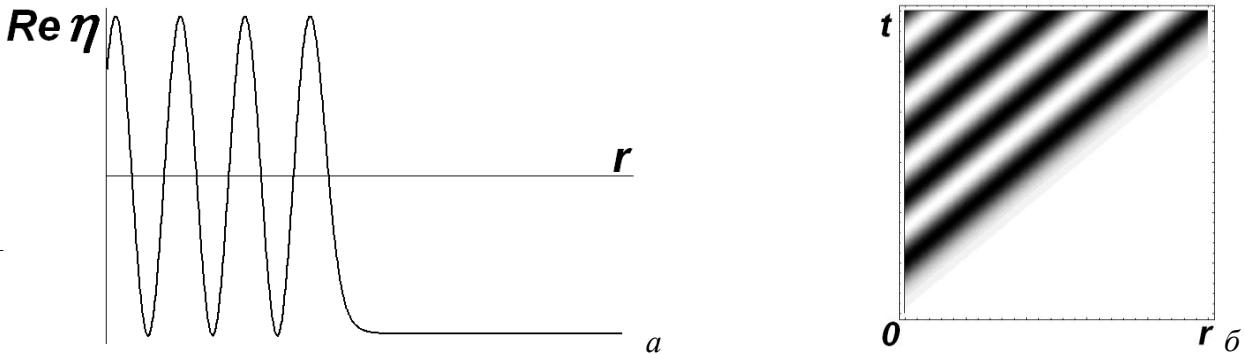


Рис. 2.3.7. Графік функції $\text{Re } \eta(r, t)$ при $t=\text{const}$ (а) та контурний графік цієї функції (б), де $\eta(r, t) = \exp\{i[\omega_\infty t + \psi(r, t)]\}$, а залежність $\psi(r, t)$ визначається формулою (2.3.35)

Розв'язок (2.3.35 а) описує концентричні фазові хвилі з частотою

$$\omega = \omega_\infty + \frac{b}{a} \lambda_1 \quad (2.3.38)$$

і хвильовим числом

$$k = \frac{\sqrt{\lambda_1 b}}{a}, \quad (2.3.39)$$

що розходяться від центру (рис. 2.3.7). Чим глибша яма, тим більша λ_1 і, як випливає з (2.3.38)-(2.3.39), тим вища частота і менша довжина хвилі.

Навпаки, при $r > R(t)$ маємо $\varphi \approx \text{const}$, тобто ця область залишається незбуреною (в ній існують синфазні автоколивання з частотою ω_∞).

Область, зайнята фазовими хвилями, розширюється з радіальною швидкістю

$$V_R = \frac{dR(t)}{dt} = \sqrt{\lambda_1 b}. \quad (2.3.40)$$

Якщо в потенціальній ямі, що відповідає збуренню $\omega_0(r)$, існує кілька зв'язаних ста-

нів, картина істотно не зміниться. Треба лише замінити λ_1 на максимальне власне число λ_n .

2.3.4.3. Умови виникнення та застосовність опису в рамках рівняння фазових хвиль

В одно- і двовимірному випадку будь-яка яма (навіть дуже неглибока) містить хоча б один зв'язаний стан. Отже, як завгодно мале додатне збурення $\delta\omega$ породжує пейсмеркер. У тривимірному випадку зв'язаний стан з'являється лише для достатньо глибоких потенціальних ям, тобто за виконання умови

$$\delta\omega \gg \frac{b^2}{ar_0^2} \quad (2.3.41)$$

(чим більший радіус ями r_0 , тим менша „критична глибина” $\delta\omega_{cr}$, необхідна для виникнення пейсмеркера). При невиконанні умови (2.3.41) пейсмеркер не виникає.

Виконаний розрахунок справедливий лише тоді, коли радіус локалізації r_n (2.3.34) задовольняє умові (2.3.29), тобто при $\lambda_n \ll 1/\tau_\rho$, інакше рівняння для $\lambda - \omega$ моделі не зводиться до рівняння для фазових хвиль. Оскільки завжди

$$\lambda_n \leq \frac{a}{b} \delta\omega, \quad (2.3.42)$$

(максимальне власне значення λ_n обмежене глибиною потенціальної ями), отримаємо:

$$\delta\omega_{\max} \ll \frac{b}{a\tau_\rho}, \quad (2.3.43)$$

тобто виконаний розрахунок справедливий лише для помірних збурень автоколивного середовища.

Як уже говорилося, при зіткненні двох фазових хвиль із різними хвильовими числами відбувається їх повне взаємне погашення, а межа рухається в напрямку області, заповненої довшими хвилями. Це означає, що за наявності кількох пейсмеркерів у результаті конкуренції між ними врешті-решт переможе той, якому відповідають найкоротші хвилі (найглибша потенціальна яма).

Контрольні питання до підрозділу 2.3.4

1. Якісно опишіть механізм виникнення пейсмеркерів.
2. Опишіть часову еволюцію фазових хвиль в автоколивному середовищі, яке має два локальні максимуми для частоти локальних автоколивань.
3. Як, на Вашу думку, зміняться властивості пейсмеркера, якщо збурення в середовищі, яке його породило, не буде аксіально-симетричним?
4. Як властивості локального збурення впливають на характеристики відповідного пейсмеркера?

Задачі до підрозділу 2.3.4

2.3.4.1. Нелінійне кінетичне рівняння з дифузійною для середовищ автоколивного типу ($\lambda - \omega$ модель) має вигляд

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = [\lambda(\rho) + i\omega(\rho)]\eta + (D_1 - iD_2)\Delta\eta,$$

де $\rho = |\eta|$, $\lambda(\rho)$ – монотонно спадна функція, така, що $\lambda(\rho_0) = 0$, $\omega(\rho)$ – довільна функція, D_1 та D_2 – сталі. Середовище неоднорідне: $\rho_0 = \rho_0(r)$, причому виконується умова $\rho_0(r \rightarrow \infty) = \rho_\infty$. Отримати рівняння для фазових хвиль у такому середовищі. За яких умов воно буде еквівалентне до початкового рівняння?

2.3.4.2. Побудувати графік залежності $\text{Re } \eta(r, t)$ для випадку, коли в потенціальній ямі, що відповідає збуренню $\omega_0(r)$, існує кілька зв'язаних станів. Чим він відрізняється від випадку, коли в цій ямі існує лише один зв'язаний стан?

2.3.4.3*. Користуючись рівнянням Гінзбурга-Ландау, дослідити числовими методами поведінку

Частина II. РЕГУЛЯРНІ ДИСИПАТИВНІ СТРУКТУРИ

Аналіз дисипативних структур із застосуванням понять ентропії та методів статистичної фізики, який обговорювався в першій частині цього курсу, досить рідко застосовується на практиці при розв'язанні конкретних задач синергетики. Значно частіше застосовується підхід, описаний у п. 1.3.3 на прикладі брюсселятора – запис та розв'язання рівнянь руху, що описують розподілену нелінійну дисипативну систему. Рівняння руху, що їх отримують таким чином, звичайно мають вигляд так званих нелінійних кінетичних рівнянь із дифузією. При цьому той факт, що система є відкритою (нерівноважною), не акцентується, хоча за бажання в цьому можна перекоонатися. Саме такі методи будуть використані в другій частині даного курсу для дослідження регулярних дисипативних структур (про них див. вище п. В.2).

Нижче будуть послідовно розглянуті різні типи дисипативних структур. Ми почнемо з аналізу хвиль у слабконелінійних активних середовищах – квазігармонічних хвиль в активних лініях та фазових хвиль у середовищах автоколивного типу, збуджених заданим джерелом. Далі будуть розглянуті автохвилі в сильнонелінійних середовищах, також ініційовані зовнішнім збудженням – біжучі фронти та біжучі імпульси. Потім будуть розглянуті джерела спіральних та концентричних автохвиль. Нарешті, наприкінці розділу будуть проаналізовані механізми виникнення стаціонарних дисипативних структур.

Розділ 2.1. Квазігармонічні автохвилі в слабконелінійних активних середовищах, збуджуваних гармонічними джерелами

Як уже вказувалося у вступі, автохвилями називають хвилі, що поширюються в розподілених активних нелінійних дисипативних середовищах без зміни своєї форми¹, причому основні властивості цих хвиль (амплітуда, форма, швидкість, а для періодичних хвиль – частота або довжина хвилі) не залежать (чи слабо залежать) від початкових або граничних умов і визначаються властивостями середовища. Термін «автохвилі» (за аналогією з автоколиваннями, властивості яких також практично повністю визначаються властивостями автогенератора і майже не залежать від початкових умов) був запропонований Р.В.Хохловим².

Із сказаного зрозуміло, що тип автохвилі визначається властивостями середовища, в якому вона поширюється. Напевне, найпростішими є слабконелінійні середовища. До цього класу належать активні лінії (для достатньо високочастотних хвиль) та середовища автоколивного типу. Складнішими для аналізу є сильнонелінійні середовища, зокрема, бістабільні середовища та середовища з відновленням (збудливі середовища). Очевидно, ці моделі (як і будь-які моделі в принципі) не вичерпують всієї різноманітності реальних активних середовищ, тим більше що це питання не можна вважати до кінця вивченим. Разом із тим, розгляд основних моделей дає уявлення про найбільш поширені й досліджені типи автохвильових процесів.

У даному розділі йтиметься про найпростіші моделі слабконелінійних середовищ та основні типи автохвиль у них, а саме квазігармонічні хвилі в довгих лініях, ініційовані зовнішнім збудженням, і синфазні автоколивання та ініційовані зовнішнім збудженням фазові хвилі в середовищах автоколивного типу.

2.1.1. Квазігармонічні хвилі в слабконелінійних активних лініях

У цьому підрозділі ми спершу розглянемо основні типи нелінійних активних елементів, які визначають специфіку активних ліній. Потім будуть проаналізовані деякі приклади активних ліній. Нарешті, буде розібране поширення в такій лінії квазігармонічних хвиль.

¹ Йдеться про усталені хвилі в однорідних середовищах.

² Р.В.Хохлов (Рэм Викторович Хохлов, 1926 - 1977) – видатний російський фізик, академік АН СРСР, лауреат Ленінської премії (1970), у 1973-1977 рр. – ректор Московського державного університету. Один з творців нелінійної оптики. Зробив значний внесок також у розвиток теорії коливань, акустики, радіофізики, квантової електроніки.

Поширення квазігармонічних хвиль у слабконелінійній активній лінії є найпростішою ілюстрацією тези про формування дисипативних структур в результаті розвитку нестійкості. В даному разі йдеться про конвективну нестійкість, тобто підсилення сигналу в просторі³. На нелінійному етапі розвитку нестійкості амплітуда хвилі встановлюється на фіксованому рівні, який не залежить від граничних умов і визначається лише властивостями системи (як це має місце в квазігармонічному режимі автогенератора Ван-дер-Поля).

2.1.1. 1. Формальна класифікація активних елементів

Як уже вказувалося, той факт, лінія є активною, має своїм наслідком наявність від'ємних опорів або провідностей у її еквівалентній схемі. Резистивний елемент, вольт-амперна характеристика якого має ділянку, де $dv/di < 0$, належить звичайно до одного з типів, показаних на рис. 2.1.1.

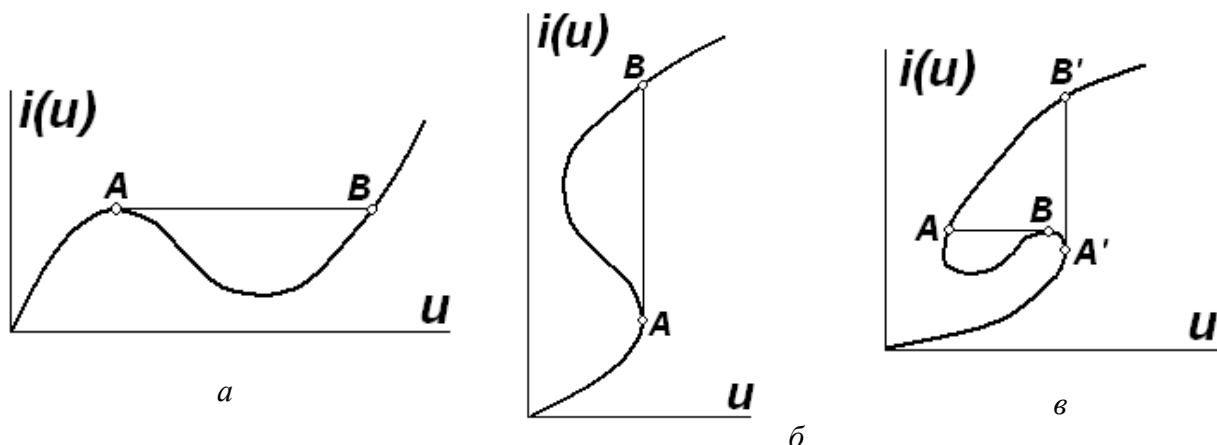


Рис. 2.1.1. Типові вольт-амперні характеристики (ВАХ): а – нелінійна провідність; б – нелінійний опір; в – елемент з ВАХ, яка є неоднозначною функцією як струму, так і напруги

Рис. 2.1.1 а демонструє так звану N -подібну вольт-амперну характеристику нелінійного елемента. Тут струм через нелінійний елемент є однозначною функцією прикладеної напруги. Такі елементи прийнято називати нелінійними провідностями. Для коректного опису нелінійних провідностей треба враховувати, що паралельно до них увімкнено деяку паразитну ємність. Ігнорування цієї обставини зробило б можливим миттєвий перехід з точки A в точку B (такий перехід супроводжується стрибкоподібною зміною напруги).

Прикладом нелінійної провідності може служити тунельний діод.

Рис. 2.1.1 б служить прикладом так званої S -подібної вольт-амперної характеристики. Тут напруга на нелінійному елементі є однозначною функцією струму, який через нього протікає. Такі елементи відомі в літературі як нелінійні опори. Для коректного опису нелінійного опору треба враховувати його паразитну індуктивність, увімкнену послідовно з опором. Врахування паразитної індуктивності унеможливорює миттєвий перехід з точки A в точку B , який має супроводжуватися стрибком струму.

Прикладом нелінійного опору може служити тиристор.

Нарешті, вольт-амперна характеристика, подана на рис. 2.1.1 в, не може бути описана ні як однозначна функція струму, ні як однозначна функція напруги. Для коректного опису поведінки такого елемента треба враховувати як паралельну ємність, так і послідовну індуктивність.

³ Детальніше про конвективну нестійкість див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009. С.339-342.

2.1.1.2. Приклади активних ліній

Прикладами активних нелінійних середовищ можуть служити лампи біжучої та зворотної хвилі, численні плазмово-пучкові пристрої, квантові парамагнітні підсилювачі НВЧ діапазону, оптичні квантові підсилювачі та генератори, передавальні лінії на основі напівпровідникових та надпровідних тунельних діодів або діодів Ганна та інші.

У багатьох випадках активні середовища (зокрема, передавальні лінії) зручно подати у вигляді деяких еквівалентних схем (такий підхід, що використовується для отримання телеграфних рівнянь, добре відомий для звичайної пасивної двопровідної лінії). Розглянемо два приклади такого роду – розподілений тунельний діод на основі контакту метал-напівпровідник та нервово волокно, вздовж якого може поширюватись імпульс збудження.

Смушковий тунельний діод Есакі⁴. Вигляд ділянки такої лінії поданий на рис. 2.1.2 а, еквівалентна схема – на рис. 2.1.2 б. У цій схемі р-п перехід моделюється паралельним сполученням погонної ємності C та негативної погонної провідності g . Об'ємний опір напівпровідника враховується резистором r . Нагадаємо, що тунельний діод має N -подібну вольт-амперну характеристику (див. рис. 2.1.1 а) зі спадною ділянкою, якій відповідає від'ємний диференціальний опір, тобто є прикладом нелінійної провідності. Якщо робоча точка вибрана на цій ділянці, то для невеликих відхилень від неї тунельний діод можна замінити елементом з негативною провідністю, як це показано на рис. 2.1.2 б.

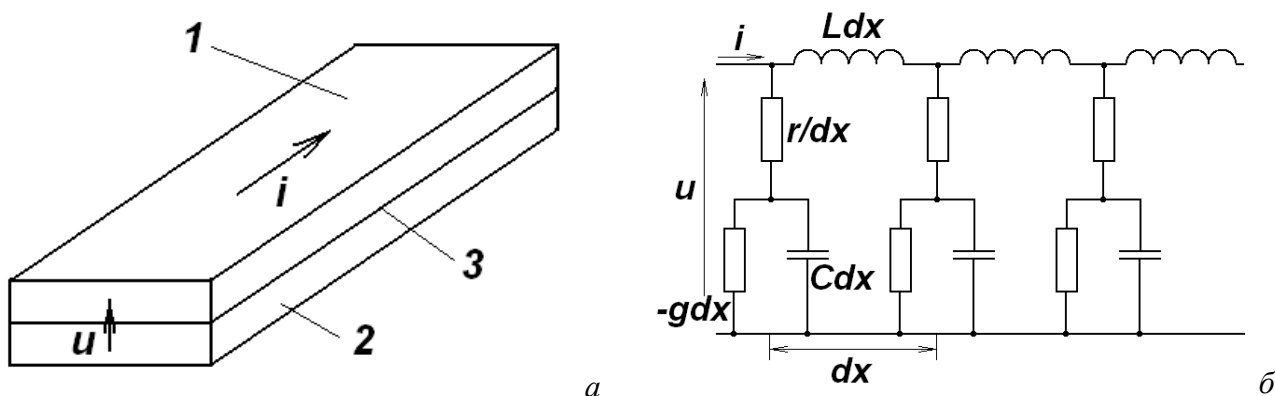


Рис.2.1.2. Смушковий тунельний діод Есакі: а – зовнішній вигляд (1 – металева підкладка, 2 – напівпровідник, 3 – тунельний перехід); б – еквівалентна схема.

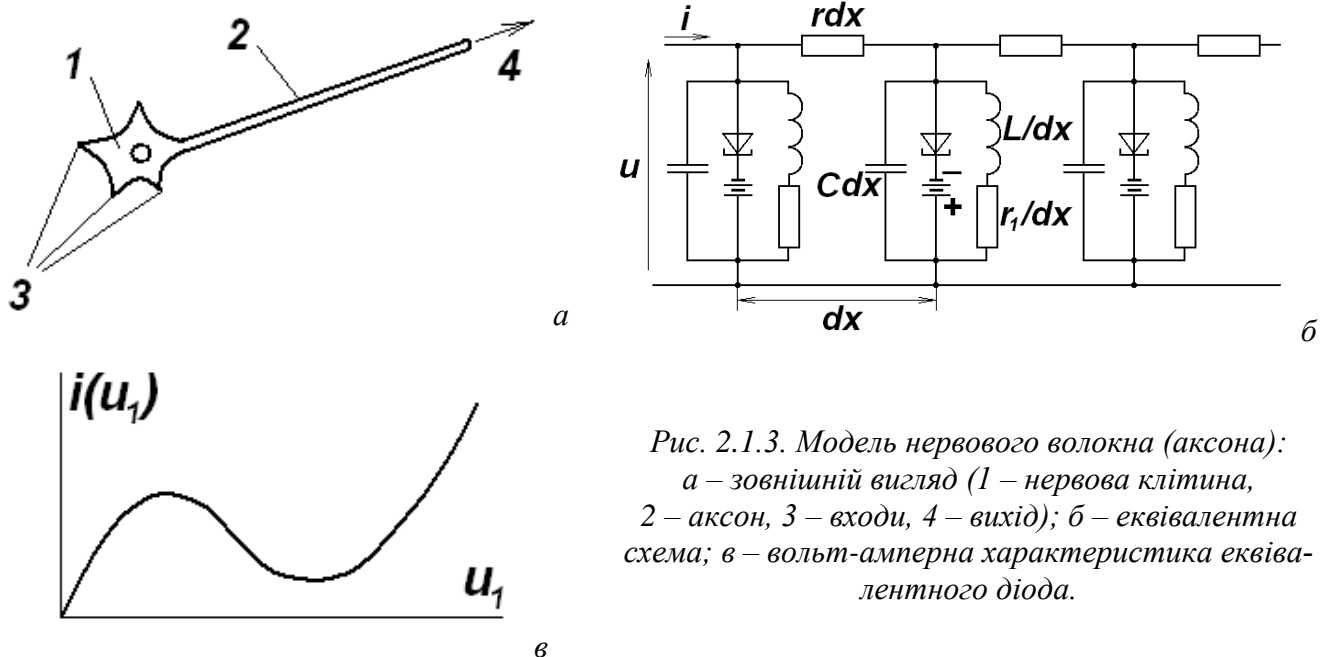
Поширення імпульсу збудження вздовж нервового волокна. Центральна нервова система складається з нервових клітин, або нейронів. Типовий нейрон складається з дендритів, які приймають імпульси від інших нейронів або чутливих клітин, тіла клітини, яке підтримує її життя, та аксона (відгалуження нервової клітини), який передає імпульси збудження іншим нейронам або клітинам м'язів (рис. 2.1.3 а). Аксон вкритий мембраною, чутливою до зміни прикладеної напруги. Вольт-амперна характеристика цієї мембрани нагадує ВАХ тунельного діода (рис. 2.1.3 в). Крім того, в струмі через мембрану можна виділити ємнісну та індуктивну складові. Нарешті, сама мембрана має деякий активний опір (рис. 2.1.3 б). Модель нервового волокна, яка вперше дозволила описати поширення в ньому нервових збуджень була запропонована в 1930-х – 1950-х рр. А. Ходжкіном⁵ та Е. Хакслі⁶. Цю модель можна розглядати як деякий частинний випадок середовища з відновленням (див. нижче п. 2.2.2). Але якщо в моделі середовища з відновленням еквівалентні тунельні діоди працюють, як ми пере-

⁴ Леона Есакі (Esaki Reona, нар. 1925) – японський фізик, Нобелівський лауреат (1973). Досліджував електронне тунелювання, винайшов тунельний діод.

⁵ А. Ходжкін (Sir Alan Lloyd Hodgkin, 1914 - 1998) – англійський нейрофізіолог та біофізик, член Королівського товариства, Нобелівський лауреат з фізіології та медицини (1963). В роки Другої світової війни займався розробкою радарів.

⁶ Е. Хакслі (Sir Andrew Fielding Huxley, 1917 - 2012) – англійський нейрофізіолог та біофізик, член Королівського товариства, Нобелівський лауреат з фізіології та медицини (1963).

конаємось, у ключовому режимі, то на даному етапі нас цікавитиме робота на ділянці вольт-амперної характеристики з від'ємним диференціальним опором.

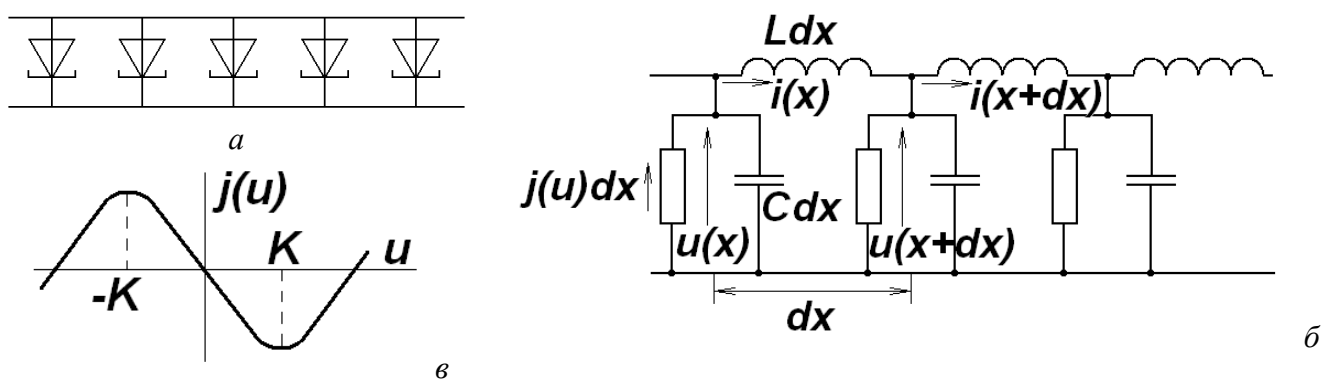


2.1.1.3. Опис еквівалентної схеми лінії та отримання хвильового рівняння

Розглянемо поширення хвиль, збуджуваних гармонічним джерелом, уздовж найпростішої слабконелінійної активної лінії, еквівалентна схема якої подана на рис. 2.1.4 а. Реально в ролі нелінійних елементів (точніше, нелінійних провідностей) виступають, наприклад, тунельні діоди, вольт-амперні характеристики яких мають вигляд, показаний на рис. 2.1.3 в. Вважаючи, що робоча точка вибрана на середині ділянки з від'ємною провідністю, і цікавлячись лише змінною складовою струму, апроксимуємо вольт-амперну характеристику нелінійної провідності кубічним поліномом:

$$j(u) = -Su + \frac{Su^3}{3K^2}, \quad (2.1.1)$$

де параметр K визначає півширину ділянки з від'ємною провідністю (рис. 2.1.4 в).



Аналог телеграфних рівнянь для лінії, еквівалентна схема якої подана на рис. 2.1.4 б, має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial i}{\partial x} = -j(u) - C \frac{\partial u}{\partial t}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \end{cases} \quad (2.1.2)$$

(позначення зрозумілі з рис. 2.1.4 б).

Виключаючи струм за допомогою першого з рівнянь (2.1.2) і враховуючи явний вигляд залежності $j(u)$ (2.1.1), можна отримати таке хвильове рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\alpha \left(1 - \frac{u^2}{K^2} \right) \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (2.1.3)$$

де використані позначення

$$c^2 = \frac{1}{LC}, \quad \alpha = LS. \quad (2.1.4)$$

2.1.1.4. Поширення гармонічних хвиль у слабконелінійній активній лінії

Вважатимемо, що лінія збуджується джерелом гармонічного сигналу з частотою ω . Параметр α вважатимемо малим. Тоді рівняння (2.1.3) мало відрізняється від найпростішого хвильового рівняння із законом дисперсії $\omega^2 = k^2 c^2$. Маючи на увазі граничну задачу, тобто вважаючи, що джерело сигналу знаходиться на кінці лінії, а еволюція сигналу відбувається в просторі (усталений режим), шукатимемо розв'язок (2.1.3) у формі

$$u(x, t) = A(x) \exp(i\omega t - ikx) + \text{к.с.}, \quad k \equiv \frac{\omega}{c}, \quad (2.1.5)$$

де $A(x)$ – повільна амплітуда, що задовольняє звичайним умовам

$$k^2 |A| \gg k \left| \frac{dA}{dx} \right| \gg \left| \frac{d^2 A}{dx^2} \right|. \quad (2.1.6)$$

Строго кажучи, кубічна нелінійність, що міститься в рівнянні (2.1.3), приведе до появи третьої та інших вищих гармонік частоти ω . Однак мализна параметра α забезпечує мализну нелінійного доданка, а, отже, й мализну амплітуд цих вищих гармонік порівняно з амплітудою основної гармоніки. Тому в першому наближенні ефектом ангармонізму можна знехтувати.

Підставляючи (2.1.5) до (2.1.3), неважко отримати вкорочене рівняння для повільної амплітуди у формі

$$\frac{dA}{dx} = \frac{\alpha c}{2} A \left(1 - \frac{AA^*}{K^2} \right). \quad (2.1.7)$$

Відзначимо, що рівняння (2.1.7) з точністю до позначень збігається з укороченим рівнянням, яке можна отримати для генератора Ван-дер-Поля в квазігармонічному режимі⁷.

Перейдемо від комплексної амплітуди A до дійсних амплітуди й фази: $A(x) = a(x) \exp[i\varphi(x)]$. Тоді замість (2.1.7) можна записати:

$$\varphi(x) = \varphi(x=0) \equiv \varphi_0; \quad \frac{da}{dx} = \frac{\alpha c}{2} a \left(1 - \frac{a^2}{K^2} \right). \quad (2.1.8)$$

Інтегруючи друге рівняння (2.1.8) із граничною умовою $a(0) = a_0$, неважко отримати:

$$a(x) = \frac{K}{\sqrt{1 + \left(\frac{K^2}{a_0^2} - 1 \right) \exp(-\alpha c x)}}. \quad (2.1.9)$$

⁷ Див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009. С.153

Сім'я залежностей $a(x)$ для різних значень параметра a_0 подана на рис. 2.1.5. Як бачимо, при $a_0 \ll K$ амплітуда хвилі на невеликих віддальх від джерела сигналу експоненціально зростає. На великих віддальх вона набуває значення $a(x) = K$ незалежно від значення параметра a_0 . Іншими словами, просторова залежність $a(x)$ цілком аналогічна часовій залежності амплітуди коливань у процесі їх встановлення в автогенераторі Ван-дер-Поля (в квазігармонічному режимі).

Таким чином, на великій віддалі від джерела сигналу в лінії встановлюється квазігармонічна біжуча хвиля, частота та початкова фаза якої задаються джерелом, а амплітуда визначається лише властивостями середовища. Така хвиля є стаціонарною: вона поширюється зі сталою швидкістю без зміни своєї форми.

Отримані результати справедливі за виконання умови (2.1.6), яка з урахуванням явно-го вигляду розв'язку (2.1.5), (2.1.9) набуває вигляду $\alpha c/2 \ll k$. Отже, квазігармонічні хвилі в лініях поширюватимуться лише на достатньо високих частотах:

$$\omega \gg \frac{\alpha c^2}{2}. \quad (2.1.10)$$

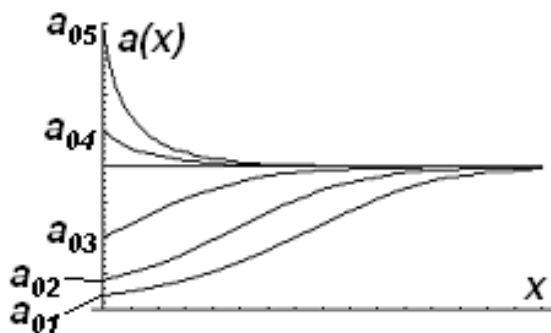


Рис. 2.1.5. Просторова залежність амплітуди квазігармонічної хвилі в слабконелінійній активній лінії для різних значень цієї амплітуди на початку системи.

2.1.1.5. Дослідження стійкості стаціонарної хвилі

Щоб дослідити стійкість стаціонарної хвилі, підставимо в рівняння (2.1.3) розв'язок у вигляді суми стаціонарної хвилі та малого збурення:

$$u(x, t) = u_{st}(x, t) + \tilde{u}(x, t), \quad |\tilde{u}| \ll |u_{st}|, \quad (2.1.11)$$

де, відповідно до (2.1.5), (2.1.8)-(2.1.9),

$$u_{st}(x, t) = 2K \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (2.1.9 \text{ а})$$

Тоді для малого збурення можна отримати лінеаризоване рівняння:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = -\alpha \left(1 - \frac{u_{st}^2}{K^2} \right) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{2}{K^2} u_{st} \frac{\partial u_{st}}{\partial t} \tilde{u}. \quad (2.1.12)$$

Будемо шукати розв'язок рівняння (2.1.12) у вигляді гармонічної хвилі, $\exp(i\Omega t - ikx)$, частота Ω та хвильове число k якої відмінні від ω та k , відповідно. Тоді доданки в правій частині матимуть часову та просторову періодичність збурення лише в тому випадку, якщо від доданків, що містять u_{st} , залишити тільки постійну складову. З урахуванням (2.1.9 а) замість (2.1.12) отримаємо:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}. \quad (2.1.12 \text{ а})$$

Підставимо до (2.1.12 а) залежність від координати в обраній раніше формі $\exp(-ikx)$. Тоді рівняння набуде вигляду

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{dt^2} + \alpha c^2 \frac{d\tilde{u}}{dt} + c^2 k^2 \tilde{u} = 0. \quad (2.1.13)$$

За критерієм Рауса – Гурвиця розв’язки цього рівняння не будуть зростати за умов $\kappa^2 > 0$, $\alpha > 0$, які в даному випадку вважаються виконаними.

Відзначимо, однак, що при дослідженні стійкості ми використовували стаціонарний розв’язок, який справедливий лише за умови (2.1.10).

2.1.1.6. Взаємодія зустрічних хвиль у слабконелінійній активній лінії

Як уже відзначалося, обмеження довжини активної лінії може привести до відбиття хвиль від її кінців. Саме така ситуація реалізується в розподіленому автогенераторі (див. нижче п. 2.3.1). Тому цікаво розглянути взаємодію прямої та зворотної хвилі в активній лінії. Зробимо це на прикладі лінії, описуваної рівнянням (2.1.3).

Будемо шукати розв’язок рівняння (2.1.3) у вигляді суперпозиції прямої та зворотної гармонічних хвиль, амплітуди яких повільно змінюються в просторі (тим самим ми обмежуємося лише випадком стаціонарного розподілу амплітуд хвиль у просторі):

$$u(x, t) = u_1(x) \exp(i\omega t - ikx) + u_2(x) \exp(i\omega t + ikx) + \text{к.с.}, \quad (2.1.14)$$

де, як і раніше, $k = \omega/c$.

Підставивши цей розв’язок до (2.1.3) і відкинувши треті гармоніки, можна отримати систему вкорочених рівнянь для повільних амплітуд $u_{1,2}$:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dx} = \frac{\alpha c}{2} u_1 \left(1 - \frac{u_1 u_1^* + 2u_2 u_2^*}{K^2} \right); \\ \frac{du_2}{dx} = -\frac{\alpha c}{2} u_2 \left(1 - \frac{u_2 u_2^* + 2u_1 u_1^*}{K^2} \right). \end{cases} \quad (2.1.15)$$

Помножимо перше з рівнянь на u_1^* , а потім додамо до отриманого таким чином рівняння комплексно спряжене до нього. Таку саму процедуру проробимо з другим рівнянням. Отримаємо систему:

$$\begin{cases} \frac{dm_1}{d\xi} = -m_1 (1 - m_1 - 2m_2); \\ \frac{dm_2}{d\xi} = m_2 (1 - m_2 - 2m_1). \end{cases} \quad (2.1.16)$$

Тут використано позначення

$$m_{1,2} = \left| \frac{u_{1,2}}{K} \right|^2, \quad \xi = \alpha c x. \quad (2.1.17)$$

Просторово однорідні розв’язки системи (2.1.16) мають вигляд:

$$\begin{cases} m_{10} = m_{20} = 0; \\ m_{10} = m_{20} = 1/3, \end{cases} \quad (2.1.18)$$

причому перший з них, очевидно, є нестійким.

Покладемо в першому з рівнянь (2.1.16) $m_1 = 0$, а в другому – $m_2 = 0$. Тоді кожне з рівнянь описує хвилю, подібну до розглянутої в п. 2.1.1.4, що зростає в напрямку свого поширення (хвиля 1 рухається у від’ємному напрямку осі x , тому в правій частині першого рівняння стоїть мінус). В загальному випадку система (2.1.16) нагадує відомі в теорії коливаний рівняння для конкуренції мод у двочастотному автогенераторі⁸. Для неї можна побудувати аналог фазового портрету в координатах (m_1, m_2) . Він наведений на рис. 2.1.6. Роль часу в рівняннях (2.1.17) відіграє координата ξ , тому рух уздовж фазових траєкторій у напрямку, вказаному стрілками, відповідає зростанню ξ , а в протилежному напрямку – зменшенню ξ .

⁸ Див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009. С.237.

Як видно з рис. 2.1.6, при невеликих початкових значеннях m_1 та m_2 спостерігається періодична зміна амплітуд зустрічних хвиль у просторі. Зокрема, при $m_1 = m_2 = 1/3$ обидві хвилі мають амплітуди, незалежні від координати. Навпаки, при великих початкових значеннях m_1 та m_2 півпростір $x < 0$ займає пряма хвиля (з амплітудою u_1), а півпростір $x > 0$ – зворотна (з амплітудою u_2).

* * *

За порушення умови (2.1.10) втрачає чинність припущення про поширення в лінії хвилі з малим згасанням, яке компенсується малою енергією, що надходить від активних елементів. Припущення про квазігармонічність хвиль також стає несправедливим. В результаті діапазон можливої поведінки хвиль у такій лінії значно розширюється. Зростає, відповідно, й складність аналізу процесів у таких лініях.

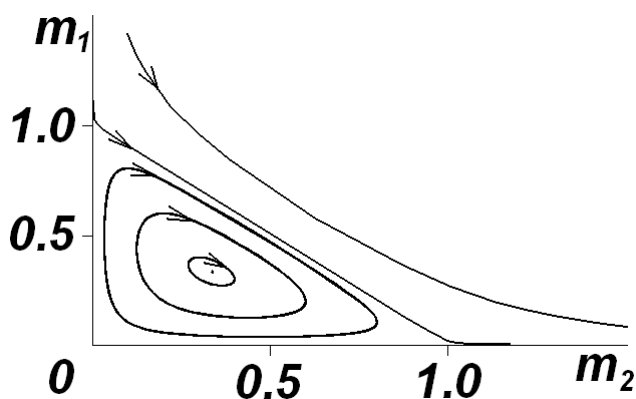


Рис. 2.1.6. Аналог фазового портрету взаємодії зустрічних хвиль в активній лінії.

На сьогодні розроблений аналіз лише деякого частинного випадку поведінки активних ліній (або активних середовищ), а саме стаціонарних хвиль у таких лініях, які поширюються без зміни своєї форми. Про хвилі такого типу йтиметься в наступному розділі 2.2.

Контрольні питання до підрозділу 2.1.1

1. Користуючись системою електромеханічних аналогій, запропонуйте механічні аналоги нелінійного опору та нелінійної провідності.
2. Чим, на Вашу думку, відрізняються активні лінії на базі активних провідностей та активних опорів?
3. Поясніть якісно, чому на високих частотах нелінійність активних ліній можна вважати слабкою.
4. Намалюйте миттєвий розподіл напруги вздовж активної лінії, в якій збуджені дві зустрічні хвилі, для різних початкових співвідношень між їхніми інтенсивностями. Як вони змінюватимуться з часом?

Задачі до підрозділу 2.1.1

2.1.1.1. Побудуйте розв'язок хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\alpha \left(1 - \frac{u^2}{K^2} \right) \frac{\partial u}{\partial t}$$

для задачі з початковими умовами (початкове збурення вважати гармонічним).

2.1.1.2*. Запропонуйте модель активної лінії з нелінійними опорами. Отримайте для неї хвильове рівняння. Побудуйте розв'язок цього рівняння для початкової та граничної задач, користуючись методом повільних амплітуд.

2.1.2. Фазові хвилі в автоколиливних середовищах

Ознайомимося тепер зі ще одним типом (точніше, моделлю) слабконелінійних активних середовищ – середовищами автоколивного типу.

Автоколивні середовища можна уявити собі як мережу зв'язаних між собою автогенераторів. Основна відмінність автоколивних середовищ від раніше розглянутих активних ліній – це наявність власної частоти, на якій (за відсутності зовнішнього впливу) відбуваються автоколивання. Прикладами таких середовищ можуть бути тонкі шари розчинів, у яких протікають реакції Білоусова - Жаботинського (див. п. 1.3.4), або серцевий м'яз, що зазнає регулярних скорочень.

Для кожного "елементарного генератора" стаціонарний стан (стан відсутності коливань) є нестійким. Від рівня флуктуацій або початкового збурення в ньому зростають квазігармонічні коливання на власній частоті. В усталеному режимі амплітуда цих коливань встановлюється на фіксованому рівні, який не залежить від початкових умов і визначається лише властивостями системи (як це має місце в квазігармонічному режимі автогенератора Ван-дер-Поля). Надалі ми будемо розглядати саме усталений режим "елементарних генераторів".

Якщо всі "елементарні генератори" коливаються з однаковою фазою, в автоколивному середовищі спостерігаються синфазні коливання в усьому просторі. Якщо фаза коливань змінюється в просторі, утворюються так звані фазові хвилі. Вони нагадують біжучий рядок світлової реклами, коли зміна кольору нерухомих локальних елементів рекламного щита створює ілюзію руху зображення як цілого.

Автоколивні середовища зовні дещо нагадують активні лінії, розглянуті в п. 2.1.1. В обох цих системах, наприклад, у певному діапазоні частот можуть існувати стаціонарні квазігармонічні хвилі, збуджувані деяким зовнішнім джерелом. Але за відсутності такого збудження в автоколивних середовищах відбуваються синфазні автоколивання, чого не буде в активних лініях. З іншого боку, для автоколивних середовищ можливий як м'який, так і жорсткий режим самозбудження (в останньому випадку стаціонарний однорідний стан залишається стійким щодо малих відхилень).

Як і у випадку активних ліній, ми обмежимося розглядом автохвильових середовищ зі слабкою нелінійністю, коли форму коливань можна вважати квазігармонічною.

Піонерські дослідження середовищ автоколивного типу були виконані в 1970-х – 1980-х роках Й. Курамото⁹.

2.1.2.1. Отримання модельного рівняння

Користуючись згаданою вище моделлю автоколивного середовища як мережі зв'язаних автогенераторів, спробуємо отримати модельне рівняння, що описує хвилі в такому середовищі.

Розглянемо спочатку окремий автогенератор. Будемо описувати його симетризованою системою двох рівнянь першого порядку (див. п. 1.1.5.2, рівняння (1.1.31)):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}(-\alpha + \gamma E)x - y = 0; \\ \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}(-\alpha + \gamma E)y + \omega_0^2 x = 0, \end{cases}$$

де, як і раніше, $E = (\omega_0^2 x^2 + y^2)/2$. Нагадаємо, що при малих α та γ ця система зводиться до узагальненого рівняння Релея – Ван-дер-Поля (1.1.32):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - (\alpha - \gamma E) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Введемо комплексну змінну $\eta = \omega_0 x - iy$. Тоді, помноживши перше з рівнянь на ω_0 , друге – на i та додавши їх, легко отримати рівняння для η :

$$\frac{d\eta}{dt} + \frac{1}{2}(-\alpha + \gamma E)\eta - i\omega_0 \eta = 0. \quad (2.1.19)$$

⁹ Й. Курамото (Kuramoto Yoshiki, нар. 1940) – японський фізик, професор університету Кіото, фахівець у галузі нелінійної динаміки.

де тепер можна вважати, що $E = |\eta|^2 / 2$.

Тепер розглянемо одновимірний ланцюжок зв'язаних автогенераторів, описуваних рівняннями типу (2.1.19). Природно припустити, що на автогенератор з номером n впливають лише його найближчі сусіди, причому однаковим чином. З урахуванням цієї обставини рівняння (2.1.19) можна переписати у формі

$$\frac{d\eta_n}{dt} + \frac{1}{2} \left(-\alpha + \gamma \frac{|\eta_n|^2}{2} \right) \eta_n - i\omega_0 \eta_n = \beta (\eta_{n-1} + \eta_{n+1}). \quad (2.1.19 \text{ а})$$

Нехай відстань між сусідніми автогенераторами дорівнює a . Перейдемо до моделі неперервного середовища, в якому $\eta = \eta(z, t)$, де z – координата. Тоді, розклавши залежність $\eta(z \pm a, t)$ в ряд Тейлора за малим параметром a , отримаємо:

$$\eta_{n\pm 1} \equiv \eta(z \pm a, t) \approx \eta(z, t) \pm \frac{\partial \eta}{\partial z} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} a^2. \quad (2.1.20)$$

З урахуванням (2.1.20) перепишемо (2.1.19 а) у формі

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left[\frac{1}{2} \left(\tilde{\alpha} - \gamma \frac{|\eta|^2}{2} \right) + i\omega_0 \right] \eta + D \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}, \quad (2.1.21)$$

де використані позначення

$$\tilde{\alpha} = \alpha + 4\beta, \quad D = \beta a^2. \quad (2.1.22)$$

Рівняння (2.1.21) має форму нелінійного кінетичного рівняння з дифузиею (див. нижче п. 2.2.1.4). Оскільки функція $\eta = \eta(z, t)$ є комплексною, рівняння (2.1.21) еквівалентне до системи двох дійсних рівнянь такого самого типу.

2.1.2.2. λ - ω модель автоколивного середовища

Розглянемо середовище, яке описується змінними $u = u(\vec{r}, t)$, $v = v(\vec{r}, t)$. Введемо замість них одну комплексну змінну $\eta = u + iv$. Нехай вона задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = [\lambda(\rho) + i\omega(\rho)]\eta + (D_1 - iD_2)\Delta\eta, \quad \rho = |\eta|. \quad (2.1.23)$$

Функція $\lambda(\rho)$ повинна бути монотонно спадною і проходити через нуль при деякому значенні аргументу $\rho = \rho_0$ (рис. 2.1.7). Функцію $\omega(\rho)$ вважатимемо додатною.

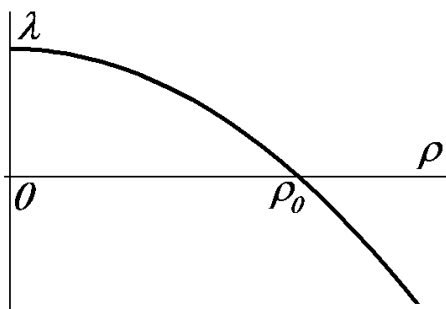


Рис. 2.1.7. Вигляд функції $\lambda(\rho)$.

Рівняння (2.1.23), яке можна розглядати як безпосереднє узагальнення отриманого вище рівняння (2.1.21), відповідає λ - ω моделі, що описує широкий клас автоколивних середовищ.

Частинним випадком λ - ω моделі є також відоме в літературі узагальнене рівняння Гінзбурга – Ландау (це рівняння для хвильової функції, запропоноване в 1950 році

В.Л. Гінзбург¹⁰ та Л.Д. Ландау¹¹, описує поведінку надпровідника в магнітному полі в області температур поблизу точки переходу в надпровідний стан):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = (\alpha_1 + i\alpha_2)\eta - (\beta_1 + i\beta_2)|\eta|^2\eta + (D_1 - iD_2)\Delta\eta. \quad (2.1.24)$$

Воно зводиться до рівняння λ - ω моделі, якщо покласти $\lambda(\rho) = \alpha_1 - \beta_1\rho^2$, $\omega(\rho) = \alpha_2 - \beta_2\rho^2$.

Щоб з'ясувати властивості середовища, описуваного рівнянням (2.1.23), перейдемо від комплексної змінної η до дійсних змінних ρ та φ , які вводяться із співвідношення $\eta = \rho \exp(i\varphi)$.

Врахуємо, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [\rho \exp(i\varphi)] &= \frac{\partial \rho}{\partial x} \exp(i\varphi) + i \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rho \exp(i\varphi), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\rho \exp(i\varphi)] &= \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \exp(i\varphi) + 2i \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \exp(i\varphi) - \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \exp(i\varphi) + i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \rho \exp(i\varphi), \end{aligned}$$

і, отже,

$$\Delta [\rho \exp(i\varphi)] = [(\Delta \rho) + 2i(\nabla \rho \cdot \nabla \varphi) - \rho(\nabla \varphi)^2 + i\rho(\Delta \varphi)] \exp(i\varphi). \quad (2.1.25)$$

Підставимо співвідношення $\eta = \rho \exp(i\varphi)$ з урахуванням (2.1.25) до (2.1.23), скороти-мо на $\exp(i\varphi)$ і окремо прирівняємо до нуля дійсну та уявну частини отриманого виразу. Таким чином початкове комплексне рівняння (2.1.23) зводиться до системи двох дійсних рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \lambda(\rho)\rho + D_1 [\Delta \rho - \rho(\nabla \varphi)^2] + D_2 [2(\nabla \rho \cdot \nabla \varphi) + \rho \Delta \varphi]; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega(\rho) + D_1 \left[\frac{2}{\rho} (\nabla \rho \cdot \nabla \varphi) + \Delta \varphi \right] + D_2 \left[-\frac{\Delta \rho}{\rho} + (\nabla \varphi)^2 \right]. \end{cases} \quad (2.1.26)$$

2.1.2.3. Однорідний розв'язок рівняння λ - ω моделі та його стійкість

Знайдемо однорідний стаціонарний розв'язок першого з рівнянь (2.1.26). За умов $\partial \rho / \partial t = 0$, $\partial \rho / \partial x_i = 0$, $\partial \varphi / \partial x_i = 0$ воно зводиться до вигляду $\rho \lambda(\rho) = 0$, звідки $\rho_1 = 0$ або $\rho_2 = \rho_0$.

Для з'ясування стійкості отриманих коренів підставимо до першого з рівнянь (2.1.26) розв'язок у формі $\rho(\vec{r}, t) = \rho_{1,2} + \delta \rho \exp[\alpha_{1,2} t - i(\vec{k} \vec{r})]$, вважаючи другий доданок малим. Після лінеаризації з урахуванням умови $\partial \varphi / \partial x_i = 0$ можна отримати відповідно

$$\alpha_1 = \lambda(0) - k^2 D_1 \quad (2.1.27)$$

та

$$\alpha_2 = \rho_0 \left. \frac{d\lambda}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} - k^2 D_1 \quad (2.1.28)$$

¹⁰ В.Л. Гінзбург (Віталій Лазаревич Гінзбург, 1916 - 2009) – видатний російський фізик, академік АН СРСР та РАН, Нобелівський лауреат (2003). Основні роботи присвячені радіофізиці, фізиці плазми, астрофізиці.

¹¹ Л.Д. Ландау (Лев Давидович Ландау, 1908 - 1968) – геніальний російський фізик-теоретик, академік АН СРСР, лауреат Сталінської (1946, 1949, 1953), Ленінської (1962) та Нобелівської (1962) премій. Створив наукову школу світового рівня. Автор фундаментального курсу теоретичної фізики (разом з Є.М.Ліфшицем). Власні роботи характеризуються надзвичайно широкою тематикою. Зробив видатний внесок у квантову механіку (теорія надплинності), магнетизм, фізику плазми, теорію фазових переходів та ряд інших областей.

(враховано, що $\lambda(\rho_0)=0$). Оскільки $\lambda(0)>0$, перший корінь буде нестійким ($\alpha_1 > 0$), принаймні при невеликих k . Функція $\lambda(\rho)$ є монотонно спадною, тобто $d\lambda(\rho)/d\rho < 0$, отже, другий корінь завжди буде стійким ($\alpha_2 < 0$). Система релаксуватиме до стану $\rho = \rho_0$ за час

$$\tau_\rho = - \left[\rho_0 \frac{d\lambda}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_0} \right]^{-1} \quad (2.1.29)$$

(при $k=0$).

Підставимо тепер корінь $\rho = \rho_0$ до другого рівняння системи (2.1.22). Оскільки $\omega(\rho_0) \neq 0$, то це рівняння взагалі не має однорідного стаціонарного розв'язку. За умови $\partial\varphi/\partial x_i = 0$ воно набуває вигляду $\partial\varphi/\partial t = \omega(\rho_0) \equiv \omega_0$, звідки $\varphi(t) = \omega_0 t + \psi$. Відповідно комплексна змінна η набуває вигляду $\eta = \rho_0 \exp[i(\omega_0 t + \psi)]$.

Очевидно, цей розв'язок описує синфазні автоколивання аналізованого середовища.

Відзначимо, що використана при побудові цього розв'язку умова однорідності еквівалентна відсутності зв'язку між сусідніми елементами середовища ($D_1 = D_2 = 0$). Отже, окремі елементи середовища являють собою автогенератори. Залежність $\omega(\rho)$ виражає закон неізохронності таких автогенераторів.

2.1.2.4. Рівняння для фазових хвиль

Будемо тепер шукати розв'язок рівняння (2.1.23) у формі

$$\eta(\vec{r}, t) = [\rho_0 + \delta\rho(\vec{r}, t)] \exp\{i[\omega_0 t + \psi(\vec{r}, t)]\}, \quad (2.1.30)$$

тобто вважати, що $\rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \delta\rho(\vec{r}, t)$, $\varphi(\vec{r}, t) = \omega_0 t + \psi(\vec{r}, t)$. Тоді система (2.1.26) набуде вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} = \lambda(\rho_0 + \delta\rho)(\rho_0 + \delta\rho) + D_1 [\Delta\delta\rho - (\rho_0 + \delta\rho)(\nabla\psi)^2] + D_2 [2(\nabla\delta\rho \cdot \nabla\psi) + (\rho_0 + \delta\rho)\Delta\psi]; \\ \frac{\partial\psi}{\partial t} = [\omega(\rho_0 + \delta\rho) - \omega_0] + D_1 \left[\frac{2}{\rho_0 + \delta\rho} (\nabla\delta\rho \cdot \nabla\psi) + \Delta\psi \right] + D_2 \left[\frac{\Delta\delta\rho}{\rho_0 + \delta\rho} + (\nabla\psi)^2 \right]. \end{cases} \quad (2.1.31)$$

Вважаючи, що $|\delta\rho| \ll \rho_0$, знехтуємо $\delta\rho$ всюди в першому з рівнянь системи (2.1.31), крім першого доданку в правій частині. Тут функцію $\lambda(\rho_0 + \delta\rho)$ розкладемо в ряд Тейлора і скористаємося позначенням (2.1.29). Отримаємо:

$$-\frac{\delta\rho}{\tau_\rho} - D_1 \rho_0 (\nabla\psi)^2 + D_2 \rho_0 \Delta\psi = 0 \quad (2.1.32)$$

(отримане рівняння справедливе, якщо формально вважати величину τ_ρ малою того ж порядку, що й $\delta\rho$, тобто припустити, що час релаксації амплітуди коливань є малим). Тоді з (2.1.32) можна записати $\delta\rho$ як функцію ψ :

$$\delta\rho = \rho_0 \tau_\rho [-D_1 (\nabla\psi)^2 + D_2 \Delta\psi]. \quad (2.1.32 \text{ а})$$

У другому рівнянні системи (2.1.31) в першому доданку у правій частині розкладемо $\omega(\rho_0 + \delta\rho)$ в ряд Тейлора, а всіма іншими доданками, пропорційними $\delta\rho$, знехтуємо. Отримаємо:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{d\omega}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_0} \delta\rho + D_1 \Delta\psi + D_2 (\nabla\psi)^2 \quad (2.1.33)$$

(виконані дії є законними, якщо вважати величину $d\omega/d\rho$ великим параметром; це означає, що автогенератори, які є елементарними комірками досліджуваного активного середовища, характеризуються сильною неізохронністю). Нарешті, підставимо вираз (2.1.32 а) для $\delta\rho$ до (2.1.33) і остаточно отримаємо:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = a(\nabla\psi)^2 + b\Delta\psi, \quad (2.1.34)$$

де введено позначення

$$a = D_2 + D_1 \left. \frac{d\omega/d\rho}{d\lambda/d\rho} \right|_{\rho=\rho_0}, \quad b = D_1 - D_2 \left. \frac{d\omega/d\rho}{d\lambda/d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} \quad (2.1.35)$$

(в силу зроблених вище припущень і чисельник, і знаменник других доданків у правих частинах формул (2.1.35) є великими параметрами, так що в результаті ці доданки сумірні з першими доданками).

