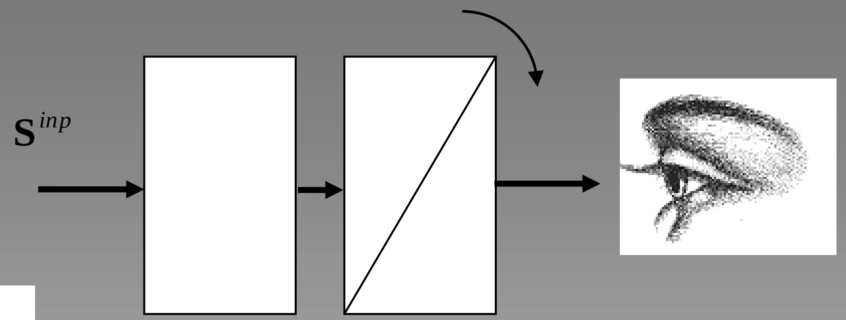
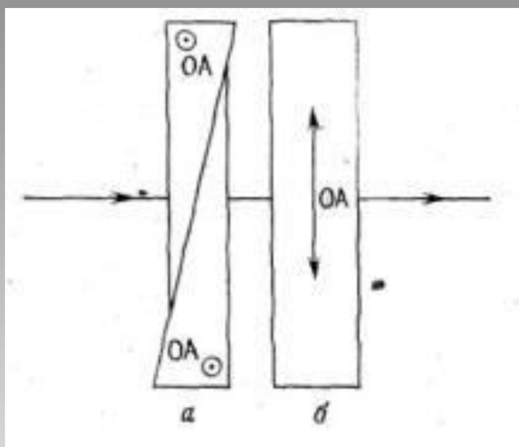
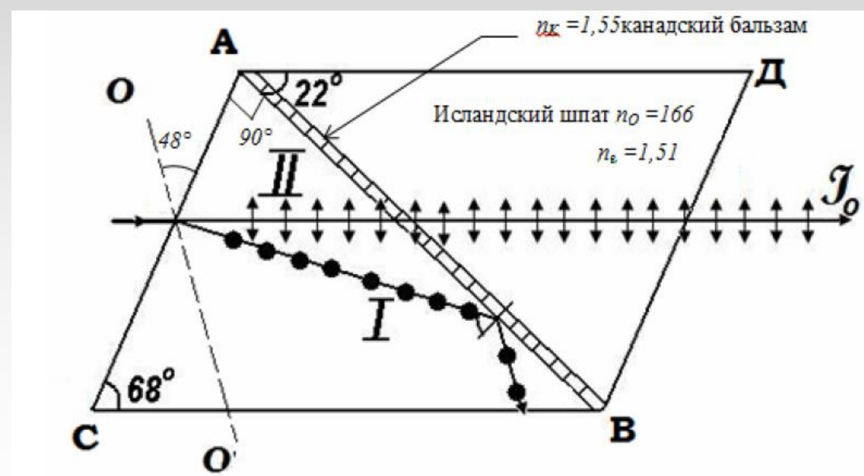
Вимірювання векторів Стокса і матриць Мюллера

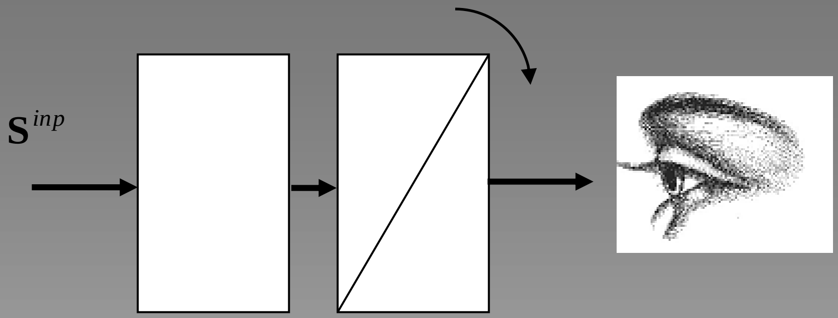
Чи міг Стокс виміряти власні параметри?







Чи міг Стокс виміряти власні параметри?



$$\mathbf{S}^{inp} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(2\alpha) \\ \sin((2\alpha)\cos(\delta) \\ \sin(2\alpha)\sin(\delta) \end{pmatrix}$$

δ - кут еліптичності

α - азимут орієнтації

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\Delta) & -\sin(\Delta) \\ 0 & 0 & \sin(\Delta) & \cos(\Delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(2\alpha) \\ \sin((2\alpha)\cos(\delta) \\ \sin(2\alpha)\sin(\delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(2\alpha) \\ \sin((2\alpha)\cos(\Delta+\delta) \\ \sin(2\alpha)\sin(\Delta+\delta) \end{pmatrix} \longrightarrow \Delta+\delta = 180^0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos(2\theta) & \sin(2\theta) & 0 \\ \cos(2\theta) & \cos(2\theta)^2 & \cos(2\theta)\sin(2\theta) & 0 \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta)\sin(2\theta) & \sin(2\theta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(2\alpha) \\ \sin((2\alpha)\cos(\Delta+\delta) \\ \sin(2\alpha)\sin(\Delta+\delta) \end{pmatrix}$$

$$S_1 = (1+\cos(2\theta)\cos(2\alpha)+\sin(2\theta)\sin(2\alpha)\cos(\Delta+\delta)) \rightarrow \Delta+\delta = 180^0 \rightarrow S_1 = (1+\cos 2(\theta+\alpha)) \rightarrow S_1 = 0$$

$$\theta+\alpha = \pi/2$$

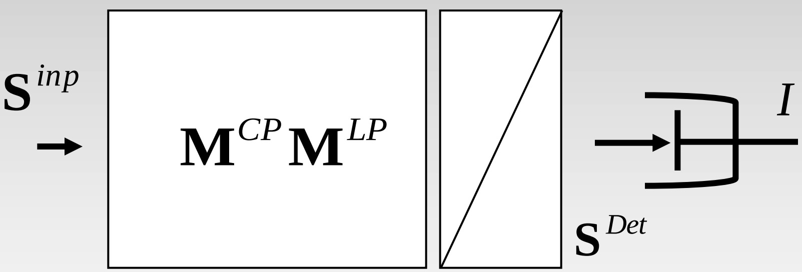
остаточно

$$\begin{cases} \delta = \pi - \Delta \\ \alpha = \pi/2 - \theta \end{cases}$$

Вимірювання параметрів Стокса

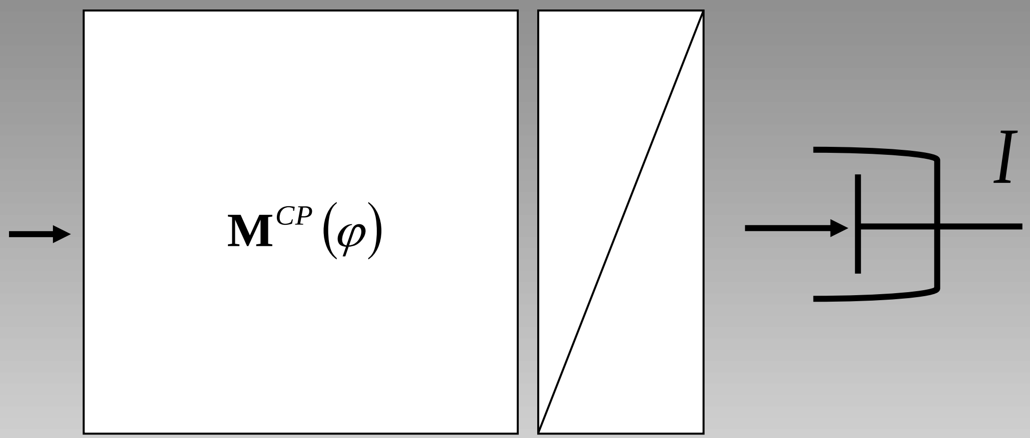
$$\mathbf{M}^{CP}\,\mathbf{M}^{LP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{array}{c}\left(\cos^2(2\alpha)+\sin^2(2\alpha)\cos(\delta)\right)\cos(2\varphi)+ \\ +\sin(2\alpha)\cos(2\alpha)\left(1-\cos(\delta)\right)\sin(2\varphi)\end{array} & \begin{array}{c}\left(\sin^2(2\alpha)+\cos^2(2\alpha)\cos(\delta)\right)\sin(2\varphi)+ \\ +\sin(2\alpha)\cos(2\alpha)\left(1-\cos(\delta)\right)\cos(2\varphi)\end{array} & \left(\cos(2\alpha)\sin(2\varphi)-\sin(2\alpha)\cos(2\varphi)\right)\sin(\delta) \\ 0 & \begin{array}{c}-\left(\cos^2(2\alpha)+\sin^2(2\alpha)\cos(\delta)\right)\sin(2\varphi)+ \\ +\sin(2\alpha)\cos(2\alpha)\left(1-\cos(\delta)\right)\cos(2\varphi)\end{array} & \begin{array}{c}\left(\sin^2(2\alpha)+\cos^2(2\alpha)\cos(\delta)\right)\cos(2\varphi)- \\ -\sin(2\alpha)\cos(2\alpha)\left(1-\cos(\delta)\right)\sin(2\varphi)\end{array} & \left(\cos(2\alpha)\cos(2\varphi)+\sin(2\alpha)\sin(2\varphi)\right)\sin(\delta) \\ 0 & \sin(2\alpha)\sin(\delta) & -\cos(2\alpha)\sin(\delta) & \cos(\delta) \end{pmatrix}.$$