Можна показати, що для рівняння Гінзбурга – Ландау (2.1.24) коефіцієнти a та b мають вигляд $a = D_2 + \beta_2 D_1 / \beta_1$, $b = -\beta_2 D_2 / \beta_1 + D_1$.

Рівняння (2.1.34) відоме як рівняння для фазових хвиль в автоколивному середовищі. Воно в деяких випадках є навіть більш загальним у порівнянні з початковим рівнянням (2.1.23).

Користуючись (2.1.34), оцінимо час релаксації фази ψ . Припустимо, що $|\nabla\psi| \sim |\psi|/L$, $\Delta\psi \sim \psi/L^2$, де L – характерний розмір, на якому фаза ψ помітно змінюється. Припустимо також, що $|\psi| \ll 1$. Тоді (2.1.34) можна переписати у формі

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} \approx a \frac{\psi^2}{L^2} + b \frac{\psi}{L^2} \approx b \frac{\psi}{L^2} \quad (2.1.34 \text{ а})$$

(ми відкинули доданок другого порядку мализни за ψ). Тоді час релаксації фази можна оцінити як

$$\tau_\psi = \frac{L^2}{b}. \quad (2.1.36)$$

Рівняння (2.1.34) отримане за умови, що час релаксації амплітуди τ_ρ є малим. Фактично це означає, що $\tau_\rho \ll \tau_\psi$, або

$$L \gg \sqrt{b\tau_\rho} \quad (2.1.37)$$

(у правій частині нерівності стоїть довжина дифузії фази ψ за час τ_ρ для лінеаризованого рівняння (2.1.34)).

Таким чином, у рамках λ – ω моделі рівнянням (2.1.34) можна користуватися лише для опису достатньо довгих хвиль.

2.1.2.5. Синфазні автоколивання

Перейдемо тепер до аналізу ефектів, описуваних рівнянням для фазових хвиль (2.1.34). Перейдемо від фази ψ до нової функції Q , пов'язаної з фазою співвідношенням

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{b}{a} \ln Q(\vec{r}, t). \quad (2.1.38)$$

Маємо:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{b}{a} \frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial t}, \quad (2.1.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln Q \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = -\frac{1}{Q^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2},$$

тому

$$\nabla \psi = \frac{b}{a} \frac{1}{Q} \nabla Q, \quad \Delta \psi = \frac{b}{a} \left[-\frac{1}{Q^2} (\nabla Q)^2 + \frac{1}{Q} \Delta Q \right]. \quad (2.1.40)$$

Підставивши (2.1.39) та (2.1.40) до (2.1.34), можна отримати:

$$\frac{b}{a} \frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial t} = a \left(\frac{b}{a} \frac{1}{Q} \nabla Q \right)^2 + \frac{b^2}{a} \left[-\frac{1}{Q^2} (\nabla Q)^2 + \frac{1}{Q} \Delta Q \right], \quad (2.1.41)$$

і остаточно

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = b \Delta Q. \quad (2.1.41 \text{ а})$$

При $b > 0$ (2.1.41 а) являє собою звичайне рівняння дифузії. Будь-яка локальна неоднорідність з масштабом L розсмоктується і зникає за час порядку L^2/b . В середовищі встановлюється режим $Q = const$, або $\psi = const$, якому відповідають синфазні автоколивання (див. вище п. 2.1.2.3).

2.1.2.6. Біжучі фазові хвилі

Розглянемо тепер функцію

$$\psi(\vec{r}, t) = -(\vec{k} \cdot \vec{r}) + ak^2 t. \quad (2.1.42)$$

Безпосередня підстановка показує, що вона задовольняє рівняння (2.1.34). Тоді комплексна функція η матиме вигляд:

$$\eta(\vec{r}, t) = \rho_0 \exp(i\omega_0 t - i\vec{k}\vec{r} + iak^2 t) = \rho_0 \exp\left\{i\left[(\omega_0 + ak^2)t - \vec{k}\vec{r}\right]\right\}, \quad (2.1.43)$$

тобто в автоколивному середовищі поширюється фазова хвиля, що характеризується законом дисперсії

$$\omega(k) = \omega_0 + ak^2 \quad (2.1.44)$$

та фазовою швидкістю $v_{ph} \equiv \omega/k = \omega_0/k + ak$. Таким чином, частота фазової хвилі завжди вища від частоти синфазних автоколивань у тому самому середовищі.

Розв'язок (2.1.42) стійкий, якщо $b > 0$.

2.1.2.7. Взаємодія двох біжучих фазових хвиль

Проаналізуємо взаємодію двох фазових хвиль у найпростішій одновимірній моделі. Будемо вважати, що обидві хвилі поширюються в зустрічних напрямках уздовж осі x , причому $\psi(x, t) \rightarrow ak_1^2 t - k_1 x$ при $x \rightarrow -\infty$ і $\psi(x, t) \rightarrow ak_2^2 t + k_2 x$ при $x \rightarrow +\infty$.

Знову скористаємося змінною Q , введеною співвідношенням (2.1.38). Рівнянню (2.1.41 а) для цієї змінної для таких граничних умов відповідає розв'язок у вигляді:

$$Q(x, t) = A_1 \exp\left[-\frac{a}{b} k_1 x + \frac{a^2}{b} k_1^2 t\right] + A_2 \exp\left[\frac{a}{b} k_2 x + \frac{a^2}{b} k_2^2 t\right]. \quad (2.1.45)$$

Покажемо, що він справді задовольняє записаним вище граничним умовам. Справді, якщо показник першої експоненти в (2.1.45) значно більший від показника другої експоненти, тобто

$$-\frac{a}{b} k_1 x + \frac{a^2}{b} k_1^2 t \gg \frac{a}{b} k_2 x + \frac{a^2}{b} k_2^2 t, \quad (2.1.46)$$

то другою експонентою взагалі можна знехтувати, і для фази ψ можна записати вираз

$$\psi(x, t) \approx -k_1 x + ak_1^2 t, \quad (2.1.47)$$

що буде справедливим в області

$$x \ll at(k_1 - k_2). \quad (2.1.46 \text{ а})$$

Отже, в цій області (ліва піввісь x) існує фазова хвиля з хвильовим числом k_1 і частотою $\omega(k_1)$, яка біжить праворуч. В протилежному випадку, тобто при $x \gg at(k_1 - k_2)$,

$$(2.1.48)$$

можна записати, що

$$\psi(x, t) \approx k_2 x + a k_2^2 t. \quad (2.1.49)$$

Таким чином, в області, що задовольняє умові (2.1.48), тобто на правій півосі x , існує фазова хвиля з хвильовим числом k_2 і частотою $\omega(k_2)$, яка біжить ліворуч.

За межу між областями, зайнятими різними хвилями, природно прийняти точку $x = at(k_1 - k_2)$. Ширина перехідної області може бути визначена з умови, щоб у цій області зміна різниці показників експонент в (2.1.45) при фіксованому t склала величину порядку одиниці:

$$\delta x \sim \frac{b}{a(k_1 + k_2)}. \quad (2.1.50)$$

Межа між областями, зайнятими різними хвилями, рухається зі швидкістю

$$V = \frac{dx}{dt} = a(k_1 - k_2) \quad (2.1.51)$$

праворуч, якщо $k_1 > k_2$, чи ліворуч, якщо $k_1 < k_2$. Іншими словами, коротші фазові хвилі поступово витісняють довші хвилі.

Цей результат неодноразово спостерігався в числових та натурних експериментах.

2.1.2.8. Умови реалізації різних типів розв'язків

Очевидно, за відсутності зовнішнього впливу в автоколивних середовищах реалізується режим синфазних автоколивань.

Якщо ж в автоколивному середовищі є джерело гармонічних коливань з частотою, вищою від частоти синфазних автоколивань ω_0 , від нього побіжить фазова хвиля з хвильовим числом, яке визначається законом дисперсії (2.1.44). Як впливає з результатів п. 2.1.2.7, ця хвиля буде поступово витісняти синфазні автоколивання, які мають нижчу частоту.

Фактично в ролі джерел фазових хвиль виступають специфічні утворення в самих автоколивних середовищах – ревербератори та пейсмейкери (див. нижче пп.2.3.3-2.3.4).

Контрольні питання до підрозділу 2.1.2

1. Коли синхронні коливання у середовищах, описуваних λ - ω моделлю, є стійкими щодо збурень?
2. Який фізичний зміст функцій $\lambda(\rho)$ та $\omega(\rho)$ в рівнянні для λ - ω моделі?
3. Які припущення використовуються при виведенні рівняння для фазових хвиль?
4. Чи можна описувати короткі хвилі в автоколивному середовищі за допомогою рівняння для фазових хвиль?
5. Дайте фізичну інтерпретацію фазовим хвилям.
6. Чи існують фізичні обмеження на швидкість фазових хвиль?
7. Проаналізуйте застосовність понять фазової та групової швидкості до фазових хвиль.

Задачі до підрозділу 2.1.2

2.1.2.1. Узагальнене рівняння Гінзбурга – Ландау має вигляд:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = (\alpha_1 + i\alpha_2)\eta - (\beta_1 + i\beta_2)|\eta|^2\eta + (D_1 - iD_2)\Delta\eta$$

(функція η комплексна, всі параметри дійсні). Знайти рівноважні значення амплітуди та частоти локальних автоколивань і характерний час релаксації амплітуди. Побудувати графік неізохронності локальних автоколивань.

2.1.2.2. Знайти нелінійне дисперсійне рівняння для гармонічних фазових хвиль безпосередньо з нелінійного кінетичного рівняння з дифузією для λ - ω моделі. При якій мінімальній довжині ці хвилі ще можуть існувати?

2.1.2.3. Дослідити, за яких умов розв'язок рівняння для фазових хвиль у формі

$$\psi(\vec{r}, t) = -(\vec{k} \cdot \vec{r}) + ak^2t$$

є стійким.

2.1.2.4. Користуючись рівнянням для фазових хвиль у двовимірному автоколивному середовищі, дослідити взаємодію двох зустрічних фазових хвиль, хвильові вектори яких не є паралельними. Якими будуть величина та напрямок швидкості руху межі між областями, зайнятими кожною з хвиль?

2.1.2.5*. Користуючись рівнянням Гінзбурга – Ландау, дослідити числовими методами плоскі фазові хвилі малої довжини (в області, де рівняння для фазових хвиль стає незастосовним).

Висновки до розділу 2.1

1. Найпростішою моделлю активного середовища є слабконелінійна активна лінія. Ця модель описує поширення квазігармонічних хвиль у діоді Есакі (розподілений тунельний діод) та інших подібних системах за наявності джерела збудження на кінці лінії. На великих відстанях від джерела амплітуда хвилі набуває сталого значення, яке визначається властивостями лінії і не залежить від амплітуди сигналу на виході генератора.
2. Взаємодія двох зустрічних хвиль з однаковими частотами в такій лінії при малих амплітудах приводить до періодичних у просторі пульсацій амплітуд кожною з хвиль. При великих амплітудах кожна із хвиль існує лише в області, що межує з відповідним джерелом сигналу.
3. Модель слабконелінійного автохвильового середовища відрізняється від моделі слабконелінійної активної лінії тим, що кожен елемент середовища характеризується частотою та амплітудою автоколивань. Таке середовище можна уявити собі як мережу зв'язаних автогенераторів. Власні коливання такого середовища являють собою синфазні квазігармонічні автоколивання в усьому просторі. Прикладом автохвильового середовища може служити розчин, у якому протікає хімічна реакція коливного типу (реакція Белоусова - Жаботинського).
4. В автоколивному середовищі зовнішнє джерело з частотою, що перевищує частоту автоколивань, породжує фазові хвилі. Ці хвилі не супроводжуються перенесенням енергії в просторі, а зумовлені лише зсувом фази нав'язаних зовнішнім джерелом коливань елементів середовища в просторі внаслідок зв'язку між ними.
5. Конкуренція двох зустрічних фазових хвиль приводить до придушення хвилі з більшою довжиною (нижчою частотою).

Контрольні питання до розділу 2.1

1. В чому полягає умова слабкої нелінійності для активних середовищ? Коли вона задовольняється?
2. Порівняйте між собою хвилі в активних лініях та фазові хвилі в середовищах автоколивного типу. Що в них спільного і що – відмінного?

Розділ 2.2. Автохвилі в сильнелінійних середовищах, ініційовані зовнішнім збудженням

Розглянувши ініційовані зовнішнім збудженням автохвилі в слабконелінійних середовищах, перейдемо тепер до аналізу аналогічних автохвиль у сильнелінійних середовищах.

В загальному випадку питання про характер хвиль у таких середовищах залишається відкритим. Достатньо вивченими можуть вважатися лише автохвилі, що поширюються без зміни своєї форми, яка тепер, як і амплітуда, не залежить від граничних чи початкових умов, а визначається властивостями середовища (нагадаємо, що в слабконелінійних середовищах високочастотні хвилі, збуджувані зовнішнім джерелом, були квазігармонічними, і лише їхня усталена амплітуда визначалася властивостями середовища).

Ми обмежимося розглядом двох моделей сильнелінійних середовищ, які найбільш поширені в літературі і можуть вважатися найбільш дослідженими. Це бістабільні середовища і збудливі середовища (середовища з відновленням).

У цьому розділі йтиметься про біжучі автохвилі в бістабільних середовищах та в середовищах із відновленням (збудливих середовищах) – відповідно хвилі перекидання, або біжучі фронти, та біжучі імпульси чи періодичні послідовності таких імпульсів.

2.2.1. Біжучі фронти

Як уже говорилося, біжучі фронти спостерігаються в бістабільних середовищах. Бістабільні середовища – це такі середовища, які характеризуються двома стійкими однорідними стаціонарними станами рівноваги. Відповідно автохвилі в таких середовищах являють собою хвилі перемикання (фазових переходів) з одного стійкого стаціонарного стану в інший (у певному сенсі більш "енергетично вигідний"), тобто їх можна розглядати як результат розвитку деякої нестійкості.

Користуючись поняттями, запозиченими з радіоелектроніки, найпростіше одновимірне бістабільне середовище можна грубо уявити собі як ланцюжок тригерів, які знаходяться в однаковому стані. Під дією зовнішнього сигналу – імпульсу запуску – тригер на кінці ланцюжка переходить в інший стан і одночасно формує (наприклад, за допомогою RC-ланки) імпульс запуску для наступного елемента ланцюжка. Таким чином, уздовж ланцюжка може бігти хвиля перекидання.

Розглянемо спершу кілька прикладів бістабільних середовищ і запишемо для кожного з них рівняння руху.

2.2.1.1. Горіння в розподіленій системі (ланцюжку пальників)

Розглянемо деяку комірку (пальник), всередині якої може протікати процес горіння. Запас горючої суміші підтримується постійним за рахунок надходження від зовнішнього джерела. Нехай за одиницю часу при горінні виділяється кількість теплоти $q(T)$, залежність якої від температури горіння T має ступінчатий характер (рис. 2.2.1).

Якщо комірка ізольована, то вся виділена теплота йде на її нагрівання. Тому зміна температури (за умови, що надходження пального до комірки стало) визначатиметься рівнянням

$$\frac{dT}{dt} = \frac{q(T)}{C}, \quad (2.2.1)$$

де C – теплоємність пальника. Рівняння (2.2.1) описує необмежене зростання температури пальника з часом після його запалювання, оскільки $q(T) > 0$ при $T > T_c$.

Але в реальності температура комірки, зрозуміло, не буде необмежено зростати, оскільки існує теплообмін із навколишнім середовищем. Якщо навколишнє середовище має температуру T_0 , то рівняння для температури пальника з урахуванням теплообміну можна записати у вигляді

$$\frac{dT}{dt} = \frac{q(T)}{C} - \gamma(T - T_0) \equiv f(T), \quad (2.2.2)$$

де γ – коефіцієнт теплообміну, а права частина – $f(T)$ – носить назву кінетичної функції. Побудова графіка кінетичної функції показана на рис. 2.2.2.

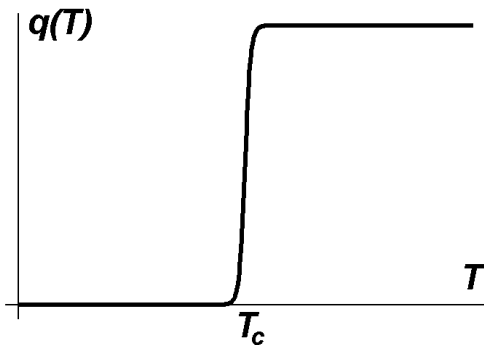


Рис. 2.2.1. Кількість теплоти, що виділяється в пальнику за одиницю часу, як функція його температури (T_c – температура запалювання).

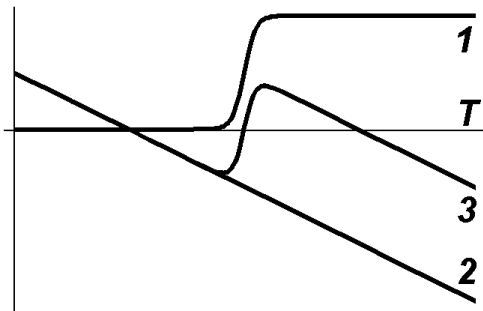


Рис. 2.2.2. Температурні залежності тепло-виділення (крива 1), втрат на теплообмін (крива 2) та сумарної кінетичної функції (крива 3).

Вигляд кінетичної функції для різних значень параметрів моделі показано на рис. 2.2.3 а-в. Якщо температура навколишнього середовища дуже низька, запалювання взагалі неможливе (рис. 2.2.3 а). Якщо температура навколишнього середовища перевищує температуру запалювання, то єдино можливий стаціонарний стан – горіння (рис. 2.2.3 б). Нарешті, в деякому проміжному діапазоні значень система формально має три стаціонарні однорідні стани – T_0 , T_c та T_1 (рис. 2.2.3 в).

Для дослідження стійкості однорідних стаціонарних станів лінеаризуємо рівняння (2.2.2) поблизу відповідних точок T_i :

$$\frac{dT}{dt} = (T - T_i) f'(T_i), \quad f'(T_i) \equiv \left. \frac{df(T)}{dT} \right|_{T=T_i} \equiv \frac{1}{\tau_i}. \quad (2.2.3)$$

Якщо $f'(T_i) < 0$, то, як випливає з (2.2.3), малі відхилення від стаціонарних станів експоненціально згасатимуть із характерним часом τ_i , тобто відповідні точки (T_0 та T_1 на рис. 2.2.3 в) є стійкими. Навпаки, при $f'(T_i) > 0$ малі відхилення експоненціально зростатимуть, тобто відповідна точка (T_c на рис. 2.2.3 в) є нестійкою.

Точка T_0 відповідає відсутності горіння, коли температура комірки збігається з температурою навколишнього середовища. Точка T_1 відповідає стаціонарному горінню, коли все виділене за одиницю часу тепло відходить у навколишнє середовище внаслідок теплообміну. Нарешті, точка T_c , яка відповідає температурі запалювання, служить межею областей притягання точок T_0 та T_1 . Справді, при $f(T) > 0$ температура системи з часом зростатиме, при

$f(T) < 0$ – навпаки, спадатиме. Таким чином, якщо в початковий момент часу виконана умова $T < T_c$, то в системі встановлюється температура T_0 , в протилежному випадку – температура T_1 (це видно з рис. 2.2.3 в).

Зазначимо, що відкритий характер досліджуваної системи зумовлений неперервним надходженням до неї палива ззовні. Очевидно, величина $q(T)$ при $T > T_c$ пропорційна кількості палива, що надходить у систему за одиницю часу (принаймні, в стаціонарному режимі горіння). Тому, якщо надходження палива припиниться, крива 1 на рис. 2.2.2 зіллється з віссю абсцис, а крива 3 – відповідно з кривою 2. В результаті в системі залишиться єдиний стаціонарний стан – стан відсутності горіння. Отже, саме цей стан відповідає термодинамічній гілці розв'язку (див. п. 1.3.2.1). Стан же стаціонарного горіння принципово зумовлений нерівноважністю системи.

Якщо тепер замість відокремленого пальника розглядати ланцюжок таких пальників, розташованих на малих віддалях один від одного, то в рівнянні (2.2.2) необхідно врахувати теплопровідність. Остаточно отримаємо:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = f(T) + D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.2.4)$$

(D – коефіцієнт теплопровідності).

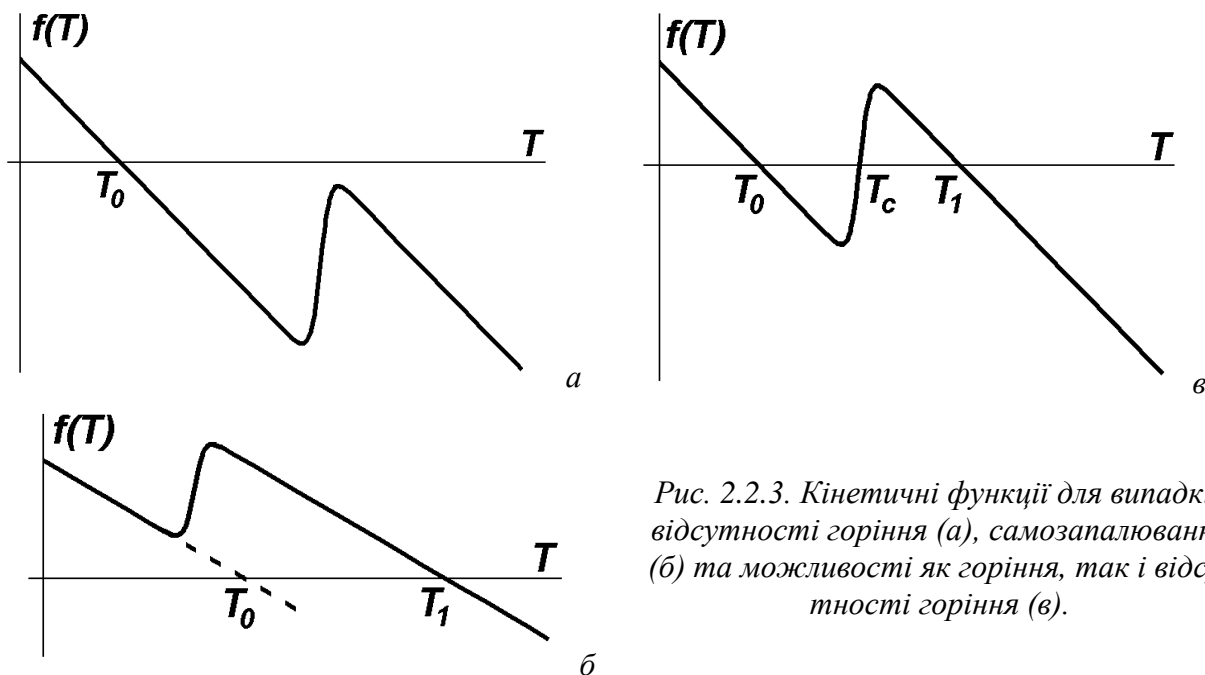
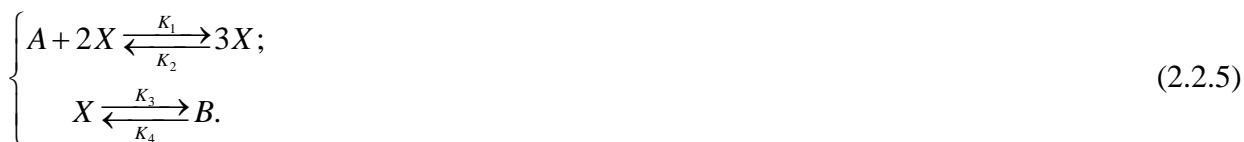


Рис. 2.2.3. Кінетичні функції для випадків відсутності горіння (а), самозапалювання (б) та можливості як горіння, так і відсутності горіння (в).

Звернемо увагу на те, що в рівнянні (2.2.4) теплопровідність, по суті, врахована двічі: один раз – у явному вигляді (останній, дифузійний доданок у правій частині), і ще раз – у неявному вигляді, в кінетичній функції (доданок $-\gamma(T - T_0)$ у рівнянні (2.2.2), що описує теплообмін з навколишнім середовищем). Для однорідних станів системи дифузійний доданок зникає, а теплообмінний доданок у кінетичній функції зберігається. Це означає, що рівняння (2.2.4) фактично описує горіння в деякому стрижні або ланцюжку. Дифузійний доданок описує теплообмін у напрямку x уздовж цього ланцюжка, а теплообмінний доданок – у поперечному напрямку.

2.2.1.2. Хімічна реакція автокаталітичного типу (модель Шльогля)

Розглянемо деяку гіпотетичну хімічну реакцію автокаталітичного типу (див. вище п. 1.3.2.3), відому як модель Шльогля (див. вище задачу 1.3.2):



Відзначимо, що ця реакція належить до автокаталітичного типу (пор. з п. 1.3.2.3) – пряма реакція, описувана першим із рівнянь (2.2.5), зводиться до перетворення речовини A в речовину X , причому остання служить і каталізатором цієї реакції.

Нехай спершу реакція протікає в реакторі з перемішуванням, де концентрації реагентів підтримуються однорідними в усьому об'ємі.

Для протікання першої з реакцій (2.2.5) у прямому напрямку необхідне зіткнення однієї молекули сорту A та двох молекул сорту X . Ймовірність такого процесу пропорційна добутку AX^2 , де літери позначають концентрації відповідних речовин. Елементарний акт даної реакції приводить до народження однієї молекули сорту X . Тоді внесок у зміну концентрації речовини X за одиницю часу буде K_1AX^2 . Врахувавши подібним чином внески трьох інших реакцій, можна записати кінетичне рівняння для концентрації речовини X у вигляді

$$\frac{dX}{dt} = K_1AX^2 - K_2X^3 - K_3X + K_4B \equiv f(X). \quad (2.2.6)$$

Якщо величини K_1A , K_2 , K_3 та K_4B приблизно однакові за величиною, то графік кінетичної функції $f(x)$ (рис. 2.2.4) матиме якісно ту саму форму, що й у попередньому прикладі.

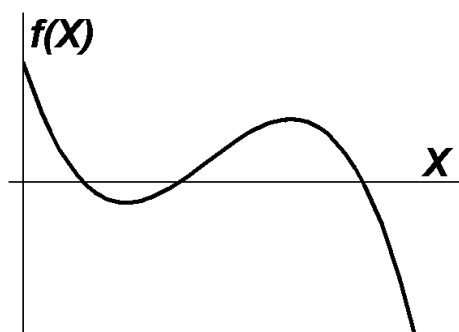


Рис. 2.2.4. Кінетична функція для концентрації речовини X у реакції Шльогля.

Ми розглядали концентрації речовин A та B як задані. Це можливо тоді, коли вони підтримуються штучно, тобто "сировина" A надходить ззовні, а "кінцевий продукт" B , навпаки, виводиться з реактора. Така система є відкритою.

В ізольованій системі з часом встановиться стан термодинамічної рівноваги, коли швидкості прямих і зворотних реакцій, описуваних кожним з рівнянь (2.2.5), однакові. Це можливо лише тоді, коли концентрації "сировини" і "кінцевого продукту" пов'язані співвідношенням $K_1A/K_2 = K_4B/K_3$. Тоді рівняння (2.2.6) має єдиний однорідний стаціонарний розв'язок $X = K_1A/K_2 = K_4B/K_3$, що прямує до нуля при малих значеннях B . Отже, він відповідає меншому стійкому стаціонарному розв'язку на рис. 2.2.4, і останній може розглядатися як термодинамічна гілка. Більший стійкий стаціонарний розв'язок, якщо він існує, породжується відкритим характером досліджуваної системи.

Нехай тепер реакція протікає в одновимірному реакторі без перемішування, так що концентрація реагентів змінюється вздовж реактора (в напрямку x). Якщо врахувати дифузії молекул у реакторі, то замість (2.2.6) отримаємо:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = f(X) + D \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}. \quad (2.2.7)$$

2.2.1.3. Експансія популяції тварин, що розмножуються статевим шляхом

Нехай густина розселення деяких тварин – n . Нехай вони розмножуються статевим шляхом, тобто приріст кількості особин пропорційний до ймовірності їхніх зустрічей ($\sim n^2$). Тоді з урахуванням смертності і територіального розростання популяції можна записати рівняння для густини розселення у формі

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha m(n)n^2 - \gamma n + D\Delta n. \quad (2.2.8)$$

Тут враховано, що швидкість розмноження пропорційна масі їжі $m(n)$, яка надходить у систему за одиницю часу в розрахунку на одну особину. Очевидно, $m(n)$ зменшується із зростанням густини розселення n . Нехай, наприклад,

$$m(n) = m_0 \exp(-n/n_0). \quad (2.2.9)$$

Вигляд кінетичної функції

$$f(n) = \alpha m_0 n^2 \exp(-n/n_0) - \gamma n \quad (2.2.10)$$

при деякому наборі параметрів подано на рис. 2.2.5. Він якісно подібний до кінетичних функцій для розглянутих раніше випадків (рис. 2.2.3 в, рис. 2.2.4). Точки $n=0$ та $n=n_1$ відповідають стійким стаціонарним станам, точка $n=n_c$ – нестійкому. При малих n майже не відбуваються зустрічі тварин, популяція не зростає. При $n=n_1$ зростання популяції обмежується вичерпанням харчових ресурсів.

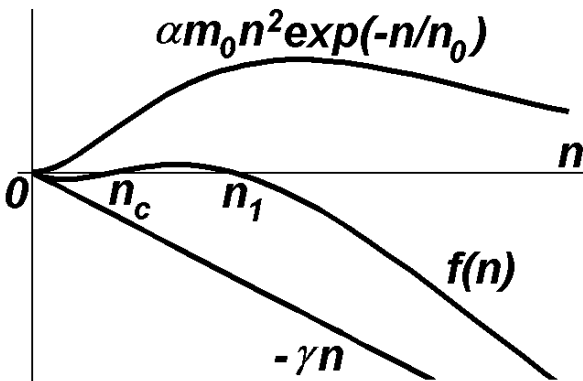


Рис. 2.2.5. Побудова кінетичної функції для популяції, що розмножується статевим шляхом в умовах обмежених харчових ресурсів.

Нерівноважність аналізованої екологічної системи зумовлена надходженням до неї харчових ресурсів. Тому розв'язок $n=0$, що зберігається при $m(n)=0$, є термодинамічною гілкою, а розв'язок $n=n_1$ зумовлений відкритим характером системи.

Таким чином, в усіх розглянутих нами вище (п.п. 2.2.1-2.2.3) прикладах бістабільних систем кінетична функція має вигляд, аналогічний поданому на рис. 2.2.3 в. В усіх випадках маємо дві стійкі стаціонарні точки, а між ними – нестійку. Менше значення змінної в стійкому стаціонарному стані відповідає термодинамічній гілці, більше зумовлене нерівноважністю (відкритим характером) системи. Таким чином, бістабільність розглянутих систем є наслідком їхньої відкритості.

2.2.1.4. Нелінійні кінетичні рівняння дифузійного типу

Всі розібрані вище приклади (як і розглянута раніше $\lambda-\omega$ модель – див. вище пп.2.1.2.1-2.1.2.2) приводять до рівнянь (у більш загальному випадку – систем рівнянь) вигляду

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i(\vec{u}) + D_i \Delta u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \vec{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \quad (2.2.11)$$

– нелінійних кінетичних рівнянь дифузійного типу. Назва пов'язана з тим, що при $D_i = 0$

рівняння (2.2.11) переходять у рівняння, що описують зміну величин u_i в часі – так зване кінетичне рівняння з нелінійною кінетичною функцією $f_i(\vec{u})$. Навпаки, при $f_i(\vec{u}) = 0$ рівняння (2.2.11) переходять у звичайні рівняння дифузії. В загальному випадку дифузія є нелінійною, тобто коефіцієнти дифузії залежать від змінної \vec{u} . В анізотропних середовищах замість скалярних коефіцієнтів дифузії D_i матимемо тензор D_{ij} .

Рівняння типу (2.2.11) можна розглядати як узагальнення рівняння неперервності для величини u за наявності джерел. В цьому сенсі воно аналогічне до рівняння балансу ентропії в диференціальній формі (1.2.12). Додаткове припущення полягає в тому, що потоки \vec{J}_i досліджуваних величин u_i пропорційні їхнім градієнтам, $\vec{J}_i = -D_i \nabla u_i$, де ∇u_i виступають у ролі узагальнених термодинамічних сил (див. п. 1.2.3.1). Ця підстановка в найпростішому випадку, коли D_i не залежать від \vec{u} , перетворює дивергенцію потоку u_i на відповідний лапласіан. У найбільш загальному випадку нелінійної дифузії в анізотропних середовищах отримаємо:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i(\vec{u}) + \nabla \left(\sum_j D_{ij}(\vec{u}) \nabla u_j \right) \quad (2.2.11 \text{ а})$$

(враховано, що потік компоненти u_j може бути зумовлений не лише градієнтом цієї компоненти, але й градієнтами інших компонент u_j).

Нелінійні кінетичні рівняння дифузійного типу – одна з універсальних моделей для опису автоколивних процесів. Саме такими рівняннями описуються процеси в активних середовищах найрізноманітнішої природи. Наприклад, таку форму мають рівняння, що описують динаміку брюсселятора (див. рівняння (1.3.23)) та орегонатора (див. рівняння (1.3.38)). Втім, слід відзначити, що в деяких задачах про самоорганізацію в рівняннях може фігурувати не перша, а друга похідна за часом. В цьому випадку, очевидно, слід говорити не про рівняння дифузійного типу, а про нелінійні хвильові рівняння (прикладом може бути розглянуте раніше рівняння для хвиль в активній лінії, див. п.2.1.1.3).

Для опису бістабільних середовищ досить одного рівняння вигляду (2.2.11). В усіх розглянутих прикладах бістабільних середовищ рівняння такого типу має два стійкі стаціонарні однорідні розв'язки (див. п. 2.2.1.1).

Рівняння такого вигляду вперше було запропоноване в 1937 році незалежно Р. Фішером¹ і А.М. Колмогоровим², І.Г. Петровським³ та М.С. Піскуновим⁴ при розгляді задач про поширення біологічних популяцій, або так звану генетичну дифузію (див. нижче п.2.2.1.9). У 1938 році це рівняння застосували Я.Б. Зельдович⁵ та Д.А. Франк-Каменецький⁶ для опису поширення полум'я (коли кінетична функція має форму полінома). Відтоді його називають рівнянням Фішера – Колмогорова – Петровського – Піскунова або рівнянням Зельдовича – Франк-Каменецького.

¹ Р. Фішер (Sir Ronald Aylmer Fisher, 1890 - 1962) – великий англійський та австралійський учений, статистик, біолог-еволюціоніст, євгенік та генетик. Член Королівського товариства.

² А.М. Колмогоров (Андрей Николаевич Колмогоров, 1903 - 1987) – геніальний російський математик, академік АН СРСР, лауреат Сталінської премії, Герой Соціалістичної Праці. Один з творців сучасної теорії ймовірностей. Отримав ряд визначних результатів у топології, математичній логіці, теорії складності алгоритмів. Один з творців теорії турбулентності та теорії динамічного хаосу.

³ І.Г. Петровський (Іван Георгієвич Петровський, 1901 - 1973) – визначний російський математик, академік АН СРСР, лауреат Сталінської премії, ректор Московського державного університету (1951-1973). Займався, зокрема, теорією ймовірностей, теорією диференціальних рівнянь, математичною фізикою.

⁴ М.С. Піскунов (Николай Семенович Пискунов, 1908 - 1977) – російський математик і механік.

⁵ Я.Б. Зельдович (Яков Борисович Зельдович, 1914 - 1987) – російський фізик-теоретик та фізико-хімік, академік АН СРСР, лауреат Сталінських (1943, 1949, 1951, 1953) та Ленінської (1957) премії, тричі Герой Соціалістичної Праці. Один з творців атомної та водневої бомби (в СРСР). Найвідоміші роботи присвячені горінню, детонації, ядерній фізиці та астрофізиці.

⁶ Д.А. Франк-Каменецький (Давид Альбертович Франк-Каменецький, 1910 - 1970) – російський фізик-теоретик, тричі лауреат Державної премії СРСР. Основні роботи присвячені теорії горіння та вибуху, хімічній кінетиці та технології, астрофізиці, фізиці плазми. Брав участь у розробці ядерної зброї.

2.2.1.5. Біжучий фронт (хвиля перемикання): якісний вигляд і швидкість

Розглянемо одновимірне нелінійне кінетичне рівняння з дифузійною для бістабільного середовища:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.2.12)$$

Будемо шукати його розв'язок у вигляді стаціонарної хвилі, тобто хвилі, що поширюється в просторі з постійною швидкістю без зміни своєї форми: $u = u(\xi)$, $\xi = x - V_0 t$ (так званий автомодельний розв'язок). Оскільки ні форма, ні величина швидкості такої хвилі не залежать від початкових чи граничних умов, її можна зарахувати до автохвиль. Автохвилю такого типу називають біжучим фронтом, або хвилею перемикання (чи хвилею перекидання). Стосовно горіння, коли мова йде про перехід з низькотемпературного стану у високотемпературний, говорять про хвилю запалювання. Коли, навпаки, йдеться про перехід від високотемпературного стану до низькотемпературного, говорять про хвилю гасіння.

Після підстановки автомодельного розв'язку рівняння (2.2.12) зводиться до вигляду

$$D \frac{d^2 u}{d\xi^2} + V_0 \frac{du}{d\xi} + f(u) = 0. \quad (2.2.13)$$

Перш ніж розв'язувати рівняння (2.2.13), обговоримо гаданий вигляд цього розв'язку якісно. Нехай в області $\xi \rightarrow +\infty$ реалізується стійкий стан $u = u_3$, а в області $\xi \rightarrow -\infty$ – стан $u = u_1$ (рис. 2.2.6 а). У випадку горіння в розподіленій системі (див. п. 2.2.1.1) $u = u_3$ – це стан горіння (висока температура), $u = u_1$ – відповідно, відсутність горіння (низька температура). Тоді в перехідній області температура поступово зростатиме при зростанні ξ . Відзначимо ще, що при $\xi \rightarrow \pm\infty$ реалізуються стаціонарні однорідні стани, тому в цих областях кожен з доданків у рівнянні (2.2.13) окремо дорівнює нулю. Зокрема, в області горіння все тепло, що виділяється, витрачається на теплообмін із навколишнім середовищем. Навпаки, в перехідній області, де значення u відмінне як від u_1 та u_3 , так і від u_2 (крім однієї єдиної точки), кінетична функція відмінна від нуля. Там, де вона додатна, тобто ближче до області горіння, тепло виділяється; там, де вона від'ємна, тобто ближче до області, де горіння немає, – навпаки, поглинається (рис. 2.2.6).

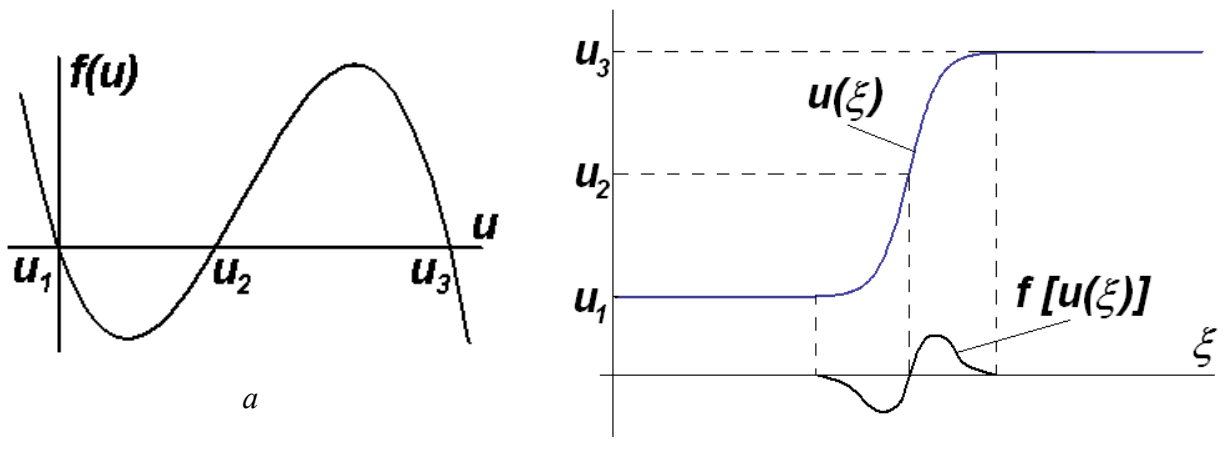


Рис. 2.2.6. До аналізу стаціонарної хвилі перемикання: а – вигляд кінетичної функції, б – гаданий профіль хвилі та виділення й поглинання тепла на фронті хвилі перемикання.

Тепер повернемося до рівняння (2.2.13). Помноживши його на $(du/d\xi)^n$, отримаємо:

$$D \frac{d^2 u}{d\xi^2} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^n + V_0 \left(\frac{du}{d\xi} \right)^{n+1} + f[u(\xi)] \left(\frac{du}{d\xi} \right)^n = 0,$$

або

$$\frac{D}{n+1} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^{n+1} + V_0 \left(\frac{du}{d\xi} \right)^{n+1} + f(u) \left(\frac{du}{d\xi} \right)^n = 0. \quad (2.2.14)$$

Тут використане очевидне співвідношення

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^{n+1} = (n+1) \left(\frac{du}{d\xi} \right)^n \frac{d^2 u}{d\xi^2}.$$

Тепер проінтегруємо рівняння (2.2.14) по ξ в нескінченних межах:

$$\frac{D}{2} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^{n+1} \Big|_{-\infty}^{\infty} + V_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^{n+1} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left(\frac{du}{d\xi} \right)^n d\xi = 0. \quad (2.2.15)$$

З урахуванням накладених вище граничних умов перший доданок у цьому рівнянні дорівнює нулю, оскільки при $\xi \rightarrow \pm\infty$ стан системи є однорідним. Тому рівняння (2.2.15) набуває вигляду

$$V_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^{n+1} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left(\frac{du}{d\xi} \right)^n d\xi = 0, \quad (2.2.16)$$

і з нього можна знайти швидкість стаціонарної хвилі:

$$V_0 = - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left(\frac{du}{d\xi} \right)^n d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^{n+1} d\xi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.17)$$

Хоча формула (2.2.17) не дозволяє безпосередньо розрахувати швидкість біжучого фронту, вона, тим не менше, дозволяє зробити деякі якісні висновки.

Перш за все, в обидва інтеграли (як у чисельнику, так і в знаменнику) дає внесок тільки область фронту хвилі перемикавання (лише в цій області величини $f(u)$ та $du/d\xi$ відмінні від нуля). Таким чином, швидкість хвилі перемикавання (як за величиною, так і за напрямком) повністю визначається процесами на її фронті. Можна також відзначити, що функція $du/d\xi$ має бути такою, щоб інтеграл у чисельнику (2.2.17) перетворювався на нуль одночасно для всіх можливих значень n .

Найпростішого вигляду формула (2.2.17) набуває при $n = 0$:

$$V_0 = - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f[u(\xi)] d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{d\xi} d\xi} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f[u(\xi)] d\xi}{u_3 - u_1}. \quad (2.2.17 \text{ а})$$

У цьому випадку вона допускає наочну інтерпретацію.

Для бістабільних середовищ завжди виконана умова $u_3 > u_1$, тому знак швидкості визначається знаком чисельника формули (2.2.17 а). Нагадаємо, що в моделі горіння в розподіленій системі (див. п. 2.2.1.1) кінетична функція $f(u)$ визначає кількість теплоти на одиницю довжини системи, яка виділяється (або зникає) в результаті горіння та теплообміну з навколишнім середовищем (у напрямку y). Тоді інтеграл у чисельнику (2.2.17 а) – це повна кількість теплоти, що виділяється (зникає внаслідок теплообміну в напрямку y) на фронті ударної хвилі. Якщо ця величина дорівнює нулеві, то потік тепла в напрямку x за межами фронту відсутній, швидкість хвилі також перетворюється на нуль, і утворюється стаціонарна

дисипативна структура (див. нижче п. 2.4.3). Якщо на фронті переважає тепловиділення, виникає потік тепла в бік низькотемпературної області, і отримуємо хвилю запалювання (область горіння зростає). В протилежному випадку виникає потік тепла від високотемпературної області, в результаті отримуємо хвилю гасіння (область горіння зменшується).

В результаті поширення хвилі перемикавання (супроводжуваної потоком тепла) температура середовища змінюється на величину $\Delta u = u_3 - u_1$, яку можна ототожнити з густиною тепла в потоці (з точністю до погонної теплоємності). Тоді добуток $V_0 \Delta u$ визначає густину теплового потоку, що супроводжує хвилю перемикавання.

Запропонована інтерпретація легко переноситься на інші типи бістабільних середовищ – треба лише говорити не про кількість теплоти, а про фізичну величину, кількість якої визначається змінною u .

Інколи формулою (2.2.17) користуються при $n = 1$. У цьому випадку її можна записати у формі

$$V_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{du}{d\xi} d\xi}{\int_{u_1}^{u_3} \frac{du}{d\xi} du} = \frac{\int_{u_1}^{u_3} f(u) du}{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 d\xi}. \quad (2.2.17 \text{ б})$$

Для інтерпретації формули (2.2.17 б) знову звернемося до рівняння (2.2.13). Його можна формально розглядати як рівняння дисипативного нелінійного осцилятора, в якому ξ відіграє роль часу, u – роль координати, «нелінійна сила» $f(u)$ визначається потенціалом

$$\Phi(u) = \int f(u) du, \quad (2.2.18)$$

а швидкість хвилі V_0 відіграє роль параметра дисипації. Вважатимемо надалі, що $\Phi(u_3) > \Phi(u_1)$, тобто “різниця потенціалів” між точками u_1 та u_3 додатна:

$$\Delta\Phi \equiv \int_{u_1}^{u_3} f(u) du > 0. \quad (2.2.18 \text{ а})$$

Для випадку $V_0 = 0$ неважко, знаючи вигляд “нелінійної сили” $f(u)$ (рис. 2.2.7 а), а, отже, й “потенціалу” $\Phi(u)$ (рис. 2.2.7 б), побудувати „фазовий портрет” системи (рис. 2.2.7 в).

Нас цікавить випадок, коли система переходить зі стану u_1 до стану u_3 . Це можливо лише тоді, коли тертя від’ємне, а енергія, що виділяється в результаті такого тертя при переході між точками u_1 і u_3 , точно дорівнює відповідній «різниці потенціалів»:

$$\int_{u_1}^{u_3} V_0 \frac{du}{d\xi} du = \int_{u_1}^{u_3} f(u) du, \quad (2.2.19)$$

де враховано, що аналогом сила тертя є величина $V_0 du/d\xi$. Тоді з (2.2.19) можна знайти швидкість стаціонарної хвилі. В результаті приходимо до формули (2.2.17 б).

„Фазовий портрет” системи з урахуванням від’ємного тертя поданий на рис. 2.2.7 г. Біжучому фронту на ньому відповідає сепаратриса, що йде із сідла в сідло.

Дана інтерпретація носить досить формальний характер і не є цілком вдалою. Незрозуміло, наприклад, чому станам стійкої рівноваги відповідають не мінімуми, а максимуми потенціалу і, відповідно, сідлові точки на „фазовому портреті”. Тим не менше, вона часто використовується в літературі. Можливо, це зумовлено її універсальним характером – вона не пов’язана з конкретними властивостями моделі бістабільного середовища, в якому поширюється стаціонарна автохвиля, описувана нелінійним кінетичним рівнянням із дифузєю (2.2.12).

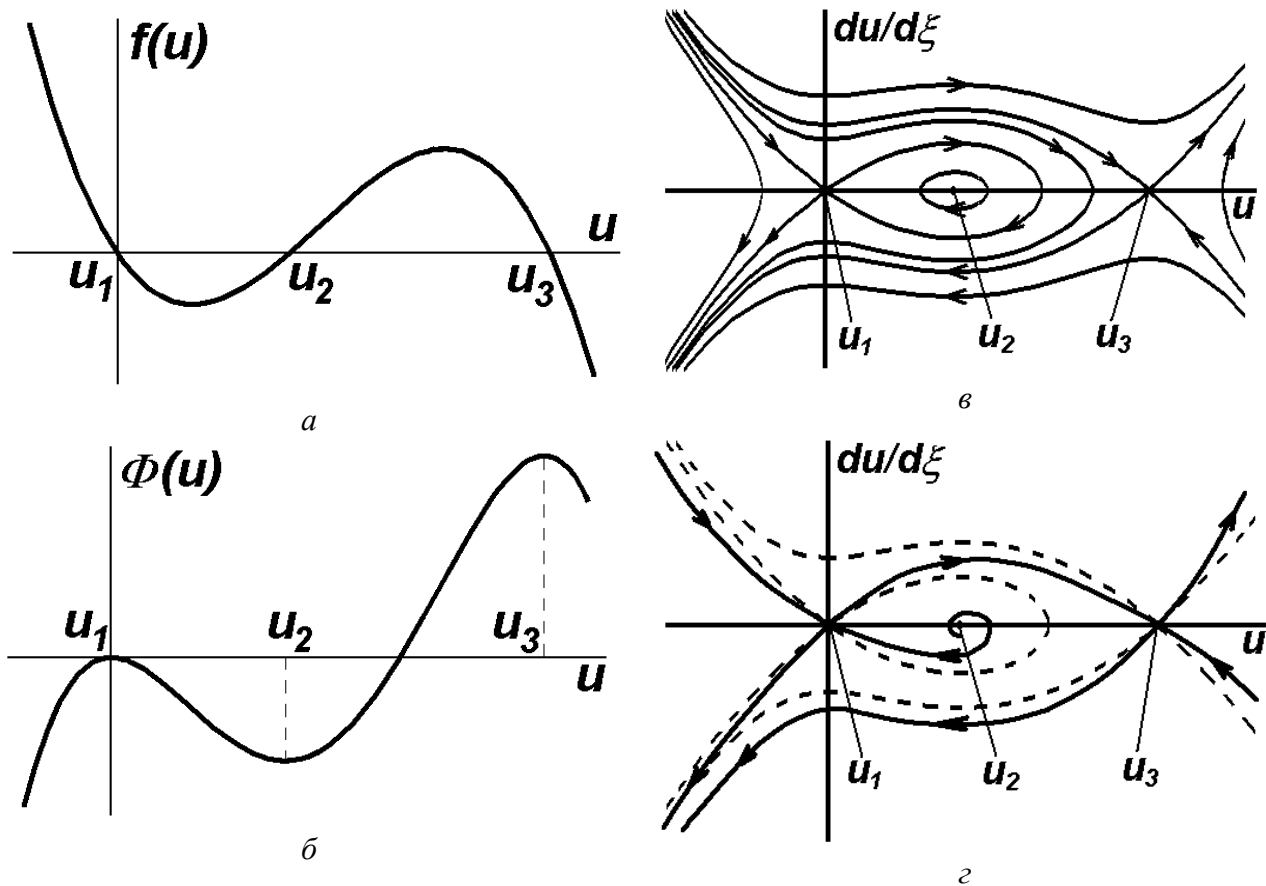


Рис. 2.2.6. До побудови фазового портрету стаціонарної хвилі перекидання: а – вигляд кінетичної функції; б – хід потенціалу; в – фазовий портрет без урахування дисипації; г – фазовий портрет з урахуванням від'ємної дисипації.

2.2.1.6. Вигляд хвилі перемикавання для модельної кінетичної функції

Рівняння (2.2.13) вдається проінтегрувати, якщо обрати модельну функцію $f(u)$ у формі полінома

$$f(u) = u(u - u_0)(1 - u), \quad 0 < u_0 < 1 \quad (2.2.20)$$

(пор. з формулою (2.2.6)). Тоді задачу можна аналітично розв'язати до кінця.

Рівняння для стаціонарної хвилі (2.2.13) з урахуванням (2.2.19) набуває вигляду

$$D \frac{d^2 u}{d\xi^2} + V_0 \frac{du}{d\xi} + u(u - u_0)(1 - u) = 0. \quad (2.2.13 \text{ а})$$

У фазових змінних ($w = du/d\xi$) це рівняння записується у формі

$$Dw \frac{dw}{du} + V_0 w + u(u - u_0)(1 - u) = 0. \quad (2.2.13 \text{ б})$$

Вільний доданок у рівнянні (2.2.13 б) є поліномом третього ступеню. Тому його розв'язок можна також шукати у формі полінома. Порівняння першого доданку з останнім показує, що це має бути поліном другого ступеню.

Шукаємо розв'язок (2.2.13 б) у вигляді:

$$w(u) = \sigma u(1 - u). \quad (2.2.21)$$

Після підстановки (2.2.21) до (2.2.13 б) отримаємо:

$$D\sigma^2 u(1 - u)(1 - 2u) + \sigma V_0 u(1 - u) + u(u - u_0)(1 - u) = 0, \quad (2.2.13 \text{ в})$$

або

$$u(-2D\sigma^2 + 1) + (D\sigma^2 + \sigma V_0 - u_0) = 0. \quad (2.2.13 \text{ г})$$

Це – поліном першого ступеню. Для того, щоб він дорівнював нулеві, повинні дорів-

нувати нулеві коефіцієнти при $(u)^1$ та $(u)^0$. Отримуємо систему двох алгебраїчних рівнянь, розв'язавши які, легко записати вирази для введених вище параметрів σ та V_0 :

$$\sigma = \pm \frac{1}{\sqrt{2D}}; \quad (2.2.22)$$

$$V_0 = \frac{u_0 - \frac{1}{2}}{\sigma} = \mp \frac{1 - 2u_0}{2} \sqrt{2D} = \mp \sqrt{\frac{D}{2}} (1 - 2u_0). \quad (2.2.22 \text{ а})$$

Формула (2.2.22 а) дає явний вигляд швидкості хвилі перекидання. Як бачимо, названа швидкість зростає зі збільшенням коефіцієнту дифузії. Зміна знаку швидкості відбувається при $u_0 = 1/2$. Легко переконатися, що це значення u якраз відповідає зміні знаку різниці потенціалів (2.2.18 а) для кінетичної функції вигляду (2.2.20), тобто формула (2.2.22 а) узгоджується з раніше отриманою загальною формулою (2.2.17 б).