$$I^{Det} = f\left(s_1^{inp},\, s_2^{inp},\, s_3^{inp},\, s_4^{inp}\right)$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & V & G \\ 0 & B & L & H \\ 0 & T & F & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & A & V & G \\ 1 & A & V & G \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow I = s_1^{Dey} = s_1^{Inp} + As_2^{Inp} + Vs_3^{Inp} + Gs_4^{Inp}$$

Стокс-поляриметри

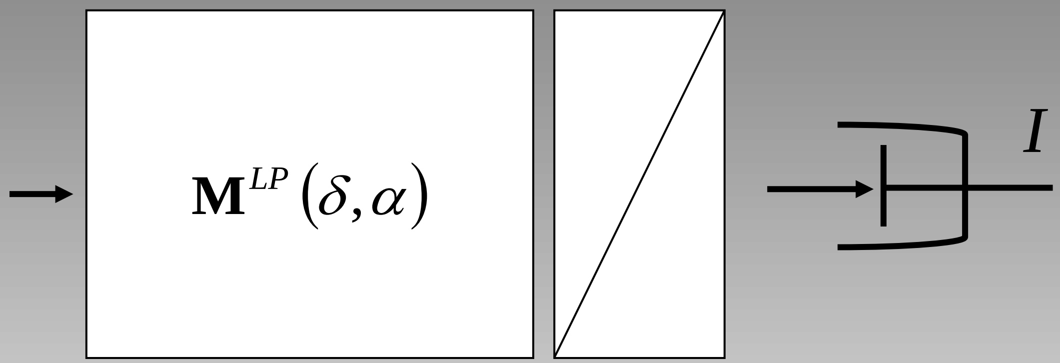


$$\varphi = V(f,T)dH\cos(\upsilon)$$

$$I = s_1 + \cos(\varphi)s_2 + \sin(\varphi)s_3$$

Стокс-поляриметри

змінюємо α

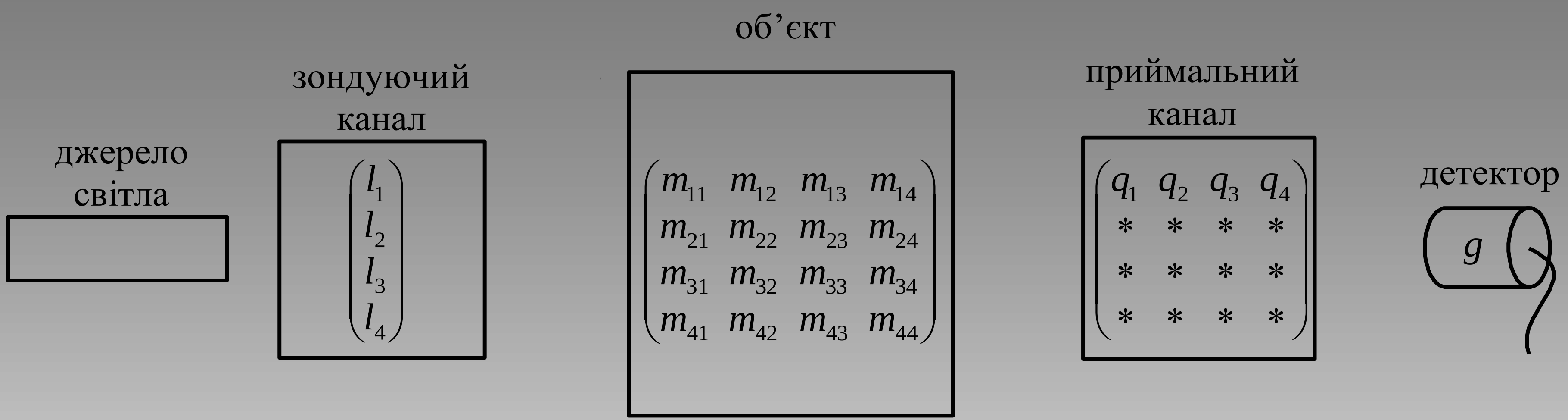


$$I = s_1 + \frac{1}{2}\left(1+\cos(\delta)\right)s_2 + \frac{1}{2}\left(1-\cos(\delta)\right)\cos(4\omega t)s_2 + \frac{1}{2}\left(1-\cos(\delta)\right)\sin(2\alpha)s_3$$
$$-\sin(\delta)\sin(4\alpha)s_4$$

$$\delta = 132^0 \qquad \alpha = \pm 51{,}7^0;\ \pm 15{,}1^0$$

Узагальнене вимірювальне рівняння поляриметрії

Загальна схема поляриметричних вимірювань



Узагальнене вимірювальне рівняння

$$g = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{L} = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} q_i \, m_{ij} l_j$$

$\mathbf{Q}$ - перший рядок матриці Мюллера, що описує приймальний канал поляриметра;

$\mathbf{L}$ - вектор Стокса зондуючого випромінювання;

$\mathbf{M}$ - матриця Мюллера, що вимірюється;

g - інтенсивність, що вимірюється детектором;

Узагальнене вимірювальне рівняння