Тепер співвідношення (2.2.21), яке з урахуванням явного вигляду функції $w(u)$ має вигляд

$$\frac{du}{d\xi} = \sigma u(1-u), \quad (2.2.21 \text{ а})$$

можна проінтегрувати. Маємо:

$$\int \left(\frac{du}{u} + \frac{du}{1-u} \right) = \int \sigma d\xi,$$

звідки

$$\ln \left| \frac{u}{1-u} \right| = \sigma (\xi - \xi_0),$$

де ξ_0 – стала інтегрування. Врахувавши, що за змістом задачі $0 < u < 1$, остаточно отримаємо:

$$u(\xi) = \frac{\exp[\sigma(\xi - \xi_0)]}{1 + \exp[\sigma(\xi - \xi_0)]} = \frac{1}{1 + \exp[-\sigma(\xi - \xi_0)]} = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \frac{\sigma(\xi - \xi_0)}{2} \right]. \quad (2.2.23)$$

Якщо у формулі (2.2.21) обрати верхній знак, то розв'язок (2.2.23) відповідає граничним умовам

$$u(\xi \rightarrow \infty) = 1, \quad u(\xi \rightarrow -\infty) = 0. \quad (2.2.24)$$

Графік розв'язку (2.2.23), який описує форму хвилі перекидання (біжучого фронту), поданий на рис. 2.2.8. Він узгоджується з побудованою раніше фазовою траєкторією цього процесу – сепаратрисою, що йде із сідла в сідло (рис. 2.8.7 г).

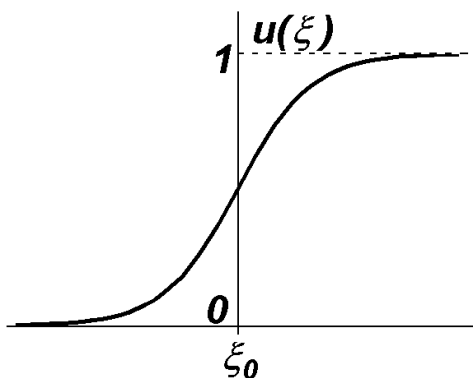


Рис. 2.2.8. Профіль хвилі перекидання.

Ширина фронту хвилі перекидання може бути оцінена з (2.2.23) як

$$\Delta\xi \sim \frac{1}{\sigma} = \sqrt{2D}, \quad (2.2.25)$$

тобто чим сильніша дифузія, тим більш розмитим буде фронт хвилі перекидання. Характерний час переходу з одного стійкого стаціонарного стану в інший у даній точці простору легко визначити із співвідношення

$$\Delta t = \frac{\Delta\xi}{V_0} = \left(u_0 - \frac{1}{2}\right)^{-1}. \quad (2.2.26)$$

У даній моделі він не залежить від коефіцієнта дифузії, оскільки більш розмитому фронту відповідає більша швидкість хвилі перекидання.

2.2.1.7. Еволюція початкового збурення в бістабільному середовищі

Тепер, знаючи розв'язок рівняння (2.2.12) у вигляді стаціонарної хвилі, поставимо питання про те, як виглядатиме його розв'язок для довільних початкових умов.

Будемо вважати, що часи релаксації $\tau_{1,3}$ (2.2.3) до обох стійких стаціонарних станів u_1 , u_3 значно менші від характерного часу проходження хвилі перекидання Δt (2.2.26). Тоді за довільних початкових умов система спершу в кожній точці простору за малі часи порядку $\tau_{1,3}$ буде релаксувати до того стаціонарного стану, в область притягання якого потрапляють початкові умови.

Якщо в початковий момент часу всюди $u(x) < u_2$, система за час порядку τ_1 еволюціонує до однорідного стаціонарного стану u_1 . Якщо в початковий момент часу всюди $u(x) > u_2$, система за час порядку τ_3 еволюціонує до однорідного стаціонарного стану u_3 .

Якщо в початковий момент часу в середовищі співіснують області з $u(x) < u_2$ та $u(x) > u_2$, то воно спершу в кожній точці простору за малі часи порядку $\tau_{1,3}$ буде релаксувати до того стаціонарного стану, в область притягання якого потрапляють початкові умови (рис. 2.2.9). Після цього в середовищі побіжить хвиля перекидання, напрямком якої визначається “різницею потенціалів” $\Delta\Phi$ (2.2.18 а), і в середовищі врешті рещт встановиться той зі стійких стаціонарних станів (u_1 або u_3), якому відповідає більше значення потенціалу $\Phi(u)$. Зокрема, дві зустрічні хвилі перекидання загасять одна одну.

Якщо $\Delta\Phi = 0$, то, як випливає з (2.2.17), $V_0 = 0$, тобто в середовищі можливе співіснування областей $u = u_1$ і $u = u_3$. Це – найпростіший випадок формування стаціонарної дисипативної структури.

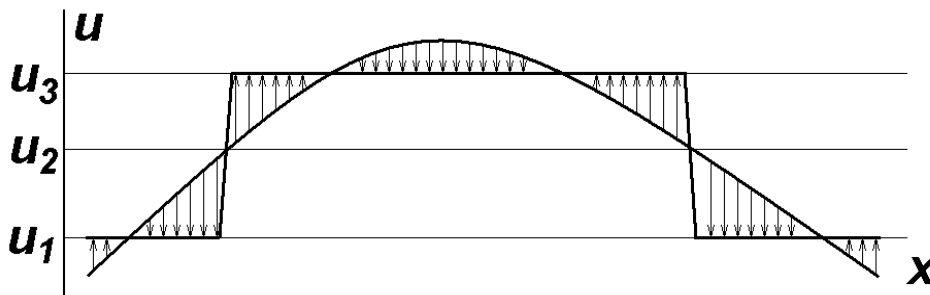


Рис. 2.2.9. Швидка релаксація бістабільного середовища до стаціонарних однорідних станів.

2.2.1.8. Поширення хвиль перекидання в двовимірних середовищах

Досі розглядалися одновимірні моделі бістабільних середовищ. У двовимірному середовищі побудовані вище розв'язки описують плоскі хвилі. Цікаво з'ясувати, як будуть поширюватися хвилі перекидання з криволінійним фронтом.

Щоб відповісти на це питання, перепишемо рівняння (2.2.12) у полярній системі ко-

ординат, вважаючи хвилю аксіально-симетричною:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + \frac{D}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + D \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}. \quad (2.2.27)$$

Рівняння (2.2.27) мало зміниться, якщо в знаменнику другого доданку в правій частині замінити координату точки спостереження r на $R(t)$ – радіус, що описує положення фронту в момент часу t :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + \frac{D}{R} \frac{\partial u}{\partial r} + D \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}. \quad (2.2.28)$$

Справді, похідна $\partial u / \partial r$ відмінна від нуля лише в шарі $r \approx R$ завтовшки $\Delta \xi$ (2.2.25), який можна вважати вузьким ($\Delta \xi \ll R$). Тому в цьому шарі зроблена заміна є правомірною, а в інших точках простору похідна $\partial u / \partial r$ обертається на нуль, і змінений доданок не дає внеску до рівняння.

Підставимо до (2.2.28) розв’язок у вигляді стаціонарної хвилі, швидкість якої тепер залежить від радіусу кривини фронту:

$$u = u(\xi), \quad \xi = r - V(R)t.$$

Отримаємо:

$$-V(R)u' = f(u) + \frac{D}{R} u' + Du'', \quad (2.2.29)$$

або

$$Du'' + \left[V(R) + \frac{D}{R} \right] u' + f(u) = 0. \quad (2.2.29 \text{ a})$$

Рівняння (2.2.29 a) за формою збігається з одновимірним рівнянням (2.2.13), якщо замінити $V(R) + D/R$ на V_0 . Отже, залежність швидкості фронту від радіусу його кривини має вигляд

$$V(R) = V_0 - \frac{D}{R}, \quad (2.2.30)$$

тобто опуклий фронт має меншу швидкість.

При $R < R_{cr} = D/V_0$ напрямок поширення хвилі змінюється на протилежний. Отже, якщо область $u = u_3$ має розмір $R < R_{cr}$, вона з часом зникне. Лише при $R > R_{cr}$ вона почне розростатися.

Цей ефект можна інтерпретувати на прикладі хвилі запалювання (гасіння). Обговоримо два варіанти такої інтерпретації.

Як уже вказувалося, напрямок і величина швидкості хвилі запалювання визначаються балансом між виділенням та поглинанням тепла на її фронті (див. вище п. 2.2.1.5). Якщо область горіння обмежена колом, треба розглядати баланс процесів у деякому його секторі. В порівнянні з випадком прямолінійної межі площа області тепловиділення, розташованої з боку вогнища горіння, зменшується, а площа області поглинання тепла, розташована із зовнішнього боку, зростає. В результаті баланс зсувається в бік зменшення сумарного тепловиділення, що й спричиняє зменшення швидкості хвилі запалювання. Зрозуміло, що цей ефект ставатиме помітнішим зі зменшенням R . Однак наведений вище розрахунок справедливий лише у випадку $R \gg \Delta \xi$, де, як і раніше, $\Delta \xi$ – ширина фронту хвилі. Таким чином, у даному наближенні обговорюваний ефект буде малопомітним.

Альтернативне пояснення полягає в тому, що дифузія в обговорюваній моделі відбувається лише в радіальному напрямку. Це означає, що довжина „фронту” дифузії, тобто довжина лінії сталої температури, буде зростати при віддаленні від межі області горіння. Це,

очевидно, приведе до зростання швидкості винесення тепла з межі області горіння⁷. Вплив даного ефекту еквівалентний зменшенню тепловиділення на фронті хвилі перемикавання, тобто він має привести до зменшення швидкості цієї хвилі. Це пояснення добре узгоджується з тим, що поправка до швидкості, обумовлена кривиною фронту, пропорційна коефіцієнту дифузії (див. формулу (2.2.30)).

Якщо на плоскому фронті хвилі перекидання виникне опуклість, вона буде загальмовуватись, і, навпаки, западина на фронті буде прискорюватися (рис. 2.2.10). В результаті форма фронту автоматично підтримуватиметься плоскою.

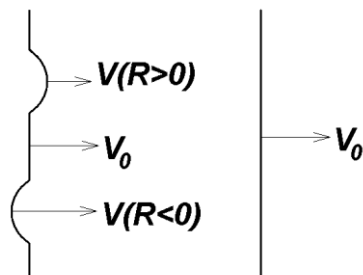


Рис. 2.2.10. Еволюція збурень плоского фронту перекидання в бістабільному середовищі.

2.2.1.9. Хвиля заселення

Досі для бістабільних середовищ розглядалися лише хвилі переходу між стійкими стаціонарними однорідними станами u_1 та u_3 .

Проаналізуємо тепер хвилю, яка відповідає переходу з нестійкого стану рівноваги u_2 в стійкий (u_1 або u_3). Для більшості систем фізичної природи така хвиля неможлива, оскільки нестійкий стан $u = u_2$ буде руйнуватися флуктуаціями. Але існує ситуація, коли флуктуації неможливі в принципі – це поширення біологічної популяції.

Розглянемо поширення популяції, яка розмножується діленням. Тоді швидкість зростання популяції (з урахуванням смертності) буде пропорційна першому ступеню концентрації особин n ($n \geq 0$), і відповідне нелінійне кінетичне рівняння з дифузією можна подати у формі (пор. з рівнянням (2.2.8), п. 2.2.1):

$$\frac{\partial n}{\partial t} = m(n)n + D\Delta n, \quad (2.2.31)$$

де $m(n)$ – обсяг продовольства, що надходить у систему за одиницю часу на одну особину. В найпростішому випадку можна покласти

$$m(n) = \begin{cases} m_0 - \beta n, & n < n_0; \\ 0, & n \geq n_0, \end{cases} \quad n_0 = \frac{m_0}{\beta}. \quad (2.2.32)$$

Графік кінетичної функції $f(n) = nm(n)$ та відповідного потенціалу (див. формулу (2.2.14)) поданий на рис. 2.2.11 а-б, а відповідний фазовий портрет – на рис. 2.2.11 в. Стаціонарній хвилі відповідає сепаратриса, що йде з нестійкого вузла в сідло.

Рівняння (2.2.31) з урахуванням (2.2.32) має два стаціонарні однорідні розв'язки – $n = 0$ та $n = n_0$. Формально стан $n = 0$ – нестійкий, але, оскільки флуктуації неможливі, він буде підтримуватися, доки не з'явиться зародок популяції.

Хвиля переходу зі стану до стану відома в літературі як хвиля заселення.

Систему (2.2.31)-(2.2.32) можна проінтегрувати за аналогією з тим, як це було зроблено в п. 2.2.1.6. В результаті вдається показати, що швидкість хвилі заселення визначається формулою

⁷ Справді, в двовимірному випадку неоднорідність у формі кола буде, очевидно, розсмоктуватися швидше, ніж така сама неоднорідність у вигляді нескінченної смуги.

$$V_0 = \frac{5}{\sqrt{6}} \sqrt{m_0 D} \quad (2.2.33)$$

і не залежить від параметра β .

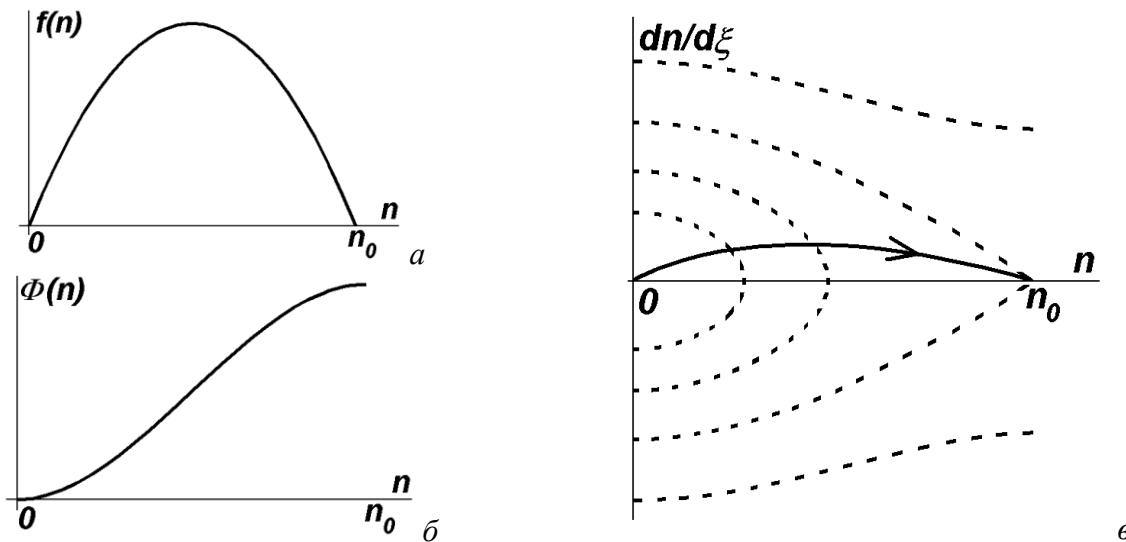


Рис. 2.2.11. До аналізу хвилі заселення: а – кінетична функція, б – хід потенціалу, в – фазовий портрет (штрихові лінії відповідають умові $V_0 = 0$).

Контрольні питання до підрозділу 2.2.1

1. Чи можна впливати на кінетику відкритих (нерівноважних) систем шляхом зміни зовнішніх параметрів? Відповідь дати на прикладі горіння в комірці та моделі Шльогля.
2. Чому з трьох стаціонарних станів бістабільного середовища один виявляється нестійким?
3. Якими процесами визначається швидкість і напрямок руху біжучого фронту в середовищі, де протікає хімічна реакція, описувана моделлю Шльогля?
4. Якими процесами визначається швидкість і напрямок руху біжучого фронту в середовищі, де відбувається експансія популяції тварин, що розмножуються статевим шляхом (з урахуванням їхньої смертності)?
5. Якісно намалюйте «фазовий портрет» для хвилі гасіння.
6. Проаналізуйте застосовність понять фазової та групової швидкості до біжучих фронтів.
7. Від чого залежить ширина фронту хвилі запалювання?
8. Якісно охарактеризуйте еволюцію довільного початкового збурення в бістабільному середовищі.
9. Чи залежать біжучі фронти від початкових і граничних умов? Як саме?
10. Чому фронт лісової пожежі звичайно буває плоским?
11. Намалюйте кінетичну функцію для середовища, в якому можливі хвилі заселення.
12. Порівняйте між собою біжучий фронт (хвилю запалювання) та хвилю заселення в бістабільному середовищі.
13. Знак швидкості біжучого фронту може змінюватися в залежності від параметрів моделі. Чи можливо таке для хвилі заселення?
14. Як швидкість хвилі заселення залежить від кривини її фронту?

Задачі до підрозділу 2.2.1

2.2.1.1. Побудуйте фазовий портрет для хвилі гасіння.

2.2.1.2. Поширення хвилі збудження в нервовому волокні описується модельним рівнянням:

$$\tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2\gamma u(1-u)(u-u_0),$$

де $0 < u_0 < 1$ і всі параметри позитивні. Побудувати фазовий портрет, що відповідає стаціона-

рним хвилям системи.

2.2.1.3. Показати, що рівняння для хвилі збудження в нервовому волокні

$$\tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2\gamma u(1-u)(u-u_0)$$

($0 < u_0 < 1$ і всі параметри позитивні) задовольняє автомодельний розв'язок у вигляді хвилі збудження $du/d\xi = \sigma u(1-u)$, де $\xi = z - Vt$. Знайти швидкість поширення збудження по волокну

V . Отримати функцію $u(\xi)$ і зобразити профіль хвилі.

2.2.1.4. Хвиля перекидання в одновимірному середовищі описується модельним рівнянням

$$\frac{\partial T}{\partial t} = f(T) + D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},$$

де

$$f(u) = \begin{cases} -\gamma(T - T_0), & T < T_c; \\ -\gamma(T - T_1), & T > T_c, \end{cases}$$

причому $T_0 < T_c < T_1$, $\gamma > 0$.

а) За яких умов у середовищі побіжить хвиля запалювання? Побудуйте її фазовий портрет.

б) Знайдіть залежність $T(\xi)$, де $\xi = z - Vt$, а також швидкість V хвилі перекидання та ширину фронту цієї хвилі.

2.2.1.5. За якої заміни змінної кінетична функція рівняння

$$\frac{\partial X}{\partial t} = K_1 A X^2 - K_2 X^3 - K_3 X + K_4 B + D \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}$$

набуває вигляду

$$f(u) = u(u - u_0)(1 - u)?$$

2.2.1.6. Дослідіть, чи є розв'язок вигляду

$$w(u) = \sigma u(1 - u)$$

єдиним для рівняння

$$Dw \frac{dw}{du} + V_0 w + u(u - u_0)(1 - u) = 0.$$

Якщо існують інші розв'язки, знайдіть їх та з'ясуйте їхній фізичний зміст.

2.2.1.7. На осі u_0 виділіть області стійкості кожного з однорідних стаціонарних розв'язків рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u(u - u_0)(1 - u) + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

щодо гармонічних у просторі збурень із хвильовим числом k . Які біфуркації можливі в системі при зміні значення u_0 ?

2.2.1.8. Переконайтеся шляхом безпосередньої підстановки розв'язку $u(\xi)$, що для стаціонарної хвилі, описуваної рівнянням

$$D \frac{d^2 u}{d\xi^2} + V_0 \frac{du}{d\xi} + u(u - u_0)(1 - u) = 0,$$

інтеграли

$$\int_{-\infty}^{\infty} f[u(\xi)] d\xi \text{ та } \int_0^1 f(u) du,$$

які визначають знак швидкості цієї хвилі, справді перетворюються в нуль при однакових

значеннях параметра u_0 .

2.2.1.9. На плоскому фронті хвилі перекидання утворилося викривлення з радіусом кривини R . Оцініть час його релаксації.

2.2.1.10. Поширення в просторі популяції, що розмножується діленням, описується модельним рівнянням

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha m(n)n + D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2},$$

де

$$m(n) = \begin{cases} M - \beta n, & 0 < n < M/\beta; \\ 0, & n \geq M/\beta \end{cases}$$

– функція, що характеризує харчові ресурси. Розрахувати швидкість та форму профілю хвилі переходу з одного стаціонарного стану в інший (хвилі заселення).

2.2.1.11. Поширення в просторі популяції, що розмножується статевим шляхом, описується модельним рівнянням

$$\frac{\partial n}{\partial t} = m(n)n^2 + D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2},$$

де

$$m(n) = \begin{cases} M - \beta n, & 0 < n < M/\beta; \\ 0, & n \geq M/\beta \end{cases}$$

– функція, що характеризує харчові ресурси.

а) Побудувати фазовий портрет для стаціонарних хвиль системи.

б) Розрахувати форму стаціонарної хвилі, її швидкість і ширину фронту.

2.2.1.12. Поширення в просторі популяції, що розмножується статевим шляхом, описується (з урахуванням природної смертності) модельним рівнянням

$$\frac{\partial n}{\partial t} = m(n)n^2 - \alpha n + D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2},$$

де

$$m(n) = \begin{cases} M - \beta n, & 0 < n < M/\beta; \\ 0, & n \geq M/\beta \end{cases}$$

– функція, що характеризує харчові ресурси.

а) Побудувати фазовий портрет для стаціонарних хвиль системи. До якого типу вони належать?

б) Розрахувати форму стаціонарної хвилі, її швидкість і ширину фронту.

2.2.1.13*. Для двовимірного бістабільного середовища побудуйте числовий розв'язок, що відповідає поширенню хвилі перекидання від колового джерела. Побудуйте залежність швидкості хвилі перекидання від радіусу кривини її фронту і порівняйте її з результатом аналітичного розрахунку.

2.2.2. Біжучі імпульси

Перейдемо тепер до розгляду автохвиль у середовищах із відновленням.

Середовища з відновленням (інакше їх називають збудливими середовищами) схожі на бістабільні, але в них один із стаціонарних станів є метастабільним, так що через деякий скінчений проміжок часу після збудження середовища спонтанно переходять в основний стан. Автохвилі в таких середовищах можна уявити собі як послідовність двох хвиль перекидання. Перша з них переводить систему з основного стану в метастабільний, а друга – знову в основний. Такі автохвилі дістали назву біжучих імпульсів.

Відзначимо, що в початковий момент часу (на передньому фронті біжучого імпульсу)

метастабільний стан є більш "енергетично вигідним". Тому перехід у цей стан можна розглядати як результат розвитку деякої нестійкості. Однак із часом метастабільний стан змінює свій характер, так що тепер більш "енергетично вигідним" стає основний стан. В результаті знову розвивається нестійкість, і система повертається до основного стану, після чого цей стан поступово відновлює свій первісний характер.

Прикладами середовищ із відновленням можуть служити, наприклад, ліс, що знову виростає після лісової пожежі, нервово волокно, що може збуджуватись зовнішнім подразником, а потім спонтанно переходити в стан спокою, та інші.

Користуючись уявленнями, запозиченими з радіоелектроніки, найпростіше одновимірне середовище з відновленням можна уявити собі як ланцюжок мультивібраторів у режимі очікування. Імпульс запуску, що надходить на вхід крайнього в ланцюжку мультивібратора, переводить його з основного стану в збуджений (метастабільний). При цьому на його виході одночасно формується імпульс запуску, що надходить на вхід наступного мультивібратора. В результаті вздовж ланцюжка біжить хвиля перекидання. Через деякий час мультивібратори починають спонтанно переходити в основний стан. В результаті вздовж ланцюжка біжить нова хвиля перекидання. Після завершення відповідних перехідних процесів ланцюжок може реагувати на новий імпульс запуску.

Історично перше дослідження біжучих імпульсів у середовищі з відновленням було виконане, як уже згадувалося (п. 2.1.1.2), А. Ходжкіном та Е. Хакслі – вони експериментально дослідили поширення імпульсу збудження в гігантському аксоні (нервовому волокні) кальмара, запропонувавши математичну модель цього процесу (модель Ходжкіна – Хакслі)⁸.

Ми почнемо наш розгляд з найпростішого типу автохвиль у середовищах із відновленням, а саме одиночних біжучих імпульсів, а в наступному підрозділі розглянемо періодичні послідовності таких імпульсів.

2.2.2.1. Рівняння, що описують середовища з відновленням

Середовища з відновленням описуються системою двох нелінійних кінетичних рівнянь із дифузією:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = f_1(u, v) + D_1 \Delta u; \\ \frac{\partial v}{\partial t} = f_2(u, v) + D_2 \Delta v. \end{cases} \quad (2.2.34)$$

Для стаціонарного однорідного випадку система (2.2.34) набуває вигляду

$$\begin{cases} f_1(u, v) = 0; \\ f_2(u, v) = 0. \end{cases} \quad (2.2.34 \text{ а})$$

Нас цікавитиме випадок, коли система (2.2.34 а) має єдиний стійкий розв'язок $u = u_0, v = v_0$.

Аналітичне дослідження системи (2.2.34) можливе тоді, коли характерні часи зміни величин u і v істотно відмінні. Нехай, наприклад, величина u змінюється швидко, а величина v – повільно. Тоді для останньої дифузії можна знехтувати, вважаючи, що помітні градієнти цієї величини не виникають. У результаті система (2.2.34) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = f_1(u, v) + D \Delta u; \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \mu f_2(u, v), \quad \mu \ll 1. \end{cases} \quad (2.2.34 \text{ б})$$

Систему рівнянь (2.2.34 б) можна розв'язувати шляхом виділення ділянок швидкого і повільного руху.

⁸ Hodgkin, A., and Huxley, A. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.* **117**, 500–544. (1952).

2.2.2.2. Горіння з виділенням інгібітору (модель Фітц-Х'ю – Нагумо)

Конкретизуємо модель середовища з відновленням. Розглянемо знову середовище, в якому можливий процес горіння (див. п. 2.2.1.1). Нехай тепер горіння супроводжується виділенням інгібітору. Інгібітор – це речовина, що пригнічує процес горіння (зокрема, зменшує тепловиділення при горінні). Якщо інгібітор, який виділяється, буде накопичуватися, то через деякий час горіння стане неможливим. Щоб забезпечити відновлення середовища, вважаємо, що за відсутності горіння інгібітор з часом може розпадатись (або вивітрюватися), так що його рівноважна концентрація, яка встановлюється в результаті балансу між виділенням і розпадом, є монотонно зростаючою функцією температури.

Виділення інгібітору при горінні робить метастабільним стаціонарний стан горіння, який у моделі без інгібітору був стійким. Справді, поступове накопичення інгібітору при горінні з часом робить горіння неможливим, тобто бістабільність зникає, і система спонтанно переходить у стан відсутності горіння. Але через деякий час після цього інгібітор розпадається, і система знову набуває властивості бістабільності.

Поведінка середовища, де горіння супроводжується виділенням такого інгібітору, описується системою двох нелінійних кінетичних рівнянь із дифузією вигляду (2.2.34). Апроксимуючи кінетичну функцію для температури кубічним поліномом, як це було зроблено вище (п. 2.2.1.6), і вважаючи, що рівноважна концентрація інгібітору прямо пропорційна температурі, відрахованій від температури навколишнього середовища (вона відповідає відсутності горіння і, відповідно, нульовій концентрації інгібітору), ці рівняння можна подати у формі:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha T(1-T)(T-T_0) - \beta n + \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}; \quad (2.2.35)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n - \gamma T}{\tau} + D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2},$$

де n – концентрація інгібітору, а параметр T_0 задовольняє умові $0 < T_0 < 1/2$ (за виконання цієї умови при $n = 0$ "енергетично вигідним" є поширення хвилі запалювання).

Рівняння (2.2.35) відповідають широко відомій у літературі моделі Фітц-Х'ю – Нагумо⁹, запропонованій для опису поширення імпульсів збудження в нервових волокнах. З математичної точки зору вона є спрощеним варіантом згаданої вище моделі Ходжкіна – Хакслі.

2.2.2.3. Біжучий імпульс (якісний розгляд)

Розглянемо тепер якісно біжучий імпульс у середовищі, описуваному рівняннями (2.2.35), де горіння супроводжується виділенням інгібітору.

Нехай при $n = 0$ „різниця потенціалів”

$$\Delta\Phi \equiv \int_{T_1}^{T_2} f_1(T, n) dT, \quad f_1(T, n) = \alpha T(1-T)(T-T_0) - \beta n, \quad (2.2.36)$$

між станами $T = 0$ і $T = 1$ додатна, $\Delta\Phi > 0$, так що середовище може перейти зі стану $T = 0$ у стан $T = 1$. Тоді, якщо на межі активного середовища є область горіння, від неї побіжить хвиля запалювання. Іншими словами, при $n = 0$ на фронті хвилі перекидання виділяється теплота, в результаті чого область горіння розширюється. Але за фронтом хвилі запалювання почнеться виділення інгібітору. Зростання концентрації інгібітору спричинить „опускання” графіка кінетичної функції $f_1(T, n) = f_1(T, n = 0) - \beta n$ (рис. 2.2.12 а). Коли концентрація інгібітору перевищить деяке порогове значення, знак „різниць потенціалів” зміниться, в результаті чого стан горіння перестане бути „енергетично вигідним”, і за хвилею запалювання по-

⁹ Див.: FitzHugh R. Mathematical models of excitation and propagation in nerve. // Biological Engineering. Ed. by H.P.Schwan. N.Y. Mc.Graw-Hill, 1965. Pp.1-85. Р. Фітц-Х'ю (Richard FitzHugh, 1922 - 2007) – американський біофізик. Й. Нагумо (Jin-Ichi Nagumo, 1926-1999) – японський фізик і електроінженер, професор Токійського університету. Модель Фітц-Х'ю – Нагумо запропонована першим з авторів для опису біологічної системи (1961), а другим – для електронної схеми (1962).

біжить хвиля гасіння. Це означає, що тепловиділення на фронті зміниться поглинанням тепла (за рахунок теплопередачі в напрямку, перпендикулярному до напрямку хвилі перекидання). Таким чином, на певній віддалі від біжучого фронту запалювання горіння припиниться, і сформується біжучий фронт гасіння.

Легко зрозуміти, що швидкість хвилі гасіння v_e в усталеному режимі має дорівнювати швидкості хвилі запалювання v_i ¹⁰. Нехай, наприклад, $v_e < v_i$. Тоді довжина імпульсу горіння буде збільшуватися. В результаті на його задньому фронті зростатиме концентрація інгібітору, збільшуватиметься „негативна різниця потенціалів” і, відповідно до формули (2.2.17), v_e зростатиме. Якщо ж $v_e > v_i$, імпульс горіння буде вкорочуватися, що спричинить зменшення швидкості його заднього фронту.

Як видно з рис. 2.2.12 а, в моделі Фітц-Х'ю – Нагумо зростання концентрації інгібітору приводить до зменшення як температури горіння, так і температури, що відповідає стаціонарному стану відсутності горіння. Тому температура в кінці імпульсу горіння буде дещо меншою, ніж на його початку, а температура за заднім фронтом імпульсу горіння – нижчою, ніж перед переднім.

Крім того, за заднім фронтом горіння буде висока концентрація інгібітору, який розкладається протягом деякого часу релаксації (в біофізиці його називають часом рефрактерності).

В результаті формується так званий біжучий імпульс, профіль якого (в нерухомій точці спостереження) якісно зображено на рис. 2.2.12 б. По суті, він являє собою пару хвиль перекидання, що йдуть одна за одною.

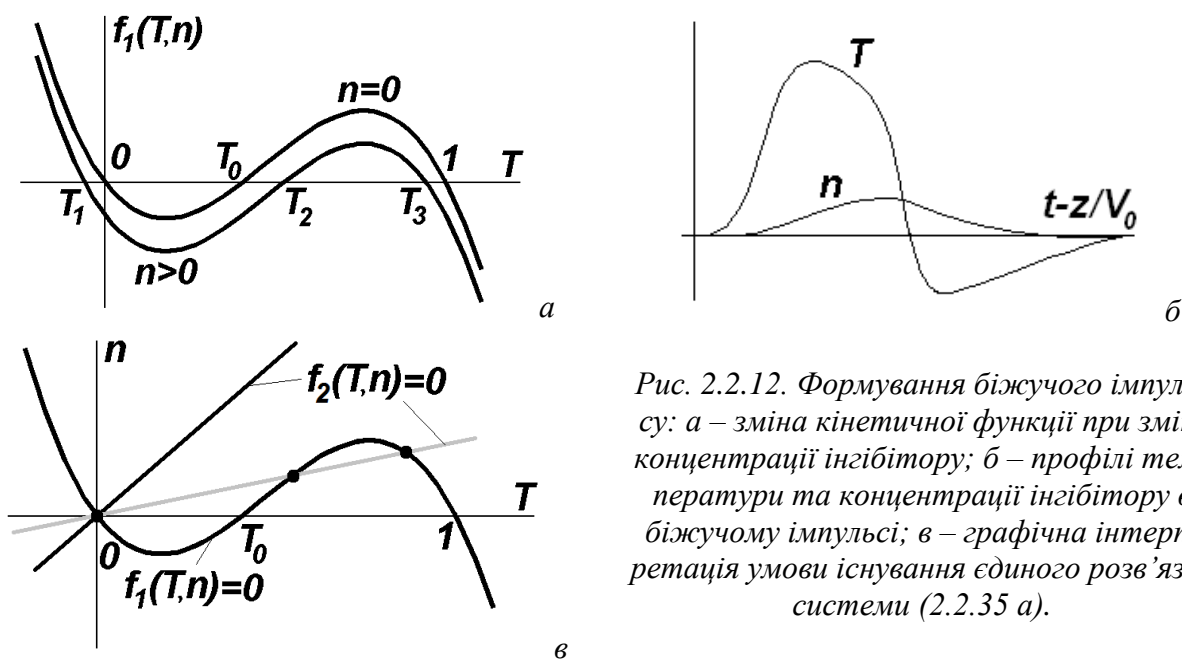


Рис. 2.2.12. Формування біжучого імпульсу: а – зміна кінетичної функції при зміні концентрації інгібітору; б – профілі температури та концентрації інгібітору в біжучому імпульсі; в – графічна інтерпретація умови існування єдиного розв'язку системи (2.2.35 а).

2.2.2.4. Розрахунок параметрів біжучого імпульсу: використані наближення

Перш за все з'ясуємо, чи має середовище, описуване рівняннями (2.2.35), єдиний стаціонарний однорідний стан. Система рівнянь для параметрів однорідного стаціонарного стану (2.2.34 а) набуває вигляду

$$\begin{cases} \alpha T(1-T)(T-T_0) - \beta n = 0; \\ n - \gamma T = 0. \end{cases} \quad (2.2.35 \text{ а})$$

Вона зводиться до рівняння

¹⁰ Індеси походять від англійських слів ignition (запалювання) та extinction (гасіння).

$$\alpha T(1-T)(T-T_0) - \beta \gamma T = 0, \quad (2.2.36)$$

яке має єдиний дійсний корінь $T = 0$ (і, відповідно, $n = 0$) за виконання умови

$$(1-T_0)^2 < 4\beta\gamma/\alpha \quad (2.2.37)$$

(див. рис. 2.2.12 в; нахил світлої лінії відповідає існуванню трьох коренів, нахил темної лінії, що задовольняє умову (2.2.37) – існуванню лише одного кореня).

Систему (2.2.35) вдається розв'язати аналітично в тому випадку, якщо дифузією інгібітору можна знехтувати, а характерний час зміни концентрації інгібітору (за порядком величини він визначається параметром τ) значно перевищує характерний час зміни температури Δt (2.2.26). В цьому випадку можна вважати, що

– просторова зміна концентрації інгібітору є настільки плавною, що його дифузією можна знехтувати;

– в областях фронтів імпульсу горіння концентрація інгібітору залишається незмінною, а в усіх інших областях просторова і часова зміна температури є настільки плавною, що похідними в першому рівнянні системи (2.2.35) можна знехтувати.

З урахуванням першого з висловлених припущень після переходу до автомоделної змінної $\xi = z - V_0 t$ система (2.2.35) набуває вигляду

$$\begin{cases} \chi \frac{d^2 T}{d\xi^2} + V_0 \frac{dT}{d\xi} + \alpha T(T-T_0)(1-T) - \beta n = 0; \\ V_0 \frac{dn}{d\xi} = \frac{n - \gamma T}{\tau}. \end{cases} \quad (2.2.35 \text{ б})$$

Фронти біжучого імпульсу описуються першим рівнянням системи (2.2.35 б) при $n = \text{const}$. Проміжки між фронтами, де просторова та часова зміна температури є повільною, описуються редукованою системою (2.2.35 б):

$$\begin{cases} \beta n = \alpha T(T-T_0)(1-T); \\ V_0 \frac{dn}{d\xi} = \frac{n - \gamma T}{\tau}. \end{cases} \quad (2.2.35 \text{ в})$$

Зазначимо, що описаний вище підхід відповідає відомому методу розв'язання диференціальних рівнянь чи систем таких рівнянь методом виділення ділянок швидкого та повільного руху. На ділянках швидкого руху старші похідні в рівнянні суттєві, на ділянках же повільного руху ними можна знехтувати (пор. системи (2.2.35 б) та (2.2.35 в)).

Розв'язок першого рівняння системи (2.2.35 б) при $n = 0$ нам уже відомий – це хвиля перекидання вигляду (2.2.23),

$$T(\xi) = \frac{\exp[-\sigma(\xi - \xi_0)]}{1 + \exp[-\sigma(\xi - \xi_0)]}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\alpha}{2\chi}} \quad (2.2.38)$$

(ξ_0 – константа інтегрування), що рухається зі швидкістю (див. (2.2.22 а))

$$V_0 = \sqrt{\frac{\alpha\chi}{2}} (1 - 2T_0). \quad (2.2.39)$$

Тепер, знаючи ширину фронту хвилі запалювання $1/\sigma$ та швидкість цієї хвилі V_0 , можна конкретизувати умову чинності даного розрахунку:

$$\tau \gg \Delta t \equiv \frac{1}{\sigma V_0} = \frac{1}{\alpha(1/2 - T_0)} \quad (2.2.40)$$

(характерний час зміни концентрації інгібітору τ значно більший від тривалості фронту біжучого імпульсу Δt).

2.2.2.5. Імпульс горіння

Перейдемо тепер до аналізу імпульсу горіння. Лінеаризуємо праву частину першого

рівняння системи (2.2.35 в), вважаючи, що $T = 1 - \delta T$, $0 < \delta T \ll 1$ (ця умова може бути забезпечена малим значенням параметра β):

$$\beta n \approx \alpha(1 - T_0) \delta T = \alpha(1 - T_0)(1 - T), \quad (2.2.41)$$

звідки

$$T = 1 - \frac{\beta n}{\alpha(1 - T_0)}. \quad (2.2.41 \text{ а})$$

Тоді друге рівняння системи (2.2.35 в) набуває вигляду:

$$\frac{dn}{d\xi} = \frac{n - n_\infty}{\theta_1 V_0}, \quad (2.2.42)$$

де використано позначення

$$n_\infty = \frac{\gamma}{1 + \frac{\gamma\beta}{\alpha(1 - T_0)}}, \quad \theta_1 = \frac{\tau}{1 + \frac{\gamma\beta}{\alpha(1 - T_0)}}. \quad (2.2.43)$$

Інтегруючи рівняння (2.2.42) з граничною умовою $n(\xi = 0) = 0$, де точка $\xi = 0$ відповідає передньому фронту імпульсу горіння, отримуємо:

$$n(\xi) = n_\infty [1 - \exp(\xi / \theta_1 V_0)], \quad \xi < 0. \quad (2.2.44)$$

Для визначення тривалості імпульсу горіння слід використати умову рівності швидкостей його переднього та заднього фронтів. Це, в свою чергу, означає, що в кінці імпульсу горіння „різниця потенціалів” (2.2.36) між точкою горіння і точкою відсутності горіння повинна бути такою самою за величиною і протилежною за знаком щодо „різниці потенціалів” між цими точками перед початком імпульсу горіння (рис. 2.2.13). Додаткове припущення, яке неважко підтвердити безпосереднім розрахунком, полягає в тому, що залежність $T(\xi)$ на передньому та задньому фронтах імпульсу горіння однакова (з точністю до константи).

Нехай $f_1(T)$ – кінетична функція першого рівняння системи (2.2.35), що відповідає відсутності інгібітору, $n = 0$, а $f_{2,3}(T)$ – кінетичні функції, що відповідають ненульовим концентраціям інгібітору і задовольняють умовам

$$\int_{T_c - \Delta T}^{T_c + \Delta T} f_2(T) dT = 0, \quad \int_{T_1}^{T_3} f_3(T) dT = - \int_0^1 f_1(T) dT$$

(див. рис. 2.2.13). Очевидно, для отримання кривої $f_3(T)$ криву $f_1(T)$ необхідно опустити на величину $2\Delta f$, де Δf – величина на яку треба опустити криву $f_1(T)$, щоб отримати криву $f_2(T)$.

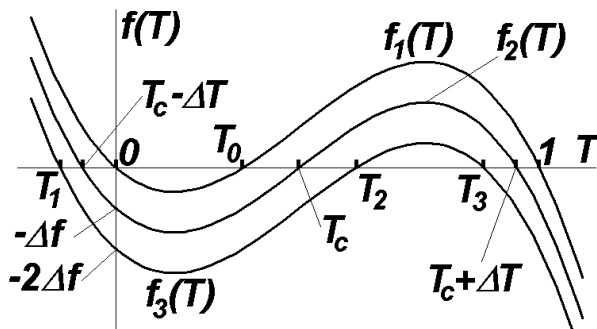


Рис. 2.2.13. До визначення тривалості імпульсу горіння

Крива $f_2(T)$ є непарною функцією щодо аргументу, який відраховується від її середньої стаціонарної точки T_c :

$$f_2(T) = -\alpha(T - T_c) \left[(T - T_c)^2 - (\Delta T)^2 \right]. \quad (2.2.45)$$

Тоді з рівності

$$f_2(T) = f_1(T) - \Delta f, \quad (2.2.46)$$

прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях T , можна знайти параметри T_c , ΔT і Δf :

$$T_c = \frac{1+T_0}{3}, \quad (\Delta T)^2 = \frac{1-T_0+T_0^2}{3}, \quad \Delta f = \alpha \frac{(1-2T_0)(1+T_0)(2-T_0)}{27}. \quad (2.2.47)$$

Тепер максимальна концентрація інгібітору знаходиться з умови, що $f_3(T) = f_1(T) - 2\Delta f$:

$$n_{\max} = \frac{2\Delta f}{\beta} = \frac{2\alpha}{27\beta} (1-2T_0)(1+T_0)(2-T_0). \quad (2.2.48)$$

Відповідно довжину імпульсу горіння L_1 визначаємо з умови

$$n_{\infty} [1 - \exp(-L_1/\theta_1 V_0)] = n_{\max}. \quad (2.2.49)$$

Таким чином,

$$L_1 = \theta_1 V_0 \ln \frac{n_{\max}}{n_{\infty} - n_{\max}}. \quad (2.2.49 \text{ a})$$

2.2.2.6. Довжина релаксації та фазовий портрет

Хвиля гасіння, що завершує імпульс горіння, буде цілком подібна до хвилі запалювання. Відмінність лише в тому, що відбуватиметься перехід зі стану T_3 в стан T_1 . Величини T_3 та T_1 неважко визначити з рис. 2.2.13 (точки T_1 , T_2 та T_3 дзеркально симетричні відповідно точкам $T = 1$, T_0 та $T = 0$ щодо точки T_c):

$$T_1 = \frac{1-2T_0}{3}, \quad T_3 = \frac{2(T_0-1)}{3}. \quad (2.2.50)$$

Для опису процесу релаксації після проходження імпульсу горіння знову скористаємося системою (2.2.35 в). Вважаючи тепер, що $T = -\delta T$, $\delta T \ll 1$, запишемо її перше рівняння у формі

$$\beta n \approx \alpha T_0 \delta T = -\alpha T_0 T, \quad (2.2.51)$$

звідки

$$T = -\frac{\beta n}{\alpha T_0}. \quad (2.2.51 \text{ a})$$

Підставивши (2.2.51 а) до другого рівняння системи (2.2.35 в), можна отримати:

$$\frac{dn}{d\xi} = \frac{n}{\theta_2 V_0}, \quad (2.2.52)$$

де використане позначення

$$\theta_2 = \frac{\tau}{1 + \gamma\beta/\alpha T_0}. \quad (2.2.53)$$

Вважаючи тепер, що точка $\xi = 0$ відповідає задньому фронту імпульсу горіння, і враховуючи, що $n(\xi = 0) = n_{\max}$, після інтегрування рівняння (2.2.52) можна отримати:

$$n(\xi) = n_{\max} \exp(\xi/\theta_2 V_0). \quad (2.2.54)$$

Середовище набуде здатності до запалювання при $n \leq n_{\max}/2$, тому за (мінімальну) довжину релаксації (рефрактерності) можна прийняти величину

$$L_2 = \theta_2 V_0 \ln 2. \quad (2.2.55)$$

Профілі температури та концентрації інгібітору, що відповідають виконаному розрахунку, подані на рис. 2.2.14 а.

Оскільки система (2.2.35 б), яка використовувалася для аналізу біжучого імпульсу, відповідає системі з півтора ступенями вільності, то відповідний фазовий простір буде тривимірним. За координати можна, наприклад, узяти змінні n , T та $dT/d\xi$. Фазовий портрет біжучого імпульсу в цих координатах поданий на рис. 2.2.14 б. Ділянки АВ та CD, що лежать у площинах $n=0$ та $n=n_{\max}$ – це сепаратиси, що йдуть із сідла в сідло (пор. з рис. 2.2.7 г). Вони відповідають ділянкам швидкого руху – хвилі запалювання (AB) та хвилі гасіння (CD). Ділянки BC та DA відповідають повільному руху (BC – імпульс горіння, DA – час релаксації).

Біжучі імпульси, подібні до розглянутого, характерні й для інших середовищ із відновленням (наприклад, імпульс збудження в нервовому волокні або домен сильного поля в діоді Ганна).

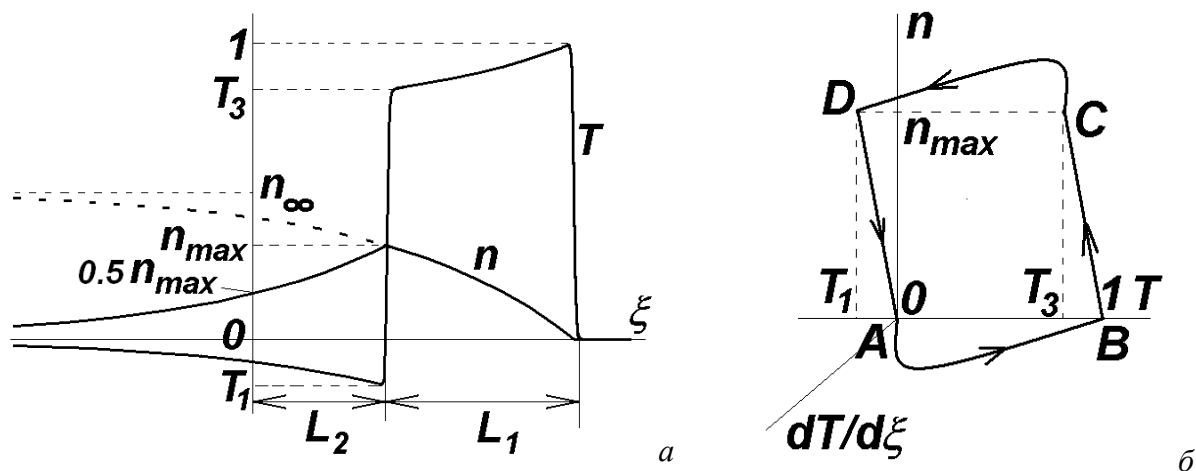


Рис. 2.2.14. Профілі (а) та фазовий портрет (б) біжучого імпульсу.

Контрольні питання до підрозділу 2.2.2

1. Якісно поясніть вигляд профілю температури для біжучого імпульсу в середовищі з відновленням.
2. Чим визначається максимальна концентрація інгібітору при поширенні біжучого імпульсу в середовищі з відновленням?
3. Як будується фазовий портрет для біжучого імпульсу в середовищі з відновленням у випадку, коли дифузією інгібітору можна знехтувати?
4. Чому в середовищі з відновленням хвиля запалювання та хвиля гасіння, що формують біжучий імпульс, мають однакову швидкість?
5. Як зміниться профіль біжучого імпульсу при врахуванні дифузії інгібітору?
6. Чим визначається тривалість біжучого імпульсу?
7. У чому полягає якісна відмінність між солітонами Кортевега – де Вріза та біжучими імпульсами?
8. Порівняйте між собою залежності швидкостей хвилі запалювання в бістабільному середовищі та біжучого імпульсу горіння в середовищі з відновленням від навколишньої температури.
9. Проаналізуйте застосовність понять фазової та групової швидкості до біжучих імпульсів.
10. Опишіть еволюцію в часі середовища з відновленням, яке в початковий момент характеризувалося довільними розподілами концентрації інгібітору та температури.

Задачі до підрозділу 2.2.2

2.2.2.1. Отримайте профілі температури на передньому та задньому фронтах імпульсу горіння в середовищі, описуваному рівняннями Фітц-Х'ю – Нагумо. Чим вони відрізняються?

2.2.2.2. Процес горіння, що супроводжується виділенням інгібітору, описується системою рівнянь

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + T(T - T_0)(1 - T) - \lambda n; \quad \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n - \gamma T}{\tau}, \quad 0 < T_0 < 1,$$

де T – безрозмірна температура (відраховується від температури навколишнього середовища), n – концентрація інгібітору. Параметри рівняння відповідають розв’язку у вигляді біжучого імпульсу. Час релаксації інгібітору τ вважати великим.

а) Як буде залежати швидкість біжучого імпульсу від залишкової концентрації інгібітору в середовищі в момент його запалювання?

б) Як буде залежати тривалість біжучого імпульсу від залишкової концентрації інгібітору в середовищі в момент його запалювання?

2.2.2.3*. Підібрати числові значення коефіцієнтів і побудувати числовий розв’язок системи рівнянь, що описують біжучий імпульс у середовищі з відновленням:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + T(T - T_0)(1 - T) - \lambda n;$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n - \gamma T}{\tau} + D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}.$$

Порівняти з результатом аналітичного розрахунку при $\tau \gg 1$, $D \rightarrow 0$.

2.2.2.4*. Система рівнянь, що описують біжучий імпульс у середовищі з відновленням, має вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + T(T - T_0)(1 - T) - \lambda n;$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n - \gamma T}{\tau} + D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}.$$

Числовими методами розрахувати швидкість стаціонарної хвилі в залежності від параметрів моделі.

2.2.2.5*. Для двовимірного середовища з відновленням побудувати числовий розв’язок, що відповідає поширенню біжучого імпульсу від колового джерела. Побудувати залежність швидкості хвилі перекидання від радіусу кривини її фронту і порівняти її з результатом аналітичного розрахунку.

2.2.2.6*. Дослідити поширення імпульсу горіння в середовищі, описуваному рівняннями

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + T(T - T_0 - \lambda n)(1 - T);$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n - \gamma T}{\tau}.$$

Вважати час релаксації інгібітору великим. Порівняти результати з розрахунком за моделлю Фітц-Х’ю – Нагумо.

2.2.3. Періодичні хвилі в середовищах із відновленням

Раніше (п.2.1.1) ми розглядали високочастотні періодичні хвилі в слабконелінійних середовищах, ініційовані зовнішнім збудженням, на прикладі активних ліній передач. Як уже вказувалося, при зниженні частоти зовнішнього збудження умова слабкої нелінійності перестає виконуватись. Одна з можливостей полягає в тому, що лінія в такому режимі може перетворитися на середовище з відновленням. Саме така ситуація реалізується, наприклад, для довгої лінії, поданої на рис. 2.1.3 (активна лінія, що відповідає моделі нервового волокна Ходжкіна – Хакслі). Опис цієї моделі, як уже вказувалося, зводиться до системи двох нелінійних кінетичних рівнянь із дифузією вигляду (2.2.34) або (2.2.34 б).

Поведінка активних ліній, збуджуваних зовнішнім періодичним джерелом, на високих та низьких частотах нагадує режими автогенератора Ван-дер-Поля. На високих частотах

хвилі в активній лінії схожі на квазігармонічних режим автогенератора, який реалізується при малих інкрементах. На низьких частотах, коли реалізується сильна нелінійність, хвилі в такій лінії стають подібними до релаксаційних коливань автогенератора – вони так само стають суттєво ангармонічними.

Розберемо режим періодичних автохвиль у середовищі з відновленням на о моделі Фітц-Х'ю – Нагумо. Періодичну хвилю в такому середовищі можна уявити як послідовність одиночних біжучих імпульсів (див. п. 2.2.2) – рис. 2.2.15 а-б. Якщо просторовий період цієї послідовності (довжина хвилі) λ задовольняє умову $\lambda \gg L$, де $L = L_1 + L_2$ – повна довжина біжучого імпульсу (з урахуванням довжини релаксації), то швидкість періодичної хвилі буде такою самою, як у одиночного імпульсу. Зі зменшенням λ швидкість спадає (поширення фронту йде на фоні залишкової концентрації інгібітору, через це і швидкість менша, бо зменшується різниця потенціалів, див. рис. 2.2.12 а).

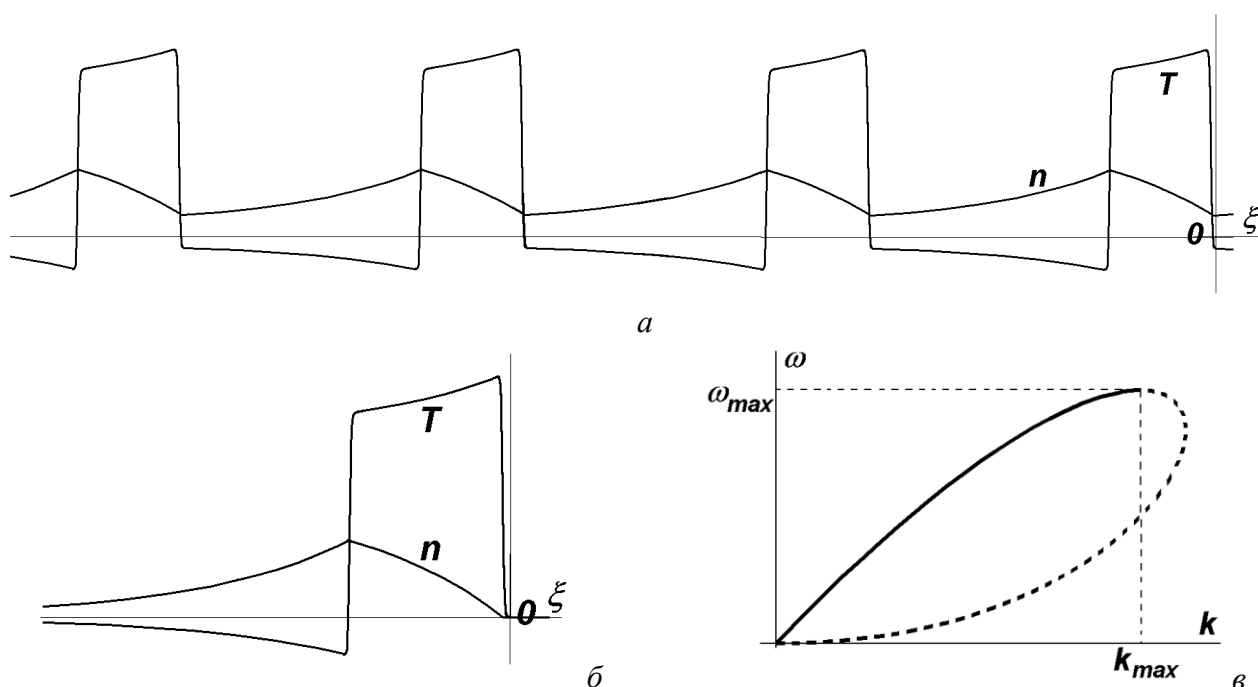


Рис. 2.2.15. Періодичні хвилі в середовищі з відновленням: а – профілі температури та концентрації інгібітору; б – одиночний біжучий імпульс у тому самому середовищі (для порівняння); в – нелінійна дисперсійна крива для таких хвиль (штриховою лінією показана частина, що відповідає нестійким розв'язкам)

Періодична послідовність імпульсів описується розв'язками вигляду $u = u(\theta)$, $v = v(\theta)$, де $\theta = \omega t - kz$ – фаза хвилі, причому $u(\theta + 2\pi) = u(\theta)$, $v(\theta + 2\pi) = v(\theta)$. Вони задовольняють системі рівнянь

$$\begin{cases} \omega \frac{du}{d\theta} = f_1(u, v) + Dk^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}; \\ \omega \frac{dv}{d\theta} = \mu f_2(u, v), \end{cases} \quad (2.2.34 \text{ в})$$

яку можна отримати з (2.2.34 б), і відповідають її граничному циклу. При довільних значеннях параметрів ω, k період руху вздовж граничного циклу – довільний. Вимагаючи, щоб він дорівнював 2π , можна отримати деякий зв'язок між ω і k – нелінійний закон дисперсії. При $k > k_{max} \geq 2\pi/L$ розв'язки виявляються нестійкими. Нелінійна дисперсійна крива для періодичних хвиль подана на рис. 2.2.15 в. Видно, що максимальному значенню хвильового

числа k_{\max} , при якому розв'язки ще залишаються стійкими, відповідає максимально можливе значення частоти.

Таким чином, у конкретному випадку середовища, описуваного моделлю Фітц-Х'ю – Нагумо, періодичні автохвилі реалізуються лише на низьких частотах.

Підкреслимо ще раз, що для збудження періодичної автохвилі в середовищі з відновленням необхідно мати періодичне джерело збудження.

Контрольні питання до підрозділу 2.2.3

1. Як можна збудити періодичну хвилю в середовищі з відновленням?
2. Чому періодичні хвилі в середовищах із відновленням мають обмеження зверху на величину хвильового числа?
3. Чому зі зростанням хвильового числа швидкість періодичної хвилі в середовищі з відновленням зменшується?
4. Джерело періодичних коливань, вміщене на початку одновимірної активної лінії, яка описується моделлю Фітц-Х'ю – Нагумо, вмикається в початковий момент часу. Опишіть поведінку кількох перших імпульсів, що поширюються вздовж лінії.

Задачі до підрозділу 2.2.3

2.2.2.1. Для активної лінії, що відповідає моделі нервового волокна Ходжкіна – Хакслі, отримайте систему двох нелінійних кінетичних рівнянь дифузійного типу. Знайдіть стаціонарні однорідні стани цієї системи. За яких умов вона описуватиме середовище з відновленням?

2.2.2.2*. Користуючись результатами розв'язання задачі 2.2.2.1, побудуйте числовий розв'язок, що відповідає

а) одиночному імпульсу збудження;

б) періодичній послідовності імпульсів збудження

в нервовому волокні, описуваному моделлю Ходжкіна – Хакслі.

2.2.2.3*. Побудувати числовий розв'язок системи рівнянь для середовища з відновленням

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + T(T - T_0)(1 - T) - \lambda n;$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n - \gamma T}{\tau} + D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2},$$

який відповідає періодичним хвилям. Скористатися періодичними за часом граничними умовами.

2.2.2.4*. Для середовища з відновленням, описуваного системою рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha T(1 - T)(T - T_0) - \beta n + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}; \\ \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n - \gamma T}{\tau} + D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2}, \end{cases}$$

побудувати нелінійну дисперсійну криву для періодичних коливань, користуючись числовими методами.

Висновки до розділу 2.2

1. Найпростішою моделлю сильнонелінійного активного середовища є бістабільне середовище, яке характеризується наявністю двох стійких стаціонарних однорідних станів рівноваги і одного нестійкого стану, який розділяє області притягання стійких. Прикладами таких середовищ можуть бути системи, де можливе горіння, середовища, де протікає хімічна реакція за моделлю Шльогля та інші. Бістабільне середовище можна описати одним нелінійним кінетичним рівнянням із дифузією.

2. Хвиля перекидання (біжучий фронт) у бістабільному середовищі – це хвиля, проходження якої переводить середовище з одного стійкого стаціонарного однорідного стану в інший. Хвиля перекидання поширюється від деякого джерела. На прикладі моделі середовища, в якому можливе горіння, можна сказати, що напрямок хвилі перекидання (хвиля запалювання чи хвиля гасіння) визначається балансом між виділенням тепла та його втратами (крім теплопередачі в поздовжньому напрямку) на фронті хвилі. Формально знак швидкості хвилі перекидання визначається інтегралом від кінетичної функції по проміжку між двома стаціонарними однорідними станами системи. У двовимірних середовищах величина швидкості біжучого фронту залежить від його кривини.
3. В екологічних популяціях, де в незаселеній області флуктуації принципово неможливі, спостерігається інший тип хвиль перекидання – хвилі заселення, що відповідають переходу з формально нестійкого стану в стійкий.
4. Середовища з відновленням, або збудливі середовища відрізняються від бістабільних тим, що один зі стійких станів системи виявляється метастабільним: після перебування в ньому протягом деякого часу елемент середовища спонтанно переходить до основного стану. Такі середовища описуються системою двох нелінійних кінетичних рівнянь із дифузією. Прикладом середовища з відновленням може служити середовище, де можливе горіння з виділенням інгібітору, або нервово волокно.
5. У середовищах із відновленням можливе поширення біжучих імпульсів. Для моделі середовища з горінням, що супроводжується виділенням інгібітору, такий імпульс являє собою послідовність хвиль запалювання та гасіння, які рухаються одна за одною з однаковою швидкістю. Протягом проходження імпульсу горіння (проміжку між хвилями запалювання та гасіння) в середовищі відбувається накопичення інгібітору, після проходження хвилі гасіння – розпад інгібітору, після завершення якого середовище переходить до основного стану.
6. Періодичне джерело в середовищі з відновленням може породжувати періодичну послідовність біжучих імпульсів. Часовий і просторовий періоди такої послідовності обмежені знизу.

Контрольні питання до розділу 2.2

1. Назвіть особливості автохвильових процесів порівняно з іншими відомими Вам типами хвиль.
2. Назвіть загальні властивості середовищ, у яких можуть мати місце автохвильові процеси.
3. Які автохвильові процеси можливі, на Вашу думку, в активному середовищі, що має три стійкі стани рівноваги?
4. Чи буде стійким плоский фронт біжучого імпульсу в двовимірній моделі?
5. Як пов'язані властивості середовищ із типами автохвильових процесів, що можливі в цих середовищах?
6. До якого типу активних середовищ належить, на Вашу думку, необмежений брьоселятор?

2.3. Джерела періодичних автохвиль

Досі ми розглянули різні типи періодичних автохвиль, збуджуваних в активних середовищах зовнішніми періодичними джерелами (високочастотні хвилі в активних лініях, фазові хвилі в автоколивних середовищах, періодичні хвилі в середовищах із відновленням). Перейдемо тепер до розгляду автономних періодичних автохвиль, які збуджуються за відсутності таких джерел.

Найпростіша система, в якій можуть виникнути такі хвилі – це відрізок активної лінії. Відбиття від кінців такого відрізка може породити позитивний зворотний зв'язок, який перетворює підсилювач на автогенератор. Однак, крім згаданих систем, можуть існувати локалізовані джерела автохвиль у безмежних активних середовищах. Від таких джерел можуть поширюватися спіральні або концентричні автохвилі.

Джерела спіральних автохвиль – так звані ревербератори – можуть існувати як у середовищах із відновленням, так і в середовищах автоколивного типу. Вони виникають у первісно однорідному середовищі за рахунок певного підбору початкових умов.

Натомість джерела концентричних автохвиль можуть мати різну природу. В автоколивних середовищах такі джерела, відомі як провідні центри, або пейсмейкери, виникають за рахунок локальних неоднорідностей середовища, причому такі області характеризуються підвищеною частотою автоколивань “елементарних автогенераторів”. У середовищах із відновленням джерела концентричних автохвиль можуть виникнути в однорідному середовищі за рахунок відповідного підбору початкових умов. Вони відомі як автопейсмейкери.

2.3.1. Генератор квазігармонічних коливань на активній лінії передачі

Уявимо собі ділянку звичайного хвильоводу, обмежену з двох боків провідними поверхнями. Така система являтиме собою резонатор. Коливання в такому резонаторі з часом згасатимуть через наявність дисипації. Якщо один з кінців резонатора зробити відкритим, з'явиться додатковий механізм втрат, пов'язаний з випромінюванням.

Тепер замість хвильоводу візьмемо ділянку активної лінії. Як ми вже знаємо (див. п. 2.1.1), в таких лініях сигнал підсилюється. Відбиття від кінців відрізка забезпечує позитивний (на певній частоті) зворотний зв'язок, який і перетворює підсилювач на генератор. В усталеному режимі енергія, що надходить в активну лінію ззовні (від джерела живлення) за одиницю часу, витрачається на випромінювання сигналу за межі відрізка лінії.

Фактично саме за таким механізмом працюють оптичні квантові генератори (лазери). Розглянемо тепер роботу автогенератора на відрізку активної лінії більш детально.

2.3.1.1. Схема автогенератора

Розглянемо відрізок активної лінії, описаної вище в п. 2.1.1.3. Хвиля, що поширюється в такій лінії, здатна відбиватися від її кінців. Оскільки в такій лінії хвиля підсилюється в напрямку поширення, то в результаті ми отримаємо зростання сигналу в часі за рахунок розвитку осциляторної нестійкості¹. За рахунок нелінійності зростання сигналу в такому генераторі обмежиться на певному рівні. Саме таким шляхом виникає генерація в лампі біжучої хвилі, лазері та ряді інших приладів.

Одна з найпростіших можливих схем автогенератора на відрізку активної лінії подана на рис. 2.3.1 а. Сама активна лінія моделюється ланцюжком індуктивностей Ldx , провідностей gdx та ємностей Cdx (пор. з рис. 2.1.4 б).

Лівий кінець активної лінії сполучений із джерелом напруги зміщення, прикладеної до нелінійних провідностей gdx , що входять до складу довгої лінії. Це зміщення $I_B R_B$ ² ство-

¹ Нагадаємо, що осциляторна нестійкість реалізується в просторово обмежених областях середовища з конвективною нестійкістю. При цьому конвективна нестійкість забезпечує підсилення сигналу в просторі, а відбиття хвиль від меж області – позитивний зворотний зв'язок. Див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009. С. 339-341.

² Індекс від англ. bias – зміщення (напруги).

рюється джерелом струму I_B та паралельним до нього внутрішнім опором R_B , який ми нижче вважатимемо значно меншим від характеристичного опору активної лінії. Іншими словами, в цьому наближенні лівий кінець лінії можна вважати замкненим накоротко. В результаті хвиля відбиватиметься від лівого кінця лінії без помітної зміни амплітуди. На практиці нерідко необхідно враховувати також паразитну індуктивність L_B опору R_B .

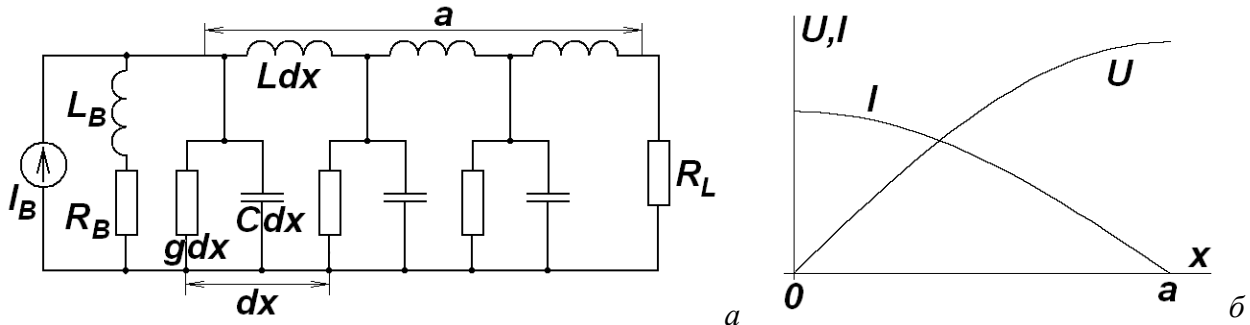


Рис. 2.3.1. Найпростіший автогенератор на відрітку активної лінії: а – схема; б – розподіл струму та напруги вздовж активної лінії.

На правому кінці активної лінії вміщений опір навантаження R_L ³. Його ми вважатимемо значно більшим від характеристичного опору лінії. Тоді в лінії встановиться стояча хвиля, причому на лівому її кінці буде максимум струму, а на правому – максимум напруги (рис. 2.3.1 б).

2.3.1.2. Розрахунок частоти генерації

В нульовому наближенні для розрахунку частоти генератора можна взяти до уваги лише реактивні елементи кола, наближено поклавши $g = 0$, $R_B = 0$, $R_L \rightarrow \infty$. Тоді характеристичний опір лінії буде

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (2.3.1)$$

а хвильове число для хвилі з частотою ω –

$$k(\omega) = \omega\sqrt{LC}, \quad (2.3.2)$$

де L та C – відповідно погонна індуктивність та погонна ємність. Оскільки лінія на правому кінці розімкнута, то її вхідний опір на лівому кінці буде $-i\rho \operatorname{ctg} ka$, де a – довжина лінії. На власній частоті цей опір повинен дорівнювати за величиною реактивному опору джерела $i\omega L_B$ і бути протилежним до нього за знаком. Таки чином, частота генерації визначається з трансцендентного рівняння

$$\omega L_B = \sqrt{\frac{L}{C}} \operatorname{ctg}(\omega\sqrt{LC}a), \quad (2.3.3)$$

або

$$\frac{aL}{L_B} = \varphi \operatorname{tg} \varphi, \quad \varphi = \omega\sqrt{LC}a. \quad (2.3.3 \text{ а})$$

Для крайніх випадків $aL/L_B \ll 1$ та $aL/L_B \gg 1$ маємо відповідно

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_B C a}} \quad (2.3.4 \text{ а})$$

та

³ Індекс від англ. load – (опір) навантаження.

$$\omega = \frac{\pi}{2a\sqrt{LC}}. \quad (2.3.4 \text{ б})$$

У першому з цих випадків генератор виступає як система із зосередженими параметрами (коливну систему формують розподілена ємність та зосереджена індуктивність зміщення), в другому – як система з розподіленими параметрами (довжина лінії в цьому випадку дорівнює точно чверті довжини генерованої хвилі).

2.3.1.3. Розрахунок усталеної амплітуди сигналу

Найпростіший шлях знаходження усталеної амплітуди сигналу розподіленого автогенератора – це використання умови балансу між потужністю, що виділяється активними елементами, та потужністю, що розсіюється на опорі навантаження.

Потужність, що виділяється в лінії, складає величину

$$P_+ = -\int_0^a I(x)U(x)dx = \int_0^a SU^2(x) \left[1 - \frac{U^2(x)}{3K^2} \right] dx \quad (2.3.5)$$

(використано явний вигляд вольт-амперної характеристики нелінійної провідності (2.1.1)). Вважаючи просторовий інкремент хвилі в лінії малим, можна покласти

$$U(x) = U_m \sin kx$$

(див. рис. 2.3.1 б), де хвильове число k визначається співвідношеннями (2.3.2)-(2.3.3). Вважаючи умову $aL/L_B \gg 1$ виконаною, отримуємо, що $k = \pi/2a$. Тоді інтегрування дає:

$$P_+ = \frac{2a}{\pi} SU_m^2 \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{U_m^2}{3K^2} \sin^2 \varphi \right) \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{a}{2} SU_m^2 \left(1 - \frac{U_m^2}{4K^2} \right). \quad (2.3.6)$$

З іншого боку, на опорі навантаження розсіюється потужність

$$P_- = \frac{U_m^2}{2R_L}. \quad (2.3.7)$$

Прирівнюючи праві частини (2.3.6) та (2.3.7), легко отримати:

$$U_m = 2K \sqrt{1 - \frac{1}{aSR_L}}. \quad (2.3.8)$$

Умова позитивності підкореневого виразу $aSR_L > 1$ – це, по суті, амплітудна умова генерації. Справді, величина aS – це повна негативна провідність лінії (при малих відхиленнях від обраної робочої точки), паралельно до якої увімкнено опір навантаження R_L . Для того, щоб розподілена коливна система з таким резистивним елементом могла самозбудитися, його еквівалентна провідність (або еквівалентний опір) повинна бути від'ємною.

Підставивши (2.3.8) до (2.3.7) або до (2.3.6), легко знайти вихідну потужність розподіленого генератора в усталеному режимі:

$$P = \frac{2K^2}{R_L} \left(1 - \frac{1}{aSR_L} \right). \quad (2.3.9)$$

Нагадаємо, що результати наведеного розрахунку справедливі за умов $R_B \ll \rho \ll R_L$ та $aL/L_B \gg 1$.

Як випливає з (2.3.9), потужність генерації зростає зі зростанням довжини лінії. Але, як випливає з формули (2.3.4 б), при цьому одночасно спадає частота генерації, що врешті рещт приведе до порушення умови квазігармонічності сигналу (2.1.10). Підставивши значення частоти (2.3.4 б), цю умову можна переписати у формі

$$a \ll \frac{\pi}{\rho S}. \quad (2.1.10 \text{ а})$$

Контрольні питання до підрозділу 2.3.1

1. Як, на Вашу думку, вплине врахування активних опорів на розраховану частоту генерації автогенератора на активній лінії?
2. Чи можливе самозбудження автогенератора на активній лінії на частоті, коли довжина цієї лінії дорівнює $(n/2 + 1/4)\lambda$ (λ – довжина хвилі в лінії, що відповідає частоті самозбудження)?
3. Чому за умови $aSR_L \gg 1$ потужність автогенератора на активній лінії перестає залежати від довжини цієї лінії?

Задачі до підрозділу 2.3.1

2.3.2.1. Користуючись числовими методами, побудуйте залежність нормованої частоти φ генерації автогенератора на активній лінії від параметра aL/L_B .

2.3.2. Ревербератори в середовищах із відновленням

Щоб зрозуміти механізм виникнення ревербератора в однорідному середовищі з відновленням (див. вище п.2.2.2-2.2.3), розглянемо спочатку поширення біжучого імпульсу вздовж тонкого кільця радіуса R . Якщо кільце тонке, задачу можна вважати одновимірною. Їй відповідає той самий розв'язок, що й періодичній послідовності імпульсів із просторовим періодом $L = 2\pi R$. Швидкість імпульсів зростає із збільшенням L і прямує до граничного значення V_0 , коли L стає значно більшим від довжини одиночного біжучого імпульсу.

Тепер будемо збільшувати зовнішній радіус кільця, спрямовуючи його до нескінченності. В результаті ми прийдемо до задачі про біжучий імпульс, що обертається навколо отвору радіусу R . На перший погляд, фронт такого імпульсу являтиме собою промінь, що обертається з частотою ω . Але насправді це не так, бо в такому випадку далеко від кільця швидкість фронту необмежено зростатиме, тоді як вона має дорівнювати певній скінченній величині V_0 (тут і нижче залежністю швидкості фронту від його кривини нехтуємо). Отже, віддалені ділянки фронту відстають, в результаті чого сам фронт скручується в спіраль.

Спіральна хвиля в середовищі з відновленням, що обертається навколо кільця, була вперше розглянута в роботі Н. Вінера та А. Розенблюта⁴.

2.3.2.1. Розрахунок форми фронту спіральної хвилі

Наведені вище міркування мають якісний характер. Розглянемо питання про форму спіральної хвилі більш акуратно.

Нехай у стаціонарному режимі спіраль незмінної форми обертається з кутовою швидкістю ω . Положення її фронту визначається співвідношенням $\varphi(r, t) = \omega t - \chi(r)$, де функція $\chi(r)$ визначає форму спіралі (рис. 2.3.2 а). Як видно з рис. 2.3.2 б, швидкість V_r точки перетину спіралі з кільцем $r = \text{const}$ складає величину $V_0/\cos\alpha$, де α – кут між нормаллю до хвильового фронту і дотичною до кільця.

Як видно з того ж рис. 2.3.2 б, кут $\pi/2 - \alpha$ можна записати через похідну функції, що описує форму фронту:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{d[r(\varphi)]}{d(r\varphi)} = \frac{1}{r} \frac{dr(\varphi)}{d\varphi} = \frac{1}{r} \left[\frac{d\chi(r)}{dr} \right]^{-1} \quad (2.3.10)$$

(враховано, що на рис. 2.3.2 б по осі абсцис відкладена величина $r\varphi$, по осі ординат – r).

⁴ Див.: Н. Вінер, А. Розенблют. Кибернетический сборник, вып.3, М., Иностранная литература, 1961, с.3-56. Н. Вінер (Norbert Wiener, 1894 - 1964) – видатний американський математик, засновник кібернетики та теорії штучного інтелекту. Отримав також яскраві результати в галузі теорії ймовірностей, статистики, зв'язку та теорії управління. А. Розенблют (Arturo Rosenbluth Stearns, 1900 - 1970) – мексиканський фізик та фізіолог, один з піонерів кібернетики.

Тоді з (2.3.10) можна знайти $\cos \alpha$:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+r^2(d\chi/dr)^2}}. \quad (2.3.11)$$

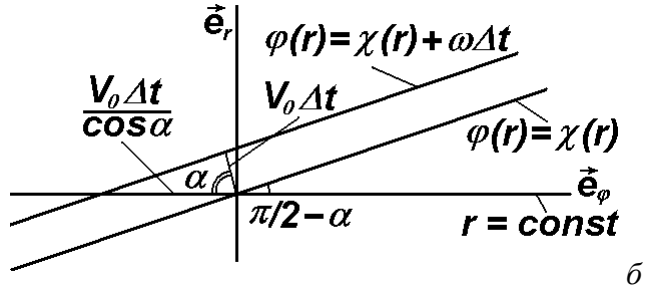
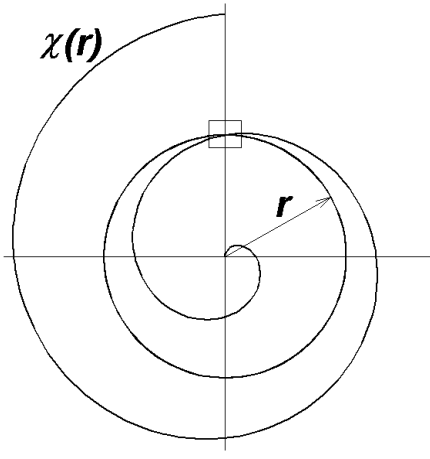


Рис. 2.3.2. Форма фронту спіральної хвилі $\chi(r)$ та її перетин з лінією $r = \text{const}$ (рисунок праворуч є збільшеним фрагментом лівого рисунку).

Таким чином,

$$V_r = \frac{V_0}{\cos \alpha} = V_0 \sqrt{1+r^2(d\chi/dr)^2}. \quad (2.3.12)$$

З іншого боку, оскільки спіраль обертається як ціле з частотою ω , то $V_r = \omega r$. Підставивши останнє співвідношення до (2.3.12), отримуємо рівняння щодо невідомої функції $d\chi(r)/dr$ у формі

$$\omega r = V_0 \sqrt{1+r^2(d\chi/dr)^2}. \quad (2.3.13)$$

Частоту ω обертання спіралі визначимо з умови, що до центрального отвору радіусу R фронт підходить під прямим кутом ($\alpha = \pi/2$), тобто $V_0 = \omega R$. Тоді (2.3.13) набуває вигляду:

$$r = R \sqrt{1+r^2(d\chi/dr)^2}. \quad (2.3.14)$$

Розв'язавши (2.3.14) щодо $d\chi(r)/dr$, отримаємо диференціальне рівняння, яке визначає форму фронту спіральної хвилі:

$$\left(\frac{d\chi}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{R^2}. \quad (2.3.15)$$

Таким чином, форма спіралі визначається співвідношенням

$$\chi(r) = \int_R^r \sqrt{\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2}} dr. \quad (2.3.16)$$

При $r \gg R$ (2.3.16) набуває вигляду:

$$\chi(r) = \chi_0 + r/R, \quad (2.3.16 \text{ а})$$

тобто на великих віддальх від ядра спіраль є архімедовою (зі сталим кроком). Крок h такої спіралі визначається співвідношенням $\chi(r+h) - \chi(r) = 2\pi$, звідки $h = 2\pi R$.

Слід відзначити, що формула (2.3.16), яка описує форму спіральної хвилі, дає помилку при $r \rightarrow R$, оскільки в цій області слід, строго кажучи, брати до уваги залежність швидкості фронту хвилі від його кривини.

Крім однорукавних спіралей, у яких зміна азимутального кута на 2π відповідає одному періоду хвилі, у середовищах із відновленням можуть існувати (реально спостерігаються в експериментах) і багатурукавні спіралі, у яких зміна азимутального кута на 2π від-

повідляє цілому числу періодів (рис. 2.3.3).

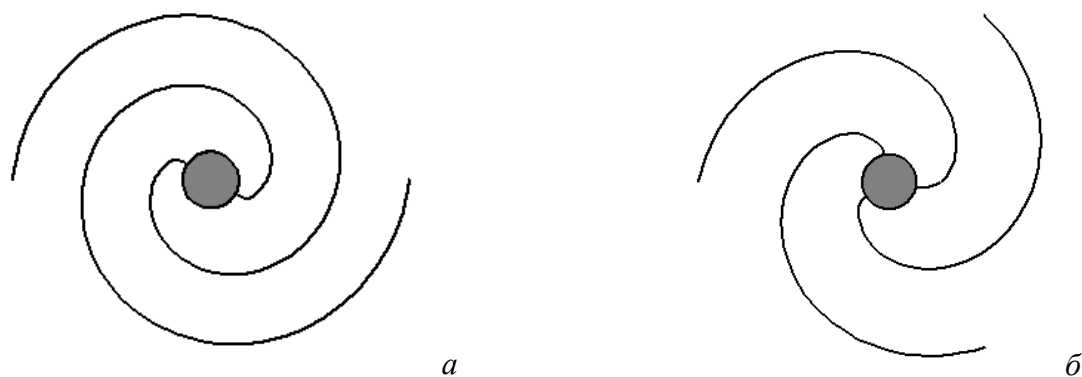


Рис. 2.3.3. Дворукавна (а) та трирукавна (б) спіралі.

2.3.2.2. Природа ядра спіральної хвилі

В експериментах спіральні хвилі спостерігаються й за відсутності центрального отвору. Всередині ядра при цьому зберігається стан спокою (рефрактерності).

Фізично існування ядра спіралі (в рамках моделі горіння з виділенням інгібітору) можна пояснити тим, що кінець спіралі, що обертається навколо її ядра, безперервно виділяє інгібітор. В результаті дифузії інгібітору його концентрація в ядрі весь час підтримується на рівні, який робить неможливим запалювання.

Знехтувавши тепер для спрощення дифузією інгібітору, оцінимо розмір ядра спіральної хвилі. У стаціонарному режимі довжина кола, що обмежує ядро, не може бути меншою від мінімального періоду повторення імпульсів $L_{\min} = 2\pi/k_{\max}$ (див. п. 2.2.3). Отже, мінімальний радіус ядра, навколо якого бігтиме спіральна хвиля, складає величину R_{\min} . Йому відповідає максимальна частота спіральної хвилі $\omega_{\max} = V_0/R_{\min}$ (впливом кривини фронту на його швидкість, як і раніше, нехтуємо) та мінімальний крок спіралі $h_{\min} = 2\pi R_{\min} = L_{\min}$.

Зроблені оцінки задовільно узгоджуються з експериментом.

2.3.2.3. Спіральні хвилі в неоднорідних та нестационарних середовищах

У неоднорідному середовищі з відновленням спостерігається ефект дрейфу спіральної хвилі: за певних умов її центр рухається по прямій лінії в напрямку, який визначається напрямком зміни властивостей середовища та деякими параметрами цього середовища. Швидкість такого дрейфу прямо пропорційна до швидкості поширення біжучого імпульсу та обернено пропорційна до характерного розміру неоднорідності.

Якщо властивості активного середовища з часом змінюються – наприклад, модулюються за періодичним законом із деякою частотою, то центр спіральної хвилі буде рухатися по колу, радіус якого пропорційний до глибини модуляції та обернено пропорційний до різниці частот спіральної хвилі та модуляції. Коли ця різниця дорівнює нулеві (випадок резонансу), центр спіралі рухатиметься по прямій. Швидкість руху в обох випадках пропорційна добутку швидкості поширення біжучого імпульсу на глибину модуляції. Описане явище спостерігалось в експерименті, коли шар розчину, в якому відбувалася світлочутлива реакція Белоусова – Жаботинського, піддавали періодичному освітленню.

Природа обох згаданих ефектів пов'язана з тим, що радіус ядра спіральної хвилі складним чином (в загальному випадку – із запізненням) залежить від властивостей активного середовища. В результаті внутрішній край спіралі рухатиметься вже не по колу, а по деякій незамкненій кривій (в найпростішому випадку дрейфу та резонансу – по кривій типу трохойди; траєкторії такого типу виходять при накладанні обертового та поступального руху).

2.3.2.4. Вихори

У тривимірних середовищах в принципі можливі джерела автохвиль у вигляді вихорів. У них хвильовий фронт являє собою прямий циліндр, твірною якого є спіраль (рис. 2.3.4).

Але фронти автохвиль можуть мати й значно складнішу форму – наприклад, вісь вихору може бути скручена в кільце (так зване вихрове кільце). На великих віддальх від вихрового кільця фронт породженої ним хвилі буде сферичним.

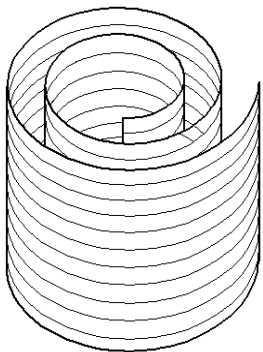


Рис.2.3.4. Хвильовий фронт вихору.

Контрольні питання до підрозділу 2.3.2

1. Як співвідносяться максимальні частоти хвиль у вигляді одиночної та потрійної спіралі в середовищах із відновленням?
2. У середовищі з відновленням навколо однакових отворів обертаються хвилі у вигляді одиночної та подвійної спіралей. Порівняйте частоти їхнього обертання.
3. За яких початкових умов у середовищі з відновленням збуджуватиметься спіральна хвиля?
4. В однорідному середовищі, де можливе горіння з виділенням інгібітору, збуджена спіральна хвиля. Як залежать розміри її ядра від температури навколишнього середовища? Дайте якісне пояснення.
5. Як, на вашу думку, вплине врахування дифузії інгібітору на оцінку розміру ядра спіральної хвилі в порівнянні з моделлю, де така дифузія відсутня?

Задачі до підрозділу 2.3.2

2.3.2.1. Дворукавна спіральна хвиля в середовищі з відновленням обертається навколо отвору радіусу R . При якому мінімальному значенні R така спіраль ще буде прив'язана до отвору? Залежністю швидкості хвилі від кривини її фронту знехтувати. З якою частотою відбуваються коливання в точках за межами ядра спіралі?

2.3.3. Ревербератори в автоколивних середовищах

Джерела спіральних хвиль – ревербератори – можуть виникати не тільки в середовищах із відновленням (див. п. 2.3.1), але й в автоколивних середовищах (див. п. 2.1.2).

Зовні спіральні хвилі в автоколивних середовищах нагадують спіральні хвилі в середовищах із відновленням: у них також можна виділити ядро, а на великих віддальх від нього фронт хвилі має форму архімедової спіралі (зі сталим кроком). Амплітуда збурення при поширенні такої хвилі дорівнює нулеві в центрі і прямує до сталої величини при віддаленні від нього. Але розміри ядра (тобто області, де амплітуда ще не досягла граничної величини) тепер будуть малими – порядку дифузійної довжини $\sqrt{b\tau_p}$, де коефіцієнт b визначається формулою (2.1.35), а час релаксації амплітуди τ_p – формулою (2.1.29). Таким чином, для аналізу спіральних хвиль в автоколивному середовищі не можна користуватися рівнянням для фазових хвиль (2.1.34), а необхідно звертатися безпосередньо до базового рівняння $\lambda - \omega$ моделі автоколивних середовищ (2.1.23).

Ще одна особливість спіральних хвиль в автоколиливних середовищах полягає в тому, що швидкість їхніх фронтів в принципі може бути якою завгодно.

Перший розрахунок спіральних хвиль в автоколиливних середовищах був виконаний П. Хаганом⁵.

2.3.3.1. Базові рівняння, граничні умови та асимптотика

Для простоти обмежимося випадком, коли в рівнянні для $\lambda - \omega$ моделі (2.1.23)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = [\lambda(\rho) + i\omega(\rho)]\eta + (D_1 - iD_2)\Delta\eta, \quad \rho = |\eta|$$

(нагадаємо, що $\eta = u + iv$) можна покласти $D_2 = 0$ (нижче позначатимемо $D_1 \equiv D$). Тоді в полярних координатах r, θ шукатимемо розв'язок цього рівняння у формі:

$$\eta = \rho(r) \exp[i\varphi(r, \theta, t)], \quad \varphi(r, \theta, t) = \omega t + \theta - \chi(r), \quad (2.3.17)$$

де ω – частота спіральної хвилі, а функція $\chi(r)$ визначає форму спіралі.

Підставивши (2.3.17) до (2.1.23) та прирівнявши до нуля окремо дійсну та уявну частини отриманого виразу, можна отримати систему двох рівнянь для невідомих функцій $\rho(r)$ та $\chi(r)$:

$$\frac{d^2 \rho}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\rho}{dr} + \rho \left[\frac{\lambda(\rho)}{D} - \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \right] = 0; \quad (2.3.18)$$

$$\frac{d^2 \chi}{dr^2} + \frac{d\chi}{dr} \left(\frac{1}{r} + \frac{2}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) + \frac{\omega - \omega(\rho)}{D} = 0. \quad (2.3.19)$$

З умови скінченності величин ρ та $d\chi/dr$ при $r \rightarrow 0$ можна записати граничні умови для цих функцій:

$$\rho(r \rightarrow 0) \sim r, \quad \left. \frac{d\chi}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (2.3.20)$$

Крім того, слід вимагати виконання умови

$$\rho(r \rightarrow \infty) = \text{const} \equiv \rho_\infty \quad (2.3.21)$$

(на нескінченості амплітуда хвилі повинна залишатися обмеженою). Тоді з (2.3.18) відразу випливає, що при $r \rightarrow \infty$ виконуватиметься співвідношення

$$\chi(r \rightarrow \infty) = k_\infty r, \quad k_\infty = \pm \sqrt{\frac{\lambda(\rho_\infty)}{D}}, \quad (2.3.22)$$

тобто на великих віддальх від ядра спіраль справді буде архімедовою. Два знаки в (2.3.22) відповідають двом різним напрямкам закручування спіралі. В свою чергу, з (2.3.19) випливає, що частота спіральної хвилі визначається співвідношенням

$$\omega = \omega(\rho_\infty). \quad (2.3.23)$$

2.3.3.2. Аналітичний розв'язок для модельних функцій $\omega(\rho)$ та $\lambda(\rho)$

Щоб знайти величину ρ_∞ , необхідно розв'язати систему рівнянь (2.3.18)-(2.3.19). Це вдається зробити аналітично, якщо залежність $\omega(\rho)$ є слабкою. Запишемо її у формі

$$\omega(\rho) = \omega_0 + \varepsilon(\rho_0 - \rho), \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad (2.3.24)$$

де, як і в п. 2.1.2, величина ρ_0 задовольняє умові $\lambda(\rho_0) = 0$ (рис. 2.1.7), і $\omega_0 \equiv \omega(\rho_0)$.

⁵ Див.: P.S.Hagan. SIAM J. Appl. Math. 1982. Vol.42. Pp.762-781. П. Хаган (Patrick S. Hagan) – американський дослідник, автор праць у галузі електроніки, фізичної хімії та біофізики. Останнім часом займається фінансовою математикою.

В нульовому наближенні за малим параметром ε частота спіральної хвилі $\omega = \omega_0$. Тоді з (2.3.23) випливає, що $\rho_\infty = \rho_0$, а з (2.3.12) – що $k_\infty = 0$ (взагалі, з (2.3.19) випливає, що в цьому наближенні $d\chi/dr = 0$). Отже, відповідно до (2.3.20), у даному випадку спіраль породжується в промінь, що обертається навколо деякої точки з частотою ω_0 .

Тоді залежність $\rho(r)$ можна знайти з рівняння (2.3.18), яке тепер набуває вигляду

$$\frac{d^2\rho}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\rho}{dr} + \rho \left[\frac{\lambda(\rho)}{D} - \frac{1}{r^2} \right] = 0. \quad (2.3.25)$$

Його можна розв'язати аналітично, задавши модельну функцію $\lambda(\rho)$:

$$\lambda(\rho) = \frac{D(\rho_0^2 - \rho^2)(4\rho_0^2 - \rho^2)}{\rho_0^4} \quad (2.3.26)$$

(рис. 2.3.5 а). Видно, що ця апроксимація якісно правильно описує поведінку функції $\lambda(\rho)$ на проміжку $0 < \rho < 2\rho_0$ (пор. з рис. 2.1.7).

Безпосередня підстановка показує, що рівнянню (2.3.25) з граничними умовами (2.3.20)-(2.3.21) та функцією $\lambda(\rho)$ (2.3.26) задовольняє розв'язок

$$\rho(r) = \frac{\rho_0 r}{\sqrt{1+r^2}} \quad (2.3.27)$$

(рис. 2.3.5 б).

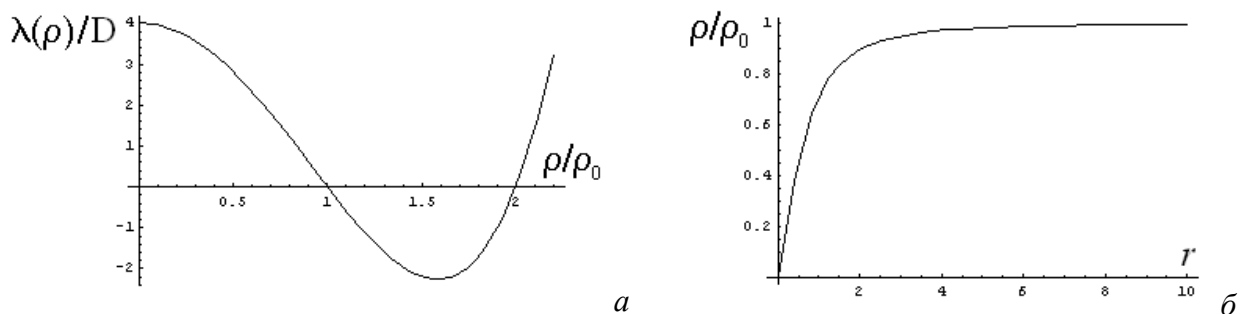


Рис. 2.3.5. Графіки модельної функції $\lambda(\rho)$ (а) та відповідного їй розв'язку $\rho(r)$ (б).

Врахування наступних наближень дозволяє в явному вигляді знайти невідомі величини ρ_∞ , k_∞ та ω .

Відзначимо, що в автоколивних середовищах, на відміну від середовищ із відновленням, багаторукавні спіральні хвилі виявляються нестійкими.

Контрольні питання до підрозділу 2.3.3

1. Чи потрібне локальне збурення властивостей середовища автоколивного типу для збудження в ньому спіральної хвилі?
2. Яка природа ядра спіральної хвилі в автоколивних середовищах?
3. Чому в автоколивному середовищі можливий частинний випадок спіральної хвилі у формі променя, що обертається навколо ядра, а в середовищі з відновленням – неможливий?

Задачі до підрозділу 2.3.3

2.3.3.1* Для рівняння Гінзбурга-Ландау числовими методами побудувати розв'язок, що відповідає спіральній хвилі. Дослідити поведінку багаторукавних спіралей.

2.3.3.2*. Побудувати клітинний автомат із елементарними комірками правильної

а) трикутної;

б) чотирикутної;

в) шестикутної форми. Для автоколивного середовища змодельовати на ньому спіральну хвилю.

2.3.4. Пейсмерери в автоколивних середовищах

Як уже згадувалося, пейсмерерами, або провідними центрами називають джерела концентричних хвиль у середовищах автоколивного типу, що виникають на локальних неоднорідностях, причому ці неоднорідності характеризуються підвищеною частотою автоколивань. Справді, в лабораторних експериментах пейсмерери, придушені за рахунок впливу коротших фазових хвиль, після припинення впливу знову виникали на тому самому місці. Це дає підстави вважати, що причиною виникнення пейсмерерів є деякі локальні неоднорідності середовища. З іншого боку, якісно зрозуміло, що такі неоднорідності якраз і можуть служити джерелами фазових хвиль, якщо їхня частота перевищує частоту синфазних коливань навколишнього середовища (див. п. 2.1.2.8).

Експериментально пейсмерери в середовищі з реакцією Белоусова - Жаботинського вперше дослідив, як уже згадувалося, А. Вінфрі (див. п. 1.3.4.1). Теорія пейсмерерів, заснована на рівнянні для фазових хвиль, побудована Й. Курамото⁶.

2.3.4.1. Опис моделі та вихідні рівняння

Спробуємо описати виникнення пейсмерера в рамках $\lambda - \omega$ моделі. Для цього розглянемо плоский центральносиметричний шар, в якому $\omega_0 = \omega_0(r)$ (r – радіус у полярній системі координат, початок відліку якої суміщений із центром симетрії). Нехай неоднорідність зосереджена в області з характерними розмірами r_0 поблизу початку координат, так що $\omega_0(r \rightarrow \infty) = \omega_\infty$ і $\omega_0(r \leq r_0) = \omega_\infty + \delta\omega$ (рис. 2.3.6). Тоді, врахувавши в базовому рівнянні $\lambda - \omega$ моделі (2.1.23) залежність $\omega_0(r)$, поклавши $\varphi(r, t) = \omega_\infty t + \psi(r, t)$ і виконавши перетворення, аналогічні до розглянутих у пп. 2.1.2.2 та 2.1.2.4, можна отримати аналог рівняння для фазових хвиль (2.1.34), що враховує неоднорідність середовища:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \omega_0(r) - \omega_\infty + a(\nabla \psi)^2 + b\Delta \psi. \quad (2.3.28)$$

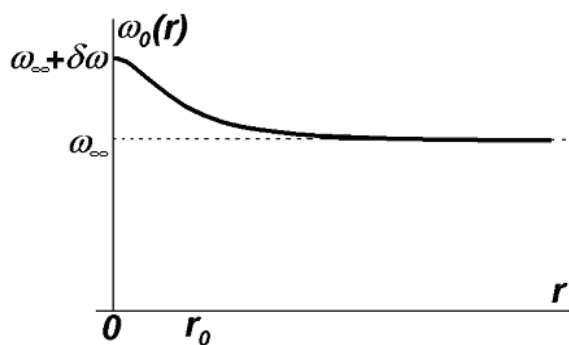


Рис. 2.3.6. Радіальна залежність частоти автоколивань в області виникнення пейсмерера.

Рівняння (2.3.28) еквівалентне до рівняння для $\lambda - \omega$ моделі (2.1.23) за умови

$$r_0 \gg \sqrt{b\tau_\rho} \quad (2.3.29)$$

(пор. з (2.1.37)).

Знову скористаємося заміною (2.1.38)

$$\psi(r, t) = \frac{b}{a} \ln Q(r, t).$$

Тоді з (2.3.28) можна отримати аналог рівняння (2.1.41 а) для $Q(r, t)$ у формі

⁶ Y. Kuramoto. Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Berlin: Springer, 1984.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = b\Delta Q + \frac{a}{b}[\omega_0(r) - \omega_\infty]Q. \quad (2.3.30)$$

2.3.4.2. Аналогія з частинкою в потенціальній ямі

Формально рівняння (2.3.30) для пейсмейкера еквівалентне нестационарному рівнянню Шрьодінгера⁷

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi - U(r) \Psi, \quad (2.3.30 \text{ а})$$

яке описує рух частинки в полі із заданим потенціалом $U(r)$. Рівняння (2.3.30 а) переходить у (2.3.30), якщо зробити заміни

$$\Psi \rightarrow Q, \quad -\frac{t}{i\hbar} \rightarrow t, \quad \frac{\hbar^2}{2m} \rightarrow b, \quad U(r) = -\frac{a}{b}[\omega_0(r) - \omega_\infty]. \quad (2.3.31)$$

У розглядуваній моделі в області $r \leq r_0$ маємо $\omega_0(r) > \omega_\infty$. В термінах квантової механіки це означає виникнення потенціальної ями – області, в якій $U(r) < 0$.

Рівняння (2.3.30) – лінійне (на відміну від рівняння (2.3.28)) диференціальне рівняння в частинних похідних, але його коефіцієнти залежать від координат. Якщо спробувати шукати розв'язок цього рівняння за методом розділення змінних, то рівняння для функції, залежної від часу, буде не тільки лінійним, але й зі стаціонарними коефіцієнтами. Отже, залежність від часу можна шукати в експоненціальній формі. Тоді загальний розв'язок рівняння (2.3.30) можна шукати у формі

$$Q(\vec{r}, t) = \sum_n C_n \mu_n(r) \exp(\lambda_n t), \quad (2.3.32)$$

де λ_n і $\mu_n(r)$ – відповідно власні числа і власні функції для рівняння

$$b\Delta \mu_n + \frac{a}{b}[\omega_0(r) - \omega_\infty] \mu_n = \lambda_n \mu_n, \quad (2.3.33)$$

яке легко отримати підстановкою (2.3.32) до (2.3.30).

Додатні значення λ_n у квантовомеханічній задачі відповідають зв'язаним станам частинки в потенціальній ямі. Від'ємні значення, що відповідають інфінітному рухові частинки, утворюють суцільний спектр, але вони неістотні, бо відповідні експоненти в (2.3.32) швидко згасають.

Оскільки в аналізованому випадку $U(r \rightarrow \infty) = 0$, то в розв'язку (2.3.32) існує власне значення $\lambda_0 = 0$ і відповідна власна функція $\mu_0(r)$.

Умова $U(r \rightarrow \infty) = 0$ дає змогу знайти асимптотику функцій $\mu_n(r)$ при $r \rightarrow \infty$. Справді, з урахуванням аксіальної симетрії задачі рівняння (2.3.33) набуває вигляду

$$b \left(\frac{d^2 \mu_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \mu_n}{dr} \right) + \frac{a}{b}[\omega_0(r) - \omega_\infty] \mu_n = \lambda_n \mu_n. \quad (2.3.33 \text{ а})$$

При $r \rightarrow \infty$ замість (2.3.33 а) отримаємо рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$b \frac{d^2 \mu_n}{dr^2} = \lambda_n \mu_n. \quad (2.3.33 \text{ б})$$

Розв'язок рівняння (2.3.33 б) при $\lambda_n > 0$ з урахуванням того, що при $r \rightarrow \infty$ він має залишатись обмеженим, за умови $r \gg r_n$ може бути записаний у формі

⁷ Е. Шрьодінгер (Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger, 1887 - 1961) – великий австрійський фізик-теоретик, один з творців квантової механіки. Лауреат Нобелівської премії з фізики (1933), професор університетів у Берліні, Оксфорді, Граці й Генті, з 1939 року – директор заснованого ним Інституту вищих досліджень (Institute for advanced studies) в Дубліні.

$$\mu_n(r) = \exp\left(-\frac{r}{r_n}\right), \quad r_n = \sqrt{\frac{b}{\lambda_n}}. \quad (2.3.34)$$

З урахуванням тієї самої умови для $\lambda_0 = 0$ при $r \gg r_0$ можна покласти $\mu_0 \approx 1$ (нагадаємо, що r_0 – це розмір потенціальної ями).

Нехай у потенціальній ямі є всього один зв'язаний стан, тобто існує лише одне додатне власне значення λ_1 , якому відповідає власна функція μ_1 . Тоді, нехтуючи згасаючим внеском від суцільного спектру, отримаємо при $r \gg r_0$:

$$\psi(r, t) = \frac{b}{a} \ln \left[C_0 + C_1 \exp \left(\lambda_1 t - \sqrt{\frac{\lambda_1}{b}} r \right) \right]. \quad (2.3.35)$$

Цей розв'язок описує пейскекер, що народжується (див. рис. 2.3.7 а, б). Справді, якщо

$$\lambda_1 t - \sqrt{\frac{\lambda_1}{b}} r \gg 1, \quad (2.3.36)$$

або

$$r < R(t) = \sqrt{\lambda_1 b} t, \quad (2.3.37)$$

то константою C_0 можна знехтувати поруч із експонентою, і (2.3.35) набуває вигляду:

$$\psi(r, t) \approx \frac{b \lambda_1 t}{a} - \frac{\sqrt{\lambda_1 b}}{a} r. \quad (2.3.35 \text{ а})$$

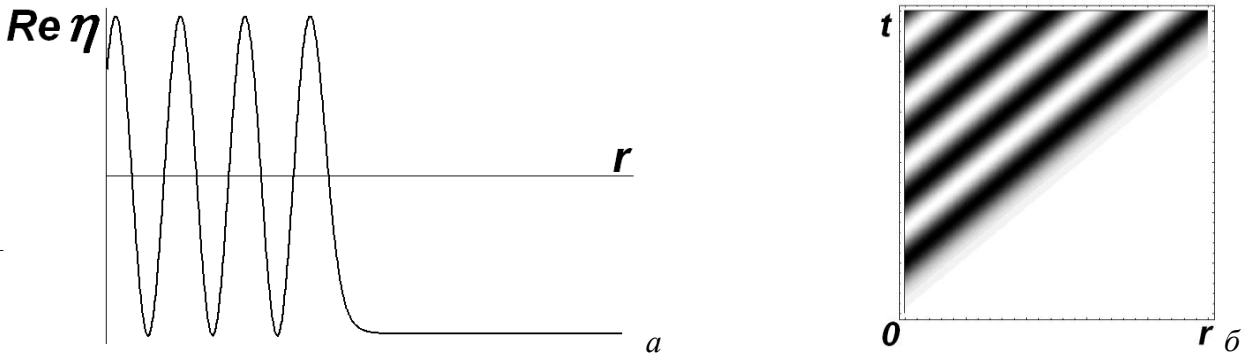


Рис. 2.3.7. Графік функції $\text{Re } \eta(r, t)$ при $t=\text{const}$ (а) та контурний графік цієї функції (б), де $\eta(r, t) = \exp\{i[\omega_\infty t + \psi(r, t)]\}$, а залежність $\psi(r, t)$ визначається формулою (2.3.35)

Розв'язок (2.3.35 а) описує концентричні фазові хвилі з частотою

$$\omega = \omega_\infty + \frac{b}{a} \lambda_1 \quad (2.3.38)$$

і хвильовим числом

$$k = \frac{\sqrt{\lambda_1 b}}{a}, \quad (2.3.39)$$

що розходяться від центру (рис. 2.3.7). Чим глибша яма, тим більша λ_1 і, як випливає з (2.3.38)-(2.3.39), тим вища частота і менша довжина хвилі.

Навпаки, при $r > R(t)$ маємо $\varphi \approx \text{const}$, тобто ця область залишається незбуреною (в ній існують синфазні автоколивання з частотою ω_∞).

Область, зайнята фазовими хвилями, розширюється з радіальною швидкістю

$$V_R = \frac{dR(t)}{dt} = \sqrt{\lambda_1 b}. \quad (2.3.40)$$

Якщо в потенціальній ямі, що відповідає збуренню $\omega_0(r)$, існує кілька зв'язаних ста-

нів, картина істотно не зміниться. Треба лише замінити λ_1 на максимальне власне число λ_n .

2.3.4.3. Умови виникнення та застосовність опису в рамках рівняння фазових хвиль

В одно- і двовимірному випадку будь-яка яма (навіть дуже неглибока) містить хоча б один зв'язаний стан. Отже, як завгодно мале додатне збурення $\delta\omega$ породжує пейсмеркер. У тривимірному випадку зв'язаний стан з'являється лише для достатньо глибоких потенціальних ям, тобто за виконання умови

$$\delta\omega \gg \frac{b^2}{ar_0^2} \quad (2.3.41)$$

(чим більший радіус ями r_0 , тим менша „критична глибина” $\delta\omega_{cr}$, необхідна для виникнення пейсмеркера). При невиконанні умови (2.3.41) пейсмеркер не виникає.

Виконаний розрахунок справедливий лише тоді, коли радіус локалізації r_n (2.3.34) задовольняє умові (2.3.29), тобто при $\lambda_n \ll 1/\tau_\rho$, інакше рівняння для $\lambda - \omega$ моделі не зводиться до рівняння для фазових хвиль. Оскільки завжди

$$\lambda_n \leq \frac{a}{b} \delta\omega, \quad (2.3.42)$$

(максимальне власне значення λ_n обмежене глибиною потенціальної ями), отримаємо:

$$\delta\omega_{\max} \ll \frac{b}{a\tau_\rho}, \quad (2.3.43)$$

тобто виконаний розрахунок справедливий лише для помірних збурень автоколивного середовища.

Як уже говорилося, при зіткненні двох фазових хвиль із різними хвильовими числами відбувається їх повне взаємне погашення, а межа рухається в напрямку області, заповненої довшими хвилями. Це означає, що за наявності кількох пейсмеркерів у результаті конкуренції між ними врешті-решт переможе той, якому відповідають найкоротші хвилі (найглибша потенціальна яма).

Контрольні питання до підрозділу 2.3.4

1. Якісно опишіть механізм виникнення пейсмеркерів.
2. Опишіть часову еволюцію фазових хвиль в автоколивному середовищі, яке має два локальні максимуми для частоти локальних автоколивань.
3. Як, на Вашу думку, зміняться властивості пейсмеркера, якщо збурення в середовищі, яке його породило, не буде аксіально-симетричним?
4. Як властивості локального збурення впливають на характеристики відповідного пейсмеркера?

Задачі до підрозділу 2.3.4

2.3.4.1. Нелінійне кінетичне рівняння з дифузійною для середовищ автоколивного типу ($\lambda - \omega$ модель) має вигляд

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = [\lambda(\rho) + i\omega(\rho)]\eta + (D_1 - iD_2)\Delta\eta,$$

де $\rho = |\eta|$, $\lambda(\rho)$ – монотонно спадна функція, така, що $\lambda(\rho_0) = 0$, $\omega(\rho)$ – довільна функція, D_1 та D_2 – сталі. Середовище неоднорідне: $\rho_0 = \rho_0(r)$, причому виконується умова $\rho_0(r \rightarrow \infty) = \rho_\infty$. Отримати рівняння для фазових хвиль у такому середовищі. За яких умов воно буде еквівалентне до початкового рівняння?

2.3.4.2. Побудувати графік залежності $\text{Re } \eta(r, t)$ для випадку, коли в потенціальній ямі, що відповідає збуренню $\omega_0(r)$, існує кілька зв'язаних станів. Чим він відрізняється від випадку, коли в цій ямі існує лише один зв'язаний стан?

2.3.4.3*. Користуючись рівнянням Гінзбурга-Ландау, дослідити числовими методами поведінку

нку пейсмейкера, який породжує хвилі малої довжини (в області, де рівняння для фазових хвиль стає незастосовним).

2.3.4.4*. Побудувати клітинний автомат із елементарними комірками правильної

а) трикутної;

б) чотирикутної;

в) шестикутної

форми. Для автоколивного середовища змодельовати на ньому пейсмейкер.

2.3.5. Автопейсмейкери в середовищах із відновленням

Джерела концентричних автохвиль, як уже згадувалося, можуть існувати не тільки в автоколивних середовищах, але й у середовищах із відновленням. Такі експерименти відомі, зокрема, для плівок розчинів, у яких протікає реакція Белоусова – Жаботинського⁸.

В літературі існує дві точки зору на механізм виникнення джерел концентричних автохвиль у середовищах із відновленням. Одна з них полягає в тому, що виникнення пейсмейкерів пов'язане з локальними неоднорідностями середовища (домішки, бульбашки газу). В околі таких сторонніх включень елементи середовища спонтанно переходять в автоколивний режим.

Інша точка зору полягає в тому, що джерелом концентричних хвиль є пара елементів середовища, які коливаються в протифазі та періодично збуджують один одного. Така ситуація в принципі можлива, якщо час рефрактерності буде меншим від часу перебування в збудженому стані. Джерела такого типу дістали в літературі назву автопейсмейкерів.

Механізм роботи автопейсмейкера можна порівняти з парою мультивібраторів у режимі очікування (ми вже відзначали, що такий мультивібратор є моделлю елемента середовища з відновленням, див. вище п. 2.2.2), пов'язаних між собою через диференціальний ланцюжок. Нехай перший з мультивібраторів перейшов у стан збудження. Тоді через деякий час, що дорівнює тривалості імпульсу на його виході, він повернеться в стан спокою. Але стрибок напруги з його виходу, пройшовши через диференціальний ланцюжок, утворить імпульс запуску для другого мультивібратора, в результаті чого той перейде в стан збудження. Через відповідний час другий мультивібратор, перейшовши в стан спокою, згенерує імпульс запуску для першого мультивібратора, після чого процес буде періодично повторюватися.

Ми розглянемо нижче два типи автопейсмейкерів – джерело, засноване на діленні фронту, та джерело типу «луна». У найпростіших моделях перше з них досліджувалося В.Г.Яхном⁹ зі співробітниками, друге – В.І.Кринським¹⁰.

2.3.5.1. Вихідні рівняння

Для опису автопейсмейкера скористаємося двокомпонентною моделлю (див. пп. 2.2.2.1 - 2.2.2.2), описуваною системою рівнянь вигляду (2.2.34)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = f_1(u, v) + D_1 \Delta u; \\ \frac{\partial v}{\partial t} = f_2(u, v) + D_2 \Delta u, \end{cases}$$

або вигляду (2.2.35), якщо скористатися моделлю Фітц-Х'ю – Нагумо та конкретизувати вигляд кінетичних функцій:

⁸ В залежності від режиму реакції такі розчини можуть відповідати як моделі середовища з відновленням, так і моделі автоколивного середовища (див. п. 1.3.4).

⁹ В.Г.Яхно (Владимир Григорьевич Яхно, нар. 1948) – сучасний російський біофізик (м. Нижній Новгород).

¹⁰ В.І.Кринський (Кринский Валентин Израилевич, нар. 1938) – російський біофізик, лауреат Ленінської премії (1980). Зараз працює у Франції.

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha T(1-T)(T-T_0) - \beta n + \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}; \\ \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n-\gamma T}{\tau} + D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2}. \end{cases}$$

Така модель дозволяє отримати результати, які узгоджуються (принаймні, якісно) з експериментальними даними.

Строго кажучи, розв'язки в рамках цієї моделі є нестійкими. Тому для коректного опису роботи автопейсмерка необхідна трикомпонентна модель, аналіз якої виходить за рамки даного курсу. Тим не менше і двокомпонентна модель дає уявлення про механізми функціонування автопейсмерків, тому її варто розібрати більш детально.

Для того, щоб описати процес виникнення джерела періодичних автохвиль в однорідному середовищі з відновленням, обмежимося одновимірною геометрією. В цій моделі для формування джерела біжучих імпульсів необхідно задати початкову умову у формі так званого нерухомого фронту збудження. Тому, перш ніж говорити про джерело біжучих імпульсів, розглянемо спочатку такий нерухомий фронт.

2.3.5.2. Нерухомий фронт збудження: якісний розгляд та конкретизація вихідних рівнянь

Як уже вказувалося (див. вище п.2.2.3), швидкість хвилі запалювання залежить від концентрації інгібітору n у середовищі. Якісно вигляд цієї залежності поданий на рис. 2.3.8. При переході n через деяке критичне значення ця швидкість змінює свій знак – замість хвилі запалювання починає поширюватися хвиля гасіння. Іншими словами, при $n < n_{cr}$ "енергетично вигідним" є стан горіння, а при $n > n_{cr}$ – стан відсутності горіння.

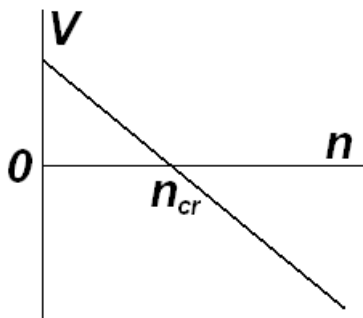


Рис. 2.3.8. Залежність швидкості хвилі запалювання (гасіння) від концентрації інгібітору.

Нехай коефіцієнт дифузії інгібітору настільки малий, що ним можна знехтувати. Розглянемо межу двох однорідних областей з концентраціями інгібітору n_1 та n_2 . Для визначеності вважатимемо, що концентрація n_1 реалізується в області $x < 0$, а концентрація n_2 – в області $x > 0$, причому $n_2 > n_{cr} > n_1$. Виявляється, що на такій межі може існувати так званий нерухомий фронт збудження – область просторової зміни температури, яка з часом залишається нерухомою. При цьому принаймні в одній з розглядуваних областей відбувається процес горіння, який супроводжується плавною зміною просторових розподілів концентрації інгібітору та температури з часом. Такі самі зміни можуть відбуватись і в області, де горіння відсутнє.

Можуть існувати різні типи нерухомих фронтів збудження. Наприклад, в області з низькою концентрацією інгібітору може відбуватися горіння, а в області з високою концентрацією, навпаки, горіння може не бути. Просторові розподіли температури та концентрації інгібітору для цього випадку подані на рис. 2.3.9 в. Розподіл такого типу протягом певного часу є стійким.

Може бути й навпаки, коли в області з низькою концентрацією інгібітору горіння відсутнє, а в області з високою концентрацією воно відбувається. Один з можливих варіантів

просторового розподілу температури та концентрації інгібітору для цього випадку поданий на рис. 2.3.9 г. Він виявляється нестійким.

Оскільки в процесі горіння інгібітор з часом накопичується, а за відсутності горіння – навпаки, розпадається, то стійкий розв'язок (рис. 2.3.9 в) з часом переходить у нестійкий (дзеркально симетричний щодо точки $x = 0$ до зображеного на рис. 2.3.9 г). Останній врешті решт тим чи іншим способом руйнується, і на його місці знову виникає стійкий розв'язок (дзеркально симетричний щодо точки $x = 0$ до зображеного на рис. 2.3.9 в). Це руйнування супроводжується поширенням хвиль перекидання в обидва боки від межі областей. В результаті нерухомий фронт збудження виступає як періодичне джерело хвиль запалювання та гасіння, тобто біжучих імпульсів.

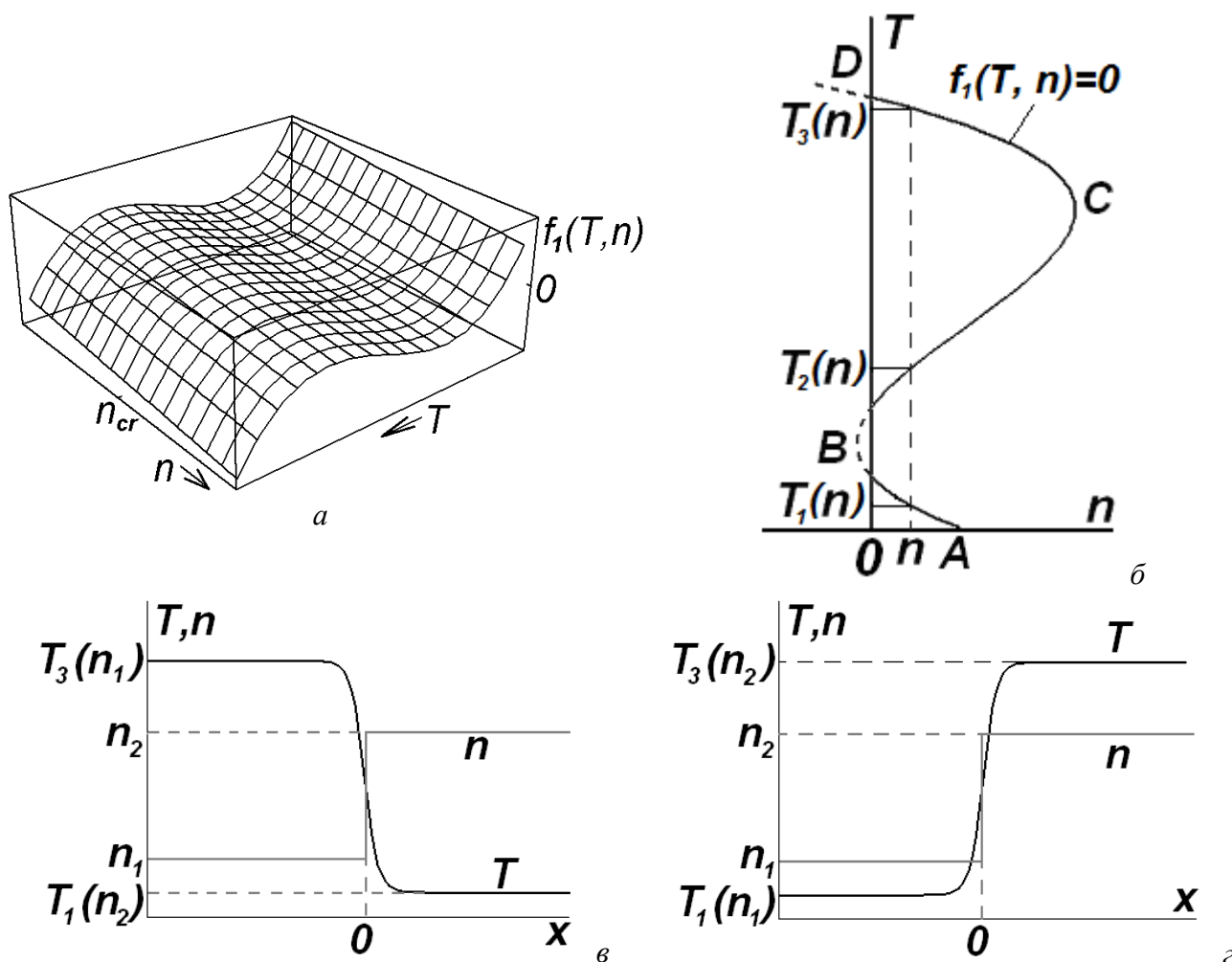


Рис. 2.3.9. До аналізу нерухомого фронту збудження: а – залежність $f_1(T, n)$; б – графік залежності $f_1(T, n) = 0$ (ділянки АВ, ВС та CD відповідають стаціонарним розв'язкам $T_1(n)$, $T_2(n)$ та $T_3(n)$); в, г – вигляд стійкого (в) та нестійкого (г) нерухомого фронту збудження при заданому профілі концентрації інгібітору

Підкреслимо ще раз, що умовою існування нерухомого фронту збудження є мализна коефіцієнту дифузії інгібітору – лише в цьому випадку концентрація може змінюватися в просторі швидше від температури.

Тепер спробуємо акуратніше побудувати можливі залежності $T(x)$, вважаючи стрибкоподібний розподіл $n(x)$ заданим ($n(x < 0) = n_1$, $n(x > 0) = n_2$). Залежності $T(x)$ можна отримати, використовуючи перше з рівнянь (2.2.34) за умови $\partial/\partial t = 0$:

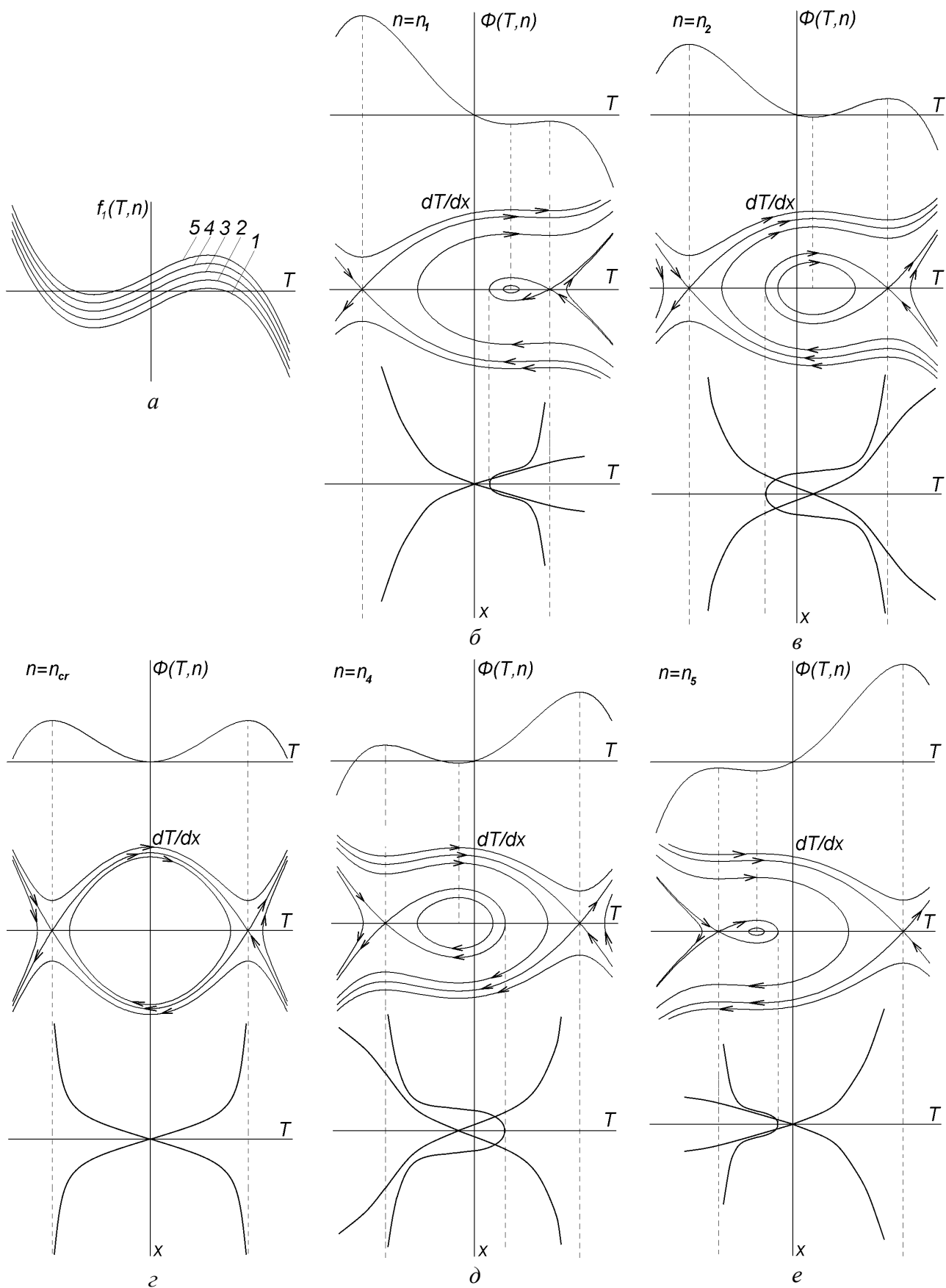


Рис. 2.3.10. До аналізу еволюції нерухомого фронту збудження: а – кінетична функція при різних значеннях концентрації інгібітору ($n_1 > n_2 > n_3 = n_{cr} > n_4 > n_5$); б-е – профілі "потенціалу", "фазові портрети" та просторові розподіли температури для відповідних концентрацій інгібітору

$$D \frac{d^2 T}{dx^2} + f_1(T, n) = 0. \quad (2.3.44)$$

Це рівняння слід доповнити граничними умовами. Очевидно, на нескінченності температура повинна прямувати до відповідних сталих значень, що відповідають даним концентраціям інгібітору, а на стрибку концентрації інгібітору температура має бути неперервною разом зі своєю похідною:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x \rightarrow \pm \infty} &= 0; & T(x \rightarrow -\infty) &= T_1(n_1); & T(x \rightarrow \infty) &= T_3(n_2); \\ T(x = -0) &= T(x = +0); & \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=-0} &= \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=+0}. \end{aligned} \quad (2.3.45)$$

Таким чином, ми вважаємо, що горіння відбувається в області $x > 0$ і відсутнє в області $x < 0$.

2.3.5.3. Дослідження просторових профілів температури в середовищі з однорідним розподілом концентрації інгібітору

Перш ніж будувати розв'язки рівняння (2.3.44) з граничними умовами (2.3.45) на стрибку концентрації інгібітору, розглянемо спершу такі розв'язки в середовищі з однорідним розподілом концентрації інгібітору.

Рівняння типу (2.3.44), яке можна формально інтерпретувати як рівняння нелінійного консервативного осцилятора, детально розглядалося в п.2.2.1.5. Тому відразу можна намалювати його "фазові портрети" для однорідного середовища (де замість похідних за часом фігурують похідні за координатою) для випадків $n = n_1$ та $n = n_2$. Разом з відповідними профілями "потенціалу" вони подані на рис. 2.3.10, де показано також "профіль потенціалу" та "фазовий портрет" для випадку $n = n_{cr}$.

Кожній з фазових траєкторій, показаних на рис. 2.3.10 б-е, відповідає деякий стаціонарний просторовий профіль температури $T(x)$, який може бути реалізований при відповідному значенні концентрації інгібітору n . Зокрема, сепаратрисам відповідають просторово обмежені або напівобмежені неоднорідності температури.

"Фазові портрети" на рис. 2.3.10 побудовані в припущенні $n = const$. В дійсності в результаті накопичення інгібітору при горінні та його розпаду за відсутності горіння і відповідних змін температури ця умова порушується. Через те "фазові портрети" однорідного середовища мають бути тривимірними (зміну концентрації інгібітору вважаємо плавною, тому похідну від концентрації інгібітору в першому наближенні можна прийняти нульовою).

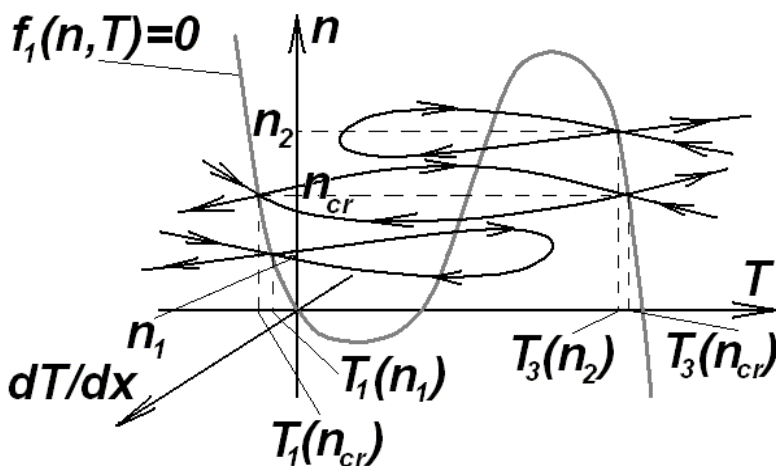


Рис. 2.3.11. Тривимірний фазовий портрет досліджуваної системи

Розглянемо такий тривимірний «фазовий портрет» в координатах $n, T, dT/dx$. Він поданий на рис. 2.3.11. Лінія $f_1(T, n) = 0$, на якій знаходяться стаціонарні точки "фазових траєкторій", лежить у площині n, T . В розглядуваному наближенні змінна n є повільною, тому «фазові траєкторії» лежать у площинах $n = \text{const}$. Оскільки єдині «фазові траєкторії», що проходять через стаціонарні точки $\{n_1, T_1(n_1), 0\}$ та $\{n_2, T_3(n_2), 0\}$ – це сепаратриса, то саме вони й показані. Подана також сепаратриса, що відповідає значенню $n = n_{cr}$.

2.3.5.4. Дослідження профілів температури, що відповідають нерухомому фронту збудження

Тепер спробуємо сконструювати розв'язки, що задовольняють рівняння (2.3.44) з граничними умовами (2.3.45) на заданому ступінчастому розподілі концентрації інгібітору. Ці розв'язки будуть принципово відрізнятися для випадків $n_2 > n_{cr} > n_1$ та $n_1 > n_{cr} > n_2$ (див. вище п. 2.3.5.2). Розберемо спочатку перший з цих випадків.

Нехай спочатку зображувальна точка знаходилася в точці $\{n_1, T_1(n_1), 0\}$, якій відповідає точка А на рис. 2.3.12 а. Від неї зображувальна точка рухається вздовж петлі сепаратриса до точки В. Точка В відповідає перетину проєкцій петель сепаратрис, які проходять через точки А та D (остання має координати $\{n_2, T_3(n_2), 0\}$, на площину $n = \text{const}$. Покладемо, що саме точка В відповідає стрибку концентрації інгібітору в площині $x = 0$. По інший бік від цього стрибка знаходиться точка С, куди й переходить зображувальна точка з точки В. Далі зображувальна точка рухається вздовж петлі сепаратриса, поки не прийде в точку D. Отриманий таким чином розподіл $T(x)$ поданий на рис. 2.3.12 б. Він, очевидно, повністю задовольняє граничним умовам (2.3.45).

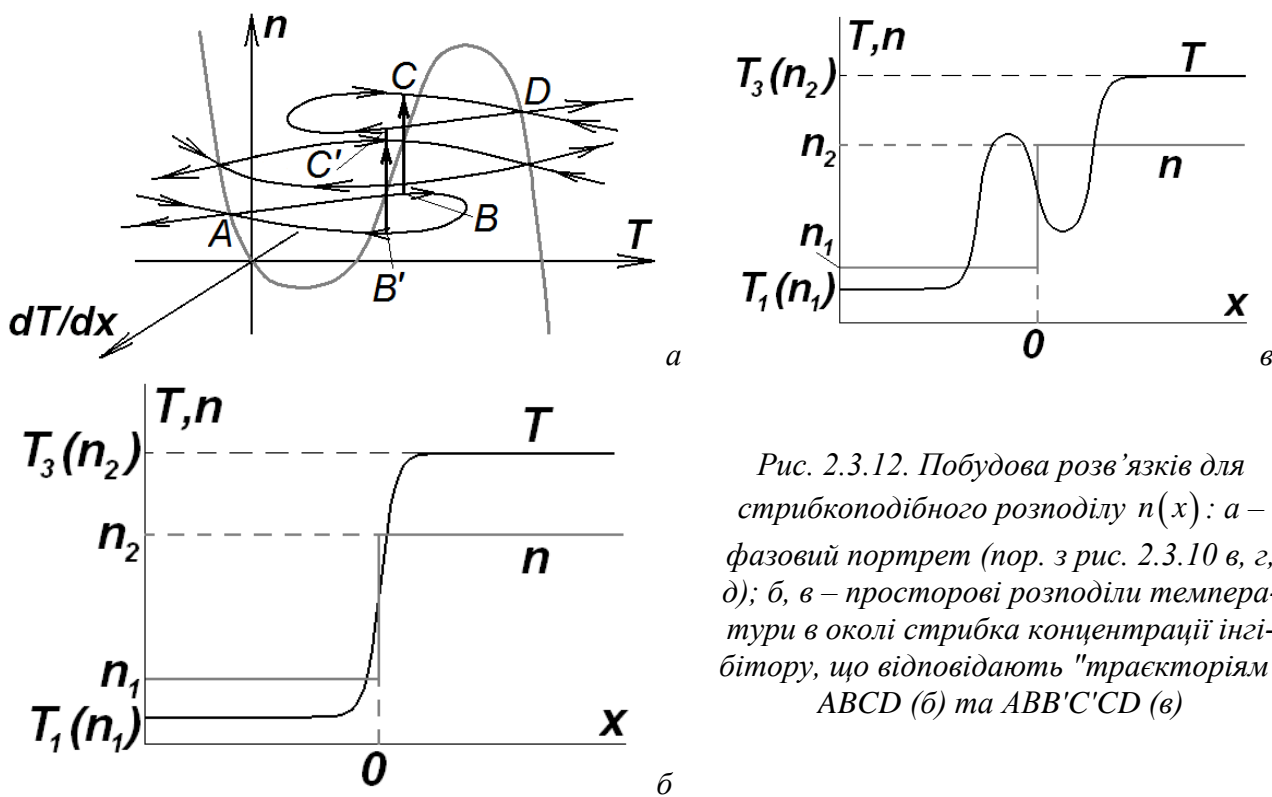


Рис. 2.3.12. Побудова розв'язків для стрибкоподібного розподілу $n(x)$: а – фазовий портрет (пор. з рис. 2.3.10 в, г, д); б, в – просторові розподіли температури в околі стрибка концентрації інгібітору, що відповідають "траєкторіям" ABCD (б) та ABB'C'D (в)

Слід, однак, відзначити, що проєкції згаданих вище петель сепаратрис на площину $n = \text{const}$ насправді перетинаються в двох точках. Друга з них відповідає точкам В' та С'. Таким чином, крім фазової траєкторії ABCD, граничним умовам (2.3.45) відповідає також фа-

зова траєкторія $AB'C'D$. Відповідна їй залежність $T(x)$ подана на рис. 2.3.12 в. Таким чином, за умови $n_2 > n_{cr} > n_1$ існують два розв'язки, що відповідають переходу з точки $\{n_1, T_1(n_1), 0\}$ у точку $\{n_2, T_3(n_2), 0\}$.

Відзначимо, що такі розв'язки можливі не завжди. Справді, при фіксованому значенні n_2 та зменшенні n_1 розмір петлі сепаратиси, що виходить із точки А (рис. 2.3.12 а), буде зменшуватися. В граничному випадку проекції на площину $n = \text{const}$ петель сепаратрис, що виходять з точок А та D, будуть уже не перетинатись, а лише дотикатись (рис. 2.3.13 а). Очевидно, в цьому випадку в точці, де має місце стрибок концентрації інгібітору, залежність $T(x)$ матиме нульовий нахил (рис. 2.3.13 б). При подальшому зменшенні n_1 існування нерухомого фронту збудження стає неможливим (рис. 2.3.13 в). Така сама ситуація реалізується при фіксованому n_1 та зростанні n_2 , а також при одночасному симетричному відхиленні n_1 та n_2 в протилежні боки від значення n_{cr} . В останньому випадку нерухомий фронт збудження зникає, коли назване відхилення досягає деякого порогового значення Δ_{\max} .

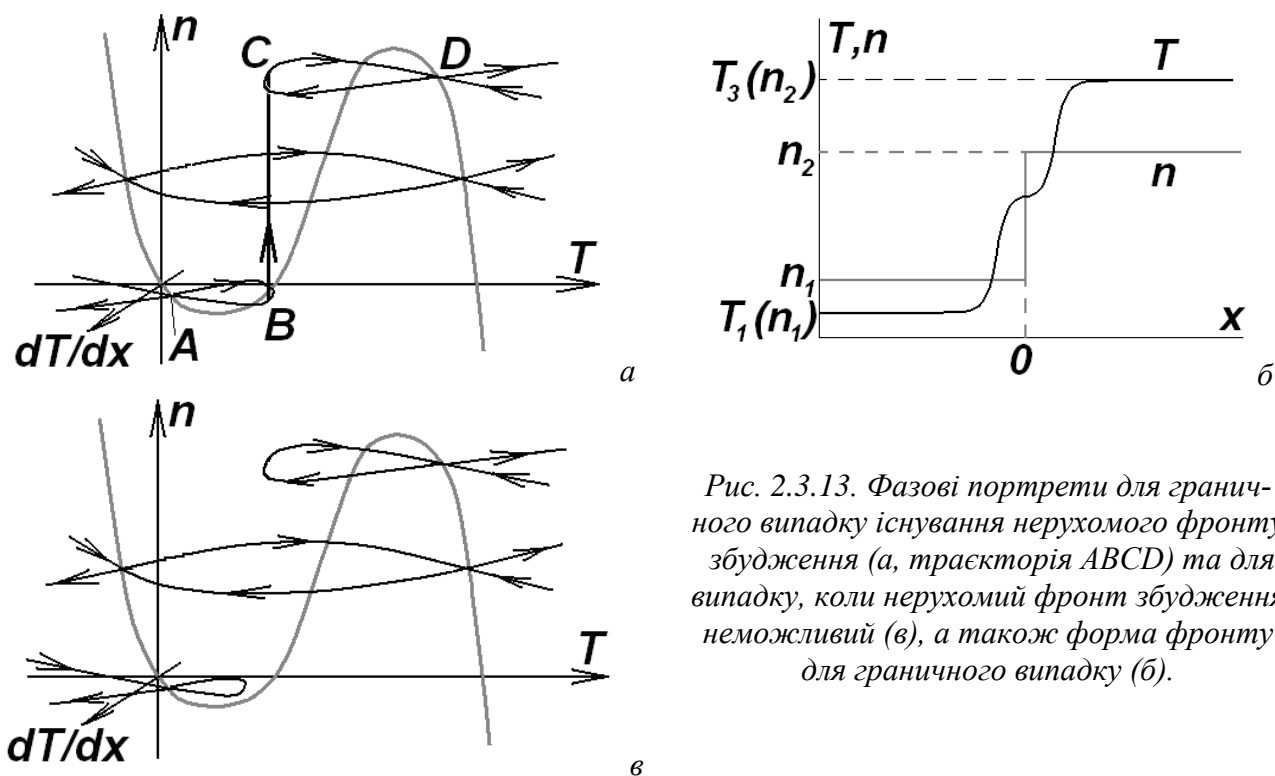


Рис. 2.3.13. Фазові портрети для граничного випадку існування нерухомого фронту збудження (а, траєкторія $ABCD$) та для випадку, коли нерухомий фронт збудження неможливий (в), а також форма фронту для граничного випадку (б).

Розглянемо тепер випадок, коли $n_2 < n_{cr} < n_1$. Фазовий портрет для цього випадку поданий на рис. 2.3.14 а. Як і раніше, точка А має координати $\{n_1, T_1(n_1), 0\}$, точка D – координати $\{n_2, T_3(n_2), 0\}$. Тепер фазові траєкторії, що виходять з точок А та D, вже не є петлями сепаратрис (хоча ці точки зберігають сідловий характер – див. рис. 2.3.14 а). Їхні проекції на площину $n = \text{const}$ перетинаються в єдиній точці, якій на рис. 2.3.14 а відповідають точки В та С. Таким чином, нерухомому фронту збудження відповідає фазова траєкторія $ABCD$. Відповідний профіль температури показаний на рис. 2.3.14 б.

2.3.5.5. Стійкість нерухомого фронту збудження

Обговоримо тепер питання про стійкість нерухомого фронту збудження.

Нерухомий фронт збудження при $n_2 < n_{cr} < n_1$ (рис. 2.3.14 б) для заданого розподілу концентрації інгібітору є стійким. Справді, в області, де інгібітору мало, в принципі можлива

лише хвиля запалювання, але там і так уже відбувається горіння. В області ж, де інгібітору багато, можлива лише хвиля гасіння, але там і так немає горіння. Взагалі про стійкість фронту можна судити за напрямком руху, який виникає при початковому відхиленні фронту на віддаль, більшу від його ширини. Зокрема, при $n_2 < n_{cr} < n_1$ швидкість зсунутого фронту (незалежно від того, в який бік він зсунутий) спрямована до точки зупинки, тому він повертається в початкове положення (рис. 2.3.15 а).

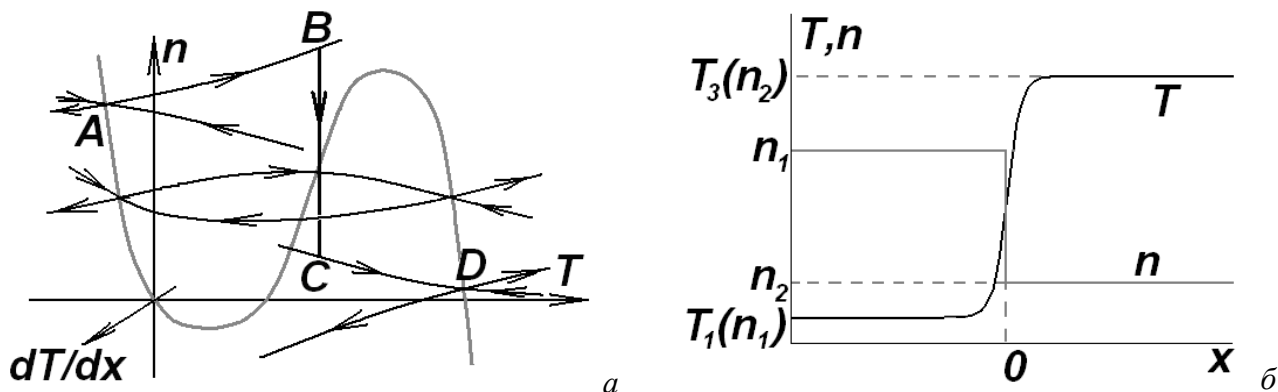


Рис. 2.3.14. Нерухомий фронт збудження при $n_2 < n_{cr} < n_1$: а – фазовий портрет; б – профілі температури та концентрації інгібітору

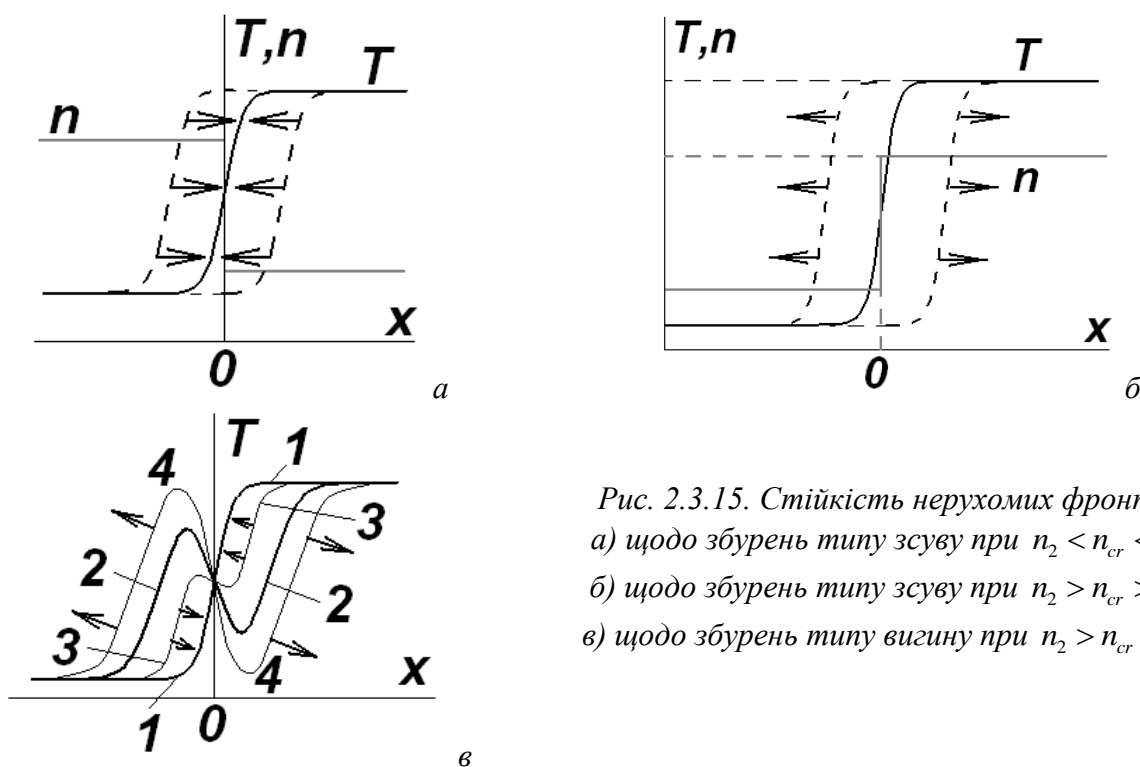


Рис. 2.3.15. Стійкість нерухомих фронтів:
а) щодо збурень типу зсуву при $n_2 < n_{cr} < n_1$;
б) щодо збурень типу зсуву при $n_2 > n_{cr} > n_1$;
в) щодо збурень типу вигину при $n_2 > n_{cr} > n_1$.

Як уже вказувалося, при $n_2 > n_{cr} > n_1$ можливі два розв'язки типу нерухомого фронту, показані на рис. 2.3.12 б, в – їм відповідають криві 1 та 2 на рис. 2.3.15 в.

Нерухомі fronti збудження з монотонною просторовою залежністю температури типу кривої 1 на рис. 2.3.12 б (якщо вони існують) є нестійкими (для заданого профілю концентрації інгібітору). Справді, від такого фронту в область низької концентрації інгібітору може побігти хвиля запалювання, а в область високої концентрації інгібітору – хвиля гасіння. Таким чином, швидкість зсунутого фронту (так само незалежно від напрямку початкового зсуву) тепер спрямована від точки зупинки, тому його відхилення від початкового положення з

часом зростатиме. Отже, в цьому випадку нерухомий фронт нестійкий щодо збурень типу зсуву (рис. 2.3.15 б). Підкреслимо, що збурення типу зсуву, про які тут ідеться, вже не описуються стаціонарним рівнянням (2.3.44). Для аналізу таких збурень слід використовувати повну систему рівнянь (2.2.35).

Нерухомі фронти збудження з немонотонною просторовою залежністю температури типу кривої 2 на рис. 2.3.15 в є нестійкими щодо збурень типу вигину. Зменшення вигину (крива 3) приводить урешті до встановлення фронту з монотонною просторовою залежністю температури, збільшення вигину (крива 4) породжуватиме пару хвиль перекидання, що розбігаються в обидва боки від нерухомого фронту (рис. 2.3.15 в). Для опису цих хвиль, як і в попередньому випадку, слід користуватися повною системою (2.2.35). Таким чином, можна припустити, що розв'язок з немонотонним профілем температури (крива 2 на рис. 2.3.15 в) визначає межу області стійкості розв'язку з монотонним профілем (крива 1).

При збільшенні різниці $n_2 - n_1$ та наближенні до граничного випадку (див. рис. 2.3.13 а-б), коли криві 1 та 2 (рис. 2.3.15 в) зливаються, ширина області стійкості першого розв'язку щодо збурень типу вигину поступово зменшується до нуля.

2.3.5.6. Поділ нерухомого фронту збудження

Нестійкість нерухомого фронту збудження при $n_2 > n_{cr} > n_1$ щодо збурень типу вигину (рис. 2.3.15 в) може привести до утворення джерела періодичних автохвиль у первісно однорідному середовищі – так званого автопейсмекера. Розглянемо, як цей ефект реалізується і за яких умов він можливий.

Нехай характеристики $f_1(n, T) = 0$ та $f_2(n, T) = 0$ (див. рівняння 2.2.34) симетричні щодо точки $T = T_2(n_{cr})$. Тоді відхилення температури та концентрації інгібітору від значень n_{cr} та $T_2(n_{cr})$ по обидва боки нерухомого фронту за будуть модулем однаковими. Крім того, швидкості як швидких, так і повільних рухів по обидва боки нерухомого фронту також будуть однаковими (хоч напрямки цих рухів будуть протилежними).

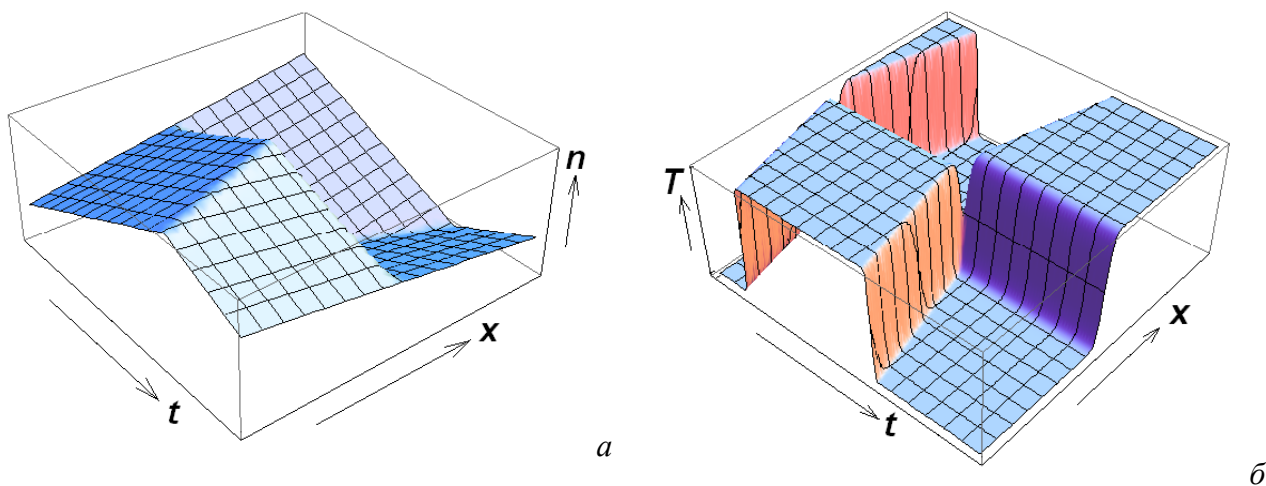


Рис. 2.3.16. Процес поділу нерухомого фронту: а – повільна зміна концентрації інгібітору; б – “перекидання” нерухомого фронту температури на стрибку концентрації інгібітору та поширення хвиль перекидання в обидва боки.

Нехай у початковий момент часу в точці $x=0$ існує стійкий нерухомий фронт збудження (рис. 2.3.14 б). Це означає, що в області $x < 0$ горіння відсутнє, і там $n_1 > n_{cr}$. В області $x > 0$, навпаки, відбувається горіння, і $n_2 < n_{cr}$. З часом в області $x < 0$ концентрація інгібітору зменшуватиметься (нагадаємо, що за відсутності горіння інгібітор розпадається), а в області $x > 0$ – навпаки, збільшується (горіння приводить до виділення інгібітору) –

рис. 2.3.16 а. Через певний час концентрації в областях $x > 0$ та $x < 0$ вирівнюються, так що $n_1 = n_2 = n_{cr}$. Після цього різниця $n_2 - n_1$ стає додатною і в деякий наступний момент часу зростає настільки, що реалізується граничний випадок (рис. 2.3.13 б), який, як відзначалося вище, є нестійким щодо малих збурень. Очевидно, це відбудеться при $n_{1,2} = n_{cr} \mp \Delta_{max}$. В результаті швидкого зростання збурень температури типу вигину почне розвиватися нестійкість, і від колишнього нерухомого фронту побіжать дві хвилі перекидання – хвиля запалювання в область $x < 0$ та хвиля гасіння в область $x > 0$ (рис. 2.3.16 б). На місці ж стрибка концентрації інгібітору знову виникне стрибок температури, але знак його зміниться на протилежний. Можна вважати, що за час розвитку нестійкості розподіл концентрації інгібітору змінитися не встигає (пор. зі швидкостями зміни температури та концентрації інгібітору на фронтах біжучого імпульсу – див. вище п. 2.2.2).

На наступній стадії процесу (ділянка повільного руху) концентрація інгібітору в області $x < 0$, де тепер відбувається горіння, поступово зростає, а в області $x > 0$, де горіння відсутнє – зменшується (рис. 2.3.16 а). В якийсь момент одночасно по обидва боки нерухомого фронту названа концентрація проходить через критичне значення. В наступні моменти часу в системі реалізується ситуація $n_2 < n_{cr} < n_1$, в результаті чого фронт горіння стає нестійким. Подальше зростання різниці $n_1 - n_2$ триває доти, доки не реалізується граничний випадок. При його досягненні знову розвивається нестійкість: в область $x > 0$ біжить хвиля запалювання, в область $x < 0$ – хвиля гасіння, а стрибок температури в точці $x = 0$ змінює знак (рис. 2.3.16 б). Таким чином, у системі відтворюються початкові умови, з яких ми почали розгляд.

В результаті по обидва боки від нерухомого фронту формується періодична послідовність біжучих імпульсів, причому проміжок між імпульсами горіння якраз дорівнює тривалості цих імпульсів (рис. 2.3.16).

2.3.5.7. Джерело типу “луна”

Як уже відзначалося, нерухомий фронт при $n_2 > n_{cr} > n_1$ (рис. 2.3.12 б) нестійкий не лише щодо збурень типу згину, але й щодо збурень типу зсуву. Останній тип нестійкості також може привести до формування автопеймекера, точніше, джерела періодичних імпульсів типу “луна”.

Нехай критичне значення концентрації інгібітору в цих областях, як і раніше, досягається одночасно. Вважатимемо, однак, що тепер швидкості накопичення та розпаду інгібітору по різні боки нерухомого фронту відрізняються, причому більшою швидкістю характеризується розпад інгібітору.

Нехай у початковий момент часу на межі поділу двох областей (в точці $x = 0$) виконано умову $n = n_{cr}$, в області відбувається горіння, в області $x < 0$ горіння відсутнє. Через деякий час в області $x > 0$ концентрація інгібітору зростає, в області $x < 0$ зменшиться, так що буде виконано умову $n_2 > n_{cr} > n_1$ (рис. 2.3.17 а). Тоді виникають умови для розвитку нестійкості типу зсуву. В результаті розвитку цієї нестійкості формується спочатку хвиля запалювання, що біжить в область $x < 0$ (рис. 2.3.17 б).

З часом подальше збільшення концентрації інгібітору в області $x > 0$ (рис. 2.3.17 а) приведе до того, що горіння в цій області стане “енергетично не вигідним”, і від межі $x = 0$ побіжить хвиля гасіння (рис. 2.3.17 б). Таким чином, у точці $x = 0$ знову сформується стрибок температури, але його знак буде протилежним до початкового.

Внаслідок сформованого таким чином розподілу температури в області $x > 0$ концентрація інгібітору спадатиме, в області $x < 0$ – зростатиме. В деякий момент часу концентрація інгібітору на межі $x = 0$ досягне критичного значення, і в системі відтворюються початкові умови з тією тільки відмінністю, що області $x > 0$ та $x < 0$ поміняються місцями (рис. 2.3.17 б).

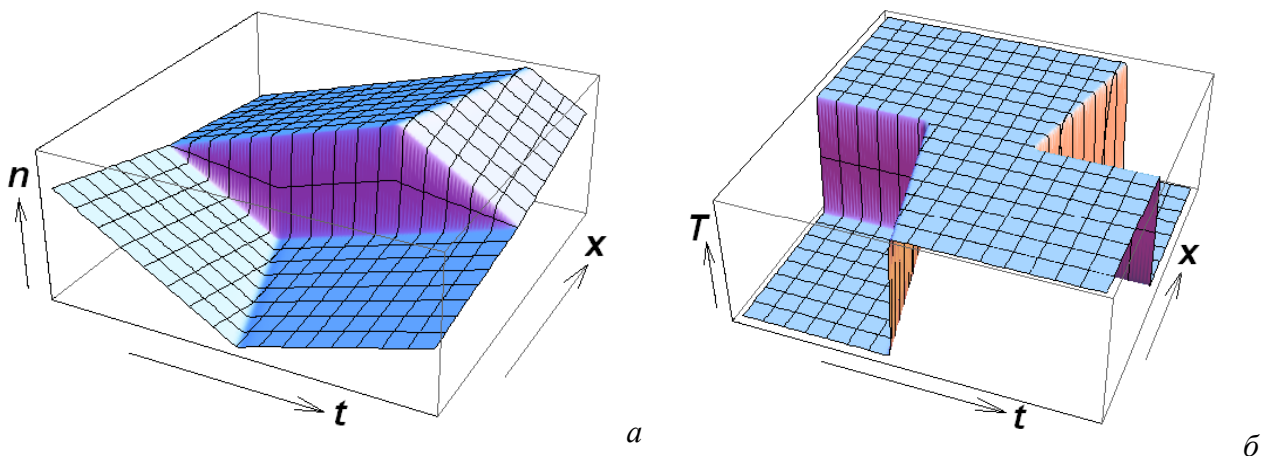


Рис. 2.3.17. Джерело типу «луна»: а – повільна зміна концентрації інгібітору; б – послідовне руйнування нерухомого фронту двома нестійкостями типу зсуву.

В результаті описаних процесів в обидва боки від нерухомого фронту збудження, як і в попередньому випадку джерела типу «поділ фронту», періодично виникатимуть і поширюватимуться імпульси горіння. Відмінність полягатиме в тому, що, по-перше, тривалість імпульсів тепер буде більшою, ніж проміжок між сусідніми імпульсами (рис. 2.3.17 б), і, по-друге, хвилі перекидання в різні боки від нерухомого фронту будуть тепер відбігати неодноразово.

Параметри імпульсів, генерованих джерелом типу «луна», зокрема, профілі температури та концентрації інгібітору, можна оцінити з умови, що в стаціонарному режимі швидкості переднього й заднього фронтів біжучих імпульсів (тобто хвилі запалювання й хвилі гасіння) мають бути однаковими, а їхня довжина має відповідати максимально можливому значенню хвильового числа k_{\max} , при якому періодична послідовність біжучих імпульсів у середовищі з відновленням ще залишається стійкою (див. вище п. 2.2.3).

На завершення слід відзначити, що обидва режими – періодичний поділ фронту та луна – можливі лише при спеціальному підборі швидкостей повільних рухів. Це означає, що в розглянутій моделі режим автопейсмерів є негрубим (структурно нестійким) щодо варіації параметрів системи. Структурна стійкість розв'язків такого типу, як уже відзначалося, можлива тільки в трикомпонентній системі.

Контрольні питання до підрозділу 2.3.5

1. Порівняйте між собою джерела автохвиль типу поділу фронту та типу «луна».
2. Чим визначається тривалість біжучих імпульсів, генерованих джерелом типу «луна»?
3. Чи може тривалість імпульсів горіння, генерованих джерелом типу «луна», бути меншою, ніж проміжок між ними? Якщо може, то за яких умов?
4. Чи можна в двовимірній моделі створити автопейсмер на основі джерела автохвиль типу «поділ фронту»?
5. Чи можна в двовимірній моделі створити автопейсмер на основі джерела автохвиль типу «луна»?
6. Намалюйте епюри зміни температури та концентрації інгібітору по обидва боки від джерела типу «поділ фронту» з урахуванням взаємної залежності температури стаціонарного стану та концентрації інгібітору.
7. Намалюйте епюри зміни температури та концентрації інгібітору по обидва боки від джерела типу «луна» з урахуванням взаємної залежності температури стаціонарного стану та концентрації інгібітору.

Задачі до підрозділу 2.3.5

- 2.3.5.1. Для середовища, описуваного рівняннями Фітц-Х'ю – Нагумо, знайдіть умову того,

Розділ 2.4. Стаціонарні дисипативні структури

Стаціонарні дисипативні структури – це структури, які виникають у первісно однорідному середовищі, причому їхні властивості слабо залежать від початкових та граничних умов. Вище вже побіжно розглядалися такі структури на прикладі одновимірних стаціонарних станів у брьоселяторі (див. п. 1.3.3.5). Але брьоселятор – це лише зручна модельна система. У цьому підрозділі ми розглянемо реальні приклади стаціонарних дисипативних структур та механізми їхнього виникнення. Такі механізми можна умовно розділити на дві великі групи: це насичення аперіодичної нестійкості та розподілений зворотний зв'язок. Перший механізм приводить до формування просторово періодичних (або квазіперіодичних) дисипативних структур, другий – відповідно до формування аперіодичних структур.

2.4.1. Періодичні дисипативні структури: модель морфогенезу Тюрінга

Дисипативні структури в системах, де немає розподіленого зворотного зв'язку, виникають в результаті розвитку аперіодичної нестійкості, яку можна розглядати як результат біфуркації Тюрінга (див. п. 1.3.3.3). В результаті насичення такої нестійкості в первісно однорідному середовищі виникають просторово-періодичні структури, основні характеристики яких (амплітуда, просторовий період) визначаються властивостями самого середовища і не залежать від граничних (якщо розміри однорідної області достатньо великі) та початкових умов.

Прикладами таких структур можуть бути, крім уже розглянутої моделі брьоселятора, структура полярних сьйв, обумовлена розпадом електронних потоків в іоносфері на окремі джгути, перисті хмари з виявленою просторовою періодичністю, стратифікація кометних хвостів або плазмових хмар в активних експериментах в іоносфері та багато інших.

У біології прикладом стаціонарних дисипативних структур є квазіперіодична будова деяких організмів (черви, багатоніжки, кишковопорожнинні та інші), а також виникнення плям чи смуг на шкірі або хутрі ряду тварин. Для пояснення цих явищ А.Тюрінг запропонував хімічний механізм¹. Він припустив, що періодичність виникає за рахунок нерівномірного розподілу деякої речовини – так званого морфогена.

Існування морфогенів досі прямо не встановлене. Тим не менше модель Тюрінга користується популярністю, оскільки вона дає змогу пояснити численні експериментальні результати за допомогою небагатьох простих ідей. З іншого боку, ця модель є, мабуть, найпростішою з усіх, що описують виникнення стаціонарних дисипативних структур у первісно однорідних активних середовищах.

2.4.1.1. Якісний опис моделі Тюрінга

Тюрінг припустив, що морфогени можуть реагувати один з одним та дифундувати через клітини. Дослідження математичної моделі, заснованої на цьому припущенні, показало, що з первісно однорідного розподілу морфогенів у скупченні клітин можуть виникнути просторові структури розподілу морфогенів.

Модель Тюрінга стала прообразом цілого ряду так званих реакційно-дифузійних моделей. Такі моделі застосовні до систем, у яких характерний розмір просторової структури значно більший від розмірів окремих клітин.

Найпростіша реакційно-дифузійна модель включає два морфогени, що реагують один з одним та дифундують із різними швидкостями. За відсутності дифузії в системі можливий однорідний стаціонарний стан, причому такий стан є стійким.

Якщо морфогени дифундують з однаковими швидкостями, будь-яке відхилення від однорідного стаціонарного стану з часом буде розсмоктуватись. Але якщо швидкості дифузії компонент відмінні, то швидкості реакції в деякій заданій точці можуть не встигнути швидко підлаштуватися під рівноважний стан. За певних умов малі просторові збурення можуть ста-

¹ Див.: A.M.Turing. The chemical basis of morphogenesis. // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B. 1952. V.237. No 641. Pp.37-72.

ти нестійкими, і в системі почне формуватися просторова структура. В цьому випадку говорять про дифузійну нестійкість (нестійкість, обумовлену дифузією). Просторова неоднорідність, обумовлена розвитком дифузійної нестійкості, відома в екології як плямистість.

2.4.1.2. Умови розвитку дифузійної нестійкості в двокомпонентній системі

Розглянемо двокомпонентну систему, що описується парою нелінійних кінетичних рівнянь із дифузією вигляду (2.2.34):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = f_1(u, v) + D_1 \Delta u; \\ \frac{\partial v}{\partial t} = f_2(u, v) + D_2 \Delta v \end{cases}$$

(такі рівняння використовувалися для опису середовищ із відновленням, див. вище п. 2.2.2). Обмежимося для простоти одновимірним випадком ($u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$).

Як і раніше, вважатимемо, що система (2.2.34) має єдиний однорідний стаціонарний розв'язок $u = u_0$, $v = v_0$. З'ясуємо, чи буде цей розв'язок стійким.

Лінеаризуючи систему (2.2.34) по малих відхиленнях \tilde{u}, \tilde{v} від стаціонарного однорідного розв'язку u_0, v_0 , можна отримати:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = a_{11} \tilde{u} + a_{12} \tilde{v} + D_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = a_{21} \tilde{u} + a_{22} \tilde{v} + D_2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (2.4.1)$$

де використані позначення

$$a_{11,21} = \left. \frac{\partial f_{1,2}(u, v)}{\partial u} \right|_{u=u_0, v=v_0}; \quad a_{12,22} = \left. \frac{\partial f_{1,2}(u, v)}{\partial v} \right|_{u=u_0, v=v_0}. \quad (2.4.2)$$

Оскільки система (2.4.1) є лінійною і має сталі коефіцієнти, підставимо її розв'язок у формі $\exp(\lambda t - ikx)$. Тоді (2.4.1) перетвориться на однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо амплітуд змінних \tilde{u} та \tilde{v} . Прирівнявши до нуля її визначник, легко знайти характеристичне рівняння для λ :

$$\lambda^2 + \lambda [k^2 (D_1 + D_2) - (a_{11} + a_{22})] + [k^4 D_1 D_2 - k^2 (a_{11} D_2 + a_{22} D_1) + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})] = 0. \quad (2.4.3)$$

Відповідно до критерію Рауса – Гурвиця, однорідний стаціонарний стан (йому відповідає розв'язок із $k = 0$) середовища, описуваного рівняннями (2.1.34), буде стійким за виконання умов

$$\begin{cases} a_{11} + a_{22} < 0; \\ a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} > 0. \end{cases} \quad (2.4.4)$$

Як відомо, порушення другої з умов (2.4.4) означає, що стаціонарна точка (u_0, v_0) на площині (u, v) стає сідлом. Порушення першої з названих умов за виконання другої означає, що ця точка стає або нестійким фокусом, або нестійким вузлом.

Перша з нерівностей (2.4.4) може бути задоволена лише тоді, коли одна з величин a_{11}, a_{22} буде від'ємною.

При ненульових значеннях k умови стійкості однорідного стаціонарного розв'язку в принципі можуть порушитися. Розглянемо це питання детальніше.

Якщо коефіцієнт при λ в рівнянні (2.4.3) був додатним при $k = 0$, він, очевидно, таким і залишиться при ненульових k (величини $D_{1,2}$ за змістом задачі додатні). Таким чином, якщо точка (u_0, v_0) втратить стійкість, то вона може перетворитися лише на точку сідлового

типу, якій відповідають два дійсні значення λ з протилежними знаками. Для цього необхідно виконати умову

$$F(k) \equiv k^4 D_1 D_2 - k^2 (a_{11} D_2 + a_{22} D_1) + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) < 0. \quad (2.4.5)$$

Ліва частина нерівності (2.4.5) являє собою поліном другого ступеню щодо k^2 , причому коефіцієнт при k^4 та вільний доданок цього поліному додатні. Очевидно, необхідною умовою того, що названий поліном може набувати від'ємних значень, є від'ємність коефіцієнту при k^2 :

$$a_{11} D_2 + a_{22} D_1 > 0. \quad (2.4.6)$$

Достатньою умовою є те, що значення цього поліному в мінімумі, що досягається при $k_0^2 = (a_{11} D_2 + a_{22} D_1) / 2 D_1 D_2$, має бути від'ємним, звідки

$$(a_{11} D_2 - a_{22} D_1)^2 + 4 D_1 D_2 a_{12} a_{21} > 0 \quad (2.4.7)$$

(рис. 2.4.1 а).

Порівнюючи між собою першу з умов (2.4.4) та умову (2.4.6), легко помітити, що одночасне задоволення цих нерівностей можливе лише при $D_1 \neq D_2$. Таким чином, необхідною умовою розвитку дифузійної нестійкості тюрингівського типу є різні величини коефіцієнтів дифузії у двокомпонентній системі.

2.4.1.3. Утворення просторових структур у системі хижак – здобич

Прикладом системи, описуваної рівнянням (2.2.34), може служити відомий в екології ефект алеї – утворення просторових структур у системі популяцій хижак – здобич.

Нехай кінетичні функції в правих частинах рівняння (2.2.34) мають вигляд

$$f_1(u, v) = u[f(u) - v], \quad f_2(u, v) = v[u - g(v)], \quad (2.4.8)$$

де u та v – відповідно кількість особин здобичі та хижаків на одиницю площі системи. Функція $f(u)$ характеризує швидкість зростання кількості здобичі за відсутності хижаків, функція $g(v)$ – швидкість зменшення кількості хижаків за відсутності здобичі. Вигляд функцій $f(u)$ та $g(v)$ показаний на рис. 2.4.1 б. Точка А, в якій $u = v = 0$, точка В, в якій $v = 0$ та $f(u) = 0$, та точка С, в якій $v = f(u) \equiv v_0$ та $u = g(v) \equiv u_0$, відповідають стаціонарним однорідним розв'язкам системи (2.1.34). Зокрема, точка С відповідає співіснуванню популяцій хижак – здобич. Наявність максимуму функції $f(u)$ відображає ефект перенаселення. Відзначимо, що точка С лежить ліворуч від цього максимуму.

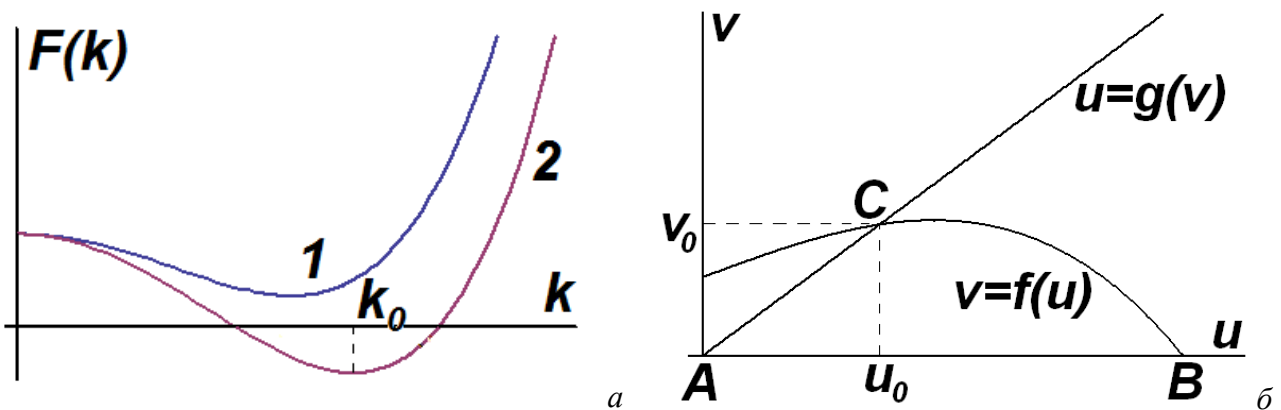


Рис. 2.4.1: а – функція $F(k)$ за виконання лише умови (2.4.6) (крива 1) та умови (2.4.7) (крива 2); б – вигляд модельних функцій $f(u)$ та $g(v)$

Взявши до уваги явний вигляд кінетичних функцій (2.4.8), отримуємо з (2.4.2):

$$a_{11} = u_0 f'(u_0), \quad a_{12} = -u_0, \quad a_{21} = v_0, \quad a_{22} = -v_0 g'(v_0), \quad (2.4.9)$$

де використано позначення

$$f'(u) = \frac{df(u)}{du}, \quad g'(v) = \frac{dg(v)}{dv}$$

і враховано, що $f(u_0) = v_0$ та $g(v_0) = u_0$.

Тоді умови (2.4.4) набувають вигляду:

$$\begin{cases} u_0 f'(u_0) - v_0 g'(v_0) < 0; \\ f'(u_0) g'(v_0) < 1 \end{cases} \quad (2.4.10)$$

(враховано, що за змістом задачі u_0 та v_0 – додатні величини). Відзначимо, що якби точка С на рис. 2.4.1 б була на спадній ділянці залежності $f(u)$, першу з умов (2.4.10) було б неможливо задовольнити.

Умова (2.4.6) з урахуванням (2.4.9) набуває вигляду

$$u_0 f'(u_0) D_2 - v_0 g'(v_0) D_1 > 0. \quad (2.4.11)$$

Очевидно, вона може бути задоволена одночасно з першою умовою (2.4.10) лише тоді, коли $D_2 > D_1$, тобто коли хижаки рухливіші від здобичі.

Щоб просунутися далі, спростимо модель. Вважатимемо область заселення одновимірною довжиною L . Тоді розв'язки $u(x, t)$ та $v(x, t)$ на її кінцях повинні задовольняти умовам відсутності потоку:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \quad (2.4.12)$$

Накладання таких умов означає, що спектр можливих значень хвильового числа буде дискретним: $k_n = n\pi/L$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Отже, якщо хоч для одного значення n умова (2.4.5) (з урахуванням (2.4.9)) буде виконана, в системі розвиватиметься нестійкість дифузійного типу.

Справді, довільне початкове збурення формально можна подати як набір просторових гармонік. Якщо для однієї з них виконано умову нестійкості, то її амплітуда зростатиме з часом, тоді як амплітуди інших гармонік спадатимуть. На пізніх стадіях зростання нестійкості обмежуватиметься за рахунок нелінійностей. Зрозуміло, що останній ефект не може бути описаний розвиненою в цьому та попередньому пунктах теорією, заснованою на лінеаризації початкової системи рівнянь (2.2.34).

Щоб якісно пояснити механізм виникнення дифузійної нестійкості в екологічних системах, розглянемо іншу модель. Нехай деяка область заросла сухим лісом, у якому легко виникають вогнища пожеж. За безпекою слідкують пожежники, озброєні відповідною технікою, включаючи швидкісні гелікоптери та апаратуру зв'язку. Коли виникає чергове вогнище пожежі, пожежників поруч мало, тому вогонь деякий час поширюється. Але потім прилітає велика кількість пожежників на гелікоптерах, які локалізують вогонь, зосереджуючись над областю горіння. В результаті з часом утвориться плямиста структура – області вцілілого лісу чергуватимуться зі згарищами.

Екологам добре відомо, що в ареалі, який виглядає однорідним і не містить областей з багатшими ресурсами чи кращими умовами життя, спостерігається просторово нерівномірний розподіл особин у популяції: зовсім поруч із густо заселеними місцями є місця, що майже зовсім не заселені. Це прояви існування екологічних дисипативних структур.

Контрольні питання до підрозділу 2.4.1

1. Запропонуйте кілька прикладів систем, у яких можлива дифузійна нестійкість.
2. Чи будуть властивості структур, що виникають у двовимірній області внаслідок розвитку дифузійної нестійкості, залежати від форми цієї області?

2.2. Стационарні дисипативні структури

Стационарні дисипативні структури – це структури, які виникають у первісно однорідному середовищі, причому їхні властивості слабо залежать від початкових та граничних умов. Вище вже побіжно розглядалися такі структури на прикладі одновимірних стаціонарних станів у брьоселяторі (див. п. 1.3.3.4). Але брьоселятор – це лише зручна модельна система. У цьому підрозділі ми розглянемо реальні приклади стаціонарних дисипативних структур та механізми їхнього виникнення. Такі механізми можна умовно розділити на дві великі групи: це розподілений зворотний зв'язок та насичення аперіодичної нестійкості.

2.2.1. Дисипативні структури, обумовлені розподіленим зворотним зв'язком

Ми зустрічалися з формуванням структур (доменів), коли розглядали бістабільне середовище з $\Phi(u_1)=\Phi(u_3)$ (див. п. 2.1.1.7). Але там властивості доменів цілком визначалися початковими умовами, що не зовсім типово. Розглянута в п. 2.1.1.7 структура перебуває у стані байдужої рівноваги, який не відновлюється після збурень.

Більш характерним прикладом системи, в якій утворюється дисипативна структура, може служити баретер – пристрій, який на зорі розвитку радіоелектроніки використовувався як стабілізатор струму. Розглянемо принцип його роботи.

2.2.1.1. Баретер: принцип дії

Баретер являє собою залізна нитку, що вміщена в атмосферу водню й нагрівається електричним струмом. З експерименту відомо, що питомий опір такої нитки нелінійно залежить від температури (рис. 2.2.1). Для простоти апроксимуємо цю залежність ступінчастою функцією.

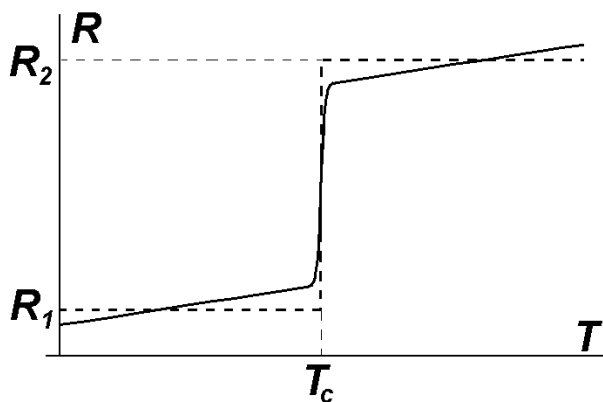


Рис. 2.2.1. Залежність питомого опору залізної нитки, вміщеної в атмосферу водню, від температури (суцільна лінія) та її апроксимація (штрихова лінія)

Температура в деякій точці нитки визначається виділенням тепла струмом, теплообміном з навколишнім середовищем та теплопровідністю самої нитки. Тому кінетичне рівняння для нитки має вигляд:

$$c \frac{dT}{dt} = f(T) + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (2.2.1)$$

де

$$f(T) = I^2 R(T) - \gamma(T - T_0) \equiv Q_+ - Q_- \quad (2.2.2)$$

кінетична функція, c – погонна теплоємність нитки (на одиницю довжини), κ – теплопровідність, T_0 – температура навколишнього середовища. Вигляд кінетичної функції для різних значень струму показано на рис. 2.2.2.

Розглянемо спочатку випадок, коли струм через дротину підтримується сталим. В інтервалі між деякими крайніми значеннями I_{\min} та I_{\max} система має два стійкі стани – з низькою (T_1) та з високою (T_2) температурою. Перехід між станами відбувається у вигляді хвилі перекидання, що витісняє (в залежності від параметрів) низькотемпературну (або, що те саме, низькоомну) чи високотемпературну (високоомну) область. Це визначається, як вказувалося вище (див. п. 2.1.1.5), знаком інтеграла

$$\Delta\Phi = \int_{T_1}^{T_2} f(T) dT.$$

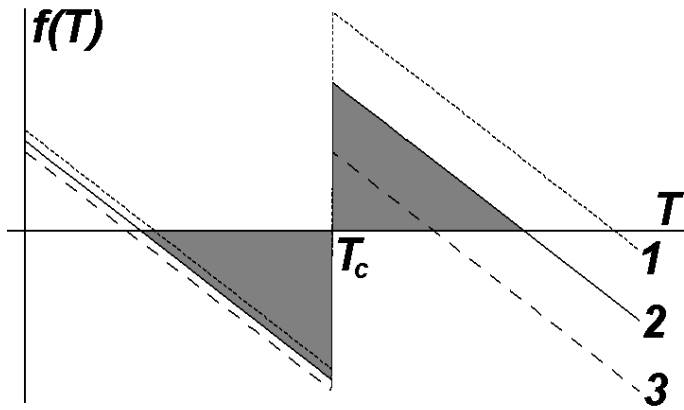


Рис. 2.2.2. Кінетична функція рівняння (2.2.1) для різних значень струму: $I_1 > I_2 = I_{cr} > I_3$.

При $\Delta\Phi > 0$ встановлюється стан з температурою T_2 , при $\Delta\Phi < 0$ – стан з температурою T_1 , при $\Delta\Phi = 0$ хвиля перекидання не поширюється.

Нехай тепер підтримується не струм через нитку, а напруга U на її кінцях. Тепер струм через нитку визначається формулою

$$I = \frac{U}{\int_0^l R(T(x)) dx}, \quad (2.2.3)$$

де l – довжина нитки.

Нехай $\Delta\Phi = 0$ для деякого $I = I_{cr}$ (рис. 2.2.2). Розглянемо спершу випадок $I > I_{cr}$. Тоді $\Delta\Phi > 0$. Це приводить до того, що на дротині від флуктуації з'являється високотемпературна (і, відповідно, високоомна) область, яка починає розширюватися. При цьому опір нитки зростатиме і, відповідно, струм через нитку зменшуватиметься, доки не встановиться значення $I = I_{cr}$ і хвиля перекидання не зупиниться. В результаті встановиться рівновага між ділянками з температурами T_1 і T_2 . Те саме буде, якщо в початковий момент часу виконувалася умова $I < I_{cr}$. При зміні напруги U в деяких межах розміри високотемпературної та низькотемпературної ділянок змінюватимуться, але струм залишатиметься рівним I_{cr} . Це явище називається баретуванням. Відповідно баретер являє собою стабілізатор струму.

2.2.1.2. Розрахунок характеристик дисипативної структури

Нехай довжини ділянок з T_1 і T_2 значно більші від ширини перехідного шару. Тоді формулу (2.2.3) можна переписати у формі

$$I = \frac{U}{(R_2 l_2 + R_1 l_1)}, \quad (2.2.3 \text{ а})$$

де $R_2 = R(T_2)$, $R_1 = R(T_1)$, $l_1 + l_2 = l$, l_1 і l_2 – довжини ділянок з температурами T_1 і T_2 . Оскільки в стаціонарному режимі $I = I_{cr}$, маємо:

$$\frac{U}{I_{cr}} = R_2 l_2 + R_1 (l - l_2),$$

звідки

$$l_2 = \frac{\frac{U}{I_{cr}} - R_1 l}{R_2 - R_1} \quad (2.2.4)$$

Отже, стаціонарна дисипативна структура виникає при $U_{\min} < U < U_{\max}$, де $U_{\min} = I_{cr} R_1 l$, $U_{\max} = I_{cr} R_2 l$.

На нитці не обов'язково має бути одна високотемпературна ділянка. Їх може бути багато (це визначається початковими умовами), але їхня сумарна довжина задається співвідношенням (2.2.4).

Головна причина виникнення дисипативної структури в баретері – наявність, крім локальної взаємодії, далекодіяного зворотного зв'язку. Він виявляється в тому, що при фіксованій прикладеній напрузі сила струму в кожній точці дротини залежить від стану всіх інших її точок (див. формулу (2.2.3)).

2.2.1.3. Утворення вогнища горіння

Нехай у реакторі обмеженого об'єму відбувається горіння деякої речовини. Нехай його коефіцієнт дифузії перевищує теплопровідність так, що за рахунок дифузії концентрація пального підтримується однаковою в усіх точках. Нехай пальне надходить у реактор зі сталою швидкістю Q . Тоді процес горіння описується рівняннями.

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = nq(T) - \gamma(T - T_0) + \kappa \Delta T; \\ \frac{dn}{dt} = w - n \int Q(T(\vec{r})) d\vec{r}. \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Тут n – концентрація пального (вважаємо, що швидкість дифузії пального велика, тому $n(\vec{r}) = \text{const}$), $q(T)$ – тепловиділення на одиницю маси пального, $Q(T)$ – швидкість зменшення пального при горінні (інтегрування здійснюється по всьому об'єму реактора). Обидві ці функції мають вигляд розмитої сходинок (рис. 2.2.3).

Нехай пальне в деякій точці реактора підпалене. Спершу зона горіння буде розширюватись. Але це приведе до збільшення втрат пального і, відповідно до зменшення його концентрації. Останнє, в свою чергу, сповільнить поширення фронту горіння. При деякому $n = n_{cr}$ цей фронт зупиниться, і виникне стаціонарна дисипативна структура – вогнище горіння. За інших початкових умов замість одного вогнища може виникнути кілька менших.

Як і в попередньому випадку, причиною виникнення вогнища горіння є розподілений зворотний зв'язок у системі – концентрація пального в кожній точці системи, як впливає з другого рівняння системи (2.2.5), залежить від стану всіх інших точок.

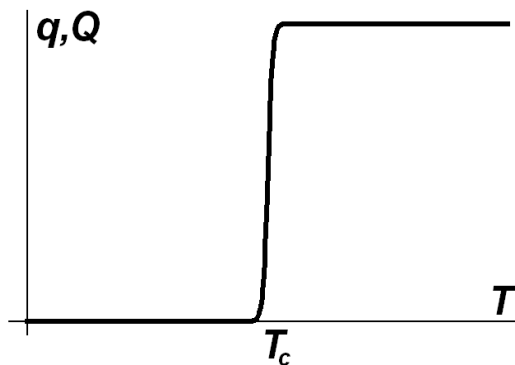


Рис. 2.2.3. Вигляд функцій, що характеризують тепловиділення та втрати пального при горінні.

2.2.1.4. Властивості дисипативних структур, обумовлених розподіленним зворотним зв'язком

Наведені приклади ілюструють основні властивості дисипативних структур, що виникають внаслідок існування в активному середовищі розподіленого зворотного зв'язку.

- Дисипативна структура – це стійке утворення, форма і розміри якого відновлюються після малих збурень. Можна сказати, що це певний стійкий стан розподіленої системи.
- Кожен такий стан характеризується певною областю притягання.
- Одна й та сама система може породжувати багато різних дисипативних структур, реалізація яких залежить від початкових умов.

2.2.2. Дисипативні структури, обумовлені аперіодичною нестійкістю

Дисипативні структури в системах, де немає розподіленого зворотного зв'язку, виникають в результаті розвитку аперіодичної нестійкості, яку можна розглядати як результат біфуркації Тюрінга (див. п. 1.3.3.3). В результаті насичення такої нестійкості в первісно однорідному середовищі виникають просторово-періодичні структури, основні характеристики яких (амплітуда, просторовий період) визначаються властивостями самого середовища і не залежать від граничних (якщо розміри однорідної області достатньо великі) та початкових умов.

Прикладами таких структур можуть бути, крім уже розглянутої моделі брьоселятора, структура полярних сійв, обумовлена розпадом електронних потоків в іоносфері на окремі джгути, перисті хмари з виявленою просторовою періодичністю, стратифікація кометних хвостів або плазмових хмар в активних експериментах в іоносфері та багато інших. Але, мабуть, найбільш відомим та ефектним прикладом таких дисипативних структур є утворення за певних умов регулярних періодичних смуг (так звані конвективні вали) або правильних шестикутних комірок течії рідини в шарі, що підігрівається знизу – явище конвекції Релея – Бенара. Розглянемо його більш детально.

2.2.2.1. Конвекція Релея – Бенара: опис моделі та вихідні рівняння

Розглянемо шар в'язкої рідини, що займає проміжок $0 < z < h$ (вісь z спрямовано вертикально вгору, див. рис. 2.2.4). У площині $z=0$ підтримується температура T_1 , в площині $z=h$ – температура T_2 ($\Delta T \equiv T_1 - T_2 > 0$).

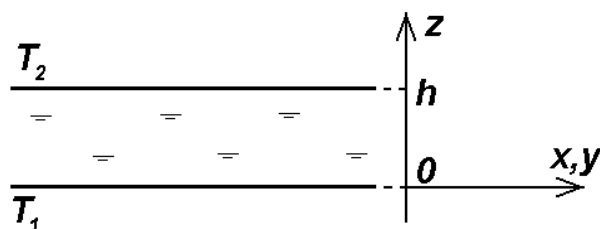


Рис. 2.2.4. Шар рідини, що підігрівається знизу

При невеликих значеннях різниці температур ΔT рідина залишається нерухомою, так що передача тепла знизу вгору відбувається лише за рахунок теплопровідності. При переході ΔT через деяке критичне значення ΔT_{cr} починається конвекція.

Будемо характеризувати рідину полем температур $T(\mathbf{r},t)$ та полем швидкостей $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$. Для її опису скористаємося рівнянням Нав'є – Стокса, а також рівняннями теплопровідності та неперервності.

Рівняння Нав'є – Стокса являє собою, по суті, другий закон Ньютона для краплі рідини з урахуванням того, що положення краплі з часом змінюється. Тому повна похідна $d\mathbf{v}/dt$ набуває вигляду

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} v_i = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (2.2.6)$$

Рівняння Нав'є – Стокса можна записати у вигляді

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \eta \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g}, \quad (2.2.7)$$

де ρ – густина рідини, p – її тиск, η – її коефіцієнт внутрішнього тертя (динамічна в'язкість), $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ – прискорення земного тяжіння. Доданки в правій частині визначають сили, що діють на краплю рідини. Перший з них відповідає тиску, другий та третій – тертю, четвертий – силі тяжіння.

Рівняння теплопровідності з урахуванням можливої конвекції рідини набуває вигляду

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \chi \Delta T, \quad (2.2.8)$$

де χ – коефіцієнт температуропровідності, а символ Δ позначає лапласіан.

Нарешті, рівняння неперервності для рідини має вигляд

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.2.9)$$

Причиною конвекції є теплове розширення рідини, тому в останньому доданку рівняння (2.2.7) необхідно врахувати залежність густини рідини від температури. В першому наближенні вважатимемо цю залежність лінійною:

$$\rho(T) = \rho_0 (1 - \alpha \Theta), \quad (2.2.10)$$

де

$$\Theta = T - T_0, \quad T_0 = \frac{1}{2}(T_1 + T_2), \quad \rho_0 = \rho(T_0). \quad (2.2.11)$$

В усіх інших рівняннях залежністю густини від температури можна знехтувати, тобто ρ можна замінити на ρ_0 . Тоді рівняння (2.2.9) набуде простого вигляду

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.2.9 \text{ a})$$

характерного для нестисливої рідини, а рівняння (2.2.7) з урахуванням (2.2.10) та (2.2.9 a) можна подати у формі

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g} (1 - \alpha \Theta), \quad (2.2.7 \text{ a})$$

де $\nu = \eta / \rho_0$ – кінематична в'язкість рідини.

Очевидні граничні умови для температури мають вигляд

$$T(z=0) = T_1, \quad T(z=h) = T_2. \quad (2.2.12)$$

Вважатимемо граничні поверхні шару рідини вільними. Тоді на цих поверхнях повинні виконуватися граничні умови

$$v_z(z=0) = v_z(z=h) = 0 \quad (2.2.13)$$

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ - \left(\sqrt{P} + \frac{1}{\sqrt{P}} \right) \kappa^2 \pm \sqrt{\left(\sqrt{P} - \frac{1}{\sqrt{P}} \right)^2 \kappa^4 + 4R \frac{\kappa_{\perp}^2}{\kappa^2}} \right\}. \quad (2.2.21)$$

Очевидно, стаціонарний розв'язок (2.2.14) залишається стійким доти, доки $\Lambda_{1,2}$ будуть від'ємними. Якщо ж хоч один з двох коренів (в даному разі Λ_1) стане додатним, у системі буде розвиватися нестійкість, тобто почнеться конвекція.

2.2.2.4. Умови виникнення конвекції

Дослідимо залежність $\Lambda_1(\kappa_{\perp})$. Як видно з (2.2.21),

$$\lim_{\kappa_{\perp} \rightarrow \infty} \Lambda_1 = -\infty.$$

Тому максимальне значення Λ_1 досягається при деякому скінченному значенні $\kappa_{\perp \text{opt}}$. В критичному випадку в нуль перетворюється як Λ_1 , так і похідна $\partial \Lambda_1 / \partial \kappa_{\perp}$. Ці умови приводять до рівнянь

$$(\kappa_z^2 + \kappa_{\perp}^2)^3 = R \kappa_{\perp}^2, \quad 2(\kappa_z^2 + \kappa_{\perp}^2)^3 = R \kappa_z^2, \quad (2.2.22)$$

розв'язавши які, можна з'ясувати, що нестійкість починається для збурення з поперечним хвильовим числом

$$\kappa_{\perp \text{opt}} = \frac{\kappa_z}{\sqrt{2}} \quad (2.2.23)$$

при переході числа Релея через критичне значення

$$R_{cr} = \frac{27}{4} \kappa_z^4. \quad (2.2.24)$$

Граничні умови приводять до утворення дискретного набору значень κ_z (див. (2.2.17)). Зрозуміло, що нестійкість почне розвиватися при тому значенні κ_z , якому відповідає мінімальне значення R_{cr} , тобто при

$$\kappa_z = \pi \quad (n=1), \quad (2.2.25)$$

коли по висоті шару вкладається половина довжини стоячої хвилі. Тоді

$$\kappa_{\perp \text{opt}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 2.221, \quad R_{cr} = \frac{27}{4} \pi^4 \approx 657.5. \quad (2.2.26)$$

Залежності $\Lambda_1(\kappa_{\perp})$ подані на рис. 2.2.6.

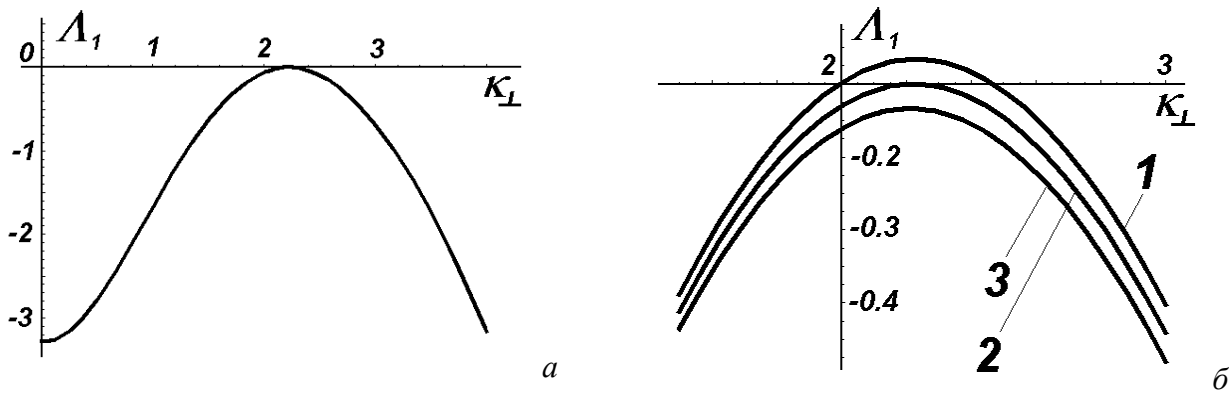


Рис. 2.2.6. Залежність $\Lambda_1(\kappa_{\perp})$ для $R=R_{cr}$ (а) та для різних значень R ($R_1 > R_2 = R_{cr} > R_3$)

Як видно з рис. 2.2.6 а, при невеликому перевищенні числа Релея над критичним значенням (2.2.26) область значень κ_{\perp} , в якій розвивається нестійкість, є порівняно вузькою, і наближено можна вважати, що $\kappa_{\perp} = \kappa_{\perp \text{opt}}$. Підставивши до формули (2.2.21) значення κ_z (2.2.25) та $\kappa_{\perp \text{opt}}$ (2.2.26) і подавши число Релея у формі $R = R_{cr}(1 + \varepsilon)$, де $0 < \varepsilon \ll 1$, отримаємо інкремент нестійкості при малій надкритичності:

$$\Lambda_1 = \frac{3\pi^2 \varepsilon}{2 \left(\sqrt{P} + \frac{1}{\sqrt{P}} \right)}. \quad (2.2.21 \text{ а})$$

Видно, що в цьому випадку інкремент прямо пропорційний до надкритичності.

Побудована нами лінійна теорія аналогічна до лінійної теорії автогенератора: вона передбачає довжину хвилі, на якій розвивається аперіодична нестійкість, (аналог частоти автоколивань) та критичне значення числа Релея (аналог амплітудної умови самозбудження), а також інкремент малих коливань. Для того, щоб знайти амплітуду усталеного збурення (тобто, по суті, амплітуду утворюваної дисипативної структури), необхідна нелінійна теорія.

3.1.1.9. Умова невинродженості

Побудуємо квадратну матрицю з елементів $\partial\omega_i/\partial I_j = \partial^2 H(\vec{I})/\partial I_i \partial I_j$. Якщо визначник цієї матриці відмінний від нуля,

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 H(\vec{I})}{\partial I_i \partial I_j} \right\} \neq 0, \quad (3.1.8)$$

відповідна система називається невинродженою. Фактично умова невинродженості означає, що принаймні деякі елементи $\partial\omega_i/\partial I_j$ відмінні від нуля, тобто така система є неізохронною, а, отже, й нелінійною. Для невинроджених систем у фазовому просторі резонансні й нерезонансні тори певним чином чергуються.

Контрольні питання до підрозділу 3.1.1

1. Чи однозначно вводяться змінні дія-кут? Яка умова однозначно визначає їхню величину?
2. Визначте резонансні та нерезонансні тори для нелінійного осцилятора, на який діє зовнішня періодична сила, вважаючи, що вісь часу скручена в кільце.
3. Яких торів на фазовому портреті інтегровної гамільтонівської системи більше – резонансних чи нерезонансних?
4. Чи можливий граничний перехід між резонансними та нерезонансними торами в інтегровній системі?
5. В чому відмінність між резонансними торами в системах з двома і менше ступенями вільності та в системах, де кількість ступенів вільності більша від двох?
6. Дайте інтерпретацію теореми Ліувілля з точки зору динаміки зображувальних точок у фазовому просторі.
7. В яких випадках рух інтегровної гамільтонівської системи буде ергодичним?
8. Наведіть по кілька прикладів винроджених та невинроджених систем із багатьма ступенями вільності.
9. Чи може система зв'язаних нелінійних осциляторів бути винродженою?

Задачі до підрозділу 3.1.1

3.1.1.1. Гамільтоніан системи має вигляд

а) $H(\vec{I}, \vec{\theta}) = \omega_0(I_1 + I_2) + \frac{1}{2}\alpha(I_1^2 + I_2^2) + \beta I_1 I_2$;

б) $H(\vec{I}, \vec{\theta}) = \omega_0(I_1 + I_2) + \frac{1}{3}\alpha(I_1^3 + I_2^3) + \beta I_1 I_2(I_1 + I_2)$.

Яким значенням дій відповідають резонансні тори порядків 1, 1/2 та 2/3?

3.1.1.2*. Введіть змінні дія-кут та знайдіть закон неізохронності – залежність власної частоти від дії – для

- а) математичного маятника;
- б) осцилятора з квадратичною нелінійністю;
- в) осцилятора з кубічною нелінійністю.

3.1.2. Гамільтонівські системи, близькі до інтегровних

Нехай для деякої гамільтонівської системи з n ступенями вільності гамільтоніан можна подати у вигляді

$$H(\vec{\theta}, \vec{I}, t) = H_0(\vec{I}) + \varepsilon H_1(\vec{\theta}, \vec{I}, t). \quad (3.1.9)$$

Якщо $0 < \varepsilon \ll 1$, говорять, що така система близька до інтегровної.

Рух інтегровних гамільтонівських систем є регулярним (періодичним або квазіперіодичним). Гамільтонівські системи, близькі до інтегровних, демонструють зародження хаотичної динаміки.

Нагадаємо, що причиною виникнення хаотичної динаміки (непередбачуваності) в сис-

темах із невеликою кількістю ступенів вільності за відсутності випадкових зовнішніх сил є поєднання нестійкості системи, яка виявляється в розбіжності сусідніх зображувальних точок з часом, із обмеженістю (фінітністю) руху. Початкові умови, необхідні для передбачення руху системи, завжди відомі лише зі скінченною точністю. Внаслідок нестійкості початкова невизначеність з часом зростає, так що через деякий час вона виявляється за порядком величини такою самою, як передбачене значення. Це й означає непередбачуваність руху системи³.

3.1.2.1. Канонічне перетворення для нелінійного осцилятора

Подивимось, чи не можна гамільтонівські системи, близькі до інтегровних, просто звести до інтегровного випадку. Застосуємо для цього канонічну теорію збурень.

Канонічна теорія збурень оперує змінними дія-кут. Розглянемо спершу її застосування для систем з одним ступенем вільності, тобто автономних консервативних осциляторів.

Розглянемо гамільтоніан вигляду $H(I, \theta, \varepsilon)$, що залежить від малого параметра ε ($0 < \varepsilon \ll 1$) таким чином, що $H(I, \theta, \varepsilon = 0) = H_0(I)$. Розкладемо цей гамільтоніан у ряд Тейлора⁴ за ε :

$$H(\theta, I, \varepsilon) = H_0(I) + \varepsilon H_1(\theta, I) + \varepsilon^2 H_2(\theta, I) + \dots \quad (3.1.10)$$

(змінні I, θ відповідають дії та куту при $\varepsilon = 0$).

Рівняння Гамільтона для гамільтоніана (3.1.10) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \theta} - \varepsilon^2 \frac{\partial H_2}{\partial \theta} - \dots \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial I} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I} + \varepsilon^2 \frac{\partial H_2}{\partial I} + \dots \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Ідея канонічного перетворення полягає у знаходженні для збуреного (порівняно з випадком $\varepsilon = 0$) гамільтоніана $H(I, \theta, \varepsilon)$ нових змінних J, φ , для яких можливе канонічне перетворення до нового гамільтоніана K , причому $K = K(J)$. Для знаходження цих змінних необхідно спочатку відшукати твірну функцію $F_2(\theta, J)$ ⁵, таку, що

$$I = \frac{\partial F_2(\theta, J)}{\partial \theta}, \quad \varphi = \frac{\partial F_2(\theta, J)}{\partial J}. \quad (3.1.12)$$

Тоді співвідношення (3.1.12) дозволяють однозначно визначити нові змінні J, φ через старі змінні I, θ .

3.1.2.2. Рівняння Гамільтона – Якобі

Очевидно, твірна функція, як і початковий гамільтоніан, залежить від малого параметра ε . Розкладемо її в ряд Тейлора за цим параметром:

$$F_2(\theta, J) = F_{20}(\theta, J) + \varepsilon F_{21}(\theta, J) + \varepsilon^2 F_{22}(\theta, J) + \dots \quad (3.1.13)$$

При $\varepsilon = 0$ нові змінні J, φ повинні збігатися зі старими I, θ . Тому, щоб задовольнити у цьому випадку співвідношення (3.1.12), слід покласти

$$F_{20}(\theta, J) = J\theta. \quad (3.1.14)$$

Прирівняємо старий гамільтоніан H у вигляді ряду (3.1.10) з урахуванням першого зі співвідношень (3.1.12) до нового гамільтоніана K . Отримаємо так зване рівняння Гамільтона

³ Детальніше про це див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009.

⁴ Б. Тейлор (Brook Taylor, 1685 - 1731) – англійський математик і фізик. Працював у галузі механіки, оптики, теорії коливань, досліджував капілярні явища в рідинах.

⁵ Інколи використовують твірну функцію $F_1 = F_1(\varphi, I)$, для якої $J = \partial F_1(\varphi, I) / \partial \varphi$, $\theta = \partial F_1(\varphi, I) / \partial I$.

– Якобі⁶:

$$H_0\left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta}\right) + \varepsilon H_1\left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta}, \theta\right) + \varepsilon^2 H_2\left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta}, \theta\right) + \dots = K(J). \quad (3.1.15)$$

Замінімо похідні в аргументах доданків у лівій частині (3.1.15) за допомогою ряду (3.1.13) і подамо їх у вигляді рядів Тейлора за ε :

$$\begin{aligned} H_0\left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta}\right) &= H_0\left(J + \varepsilon \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} + \varepsilon^2 \frac{\partial F_{22}}{\partial \theta} + \dots\right) = H_0\left(J + \varepsilon \left(\frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} + \varepsilon \left(\frac{\partial F_{22}}{\partial \theta} + \dots\right)\right)\right) = \\ &= H_0(J) + \varepsilon \frac{dH_0}{dJ} \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} + \varepsilon^2 \left[\frac{dH_0}{dJ} \frac{\partial F_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{d^2 H_0}{dJ^2} \left(\frac{\partial F_{21}}{\partial \theta}\right)^2 \right] + \dots \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

$$H_1\left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta}, \theta\right) = H_1(J, \theta) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial J} \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} + \dots \quad (3.1.17)$$

$$H_2\left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta}, \theta\right) = H_2(J, \theta) + \dots \quad (3.1.18)$$

В рівняннях (3.1.16)-(3.1.18) залишені доданки, які відповідають членам до другого порядку мализни включно у лівій частині рівняння Гамільтона - Якобі (3.1.15).

3.1.2.3. Знаходження елементів ряду для нового гамільтоніана

Новий гамільтоніан $K = K(J, \varepsilon)$ у правій частині (3.1.15), який у загальному випадку залежить від малого параметра ε , також можна розкласти в ряд Тейлора за ε :

$$K(J, \varepsilon) = K_0(J) + \varepsilon K_1(J) + \varepsilon^2 K_2(J) + \dots \quad (3.1.19)$$

Тепер підставимо (3.1.16)-(3.1.19) до (3.1.15):

$$\begin{aligned} H_0(J) + \varepsilon \left[H_1(J, \theta) + \frac{dH_0}{dJ} \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} \right] + \varepsilon^2 \left[H_2(J, \theta) + \frac{\partial H_1}{\partial J} \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} + \frac{dH_0}{dJ} \frac{\partial F_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{d^2 H_0}{dJ^2} \left(\frac{\partial F_{21}}{\partial \theta}\right)^2 \right] + \dots = \\ = K_0(J) + \varepsilon K_1(J) + \varepsilon^2 K_2(J) + \dots \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях ε у лівій та правій частинах (3.1.20), можна отримати елементи ряду (3.1.19) у явному вигляді:

$$\begin{aligned} K_0(J) &= H_0(J); \\ K_1(J) &= H_1(J, \theta) + \frac{dH_0}{dJ} \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta}; \\ K_2(J) &= H_2(J, \theta) + \frac{\partial H_1}{\partial J} \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} + \frac{dH_0}{dJ} \frac{\partial F_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{d^2 H_0}{dJ^2} \left(\frac{\partial F_{21}}{\partial \theta}\right)^2; \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

3.1.2.4. Знаходження твірної функції

Перепишемо друге з рівнянь (3.1.21) у формі:

$$K_1(J) = H_1(J, \theta) + \omega_0(J) \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta}. \quad (3.1.21 \text{ а})$$

Усереднимо обидві частини (3.1.21 а) за θ на проміжку $[0, 2\pi]$. Оскільки ліва частина взагалі не залежить від θ , вона не зміниться. Отримаємо:

$$K_1(J) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1(J, \theta) d\theta + \omega_0(J) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} d\theta. \quad (3.1.21 \text{ б})$$

⁶ К. Якобі (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804 – 1851) – видатний німецький математик. Зробив визначний внесок до комплексного аналізу, лінійної алгебри, динаміки та ряду інших розділів математики та механіки.

Для розрахунку останнього інтегралу в правій частині (3.1.21 б) розкладемо функцію $F_{21}(J, \theta)$ в ряд Фур'є за θ (це можна зробити, оскільки вона періодична за θ з періодом 2π):

$$F_{21}(J, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k(J) \exp(ik\theta). \quad (3.1.22)$$

При підстановці (3.1.22) до (3.1.21 б) доданок, що відповідає значенню $k=0$, зникне при диференціюванні за θ . Решта доданків при інтегруванні перетворюються на нуль. Таким чином, рівняння (3.1.21 б) набуде вигляду

$$K_1(J) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1(J, \theta) d\theta \equiv \overline{H_1(J, \theta)}. \quad (3.1.21 \text{ в})$$

Таким чином, знаючи вигляд гамільтоніана $H_1(I, \theta)$, ми за допомогою (3.1.21 в) можемо знайти функцію $K_1(J)$. Тоді з рівняння (3.1.21 а) можна знайти похідну від твірної функції:

$$\frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} = \frac{K_1(J) - H_1(J, \theta)}{\omega_0(J)} = -\frac{\tilde{H}_1(J, \theta)}{\omega_0(J)}, \quad (3.1.23)$$

де

$$\tilde{H}_1(J, \theta) \equiv H_1(J, \theta) - \overline{H_1(J, \theta)} \quad (3.1.24)$$

– змінна частина гамільтоніана $H_1(I, \theta)$. Її також можна розкласти в ряд Фур'є за θ :

$$\tilde{H}_1(J, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k(J) \exp(ik\theta), \quad (3.1.25)$$

тобто коефіцієнти $A_k(J)$ можна вважати відомими.

Підставимо (3.1.22) та (3.1.25) до (3.1.23). Прирівнявши коефіцієнти при однакових експонентах у правій та лівій частинах, можна знайти в явному вигляді коефіцієнти ряду (3.1.22)

$$B_k(J) = \frac{iA_k(J)}{k\omega_0(J)}, \quad (3.1.26)$$

тобто твірну функцію (з точністю до доданків першого порядку за ε):

$$F_2(J, \theta) = J\theta + \frac{i\varepsilon}{\omega_0(J)} \sum_{k \neq 0} \frac{A_k(J)}{k} \exp(ik\theta) + \dots \quad (3.1.26 \text{ а})$$

В свою чергу, знаючи твірну функцію, із співвідношень (3.1.12) можна знайти нові змінні дія-кут. Скоригована частота, виходячи з (3.1.19), визначається співвідношенням

$$\omega(J) = \omega_0(J) + \varepsilon \frac{dK_1(J)}{dJ}. \quad (3.1.27)$$

Як бачимо, секулярні доданки в цьому розрахунку не виникають. Процедура можна продовжити, шукаючи поправки вищих порядків за ε . Проблеми можуть виникнути лише при $\omega_0 \rightarrow 0$, тобто при русі вздовж сепаратриси. Такі результати є цілком передбачуваними, оскільки, як нам уже відомо, гамільтонівські системи з одним ступенем вільності завжди є інтегровними.

3.1.2.5. Канонічна теорія збурень для систем із багатьма ступенями вільності

Розглянемо тепер загальний випадок системи, близької до інтегровної, тобто системи з гамільтоніаном (3.1.9). Вектори \vec{I} та $\vec{\theta}$ вважатимемо n -вимірними.

У нульовому наближенні за малим параметром ε рівняння руху мають вигляд:

$$\dot{\vec{I}} = -\nabla_{\vec{\theta}} H_0(\vec{I}) = 0, \quad \dot{\vec{\theta}} = \nabla_{\vec{I}} H_0(\vec{I}) \equiv \vec{\omega}_0(\vec{I}), \quad (3.1.1 \text{ в})$$

де

$$\nabla_{\theta} \equiv \sum_{k=1}^n \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial \theta_k}, \quad \nabla_I \equiv \sum_{k=1}^n \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial I_k}. \quad (3.1.28)$$

Як і в попередньому випадку, спробуємо знайти набір канонічних змінних $\vec{J}, \vec{\theta}$, які перетворюють гамільтоніан $H(\vec{I}, \vec{\theta})$ на гамільтоніан $K(\vec{J})$. Нові змінні знаходимо із співвідношень, аналогічних (3.1.12):

$$\vec{I} = \nabla_{\theta} F_2(\vec{J}, \vec{\theta}), \quad \vec{\theta} = \nabla_J F_2(\vec{J}, \vec{\theta}). \quad (3.1.29)$$

Твірну функцію $F_2(\vec{J}, \vec{\theta})$ можна записати аналогічно до (3.1.13)-(3.1.14):

$$F_2(\vec{J}, \vec{\theta}) = (\vec{\theta} \cdot \vec{J}) + \varepsilon F_{21}(\vec{J}, \vec{\theta}) + \varepsilon^2 F_{22}(\vec{J}, \vec{\theta}) + \dots \quad (3.1.30)$$

Рівняння Гамільтона - Якобі з точністю до доданків першого порядку за ε має вигляд:

$$H_0(\vec{J} + \varepsilon \nabla_{\theta} F_{21}) + \varepsilon H_1(\vec{J}, \vec{\theta}) = K_0(\vec{J}) + \varepsilon K_1(\vec{J}). \quad (3.1.31)$$

З нього легко отримати перші доданки розкладу гамільтоніана $K(\vec{J})$ в ряд Тейлора за малим параметром ε :

$$K_0(\vec{J}) = H_0(\vec{J});$$

$$K_1(\vec{J}) = H_1(\vec{J}, \vec{\theta}) + (\nabla_J H_0(\vec{J}) \cdot \nabla_{\theta} F_{21}(\vec{J}, \vec{\theta})) = H_1(\vec{J}, \vec{\theta}) + (\vec{\omega}_0(\vec{J}) \cdot \nabla_{\theta} F_{21}(\vec{J}, \vec{\theta})). \quad (3.1.32)$$

Розкладемо поправку першого порядку до твірної функції $F_{21}(\vec{J}, \vec{\theta})$ та змінну частину поправки до гамільтоніана

$$\tilde{H}_1(\vec{J}, \vec{\theta}) \equiv H_1(\vec{J}, \vec{\theta}) - \overline{H_1(\vec{J}, \vec{\theta})} \quad (3.1.33)$$

в багатовимірні ряди Фур'є по кутах:

$$F_{21}(\vec{J}, \vec{\theta}) = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_n} B_{\vec{m}}(\vec{J}) \exp(i \vec{m} \cdot \vec{\theta}); \quad (3.1.34)$$

$$\tilde{H}_1(\vec{J}, \vec{\theta}) = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_n} A_{\vec{m}}(\vec{J}) \exp(i \vec{m} \cdot \vec{\theta}), \quad (3.1.35)$$

де використане позначення

$$\vec{m} = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}. \quad (3.1.36)$$

Після усереднення по всіх кутах отримаємо:

$$K_1(\vec{J}) = \overline{H_1(\vec{J}, \vec{\theta})} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 \dots \int_0^{2\pi} d\theta_n H_1(\vec{J}, \vec{\theta}). \quad (3.1.32 \text{ а})$$

Підставивши (3.1.32 а) та (3.1.34)-(3.1.35) до (3.1.32), можна отримати вираз для $F_{21}(\vec{J}, \vec{\theta})$:

$$F_{21}(\vec{J}, \vec{\theta}) = i \sum_{|\vec{m}| \neq 0} \frac{A_{\vec{m}}(\vec{J}) \exp(i \vec{m} \cdot \vec{\theta})}{(\vec{m} \cdot \vec{\omega}_0(\vec{J}))}. \quad (3.1.37)$$

Як бачимо, у випадку, коли частоти $\omega_{0i}(\vec{J})$ сумірні, тобто коли для деякого набору індексів підсумовування \vec{m} виконано умову резонансу вигляду

$$(\vec{m} \cdot \vec{\omega}_0(\vec{J})) = 0 \quad (3.1.38)$$

(пор. із умовою (3.1.7 а)), ряд у правій частині (3.1.37) розбігається. Це відома в класичній механіці проблема малих знаменників.

Таким чином, гамільтонівські системи, близькі до інтегровних, вдається звести до ін-

тегровного випадку лише тоді, коли йдеться про рух на нерезонансних торах. Для руху по резонансних торах мале неінтегровне збурення в гамільтоніані дає якісно новий ефект.

Обговоримо фізичний зміст умови (3.1.38) (вона може бути також записана у формі (3.1.7 а)). Залежність $\omega_{0i}(\vec{J})$ вказує на те, що ми маємо справу з нелінійними осциляторами.

Той факт, що незбурений гамільтоніан $H_0(\vec{I})$ (див. формулу (3.1.9)) не розпадається на суму доданків, кожен з яких залежить тільки від однієї компоненти вектора \vec{I} , означає, що між згаданими осциляторами має місце зв'язок – взагалі кажучи, нелінійний. Для такої моделі умова (3.1.38) є умовою нелінійного резонансу в тому сенсі, що комбінаційна частота, яка виникає в результаті нелінійної взаємодії власних частот системи, збігається з власною частотою одного з осциляторів. Іншими словами, умову (3.1.38) можна розглядати як узагальнення відомої в теорії коливань умови резонансу $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ для параметричної взаємодії коливань у найпростішій системі трьох зв'язаних осциляторів із резонансним квадратичним зв'язком⁷.

Таким чином, саме параметрична взаємодія коливань у системі багатьох зв'язаних нелінійних осциляторів може порушити первісну інтегровність цієї системи при збуренні її гамільтоніану.

3.1.2.6. Теорема Колмогорова – Арнольда – Мозера

Відповідь на питання про те, що відбувається з фазовими траєкторіями на поверхні резонансних торів під дією малого неінтегровного доданку до гамільтоніану, в загальних рисах дає теорема Колмогорова – Арнольда⁸ – Мозера⁹ (теорема КАМ). Вона була сформульована А.М.Колмогоровим, він же висловив ідею її доведення¹⁰. Доведення теореми КАМ здійснив В.І.Арнольд¹¹. Інший частинний випадок теореми КАМ дещо раніше довів Дж. Мозер¹².

Розглянемо систему, близьку до інтегровної, з гамільтоніаном (3.1.9)

$$H(\vec{\theta}, \vec{I}) = H_0(\vec{I}) + \varepsilon H_1(\vec{\theta}, \vec{I}),$$

причому $0 < \varepsilon \ll 1$. Вважатимемо інтегровну частину гамільтоніана не виродженою, так що виконано умову (3.1.8)

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 H_0(\vec{I})}{\partial I_i \partial I_j} \right\} \neq 0.$$

Врахування неінтегровного збурення в гамільтоніані приводить до того, що нерезонансні тори лише трохи деформуються, а характер руху на них зберігається (такі тори називають інваріантними). Резонансні тори руйнуються, і на їхньому місці виникають області, де рух носить нерегулярний характер, відмінний від періодичного та квазіперіодичного. Розмір цих областей прямує до нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Чим більша величина

$$|\vec{m}| = \sqrt{\sum_{k=1}^n m_k^2}, \quad (3.1.39)$$

яка характеризує порядок резонансу (3.1.38), тим менша за розмірами область нерегулярного

⁷ Див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009, с. 223-230.

⁸ В.І. Арнольд (Владимир Йгорович Арнольд, 1937-2010) – російський та французький математик, учень А.М. Колмогорова. Народився в Одесі. Академік АН СРСР (1990), Національної Академії наук США, Французької Академії наук, почесний член Королівського товариства. Останні роки життя працював у Франції. Основні результати отримав у топології, теорії диференціальних рівнянь, теорії катастроф, теоретичній механіці.

⁹ Дж. Мозер (Jürgen (Juergen) Kurt Moser, 1928 – 1999) – німецький та американський математик. Працював у галузях теорії диференціальних рівнянь, спектральної теорії, небесної механіки, теорії стійкості.

¹⁰ А.Н. Колмогоров. ДАН СССР, 1954, **98**, 574.

¹¹ В.І. Арнольд. УМН, 1963, **18**, 85.

¹² J. Moser, Nachr. Akad. Wiss. Goettingen Math. Phys., **K1**, 1 (1962).

руху утворюється на місці відповідного резонансного тора. Точніше, інваріантні нерезонансні тори навколо такої області на місці резонансного тора, який характеризується співвідношенням $(\vec{m} \cdot \vec{\omega}) = 0$, зберігаються за виконання умови

$$|\vec{m} \cdot \vec{\omega}| = \left| \sum_{i=1}^n m_i \omega_i \right| > \frac{C(\varepsilon)}{|\vec{m}|^{n+1}}, \quad (3.1.40)$$

причому, як уже відзначалося, $C(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

3.1.2.7. Дифузія Арнольда

Існує якісна відмінність між поведінкою гамільтонівських систем, близьких до інтегрованих, у випадках $n \leq 2$ та $n > 2$ (n – число ступенів вільності). Вона полягає в тому, що при $n \leq 2$ області нерегулярного руху, що утворюються в результаті руйнування резонансних торів, відокремлені одна від одної. Навпаки, при $n > 2$ вони утворюють єдину систему.

Обговоримо це питання більш детально.

Системі з n ступенями вільності відповідає фазовий простір з розмірністю $2n$. Для автономної гамільтонівської системи зображувальна точка рухається на гіперповерхні сталої енергії, яка має розмірність $2n - 1$. З іншого боку, інваріантні тори мають розмірність n . Такі тори можуть відділити області нерегулярного руху одну від одної, якщо їхня розмірність буде не більше ніж на одиницю меншою, ніж розмірність області, де рухається зображувальна точка, тобто від розмірності гіперповерхні сталої енергії. Справді, для того, щоб відділити два об'єми (розмірність 3), потрібна щонайменше поверхня (розмірності 2); лінія (розмірності 1) цього зробити не може. Таким чином, області нерегулярного руху, що виникли на місці зруйнованих резонансних торів, будуть відділені одна від одної за виконання умови $n \geq (2n - 1) - 1$, або $n \leq 2$.

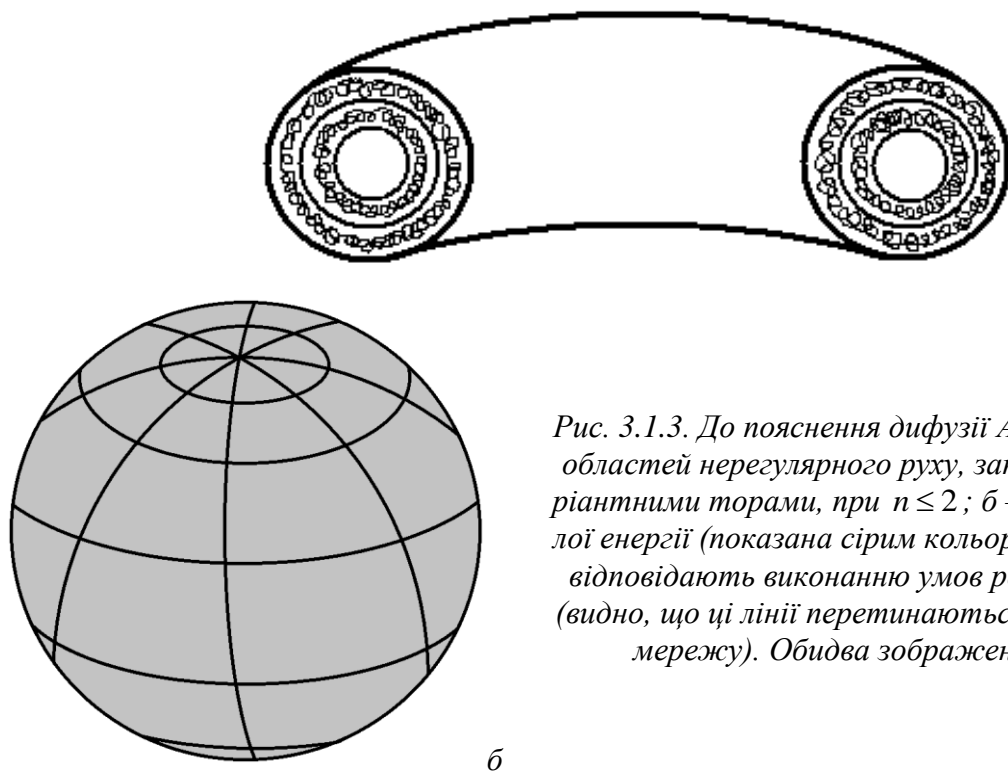


Рис. 3.1.3. До пояснення дифузії Арнольда: а – переріз областей нерегулярного руху, затиснутих між інваріантними торами, при $n \leq 2$; б – гіперповерхня сталої енергії (показана сірим кольором) і лінії на ній, що відповідають виконанню умов резонансу, при $n > 2$ (видно, що ці лінії перетинаються, утворюючи єдину мережу). Обидва зображення є умовними

Можна сказати, що при $n \leq 2$ області нерегулярного руху затиснуті між інваріантними торами. Іншими словами, якщо зображувальна точка потрапила в проміжок між двома інваріантними торами, вона залишиться там назавжди. Це означає, що в процесі руху системи значення її дії практично не змінюватиметься. Отже, для таких систем за будь-яких поча-

ткових умов зберігається глобальна стійкість руху. Можна навіть говорити про орбітальну стійкість руху. Фазовий простір такої системи умовно зображений на рис. 3.1.3 а.

При $n > 2$ інваріантні тори вже не можуть відділити області нерегулярного руху одна від одної. В результаті ці області виявляються зв'язаними одна з одною, утворюючи єдину складну мережу – так звану павутину Арнольда (див. умовне зображення на рис. 3.1.3 б). Рухаючись уздовж цієї павутини, зображувальна точка може (залишаючись, зрозуміло, на гіперповерхні сталої енергії) відійти як завгодно далеко від свого початкового положення. При цьому, очевидно, може помітно змінюватися не тільки значення кута, але й значення дії. Такий рух зображувальної точки прийнято називати дифузією Арнольда. Наслідком дифузії Арнольда є відсутність глобальної стійкості гамільтонівських систем, близьких до інтегрованих, при $n > 2$.

Характерною особливістю дифузії Арнольда є відсутність порогу ε , необхідного для її виникнення.

На завершення слід відзначити, що умови теореми КАМ сформульовані таким чином, щоб її можна було строго довести математично. В дійсності її результати в більшості своїй залишаються справедливими і тоді, коли порушується, наприклад, умова невинороженості.

3.1.2.8. Теорема Пуанкаре – Біркгофа

Теорема КАМ нічого не говорить про те, як саме змінюється характер руху на резонансних торах під дією малого неінтегровного збурення в гамільтоніані. Відповідь на це питання дає теорема Пуанкаре¹³ – Біркгофа¹⁴. Розберемо її на прикладі системи з двома ступенями вільності.

Розглянемо спочатку інтегровну систему. Як уже вказувалося (п. 3.1.1.7), її фазовий портрет у координатах дія-кут являє собою набір спіралей, навитих на поверхні системи вкладених двовимірних торів, причому резонансні та нерезонансні тори чергуються.

Перетнемо сім'ю таких двовимірних торів площиною (I_i, θ_i) ($i=1$ або $i=2$). Лінії перетину являють собою набір концентричних кіл. Розглянемо одне з таких кіл G , що відповідає резонансному тору, та два сусідні кола G^+ та G^- по різні боки від нього, які відповідають нерезонансним торам (рис. 3.1.4 а). Нехай резонансному тору відповідають частоти ω_1 та ω_2 ($\omega_1/\omega_2 = m/n$), причому частота ω_1 відповідає обертанню по колу G .

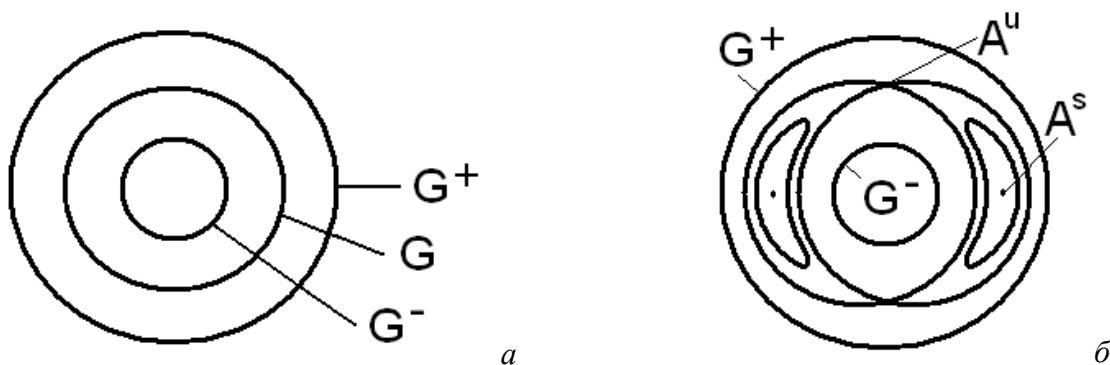


Рис. 3.1.4. Руйнування резонансного тора: а – лінії перетину з площиною резонансного (крива G) та сусідніх нерезонансних (криві G^+ та G^-) торів; б – стійкі (A^s) та нестійкі (A^u) точки ($2kp = 4$), що утворилися на місці зруйнованого резонансного тора, та фазові траєкторії, що їх оточують (у першому наближенні за малим параметром ε).

¹³ А. Пуанкаре (Jules Henri Poincaré; 1854 - 1912) – видатний французький математик, фізик, філософ і теоретик науки, президент Паризької академії наук та Французької академії, член Королівського товариства, член-кореспондент Петербурзької академії наук. Основні роботи стосуються топології, теорії ймовірностей, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, неевклідової геометрії, теорії чисел, спеціальної теорії відносності.

¹⁴ Дж. Біркгоф (George David Birkhoff, 1884 - 1944) – американський математик. Найвідоміші роботи присвячені статистичній механіці та теорії динамічних систем.

Додамо тепер до гамільтоніана системи мале неінтегровне збурення. Як впливає з теореми КАМ, криві G^+ та G^- лише дещо деформуються. Теорема Пуанкаре – Біркгофа стверджує, що від кривої G залишаться тільки $2kn$ ($k=1,2,3,\dots$)¹⁵ нерухомих точок, причому стійкі (еліптичні, або центри) та нестійкі (гіперболічні, або сідла) точки чергуються. В результаті на місці кола G утворюється структура, показана на рис. 3.1.4 б.

Фактично ця структура відповідає так званим фазовим коливанням – нелінійному аналогу біттів¹⁶. Ці коливання зумовлені параметричною взаємодією, яка приводить до періодичної зміни інтенсивності (дії) мод, що беруть у ній участь. За виконання умови $\omega_1/\omega_2 = m/n$ (або, що те саме, $n\omega_1 = m\omega_2$) можна сказати, що в системі двох зв'язаних нелінійних осциляторів n -та гармоніка частоти ω_1 породжує m -ту субгармоніку частоти ω_2 і, навпаки, m -та гармоніка частоти ω_2 породжує n -ту субгармоніку частоти ω_1 . Якщо зв'язок між осциляторами слабкий, то зростання інтенсивності моди ω_1 (дії I_1) має супроводжуватися зменшенням інтенсивності моди ω_2 (дії I_2), і навпаки.

Очевидно, фазові коливання можна спостерігати як у перерізі (I_1, θ_1) , так і в перерізі (I_2, θ_2) чотиřивимірному фазовому портрету системи, оскільки ці перерізи рівноправні.

У чотиřивимірному фазовому просторі кожній замкненій кривій, що оточує стійку нерухома точку (див. рис. 3.1.4 б), відповідає тор, на який намотана фазова траєкторія. Серед цих торів також можна виділити резонансні та нерезонансні. Застосовуючи до них теорему КАМ, приходимо до висновку, що резонансні тори руйнуються (точніше, розщеплюються) під дією неінтегровного збурення гамільтоніану. На площині, що перетинає тори, відповідно до теореми Пуанкаре – Біркгофа, на місці замкнених кривих, що відповідали резонансним торам першого порядку, виникають нові центри та сідла, оточені відповідними фазовими траєкторіями (рис. 3.1.5). Продовжуючи цей процес, приходимо до висновку, що в результаті утворюється дуже складна структура фрактального типу.

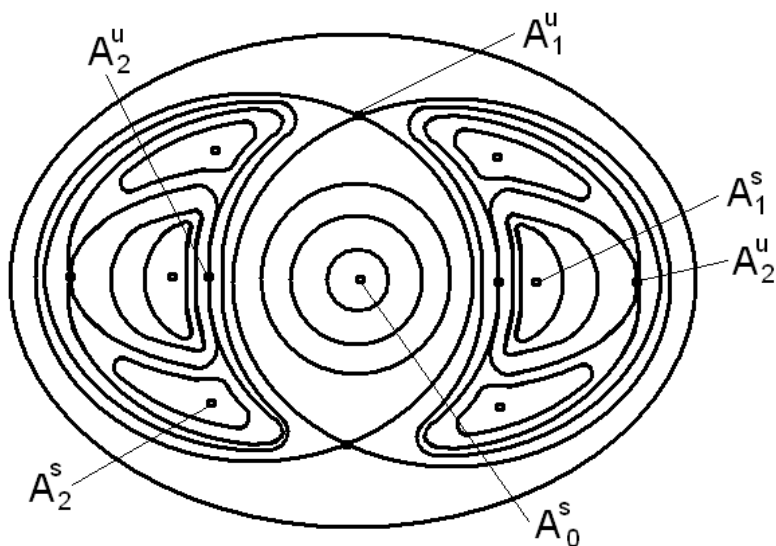


Рис. 3.1.5. Розщеплення резонансних торів першого порядку. Показані стійкі (s) та нестійкі (u) точки нульового, першого та другого порядків.

3.1.2.9. Гомоклінічні та гетероклінічні структури

Описана вище картина руйнування резонансного тора під дією неінтегровного збурення гамільтоніану є неповною. Справді, як відомо, рух в околі сідлової точки є нестійким. Таким чином, саме в околах сідлових точок, що виникають в результаті руйнування резонан-

¹⁵ Теорема Пуанкаре – Біркгофа нічого не говорить про величину числа k . Звичайно $k=1$.

¹⁶ Детальніше про фазові коливання в найпростішій моделі вимушених коливань нелінійного осцилятора див.: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009, с.113-118, 131-136.

сних торів під дією неінтегровного збурення в гамільтоніані, зароджується хаотична динаміка системи. В околі цих точок утворюються так звані гетероклінічні структури – складні геометричні утворення, по яких і рухається зображувальна точка.

Через сідлову точку A_1'' на рис. 3.1.5 (нагадаємо, що на цьому рисунку зображений переріз тора) проходить деяка замкнена фазова траєкторія (після оберту навколо головної осі тора ця траєкторія знову повертається в дану точку, оскільки вихід із сідлової точки в площині, що проходить через головну вісь тора, вимагає нескінченно довгого часу). Така фазова траєкторія є прикладом гіперболічних траєкторій (рис. 3.1.6 а-б). Вона може розглядатись як перетин двох поверхонь, по одній з яких зображувальні точки експоненціально віддаляються від гіперболічної траєкторії (ця поверхня називається нестійким многовидом), а по іншій – асимптотично наближаються до неї (це стійкий многовид). Лінії перетину стійкого та нестійкого многовидів з площиною рис. 3.1.5 – це асимптоти, що проходять через гіперболічну (сідлову) точку A_1'' .

Якщо система є інтегрованою, стійкий та нестійкий многовиди можуть переходити один в одного, утворюючи гладенькі структури (рис. 3.1.6 в). Такі структури можна розглядати як аналог петлі сепаратиси з однією сідловою точкою. Всі фазові траєкторії, які лежать на поверхні, утвореній стійким та нестійким многовидами, з часом прямують до гіперболічної траєкторії. Гіперболічна траєкторія, утворена внаслідок перетину стійкого та нестійкого многовидів, що переходять один в одного, називається гомоклінічною траєкторією.

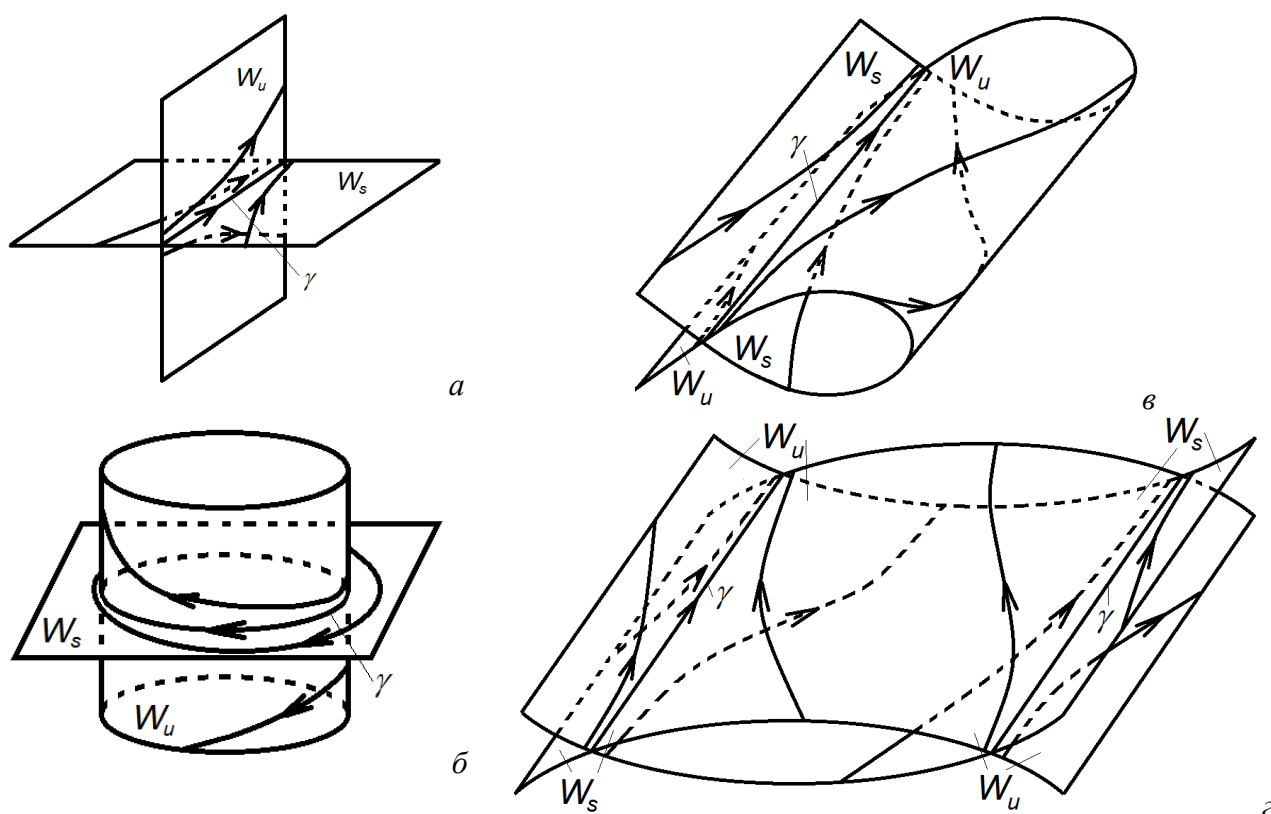


Рис. 3.1.6. Гіперболічні траєкторії та многовиди: а – ділянка гіперболічної траєкторії; б – простий приклад замкненої гіперболічної траєкторії; в – перехід нестійкого многовида у стійкий і утворення гомоклінічної траєкторії; г – перетини стійкого та нестійкого многовидів і утворення гетероклінічних траєкторій (γ – гіперболічна траєкторія, W_s та W_u – стійкий та нестійкий многовиди, стрілками вказаний напрямок руху вздовж фазових траєкторій).

Для деяких інтегровних систем стійкий та нестійкий многовиди, перетин яких утворює гіперболічну траєкторію, можуть мати й інші лінії перетину (рис. 3.1.6 г), що теж будуть

гіперболічними траєкторіями. Гіперболічні траєкторії такого типу називають гетероклінічними. Бачимо, що й у цьому випадку стійкі та нестійкі многовиди, що сполучають різні гетероклінічні траєкторії, переходять один в одного.

Розглянемо тепер, як змінюються стійкі та нестійкі многовиди за наявності неінтегровного збурення в гамільтоніані, на простішому прикладі гомоклінічної траєкторії.

Виявляється, що під дією збурення стійкі та нестійкі многовиди, які раніше гладенько переходили один в одного, розщеплюються, в результаті чого утворюється ціла система ліній їхнього перетину (рис. 3.1.7 а). Існує зчислена кількість точок перетину цих ліній із площиною, перпендикулярною до початкової гомоклінічної траєкторії (рис. 3.1.7 б). Нестійкий многовид при наближенні до сідлової траєкторії (при $t \rightarrow \infty$) здійснює осциляції, просторовий крок яких поступово зменшується (внаслідок зменшення швидкості руху зображувальної точки в околі особливої точки сідлового типу), а амплітуда, навпаки, зростає (в силу теореми Ліувілля площа "петель" між сусідніми точками перетину слідів многовидів на площині, перпендикулярній гомоклінічній траєкторії, має зберігатися). Аналогічні осциляції здійснює стійкий многовид при віддаленні від сідлової траєкторії при $t \rightarrow -\infty$. Таким чином на вказаній площині формується своєрідна ґратка (рис. 3.1.7 б), якій у фазовому просторі відповідає складна система гіперболічних асимптот, між якими (в силу їхньої нестійкості) випадково блукають фазові траєкторії (рис. 3.1.7 а). Всю цю систему називають гомоклінічною структурою. Вперше гомоклінічна структура була досліджена А. Пуанкаре при аналізі задачі про взаємодію багатьох тіл.

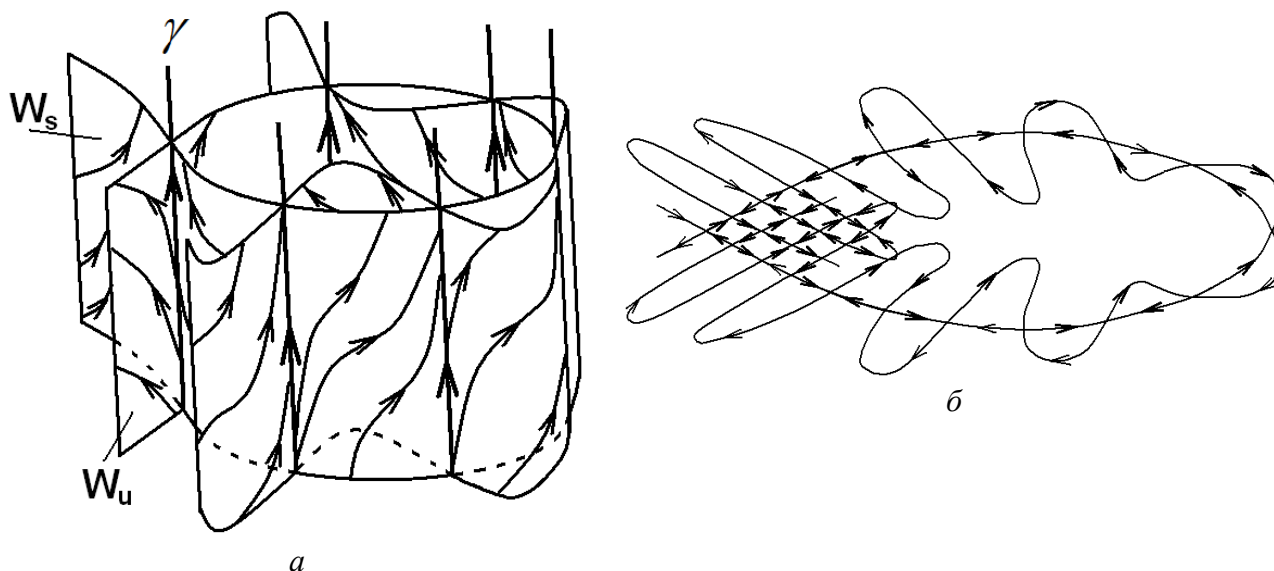


Рис. 3.1.7. Гомоклінічна структура: а – схематичне зображення тривимірного фазового портрету, що виникає в області гомоклінічної траєкторії γ під дією неінтегровного збурення гамільтоніану; б – переріз стійкого та нестійкого многовидів площиною, перпендикулярною до гомоклінічної траєкторії

Відзначимо, що розщеплення петлі сепаратриси нагадує руйнування резонансного тора відповідно до теореми Пуанкаре – Біркгофа. Справді, від петлі сепаратриси також залишаються лише окремі нерухомі точки – центри та сідла, але кількість пар таких точок виявляється зчисленою¹⁷.

Многовиди, що проходять через гетероклінічні фазові траєкторії, під дією неінтегровного збурення гамільтоніану також зазнають розщеплення. В результаті в їхньому околі утворюються складні гетероклінічні структури, подібні до гомоклінічних (рис. 3.1.8 а). По суті, рух в околі гетероклінічних структур відповідає хаотичній динаміці системи.

¹⁷ Справді, оскільки частота ω_1 обертання вздовж петлі сепаратриси дорівнює нулеві, то й відношення ω_1/ω_2 формально дорівнює нулеві, тобто $n \rightarrow \infty$.

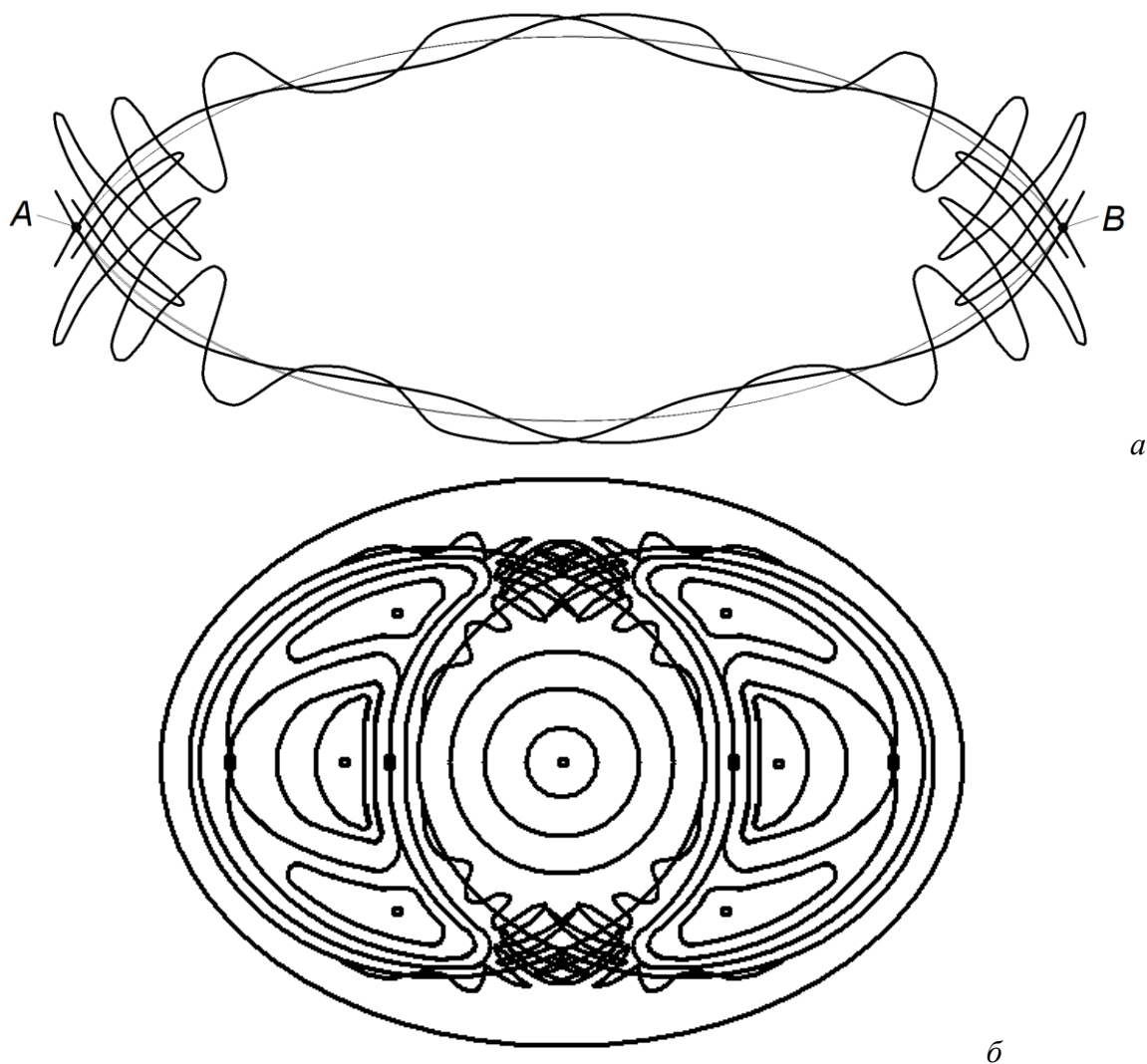


Рис. 3.1.8. Гетероклінічні структури: а – переріз стійкого та нестійкого многовидів, деформованих неінтегровним збуренням гамільтоніану, площиною, перпендикулярною до гетероклінічних траєкторій (їм відповідають точки А та В); б – деформація перерізу резонансного тора з урахуванням ефектів другого порядку за малим збуренням гамільтоніана – розщеплення резонансних торів першого порядку та утворення гетероклінічних структур в околі гіперболічних точок першого порядку

Повернемося тепер до гамільтонівської системи з двома ступенями вільності, про яку йшлося в п.3.1.2.8. Під дією неінтегровного збурення в гамільтоніані резонансні тори спочатку розщеплюються на гіперповерхні, перерізи яких містять сідлові (гіперболічні) точки. Далі одночасно з руйнуванням резонансних торів другого порядку відбувається розщеплення стійких та нестійких многовидів, пов'язаних із цими точками, та утворення гетероклінічних структур (рис. 3.1.8 б). В області виникнення гетероклінічних структур топологія фазових траєкторій зазнає суттєвих змін, які унеможливають існування там інваріантних торів. Врахування ефектів вищих порядків додатково ускладнює картину, надаючи їй, як уже вказувалося, рис фрактальної структури.

Вказані обставини суттєво доповнюють та ускладнюють картину руйнування резонансних торів, описану наприкінці п.3.1.2.8.

3.1.2.10. Вуса та завитки

Розглянемо тепер, як буде деформуватись у фазовому просторі з часом відрізок лінії (зрозуміло, що такий відрізок відповідає певному неперервному набору початкових умов си-

стеми). Тут прийнято виділяти два характерних випадки.

Якщо розглянути відрізок, що потрапив, наприклад, на нестійкий многовид гомоклінічної або гетероклінічної структури, то з часом, при наближенні до сідлової траєкторії, на ньому утворюються характерні гомоклінічні осциляції. Такий об'єкт прийнято називати вусом (рис 3.1.9 а).

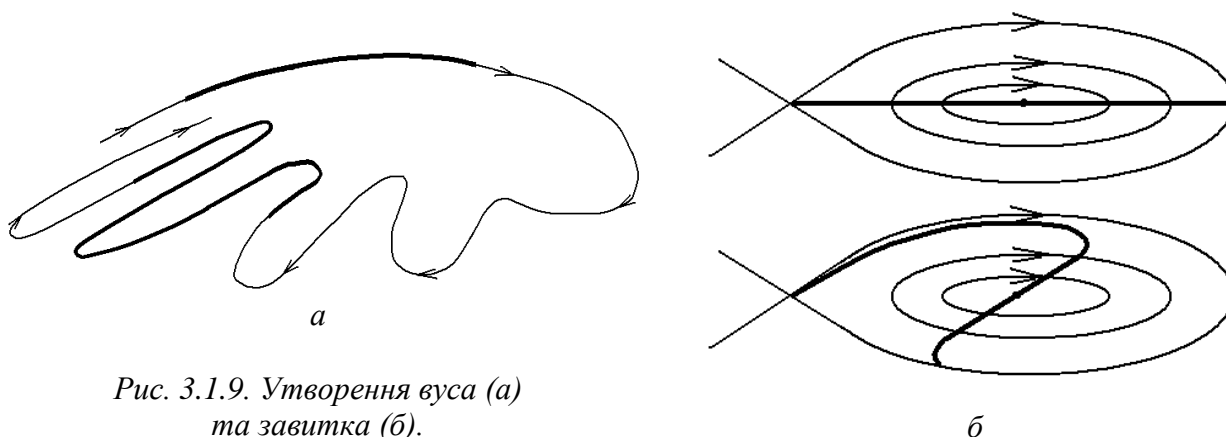


Рис. 3.1.9. Утворення вуса (а) та завитка (б).

Нехай тепер відрізок початково вміщує особливу точку типу центр (в площині xu). Якби коливання, що відповідають різним фазовим траєкторіям, відбувалися з однаковою частотою, відрізок обертався б як єдине ціле. Але внаслідок неізохронності обертання навколо центру (нагадаємо, що в околі сепаратиси рух зображувальної точки сповільнюється) цей відрізок з часом сильно деформується і перетворюється на так званий завиток (рис 3.1.9 б).

3.1.2.11. Аналогія між магнітними силовими лініями тороїдальних пасток та фазовими траєкторіями півторавимірної гамільтонівської системи

Абстрактний фазовий простір, що відповідає гамільтонівським системам, близьким до інтегровних, може збігатися з реальним простором деяких фізичних систем. Прикладом таких систем є тороїдальні магнітні пастки – стеларатори¹⁸ або токамаки¹⁹.

Обговоримо спочатку конфігурацію поля тороїдальних магнітних пасток.

У тороїдальних пастках прагнуть створити магнітне поле, силові лінії якого були б спіралями, намотаними на послідовність вкладених торів (ці тори можуть бути й деформованими), причому крок спіралі повинен змінюватися від тора до тора (рис. 3.1.10 а). Таке поле можна розглядати як суперпозицію тороїдальної (азимутальної, лінії 3 на рис. 3.1.10 б) та полоїдальної (лінії 4 на рис. 3.1.10 б) компоненти. Силові лінії тороїдального та полоїдального полів утворюють кільця, надіті відповідно на головну (лінія 1 на рис. 3.1.10 б) та на допоміжну (лінія 2 на рис. 3.1.10 б) осі тора, причому полоїдальні силові лінії лежать у площинах, що вміщують головну вісь. Магнітні пастки різних типів відрізняються в першу чергу способами створення полоїдального поля.

¹⁸ Від латинського *stella* – зірка. Мається на увазі, що в таких пастках має створюватися зоряна речовина. Ідея стеларатора належить Л.Спітцеру (Lyman Strong Spitzer, Jr., 1914 - 1997) – американському фізику-теоретику та астрофізику.

¹⁹ Скорочення від російських слів «тороидальная магнитная камера». Ідея токамака належить І.Є.Тамму та А.Д.Сахарову. І.Є. Тамм (Ігорь Евгеньевич Тамм, 1895 - 1971) – видатний російський фізик-теоретик, академік АН СРСР (1953), лауреат Сталінської та Нобелівської (1958) премій. Дитинство провів у Єлисаветграді (тепер Кіровоград), в молодості викладав у Сімферополі та Одесі. Працював у галузях квантової механіки, електродинаміки, фізики плазми, ядерної фізики, фізики елементарних частинок. А.Д.Сахаров (Андрей Дмитриевич Сахаров, 1921 - 1989) – російський фізик, правозахисник та політичний діяч, академік АН СРСР (1953), лауреат Сталінської (1953) та Ленінської (1956) премій, тричі Герой Соціалістичної Праці (позбавлений радянських нагород у 1980 р.), лауреат Нобелівської премії миру (1975). Роботи присвячені магнітній гідродинаміці, фізиці плазми, керованому термоядерному синтезу, астрофізиці, елементарним частинкам, гравітації. Один з «батьків» радянської водневої бомби.

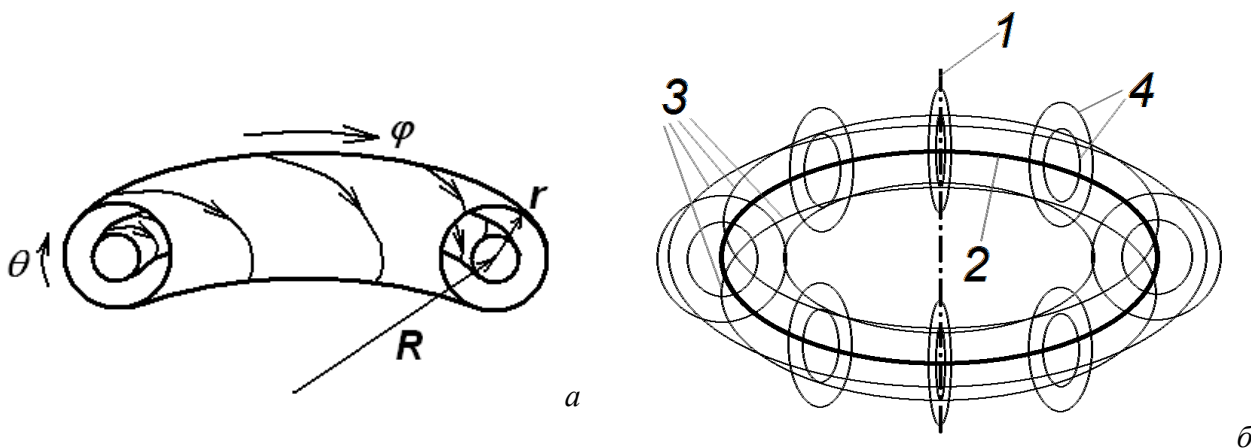


Рис. 3.1.10. Геометрія торіодальних магнітних пасток: а – схематичне зображення силових ліній магнітного поля; б – основні характеристики тора (1 – головна вісь, 2 – допоміжна вісь, 3 – торіодальна компонента поля, 4 – полоїдальна компонента поля)

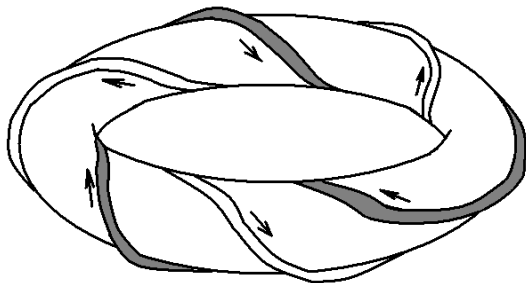


Рис. 3.1.11. Схематичне зображення торсатрона – пастки стелараторного типу. Показані обмотки зі струмом, що створюють магнітне поле.

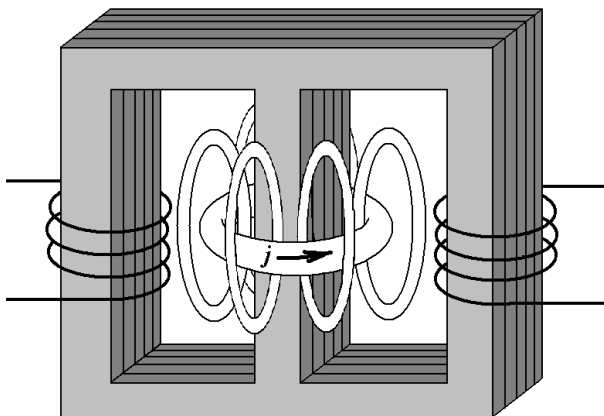


Рис. 3.1.12. Схема токамака. Торіодальна складова магнітного поля створюється спеціальними котушками (показані білими кільцями), полоїдальна – струмом, що протікає в плазмі. Цей струм виникає під дією вихрового електричного поля, створеного трансформатором. Первинна обмотка цього трансформатора живиться від конденсаторних батарей. Вторинною обмоткою є торіодальна розрядна камера, в якій газ іонізується під дією наведеної електрорушійної сили.

У сучасних пастках стелараторного типу (торсатронах, геліотронах) як торіодальне, так і полоїдальне поля створюються зовнішніми (щодо плазми) джерелами - спеціальними котушками зі струмом (рис. 3.1.11). Кажуть, що в таких пастках можна утримувати одиночну заряджену частинку. Пастки стелараторного типу можуть працювати як в імпульсному, так і в стаціонарному режимі.

У системах типу токамаків (рис. 3.1.12) вакуумне утримання окремого електрона неможливе. Магнітне поле, створене спеціальними котушками, має лише торіодальну компоненту B_ϕ . Полоїдальне поле створюється струмом j_ϕ , який протікає в плазмі. Таким чином, у токамаках здійснюється самоузгоджене утримання плазми.

Струм у плазмі виникає під дією вихрового електричного поля, яке, в свою чергу, виникає в результаті зміни магнітного поля у вторинній обмотці трансформатора. Первинна обмотка живиться імпульсним джерелом (через неї розряджається батарея конденсаторів).

Тому токамак – це принципово імпульсний пристрій.

Таким чином, і в магнітних пастках стелараторного типу, і в токамаках в ідеалі магнітні силові лінії мають вигляд гвинтових ліній, навитих на систему вкладених тороїдальних поверхонь. Ці лінії можуть бути як замкненими, так і незамкненими (нескінченними). Співвідношення частот обертання навколо головної осі (йому відповідає так званий тороїдальний кут φ) та навколо допоміжної осі (йому відповідає полоїдальний кут θ) ω_1/ω_2 , яке й визначає замкненість або незамкненість магнітних силових ліній, відоме в теорії магнітних пасток як фактор безпеки q .

Розглянемо тепер гамільтонівську систему з півтора ступенями вільності. Таку систему можна інтерпретувати як осцилятор (взагалі кажучи, нелінійний), на який діє зовнішня сила, що залежить від часу (вважатимемо її надалі періодичною)²⁰. Її фазовий простір має бути тривимірним. За осі можна обрати дію, кут та час. Якщо дію і кут відкласти по радіусу та куту полярної системи координат, а перпендикулярну їм вісь часу скрутити в кільце, довжина якого відповідає періоду зовнішньої сили, то в інтегровному випадку (за відсутності зовнішньої сили) фазові траєкторії будуть спіралями, намотаними на поверхні системи вкладених торів. Відповідно до теореми КАМ, неінтегровний доданок у гамільтоніані (зовнішня сила) приведе до руйнування резонансних торів (тих, у яких відношення періоду власних коливань до періоду зовнішньої сили буде раціональним).

Очевидно, силові лінії магнітного поля розглянутих вище тороїдальних пасток в ідеальному випадку мають таку саму топологію, як фазові траєкторії у фазовому просторі півторавимірної гамільтонівської системи для випадку, коли амплітуда зовнішньої сили прямує до нуля.

Однак у реальних тороїдальних пастках магнітне поле виявляється певною мірою спотвореним порівняно з ідеалізованою моделлю. Наприклад, у пастках стелараторного типу струми в плазмі малі, і магнітне поле створюється переважно зовнішніми обмотками. Але провідники, що живлять ці обмотки, несуть потужні струми і вносять помітні збурення у магнітне поле.

Покажемо, що і в цьому випадку наведена вище аналогія залишається справедливою, і спотворення конфігурації магнітних силових ліній аналогічне спотворенню фазових траєкторій нелінійного консервативного осцилятора під дією періодичної зовнішньої сили.

3.1.2.12. Теорема КАМ і магнітне утримання плазми

Полоїдальне магнітне поле в тороїдальних пастках можна описати або за допомогою тороїдального вектор-потенціалу $\vec{A} = A_\varphi \vec{e}_\varphi$, так що

$$\vec{B}_p = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times A_\varphi \vec{e}_\varphi, \quad (3.1.42)$$

або за допомогою так званої функції полоїдального магнітного потоку $\Psi = -RA_\varphi$, де R – великий радіус тора.

Вважатимемо магнітне поле сильним у тому сенсі, що ларморівський радіус електрона набагато менший від радіусу кривини магнітних силових ліній у будь-якій точці магнітної пастки. Тоді можна наближено вважати, що електрони плазми (точніше, так звані провідні центри – точки, навколо яких обертаються електрони) рухаються вздовж силових ліній магнітного поля. Вважатимемо також, що великий радіус тора значно більший від малого радіуса, так що кривиною силових ліній тороїдального поля B_φ можна знехтувати. Нарешті, приймемо, що полоїдальне поле значно менше від тороїдального, $B_\varphi \gg B_\theta$.

Перше припущення означає, що рівняння руху електронів (точніше, провідних центрів) можна записати у формі

$$[\vec{v} \times \vec{B}] = 0. \quad (3.1.43)$$

²⁰ Детальніше про це див. у п. 3.1.5.

В силу другого припущення геометрія системи, по суті, зводиться до циліндричної, причому можна вважати, що $z = R\varphi$ і, відповідно, $\vec{e}_z = \vec{e}_\varphi$. В ролі радіуса та азимутального кута виступають, відповідно, малий радіус тора r (точніше, відстань від допоміжної осі тора до точки спостереження) та пологідальний кут θ . Тоді проєкції рівняння (3.1.43) на напрямки \vec{e}_r та \vec{e}_θ набувають вигляду

$$v_\theta B_z - v_z B_\theta = 0, \quad v_r B_z - v_z B_r = 0, \quad (3.1.43 \text{ а})$$

звідки

$$\frac{v_\theta}{v_z} = \frac{B_\theta}{B_z}, \quad \frac{v_r}{v_z} = \frac{B_r}{B_z}. \quad (3.1.43 \text{ б})$$

З рівнянь (3.1.43 б) з урахуванням припущення про малізну пологідального поля випливає, що $|v_{r,\theta}| \ll |v_z|$.

Відзначимо також, що проєкція рівняння (3.1.43) на напрямок \vec{e}_z дає співвідношення

$$\frac{v_\theta}{v_r} = \frac{B_\theta}{B_r},$$

яке можна отримати безпосередньо із системи (3.1.43 б), тому остання повністю еквівалентна рівнянню (3.1.43).

Тепер приймемо до уваги, що

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dz} \frac{dz}{dt} = v_z \frac{dr}{dz} = \frac{v_z}{R} \frac{dr}{d\varphi}, \quad v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = \frac{rv_z}{R} \frac{d\theta}{d\varphi}. \quad (3.1.44)$$

Підставляючи (3.1.44) до (3.1.43 б), отримаємо:

$$\frac{dr}{d\varphi} = R \frac{v_r}{v_z} = R \frac{B_r}{B_z}, \quad \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{R v_\theta}{r v_z} = \frac{R B_\theta}{r B_z}. \quad (3.1.45)$$

Але з урахуванням (3.1.42)

$$RB_r = R \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(-RA_\varphi)}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}, \quad RB_\theta = -R \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} = \frac{\partial(-RA_\varphi)}{\partial r} = \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (3.1.46)$$

Підставивши (3.1.46) до (3.1.45) і замінивши B_z на B_φ , тобто знову перейшовши від циліндричної геометрії до тороїдальної, остаточно отримаємо рівняння руху електрона у вигляді півторавимірної гамільтонівської системи:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\varphi} &= \frac{1}{rB_\varphi} \frac{\partial \Psi(r, \theta, \varphi)}{\partial r}; \\ \frac{dr}{d\varphi} &= -\frac{1}{rB_\varphi} \frac{\partial \Psi(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (3.1.47)$$

В рівняннях (3.1.47) в ролі часу виступає кут φ , в ролі узагальненого імпульсу – тороїдальний магнітний потік

$$\int_0^r B_\varphi(r') r' dr' \approx \frac{B_\varphi r^2}{2},$$

в ролі узагальненої координати – пологідальний кут θ , в ролі гамільтоніана – функція пологідального магнітного потоку Ψ .

Нагадаємо, що просторовий розподіл функції Ψ визначається пологідальною компонентою A_φ векторного потенціалу. Як відомо з електродинаміки, векторний потенціал може бути записаний через просторовий розподіл густини струму. Таким чином, розподіл густини струму однозначно задає гамільтоніан системи (3.1.47).

Якщо $\partial \Psi / \partial \varphi = 0$ (розподіл струму не залежить від тороїдального кута), отримуємо інтегровний випадок (система з одним ступенем вільності, гамільтоніан явно не залежить від

часу). Це відповідає ідеальній аксіально-симетричній моделі. Для забезпечення утримання плазми залежність магнітного поля від r повинна мати мінімум при $r = 0$. Траєкторії електронів $r = r(\theta)$ ($\varphi = \text{const}$) знаходяться з умови $\Psi(r, \theta) = \text{const}$. Справді, поділивши рівняння (3.1.47) одне на одне, можна отримати:

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{\partial\Psi/\partial\theta}{\partial\Psi/\partial r}, \quad (3.1.47 \text{ а})$$

або

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r} dr + \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} d\theta \equiv d\Psi(r, \theta) = 0. \quad (3.1.47 \text{ б})$$

Траєкторії електронів (нагадаємо, що в даному наближенні вони збігаються з магнітними силовими лініями) являють собою суперпозицію обертання навколо головної та допоміжної осей тора (останнє якраз і описується рівняннями (3.1.47 а,б)). Відношення відповідних частот складає величину

$$\frac{1}{q(r)} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d\theta/dt}{d\varphi/dt} = \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{1}{rB_\varphi} \frac{\partial\Psi(r, \theta, \varphi)}{\partial r} = \frac{1}{rB_\varphi} \frac{\partial}{\partial r}(-RA_\varphi) = \frac{RB_\theta}{rB_\varphi} \quad (3.1.48)$$

(враховано перше з рівнянь (3.1.47)).

У загальному випадку з урахуванням збурень, що виникають унаслідок руху плазми та струмів у провідниках живлення, з'являється залежність Ψ від φ , тобто аксіальна симетрія системи порушується. З формальної точки зору такі збурення виступають як неінтегровні збурення гамільтоніана, залежні від часу. В цьому випадку функцію $\Psi(r, \theta, \varphi)$ можна записати у вигляді ряду (ця процедура аналогічна розкладанню залежної від часу зовнішньої сили в ряд Фур'є):

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = \Psi_{00}(r) + \sum_{m,n} \Psi_{mn}(r) \cos(m\theta - n\varphi), \quad (3.1.49)$$

де $\Psi_{mn}(r)$ – деякі функції, що задовольняють граничним умовам $\Psi_{mn}(r \rightarrow 0) \sim r^m$, $\Psi_{mn}(r = a) = 0$ (тут a – малий радіус тороїдальної камери).

Збурення $\Psi_{mn}(r)$ є резонансними для рівноважного поля \vec{B} на раціональних поверхнях r_s , на яких $q(r_s) = m/n$ (m, n – довільні цілі числа). Як впливає з теорему КАМ, відповідні тори (тобто магнітні поверхні) руйнуються під дією збурення, і на їхньому місці виникають магнітні острівці, оточені хаотичними силовими лініями магнітного поля. Однак завдяки збереженню інваріантних торів і відсутності дифузії Арнольда глобальна стійкість системи зберігається, якщо розміри острівців невеликі (нагадаємо, що вони зростають зі зростанням величини збурення і зменшуються при збільшенні порядку резонансу).

Доки області нерегулярного руху, що виникли на місці зруйнованих резонансних торів, відділяються одна від одної інваріантними торами (незруйнованими магнітними поверхнями), радіальний транспорт плазми залишається утрудненим. Якщо ж збурення настільки велике, що такі області перекриваються, ні про яке утримання плазми говорити вже не доводиться (про перекриття сусідніх резонансів див. далі, п. 3.1.3).

Цікаво відзначити, що в магнітних пастках вдається експериментально спостерігати КАМ-структури, які виникають на місці зруйнованих резонансних торів. Така можливість заснована на тому, що рух електронів у тороїдальних магнітних пастках повторює траєкторії силових ліній поля внаслідок мализни ларморовського радіусу (останній складає звичайно частки міліметра). Пучок електронів інjektують уздовж силової лінії, а в перерізі магнітної поверхні встановлюють напівпрозорий люмінесцентний екран. Перетинаючи цей екран багато (близько сотні) разів, пучок в результаті малює на екрані переріз магнітної поверхні, на яку намотана дана магнітна силова лінія. Дана методика була вперше запропонована групою

дослідників із Харківського фізико-технічного інституту (Є.Д.Волков²¹ та ін.) в середині 1960х років. Типове зображення магнітного острівця, отримане за допомогою цієї методики, наведене на рис. 3.1.13. Візуалізація магнітних поверхонь за допомогою електронних пучків дозволяє експериментально контролювати конфігурацію магнітного поля в тороїдальних пастках.



Рис. 3.1.13. Зображення трьох магнітних острівців, отримане шляхом інжекції електронного пучка вздовж магнітних силових ліній.

Контрольні питання до підрозділу 3.1.2

1. Опишіть процедуру введення нових змінних дія-кут для системи, близької до інтегрованої.
2. Чи можна з рівняння Гамільтона – Якобі точно знайти поправку першого порядку F_{21} до твірної функції?
3. Чому дорівнює коефіцієнт із нульовим індексом у Фур'є-розкладі поправки першого порядку $H_1(\theta, J)$ до гамільтоніану системи, близької до інтегрованої?
4. Чому резонансні тори у фазовому просторі руйнуються при появі в гамільтоніані малої неінтегрованої частини?
5. Чому мале неінтегровне збурення в гамільтоніані не змінює якісно поведінку фазових траєкторій на нерезонансних торах?
6. Чи можливий у теорії КАМ граничний перехід від резонансних торів до нерезонансних?
7. Чи є гамільтонівські системи, близькі до інтегровних, орбітально стійкими?
8. Чи можлива дифузія Арнольда в системі з двома ступенями вільності?
9. Чи можливе руйнування резонансних торів у системі зв'язаних лінійних осциляторів?
10. Чи можливе руйнування резонансних торів у системі автономних нелінійних осциляторів?
11. Опишіть характер руйнування резонансних торів під дією малого неінтегровного збурення гамільтоніана.
12. Чому рух зображувальних точок в околі гомоклінічної структури є непередбачуваним?
13. Якісно зобразіть розщеплення сепаратиси, що містить дві сідлові точки, під дією неінтегровного збурення гамільтоніану.
14. Для якої саме гамільтонівської системи структура фазового простору аналогічна до структури магнітного поля в магнітних пастках?

²¹ Волков Євген Дмитрович (1934-2012) – український дослідник у галузі фізики плазми, лауреат Державної премії України, працював в Інституті фізики плазми Національного наукового центру «Харківський фізико-технічний інститут».

3.4.2. Слабка гідродинамічна турбулентність

Як уже вказувалося, слабка гідродинамічна турбулентність в усталеному режимі характеризується малою кількістю ступенів вільності (умовно кажучи, до десяти), тобто її можна описати порівняно невеликою кількістю рівнянь у повних похідних.

Виявляється, що розмірність вкладення дивного атрактора (тобто, по суті, кількість рівнянь першого порядку, необхідних для опису системи) можна в цьому випадку визначити експериментально. Методи, за допомогою яких це можна зробити, описані на початку цього підрозділу.

Далі ми розглянемо відносно простий приклад слабкої гідродинамічної турбулентності – так звану систему рівнянь Лоренца, яка була отримана для опису турбулентного режиму конвекції в шарі в'язкої рідини, що підігрівається знизу (див. вище п.2.4.2.6). При великих числах Релея рух, описуваний системою Лоренца, стає нерегулярним і нестійким.

На закінчення цього підрозділу на тому самому прикладі руху рідини в шарі, який підігрівається знизу, ми розглянемо перехід до так званого просторово-часового хаосу, або розвиненої турбулентності.

3.4.2.1. Методи експериментального визначення розмірності вкладення

При експериментальному спостереженні турбулентної динаміки відрізнити слабку турбулентність від розвиненої можна, якщо визначити відповідну розмірність вкладення. Спираючись на знання цієї величини, можна далі намагатися аналітично описати динаміку системи.

Для експериментального визначення розмірності вкладення дивного атрактора системи з розподіленими параметрами, яка здійснює усталений турбулентний рух, необхідно виміряти яку-небудь величину $x(t)$, що характеризує систему (наприклад, миттєвий тиск або одну з компонент швидкості в деякій точці потоку), через однакові проміжки часу. Отримаємо послідовність значень $\{x_n\} = x_1, x_2, \dots, x_N$.

Найпростіший метод експериментального визначення розмірності вкладення умовно можна назвати геометричним⁴.

Нехай рух системи описується одним єдиним диференціальним рівнянням першого порядку. Тоді послідовність $\{x_n\}$ однозначно визначається початковим значенням x_1 . Кожна наступна точка є одна й та сама функція попередньої, $x_{n+1} = f(x_n)$, оскільки проміжок часу між усіма вимірюваннями однаковий. Отже, всі пари точок (x_{n+1}, x_n) послідовності $\{x_n\}$ мають лежати на одній кривій $x_{n+1} = f(x_n)$. Ця залежність являє собою, по суті, діаграму Ламе-рея.

Якщо рух системи описується не одним, а двома диференціальними рівняннями першого порядку, то в площині (x_{n+1}, x_n) точки лежатимуть безладно. Зате в тривимірному просторі (x_{n+1}, x_n, x_{n-1}) набори точок лягатимуть на деяку поверхню $x_{n+1} = F(x_n, x_{n-1})$.

Якщо рух системи описується більш ніж двома рівняннями, геометричний метод стає незручним.

Інший метод можна умовно назвати методом підпоследовательностей⁵.

Оберемо в послідовності $\{x_n\}$ всі можливі підпоследовательності довжиною k ($k < N$) і розглянемо набір векторів $w^{(n)} = \{x_{n-k+1}, x_{n-k+2}, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ ($k \leq n$). Всі такі вектори належать деякому k -вимірному простору.

Зафіксуємо одну з підпоследовательностей, яка починається з номера n_0 , і позначимо від-

⁴ Див.: N.H.Packard, J.P.Crutchfield, J.D.Farmer, R.S.Shaw, Phys. Rev. Lett., **45**, 712 (1980).

⁵ Див.: С.Н.Лукашук, А.А.Предтеченский, Г.Е.Фалькович, А.И.Черных, Препринт №280 Ин-та автоматизации и электротехники СО АН СССР №280, Новосибирск, 1985.

повідний вектор як $w^{(0)}$. Розглянемо відстань $\rho_k(n, n_0)$ між довільним вектором $w^{(n)}$ та вектором $w^{(0)}$:

$$\rho_k(n, n_0) \equiv |w^{(n)} - w^{(0)}| = \left[\sum_{i=1}^k (x_{n-k+i} - x_{n_0-k+i})^2 \right]^{1/2}, \quad (3.4.4)$$

а також величину

$$r(n, n_0) \equiv |x_{n+1} - x_{n_0+1}|. \quad (3.4.5)$$

Побудуємо графік залежності $r(\rho)$ для різних значень n .

Наявність функціональної залежності між елементом x_{n+1} та k попередніми елементами послідовності $\{x_n\}$ означає, що існує деяка неперервна функція $x_{n+1} = f(w^{(n)})$. Тому

$$r(n, n_0) \equiv |f(w^{(n)}) - f(w^{(0)})|. \quad (3.4.6)$$

Очевидно, в цьому випадку $\rho_k(n, n_0) \rightarrow 0$ при $w^{(n)} \rightarrow w^{(0)}$. При цьому і $r(n, n_0) \rightarrow 0$.

Якщо ж функціональна залежність між x_{n+1} та $w^{(n)}$ відсутня, то $r(n, n_0)$ не прямуватиме до нуля при зменшенні $\rho_k(n, n_0)$.

Якщо функціональна залежність при заданому k досягнута, то в області малих значень ρ відповідні значення r також є малими, тобто точки на графіку $r(\rho)$ поблизу початку координат лежать нижче деякої прямої вигляду $r = C\rho$. Розмірність вкладення визначається мінімальним значенням k , для якого ця властивість виконується (рис. 3.4.4).

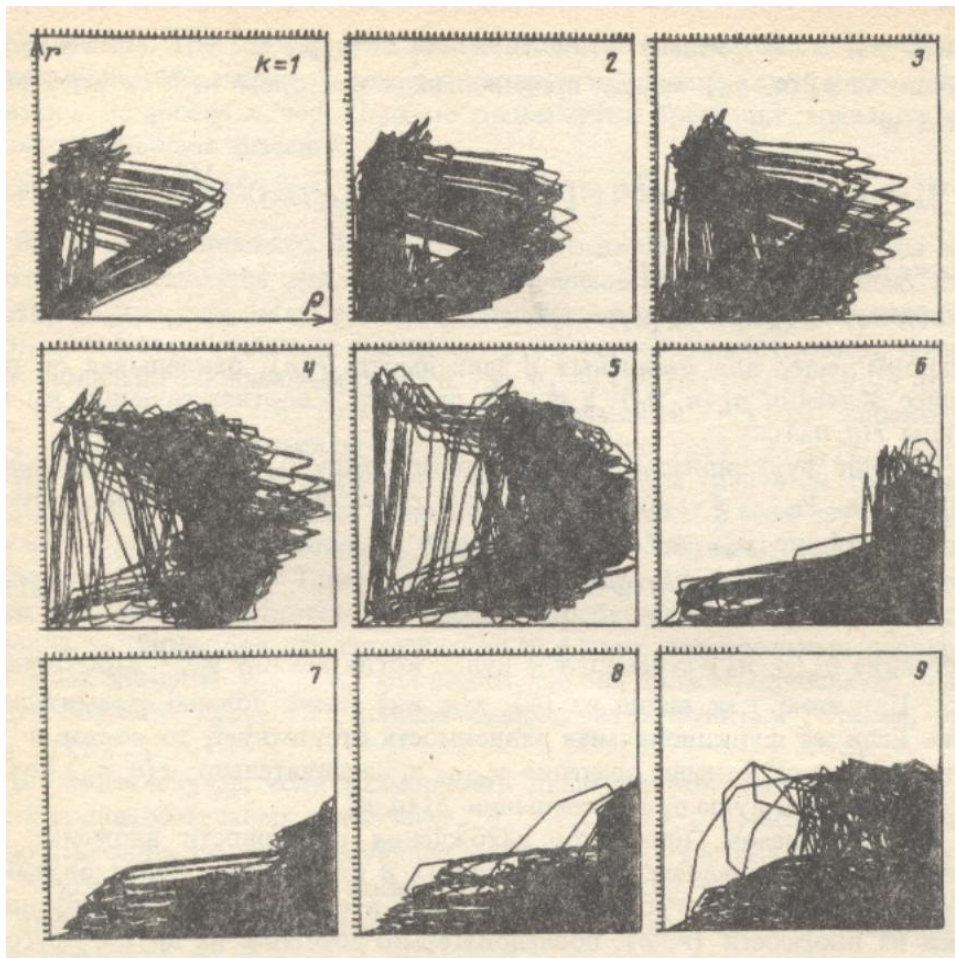


Рис. 3.4.4. Перевірка функціональної залежності $(k+1)$ -ї координати від k попередніх за методом підпослідовностей: розмірність вкладення – 5.

Найбільш інформативним вважається так званий метод Грассбергера – Прокаччіа⁶.

Задано деяким значенням параметра l і підрахуємо кореляційний інтеграл

$$C_k(l) = \frac{1}{N^2} \sum_{n,m=1}^N \theta[l - \rho_k(n, m)], \quad (3.4.7)$$

де N – повне число елементів у послідовності $\{x_n\}$, $\theta(z)$ – функція Хевісайда:

$$\theta(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0; \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

Строго кажучи, у формулі (3.4.7) треба зробити граничний перехід $N \rightarrow \infty$, але реально величина N завжди обмежена.

Внесок до кореляційного інтегралу дають лише ті пари векторів $w^{(n)}$ та $w^{(m)}$, віддаль між якими не перевищує заданої величини l . Очевидно, при l , більших від деякого порогового значення, $C_k(l) = 1$ – сума в правій частині (3.4.7) міститиме N^2 доданків, кожен з яких дорівнює одиниці. При малих l , навпаки, $C_k(l) \rightarrow 0$. Точніше, має місце співвідношення $C_k(l) \sim l^{\alpha(k)}$. Ця залежність аналогічна до залежності між «лінійним розміром» фракталу та його «об'ємом» V :

$$V \sim l^{d_F},$$

де d_F – фрактальна розмірність.

Величину $\alpha(k)$ можна знайти, побудувавши залежність $\ln[C_k(l)]$ від $\ln l$. Такі графіки можна побудувати для різних значень k . Починаючи з деякого значення k_0 , величина $\alpha(k)$ перестає залежати від k . Це значення k_0 дає розмірність вкладення атрактора, а відповідне значення $\alpha(k_0)$ – так звану кореляційну розмірність ν даного атрактора (рис. 3.4.5).

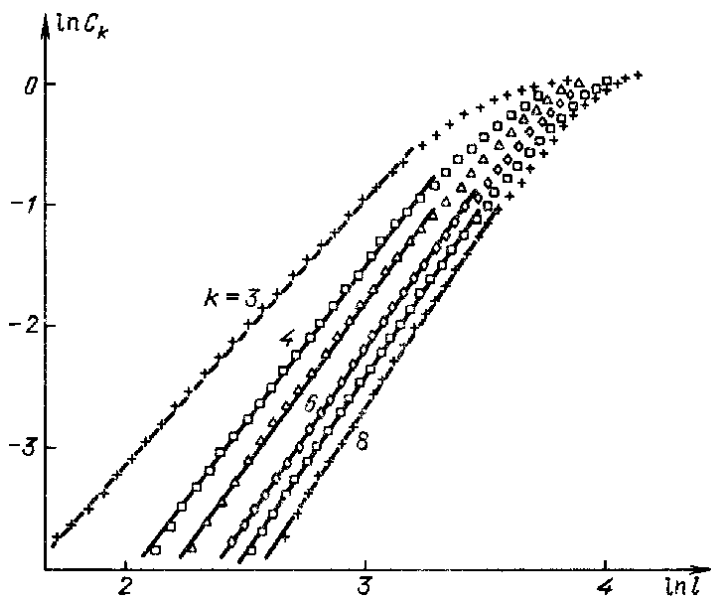


Рис. 3.4.5. Експериментальне визначення розмірності вкладення та кореляційної розмірності атрактора за методом Грассбергера – Прокаччіа: розмірність вкладення – 5, кореляційна розмірність – 2.8.

Справді, величина k визначає розмірність простору, в якому розраховується кореляційний інтеграл. Якщо вона менша від розмірності вкладення, фрактал у такому просторі

⁶ Див.: P.Grassberger, I.Procaccia, Phys. Rev. Lett., **50**, 346 (1983). П. Грассбергер (Peter Grassberger, нар. 1940) – сучасний німецький математик, професор Інституту обчислень ім. Дж. фон Неймана в м. Юліху (Німеччина) та університету Калгарі (Канада), відомий своїм внеском до теорії хаосу. І. Прокаччіа (Itamar Procaccia, нар. 1949) – ізраїльський та американський фізик, професор Вейцманівського наукового інституту (Ізраїль), фахівець у галузі хімічної фізики, гідродинаміки, фізики фракталів та ін.

спотворюється. Якщо ж вона перевищує розмірність вкладення, то фрактальна розмірність не залежить від k .

В загальному випадку $\nu \leq d_F$. Рівність $\nu = d_F$ має місце лише при рівномірному розміщенні точок на аттракторі.

Таким чином, даний метод дає змогу оцінити фрактальну розмірність дивного аттрактора як знизу (через кореляційну розмірність), так і згори (через розмірність вкладення).

Для систем із великою розмірністю вкладення використання процедури Грассбергера – Прокаччіа різко ускладнюється через стрімке зростання потрібної кількості експериментальних точок N . Тому на практиці нею можна користуватися, як правило, лише для випадку слабкої гідродинамічної турбулентності.

3.4.2.2. Слабка турбулентність у шарі рідини, який підігрівається знизу: аналіз системи Лоренца

Наприкінці п. 3.4.1.1 вже відзначалася аналогія між виникненням турбулентності в потоці рідини та в шарі рідини, який підігрівається знизу. Тому режим слабкої турбулентності можна розглянути на прикладі системи Лоренца (див. п. 2.4.2.6, рівняння (2.4.40), (2.4.43)) – системи трьох диференціальних рівнянь у повних похідних, яка в певному наближенні описує конвективні течії в шарі рідини, що підігрівається знизу:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{d\tau} &= -PX + PY, \\ \frac{dY}{d\tau} &= -XZ + rX - Y, \\ \frac{dZ}{d\tau} &= XY - bZ.\end{aligned}$$

Нагадаємо, що величини X та Y характеризують відповідно амплітуди швидкості та збурення температури, а величина Z – “нелінійне спотворення” профілю температури (ефект, аналогічний до ангармонізму нелінійного осцилятора), $b = 8/3$, r – число Релея, нормоване на його критичне значення, P – число Прандтля. Число Прандтля визначається властивостями рідини, а число Релея в експерименті можна змінювати, змінюючи, наприклад, різницю температур між нижньою та верхньою поверхнями шару рідини.

З’ясуємо спершу деякі загальні властивості системи Лоренца (2.4.40), (2.4.43).

Ця система відповідає тривимірному фазовому простору. Для неї дивергенція швидкості однакова в усьому фазовому просторі й від’ємна:

$$\frac{\partial \dot{X}}{\partial X} + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} = -P - 1 - b < 0, \quad (3.4.8)$$

отже, відповідна модель є дисипативною (що, власне кажучи, випливає і з процедури отримання рівнянь), і в усьому фазовому просторі фазові краплі з часом стискаються.

Система Лоренца інваріантна щодо заміни змінних $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, $z \rightarrow z$. Це означає, що її фазовий портрет симетричний щодо осі z .

Стаціонарні точки системи Лоренца детально обговорювалися в пп. 2.4.2.7-2.4.2.9. Нагадаємо, що вони відповідають нерухомій рідині та двом типам конвективних валів, що виникають при $r > 1$ і відрізняються лише напрямком обертання валів (рис. 2.4.5). Як уже вказувалося, при $P > b + 1 = 11/3$ та $r > r^*$, де величина r^* визначається формулою (2.4.49 а),

$$r^* \equiv \frac{P(P + b + 3)}{P - (b + 1)},$$

всі вони виявляються нестійкими.

Як показує числовий розрахунок, за виконання умови $P > 11/3$ ще при $r < r^*$ у фазовому просторі, крім двох простих аттракторів – стійких фокусів, що відповідають конвективним валам, з’являється спочатку пара сідлових граничних циклів, які при зростанні числа Ре-

лея поступово ускладнюються і врешті решт перетворюються на дивний атрактор – так званий атрактор Лоренца (рис. 3.4.6). При $r > r^*$ атрактор Лоренца залишається єдиним атрактором у фазовому просторі, тобто система демонструє турбулентну поведінку незалежно від початкових умов.

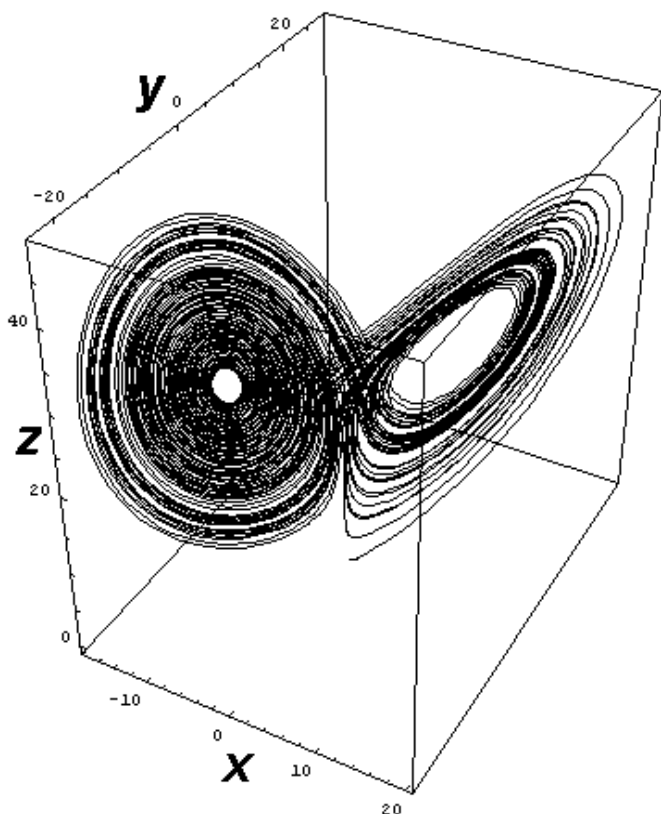


Рис. 3.4.6. Фазовий портрет системи Лоренца ($P=10$, $b=8/3$, $r=28$; для цих параметрів $r^*=22.38$).

В процесі руху на атракторі Лоренца осциляції навколо двох нестійких стаціонарних точок чергуються з випадковими перестрибуваннями між околами цих точок.

Існування атрактора Лоренца означає, що рух рідини в шарі, що підігрівається знизу, при $r > r^*$ якраз і відповідає режиму слабкої гідродинамічної турбулентності. При цьому структура течії у формі конвективних валів зберігається, але амплітуда і фаза (просторове розташування) цих валів з часом весь час змінюється складним чином.

Саме при розв'язанні системи Лоренца числовими методами було чи не вперше помічено, що дуже мала зміна початкових умов з часом приводить до радикальної зміни розв'язку (рис. 3.4.7 а, б). Видно, що при $t < 20$ залежності, наведені на рис. 3.4.7 а та рис. 3.4.7 б, практично збігаються. Але вже при $t > 25$ вони йдуть зовсім по-різному. Таким чином, ці рисунки ілюструють розбіжність із часом первісно сусідніх зображувальних точок на дивному атракторі (див. п. 3.2.1.2).

На основі своїх розрахунків Лоренц сформулював так званий ефект метелика: рух повітря, обумовлений польотом метелика в джунглях Амазонки, через деякий час може спричинити радикальну зміну погоди в Сибіру. На якісному рівні цей висновок вважається справедливим і сьогодні. За існуючими оцінками характерний час перемішування для атмосфери Землі складає величину порядку двох тижнів. Це і є той час, на який можна реально передбачати погоду.

З фізичної точки зору використання системи Лоренца при великих числах Релея є некоректним, оскільки при цьому порушуються припущення, які були використані при її отриманні. Тому, хоч були спроби використати систему Лоренца для опису руху повітря в атмосфері (по суті, для передбачення погоди), сьогодні вона має переважно історичне значення. Це значення полягає в тому, що на її прикладі була продемонстрована нестійкість динаміки складних систем, а атрактор Лоренца був першим дослідженим дивним атрактором.

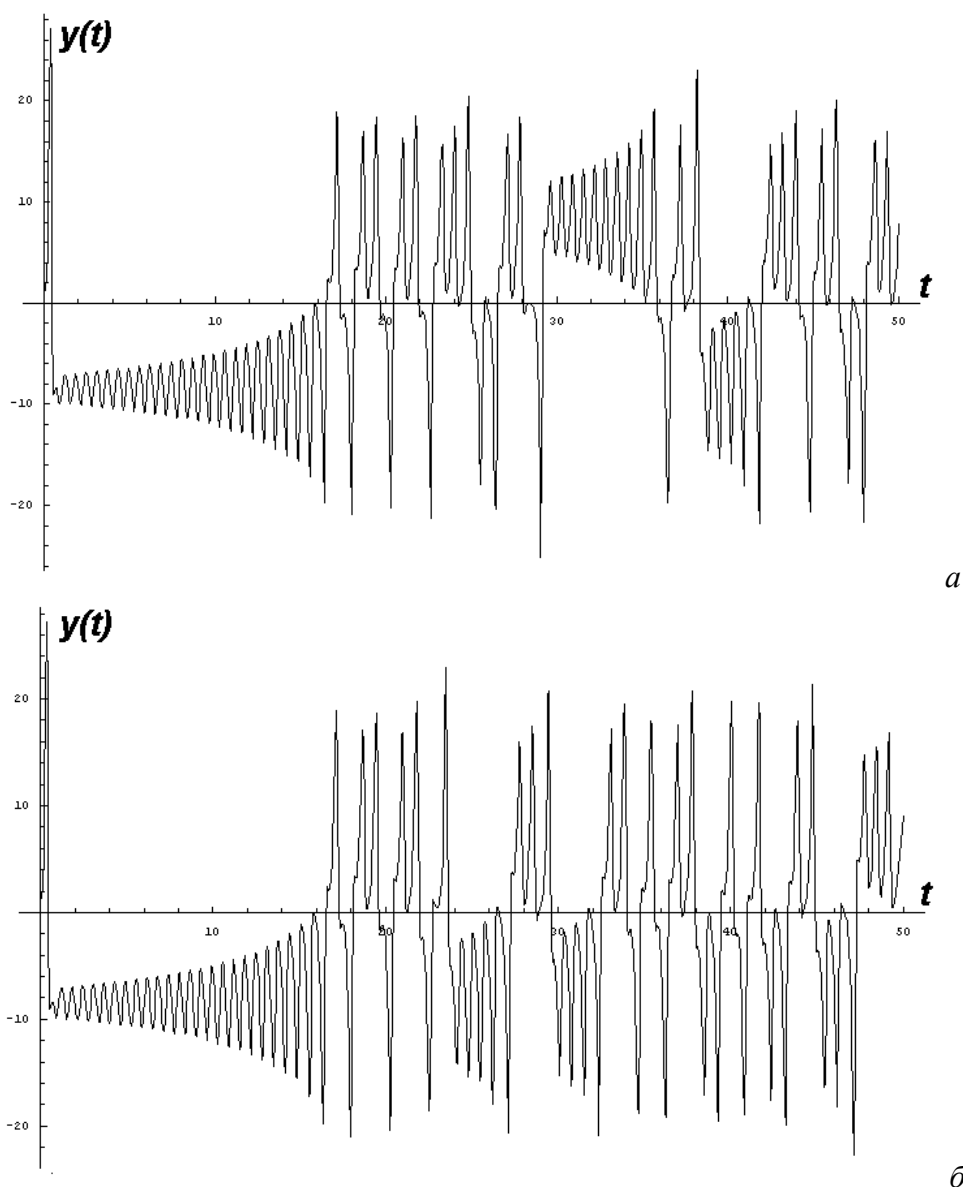


Рис. 3.4.7. Результати числового розв'язання системи Лоренца ($P=10$, $b=8/3$, $r=28$) для початкових умов $x(0)=z(0)=0$, $y(0)=1.00$ (а) та $x(0)=z(0)=0$, $y(0)=1.01$ (б).

3.4.2.3. Перехід до просторово-часового хаосу

Нагадаємо (див. п. 2.4.2.6), що при отриманні системи Лоренца було зроблене жорстке припущення про структуру течії. Саме таким шляхом початкові рівняння в частинних похідних (рівняння Нав'є - Стокса, рівняння теплопровідності та рівняння неперервності) вдалося звести до невеликої кількості рівнянь у повних похідних (за часом).

В дійсності таке припущення залишається справедливим лише при невеликому ступені нерівноважності системи. При переході керувального параметра, що характеризує нерівноважність, через деяке критичне значення в системі починають утворюватися нерегулярні просторові структури, тобто спектр хвильових чисел також стає неперервним. У цьому випадку говорять про виникнення просторово-часового хаосу. Саме такий хаос ототожнюється з розвиненою турбулентністю.

Очевидно, народження просторово-часового хаосу призводить до помітного збільшення кількості ступенів вільності, який характеризує рух системи, або, що те саме, до суттєвого зростання розмірності відповідного дивного атрактора у функціональному просторі (див. п. 3.4.1.2).

Сказане вище можна проілюструвати на прикладі характерних режимів конвекції Ре-

ля – Бенара. Діаграма таких режимів, побудована на основі експериментальних даних, отриманих Р.Крішнамурті⁷, наведена на рис. 3.4.8.

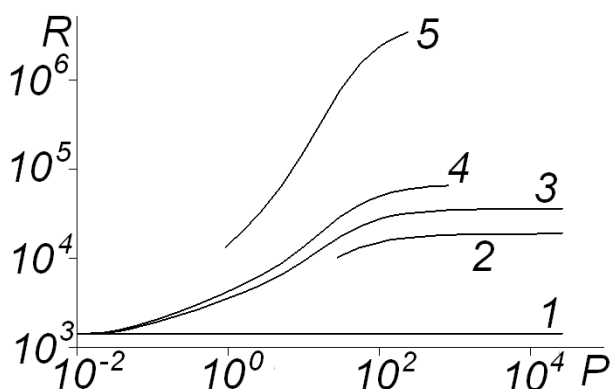


Рис. 3.4.8. Области існування різних режимів конвекції Релея - Бенара (експеримент, з роботи Р.Крішнамурті, 1973): R – число Релея, P – число Прандтля.

При дуже малих значеннях числа Релея R конвекція в системі відсутня при будь-яких значеннях числа Прандтля P (пор. з п. 2.4.2.4). При переході через критичне значення R_1 (при фіксованому значенні P), якому на рис. 3.4.8 відповідає лінія 1, виникають стаціонарні конвективні вали (як це й передбачає розв'язок системи Лоренца, див. п. 2.4.2.8). При переході через критичне значення R_2 (лінія 2 на рис. 3.4.8) течія залишається стаціонарною, але стає тривимірною (в цьому режимі можуть, зокрема, виникати шестикутні комірки). Далі, при переході через наступне критичне значення R_3 (лінія 3 на рис. 3.4.8), цей стаціонарний режим набуває коливного характеру (при $P < 5$ стаціонарні конвективні вали безпосередньо переходять у нестаціонарний режим). При переході через значення R_4 (лінія 4 на рис. 3.4.8) часові коливання стають нерегулярними, а їхній часовий спектр – суцільним. Цей режим відповідає слабкій турбулентності. Нарешті, при перевищенні критичного значення R_5 (лінія 5 на рис. 3.4.8) ускладнюється й просторова структура течії – народжується просторово-часовий хаос, або розвинена турбулентність.

Контрольні питання до підрозділу 3.4.2

1. Що виступає аналогом фазового простору для систем із розподіленими параметрами?
2. Що являє собою фазовий портрет дисипативної системи з розподіленими параметрами, яка здійснює турбулентний рух?
3. Чому в деяких випадках турбулентну гідродинамічну течію вдається описати невеликою кількістю рівнянь у повних похідних?
4. Який принцип лежить в основі експериментальних методів вимірювання розмірності вкладення?
5. Які умови повинен задовольняти проміжок часу між сусідніми вимірами, призначеними для визначення розмірності вкладення?
6. В чому перевага методу Грассбергера – Прокаччіа порівняно з іншими методами вимірювання розмірності вкладення?
7. В яких межах лежить фрактальна розмірність атрактора Лоренца?
8. Чи може, на Вашу думку, шар рідини, що підігрівається знизу, демонструвати регулярний або турбулентний рух в залежності від початкових умов при тих самих параметрах системи?
9. Що є аналогом просторово-часового хаосу для гамільтонівських систем?
10. Який режим течії рідини, що обтікає перешкоду, відповідатиме, на Вашу думку, слабкій турбулентності?

⁷ Р.Крішнамурті (Ruby Ebisuzaki Krishnamurti, нар. 1934) – американська дослідниця індійського походження, займається проблемами аеро- та гідродинаміки, зокрема, конвекцією Релея – Бенара.

3.4.3. Розвинена гідродинамічна турбулентність

Як уже вказувалося вище (п. 3.4.1.3), розвинена гідродинамічна турбулентність характеризується тим, що при великих значеннях числа Рейнольдса нестійкість у потоці рідини, що приводить до виникнення вихорів, розвивається на великих масштабах (порядку характерного масштабу течії l), розсіювання енергії відбувається на малих масштабах, а проміжні масштаби утворюють так званий інерційний інтервал, через який потік енергії передається від великих масштабів до малих.

В принципі, задачу про дослідження розвиненої турбулентності потрібно було б розв'язувати статистичними методами, тобто приблизно таким самим шляхом, як це було зроблено для слабкої гамільтонівської турбулентності в п. 3.3.2. На основі рівнянь Нав'є – Стокса слід отримати кінетичне рівняння для функції розподілу, потім шляхом додаткового спрощення моделі – рівняння для моментів цієї функції. Розв'язання рівняння для моментів дозволяє знайти спектр турбулентності, тобто розподіл енергії турбулентного руху по частотах (або по хвильових числах).

Однак у роботах А.М. Колмогорова та О.М. Обухова⁸, виконаних ще на межі 1930-х – 1940-х рр., було запропоновано якісно інший шлях, заснований на застосуванні теорії розмірностей. Отримані таким чином результати, як не дивно, виявилися в загальних рисах справедливими не тільки для розвиненої гідродинамічної турбулентності, але й для інших типів турбулентності в розподілених дисипативних системах за наявності інерційного інтервалу.

Викладенню якісної картини розвиненої гідродинамічної турбулентності та теорії Колмогорова – Обухова й присвячений цей підрозділ.

3.4.3.1. Пульсації різних масштабів у турбулентному потоці

Розвинена гідродинамічна турбулентність, як уже відзначалося (див. п.3.4.2.3), відповідає просторово-часовому хаосу. Тому вона характеризується надзвичайно нерегулярною, безладною зміною швидкості з часом у кожній точці потоку, а також від точки до точки в просторі для фіксованого моменту часу.

Під середньою швидкістю руху $\bar{u}(\vec{r})$ у даній точці простору будемо розуміти усереднену за великий проміжок часу миттєву швидкість течії $\vec{v}(\vec{r}, t)$ у цій точці:

$$\bar{u}(\vec{r}) = \overline{\vec{v}(\vec{r}, t)} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \vec{v}(\vec{r}, t) dt. \quad (3.4.9)$$

Середня швидкість $\bar{u}(\vec{r})$ від точки до точки змінюється плавно.

Величину $\vec{v}_\sim = \vec{v}(\vec{r}, t) - \bar{u}(\vec{r})$, що демонструє нерегулярні зміни в просторі та в часі, називатимемо пульсаційною складовою швидкості. Зрозуміло, що $\overline{\vec{v}_\sim} = 0$.

$$(3.4.10)$$

Пульсаційну складову швидкості можна якісно розглядати як набір турбулентних пульсацій (вихорів) різних масштабів. Під масштабом λ розуміють ті характерні відстані, на яких швидкість руху істотно змінюється. Можна вважати, що швидкість \vec{v}_λ , що відповідає масштабу λ – це пульсаційна складова швидкості \vec{v}_\sim , усереднена на довжині λ , або, що практично те саме (див. нижче), на проміжку часу $\lambda/u(\vec{r})$:

$$\vec{v}_\lambda(\vec{r}, t) = \frac{1}{\lambda} \int_{z-\lambda/2}^{z+\lambda/2} [\vec{v}(\vec{r}, t) - \bar{u}(\vec{r})] dz \approx \frac{\bar{u}(\vec{r})}{\lambda} \int_{t-\lambda/2u(\vec{r})}^{t+\lambda/2u(\vec{r})} [\vec{v}(\vec{r}, t) - \bar{u}(\vec{r})] dt. \quad (3.4.11)$$

Як уже говорилося, при зростанні числа Рейнольдса спочатку з'являються великомасштабні пульсації, а потім – пульсації з усе меншими масштабами (див. п. 3.4.1.1).

⁸ О.М. Обухов (Александр Михайлович Обухов, 1918 - 1989) – російський геофізик, академік АН СРСР (1970), лауреат Державної премії СРСР (1990, посмертно), організатор і директор Інституту фізики атмосфери АН СРСР, учень А.М. Колмогорова. Основні роботи присвячені теорії атмосфери та турбулентності.

Основна енергія турбулентного потоку зосереджена в найбільш великомасштабних пульсаціях (з розмірами порядку l). Їхня швидкість v_l є величиною порядку зміни Δu_l середньої швидкості u на довжині l . Частота цих пульсацій у фіксованій точці спостереження складає величину порядку u/l . Це обумовлено тим, що вихори рухаються повз нерухомого спостерігача із середньою швидкістю потоку \bar{u} .

Дрібномасштабні пульсації характеризуються значно меншими пульсаційними швидкостями порівняно з пульсаціями масштабу l і несуть лише невелику частку кінетичної енергії турбулентного потоку. Характерні частоти пульсацій масштабу λ ($\lambda \ll l$) складають величину порядку u/λ . Пульсаційна швидкість v_λ , що визначає зміну миттєвої швидкості на довжині λ в деякий момент часу, при $\lambda \ll l$ набагато менша від величини Δu_l , але набагато більша від зміни середньої швидкості u на цій самій довжині Δu_λ :

$$\Delta u_\lambda \ll v_\lambda \ll \Delta u_l. \quad (3.4.12)$$

3.4.3.2. Роль дисипації для пульсацій різних масштабів

Визначимо число Рейнольдса для турбулентних пульсацій масштабу λ :

$$\text{Re}_\lambda = \frac{v_\lambda \lambda}{\nu} \quad (3.4.13)$$

(пор. із формулою (3.4.2)). Величина Re_λ тим менша, чим менше λ (зі зменшенням λ зменшується й пульсаційна швидкість v_λ).

При великих Re для пульсацій помірних масштабів λ величини Re_λ також є великими. Але великі значення числа Рейнольдса означають, що в'язкістю можна знехтувати (див. п. 3.4.1.1). Отже, для пульсацій не дуже малих масштабів, для яких виконана умова $\text{Re}_\lambda \gg 1$, в'язкість є неістотною, і дисипація енергії майже відсутня.

Дисипація енергії відбувається переважно для малих масштабів $\lambda \leq \lambda_0$, де порогове значення λ_0 визначається з умови $\text{Re}_{\lambda_0} \sim 1$. З точки зору загальної картини руху рідини в турбулентному потоці такі масштаби неістотні.

Область масштабів $\lambda_0 \ll \lambda \ll l$ відповідає інерційному інтервалу. В цьому інтервалі відсутнє як надходження енергії в систему, так і її розсіювання, а відбувається лише перекачування енергії від великомасштабних пульсацій до дрібномасштабних.

Отже, для розвиненої гідродинамічної турбулентності характерний перехід енергії від великомасштабних пульсацій до дрібномасштабних майже без дисипації. Для підтримання стаціонарного стану такого потоку необхідні зовнішні джерела енергії, які "накачують" її у великомасштабні пульсації. Іншими словами, система повинна бути відкритою.

3.4.3.3. Аналіз великомасштабних пульсацій за методом розмірностей

Оскільки для пульсацій масштабів $\lambda \gg \lambda_0$ в'язкість неістотна, то величини, що характеризують рух із такими масштабами, не можуть залежати від кінематичної в'язкості ν . Ця обставина звужує круг величин, що визначають турбулентний рух. В результаті аналіз такого руху вдається провести на основі міркувань, пов'язаних із розмірністю.

Оцінімо (за порядком величини) розсіювання енергії при турбулентному русі великого масштабу (порядку l). Це розсіювання обумовлене не безпосередньо в'язкими втратами, а передачею енергії на збудження пульсацій менших масштабів.

Нехай E – середня потужність розсіювання на одиницю маси. Вона має розмірність $\text{ерг}/(\text{г} \cdot \text{с}) = (\text{г} \cdot \text{см}^2)/(\text{с}^2 \cdot \text{г} \cdot \text{с}) = \text{см}^2/\text{с}^3$. В силу сказаного вище ця величина, в принципі, може залежати лише від густини рідини ρ , характерного масштабу течії l та амплітуди пульсацій $v_l \sim \Delta u_l$. Оскільки розмірність E не містить маси, то залежності від ρ бути не може. Тоді, виходячи з міркувань розмірності, можна сконструювати єдину комбінацію величин l та

Δu_l , яка матиме розмірність E :

$$E = f(\Delta u_l, l) \sim \frac{(\Delta u_l)^3}{l}. \quad (3.4.14)$$

Формула (3.4.14) підтверджує, що потужність для втрат великомасштабних пульсацій визначається саме перекачуванням енергії в пульсації менших масштабів, оскільки вона залежить лише від пульсаційної швидкості та характерного розміру цих пульсацій.

Різниця тиску Δp на межах області турбулентного руху також може, в принципі, залежати тільки від ρ , l та Δu_l . Виходячи з міркувань розмірності, можна записати:

$$\Delta p \sim \rho (\Delta u_l)^2. \quad (3.4.15)$$

Як бачимо, ця величина виявляється незалежною від розміру l області турбулентного руху. Якщо величина Δp відома, то з (3.4.15) випливає оцінка для пульсаційної швидкості найбільшого масштабу l :

$$v_l \sim \Delta u_l \sim \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}. \quad (3.4.16)$$

Як і слід було чекати, амплітуда великомасштабних пульсацій зростає при зростанні прикладеної різниці тисків. Цікаво відзначити, що закон цього зростання кореневий, як у залежності усталеної амплітуди коливань автогенератора Ван-дер-Поля від коефіцієнта зворотного зв'язку (за відсутності втрат)⁹.

3.4.3.4. Локальні властивості розвиненої турбулентності

Розглянемо тепер властивості розвиненої турбулентності на масштабах $\lambda \ll l$. Їх прийнято називати локальними властивостями турбулентності.

Природно припустити, що на далеких віддальх d від стінок ($d \gg \lambda$) локальні властивості розвиненої турбулентності характеризуються однорідністю (незалежністю від координат) та ізотропністю (незалежністю від напрямку середньої швидкості \bar{u} на ділянках із характерними розмірами порядку λ).

Якщо масштаб пульсацій задовольняє умові $\lambda_0 \ll \lambda \ll l$, тобто потрапляє в інерційний інтервал, то локальні властивості турбулентності мають залежати лише від E , ρ та λ і не повинні залежати від v , l та Δu_l (поведінка вихорів усередині інерційного інтервалу не залежить безпосередньо від процесів на його межах, а визначається лише потоком енергії E , що переноситься через інерційний інтервал за одиницю часу).

Тоді зміна пульсаційної швидкості на масштабі λ , виходячи з міркувань розмірності, визначається співвідношенням

$$v_\lambda \sim (E\lambda)^{1/3}. \quad (3.4.17)$$

Величина v_λ , як уже вказувалося, характеризує одночасно й швидкість руху рідини у вихорах масштабу λ .

Співвідношення (3.4.17) відоме в літературі як закон Колмогорова – Обухова.

Турбулентність характеризується локальною нестійкістю. Нехай дві маленькі крапельки рідини знаходяться на малій відстані λ . Зміна цієї відстані з часом визначається швидкістю v_λ : $v_\lambda = d\lambda/dt$. Тоді, інтегруючи співвідношення (3.4.17), можна отримати закон зростання віддалі між сусідніми крапельками з часом:

$$\frac{d\lambda}{dt} \sim (E\lambda)^{1/3},$$

звідки

⁹ Див., наприклад: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009, формули (1.13.6), (1.13.25).

$$\lambda(t) \sim E^{1/2} t^{3/2}. \quad (3.4.18)$$

Відповідно до (3.4.18), час, за який сусідні крапельки розходяться на віддаль λ , що значно перевищує початкову відстань між ними, складає

$$t(\lambda) \sim \frac{\lambda^{2/3}}{E^{1/3}}. \quad (3.4.18 \text{ а})$$

Оцінимо тепер відношення $v_\lambda/\Delta u_l$. Для цього запишемо Δu_λ через E та l із формули (3.4.14):

$$\Delta u_l \sim (El)^{1/3}. \quad (3.4.14 \text{ а})$$

Поділивши (3.4.17) на (3.4.14 а), отримаємо:

$$\frac{v_\lambda}{\Delta u_l} \sim \left(\frac{\lambda}{l} \right)^{1/3}. \quad (3.4.19)$$

Формула (3.4.19) встановлює масштабне співвідношення між розмірами вихорів та відповідними швидкостями.

Як уже згадувалося, турбулентний потік рідини можна уявити собі як набір вихорів різних масштабів, які зносяться із середньою швидкістю u . Тому зміну швидкості потоку за час $\tau \ll T = l/u$ в певній нерухомій точці простору можна записати, замінивши у формулі (3.4.17) масштаб λ на пройдений шлях $u\tau$:

$$v_\tau \sim (Eu\tau)^{1/3}. \quad (3.4.17 \text{ а})$$

Зовсім інакше виглядає зміна швидкості v'_τ за час τ для деякої виділеної краплі рідини, яка рухається в потоці. Ця величина має залежати лише від E та τ . Тоді на основі аналізу розмірності можна записати:

$$v'_\tau \sim (E\tau)^{1/2}. \quad (3.4.20)$$

Зрозуміло, що при $\tau \ll T$ виконується нерівність $v'_\tau \ll v_\tau$.

3.4.3.5. Оцінка порогового масштабу дисипації

Знаючи залежність v_λ від λ , ми можемо тепер явно оцінити масштаб λ_0 , який визначає поріг дисипативних ефектів (див. п. 3.4.3.2). Справді, підставивши v_λ з (3.4.19) до формули (3.4.13), можна отримати:

$$\text{Re}_\lambda \sim \frac{\lambda v_\lambda}{\nu} \sim \frac{\lambda}{\nu} \Delta u_l \left(\frac{\lambda}{l} \right)^{1/3} \sim \frac{l \Delta u_l}{\nu} \left(\frac{\lambda}{l} \right)^{4/3} \sim \text{Re} \left(\frac{\lambda}{l} \right)^{4/3}. \quad (3.4.13 \text{ а})$$

Як уже вказувалося, пороговий масштаб дисипації λ_0 визначається з умови $\text{Re}_{\lambda_0} \sim 1$. Тоді з урахуванням (3.4.13 а) можна записати:

$$\lambda_0 \sim \frac{l}{\text{Re}^{3/4}}. \quad (3.4.21)$$

Формула (3.4.21) підтверджує висловлені раніше міркування про те, що при зростанні числа Рейнольдса інерційний інтервал розширюється в бік дрібніших масштабів.

Швидкість, що відповідає цьому масштабу, легко знайти з (3.4.19):

$$v_{\lambda_0} \sim \Delta u_l \left(\frac{\lambda_0}{l} \right)^{1/3} \sim \frac{\Delta u_l}{\text{Re}^{1/4}}. \quad (3.4.22)$$

Тепер можна знайти умову існування інерційного інтервалу:

$$l \gg \lambda \gg \lambda_0 \sim \frac{l}{\text{Re}^{3/4}}. \quad (3.4.23)$$

Як випливає з (3.4.23), вона зводиться до вимоги $\text{Re} \gg 1$.

3.4.3.6. Колмогорівські спектри

Закон Колмогорова – Обухова можна переписати в спектральній формі.

Введемо замість масштабів λ хвильові числа $k \sim 1/\lambda$. Нехай $W(k)dk$ є кінетична енергія рідини на одиницю маси в заданому інтервалі $[k, k + dk]$. Розмірність величини $W(k) = (\text{г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{см}) / (\text{с}^2 \cdot \text{г}) = \text{см}^3 / \text{с}^2$. Очевидно, вона має залежати лише від k та від E . Тоді з міркувань розмірності випливає, що

$$W(k) \sim \frac{E^{2/3}}{k^{5/3}}. \quad (3.4.24)$$

Інтегруючи (3.4.41) по k , маємо:

$$\int_k^\infty W(k)dk \sim \frac{E^{2/3}}{k^{2/3}} \sim (E\lambda)^{2/3}. \quad (3.4.24 \text{ а})$$

Інтеграл (3.4.24 а) визначає повну кінетичну енергію (на одиницю маси) пульсацій з масштабами, що не перевищують λ . Отже, він має бути величиною порядку v_λ^2 . Тоді для v_λ виходить оцінка, що збігається із законом Колмогорова – Обухова у формі (3.4.17).

Співвідношення (3.4.24) визначає так званий колмогорівський спектр – ділянку спектральної інтенсивності розвиненої гідродинамічної турбулентності, яка відповідає інерційному інтервалу.

Формула (3.4.24) характеризує спектр хвильових чисел. Аналогічне співвідношення можна отримати й для частотного спектру, зробивши заміну $k \sim \omega/u$. З урахуванням того, що $W(\omega)d\omega = W(k)dk$, можна записати:

$$W(\omega)d\omega \sim E^{2/3} \left(\frac{\omega}{u} \right)^{-5/3} \frac{d\omega}{u},$$

звідки

$$W(\omega) \sim \frac{(Eu)^{2/3}}{\omega^{5/3}}. \quad (3.4.25)$$

Частота ω , що фігурує у формулі (3.4.25), визначає повторюваність у часі руху в деякій нерухомій точці спостереження. Повторюваність руху деякої виділеної краплі рідини (як у формулі (3.4.20)) будемо характеризувати частотою ω' . Енергетичний спектр $W(\omega')$ повинен залежати лише від E та ω' і не повинен залежати від u . Тому з міркувань розмірності виходить співвідношення

$$W(\omega') \sim \frac{E}{(\omega')^2}. \quad (3.4.26)$$

3.4.3.7. Область масштабів, де в'язкість рідини стає суттєвою

На масштабах $\lambda \ll \lambda_0$ турбулентність відсутня, швидкість змінюється плавно. Розкладаючи невідому залежність $v(\lambda)$ в ряд Тейлора, обмежуючись лінійним за λ доданком та враховуючи, що $v(\lambda = 0) = 0$, можна записати, що $v(\lambda) = \text{const} \cdot \lambda$. Оскільки останнє співвідношення можна вважати справедливим аж до масштабів λ_0 , то на дисипативній ділянці масштабів справджується співвідношення

$$v_\lambda \sim \frac{v_{\lambda 0}}{\lambda_0} \lambda \sim R^{1/2} \Delta u \frac{\lambda}{l} \quad (3.4.27)$$

(враховано формули (3.4.21)-(3.4.22)).

Таким чином, частотний спектр розвиненої турбулентності має вигляд, якісно показаний на рис. 3.4.9.

Слід зазначити, що ситуації, подібні до розглянутої вище, коли енергія надходить до системи на одних масштабах і поглинається на інших, реалізуються в багатьох системах, що характеризуються турбулентною динамікою. Таке перекачування енергії вгору за спектром має місце, зокрема, в плазмово-пучкових системах¹⁰. Спектри, що відповідають інерційному інтервалу масштабів, для таких систем теж прийнято називати колмогорівськими.

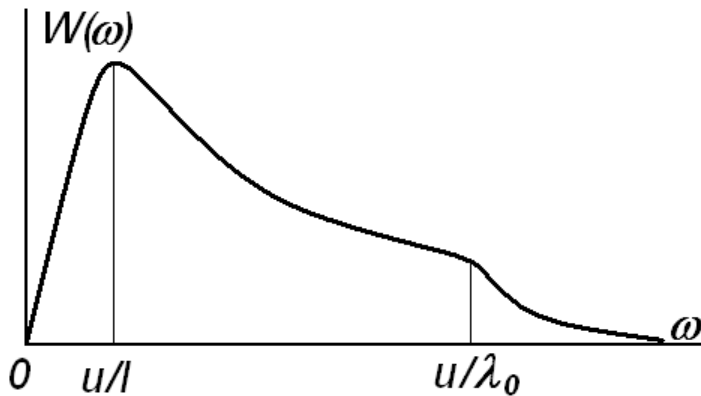


Рис. 3.4.9. Частотна залежність спектральної інтенсивності для розвинутої гідродинамічної турбулентності.

Як уже згадувалося, сучасні методи аналізу гідродинамічної турбулентності ґрунтуються на застосуванні статистичних методів і розв'язанні рівняння Ліувілля. Таким способом намагаються виділити в спектрах турбулентних течій інші характерні ділянки, відмінні від коломогорівських спектрів та областей, де в'язкість рідини суттєва.

Контрольні питання до підрозділу 3.4.3

1. Що таке розвинена гідродинамічна турбулентність?
2. Чому дисипація в рідині істотна тільки на малих масштабах? Від чого залежать ці масштаби? Відповідь дайте на основі аналізу рівняння Нав'є – Стокса.
3. Чим, на Вашу думку, визначається ширина колмогорівського спектру для течії в трубі?
4. Які міркування покладені в основу теорії Колмогорова – Обухова?
5. Як залежить число Рейнольдса від різниці тисків на межах області турбулентного руху?
6. Чи залежить пульсаційна швидкість в інерційному інтервалі, розрахована за формулою Колмогорова – Обухова, від вибору напрямку осі z ?
7. Порівняйте між собою колмогорівську ділянку спектру розвинутої гідродинамічної турбулентності та спектр слабкої турбулентності хвильових полів, вказавши їхні спільні та відмінні риси.

Задачі до підрозділу 3.4.3

3.4.3.1. Отримайте вираз для

- а) середньої потужності розсіювання на одиницю маси;
- б) пульсаційної швидкості для вихорів масштабу λ ;
- в) колмогорівської ділянки спектру (по хвильових числах) через різницю тисків, що породжує турбулентну течію.

3.4.3.2. За яким законом змінюватиметься

- а) спектральна (по хвильових числах);
- б) спектральна (по частотах)

густина енергії турбулентної течії на одиницю маси на ділянці спектру, де в'язкість рідини стає суттєвою?

¹⁰ Див., наприклад: Е.В.Мишин, Ю.Я.Ружин, В.А.Телегин. Взаимодействие электронных потоков с ионосферной плазмой. Л., Гидрометеоиздат, 1989.