$$\mathbf{G} = \mathbf{W}_M \vec{\mathbf{M}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ . \\ g_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1^1 l_1^1 & q_1^1 l_2^1 & q_1^1 l_3^1 & \cdot & q_4^1 l_4^1 \\ q_1^2 l_1^2 & q_1^2 l_2^2 & q_1^2 l_3^2 & \cdot & q_4^2 l_4^2 \\ q_1^3 l_1^3 & q_1^3 l_1^3 & q_1^3 l_3^3 & \cdot & q_4^3 l_4^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_1^N l_1^N & q_1^N l_2^N & q_1^N l_3^N & \cdot & q_4^N l_4^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{13} \\ \cdot \\ m_{44} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{G}$ - N x 1 вектор з інтенсивностей, отриманих в N вимірюваннях;

$\mathbf{W}_M$ - N x 16 характеристична матриця поляриметру;

$\vec{\mathbf{M}}$ - 16 x 1 вектор з елементів матриці Мюллера

Існування розв'язку

Терема Кронекера-Капелли

Леопольд Кронекер
1823-1891

Альфре́до Капе́лли
1855-1910

1. Формули Крамера

$$\left|\mathbf{W_M}\right| = d$$

$$d_i$$

$$m_i = d_i / d$$

Gabriel Cramer
1704 - 1752

2. $\vec{\mathbf{M}} = \mathbf{W}_M^{-1}\mathbf{G}$ $\quad N = 16$

$N \neq 16$ або $\left| \mathbf{W}_M \right| = 0$

$\mathbf{A}^* \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^* \mathbf{y}$ для $\forall \ \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$

для матриці $\mathbf{A}$ розміром $n \times m$

$A^+ = (A^* A)^{-1} A^*$ $\quad n \geq m$

$A^+ = A^* (A A^*)^{-1}$ $\quad n \leq m$

властивості

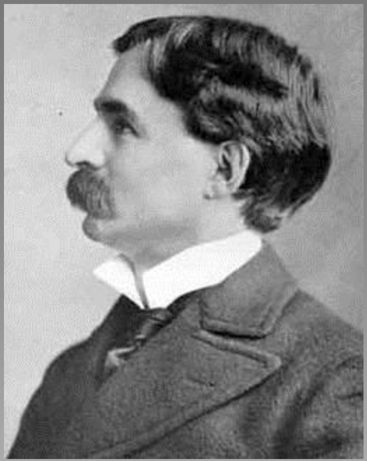
$A A^+ A = A$

$A^+ A A^+ = A^+$

$(A A^+)^* = A A^+$

$(A^+ A)^* = A^+ A$

$$\vec{\mathbf{M}} = \widetilde{\mathbf{W}}_M \mathbf{G} = \left(\mathbf{W}_M^T \mathbf{W}_M \right)^{-1} \mathbf{W}_M^T \mathbf{G}$$

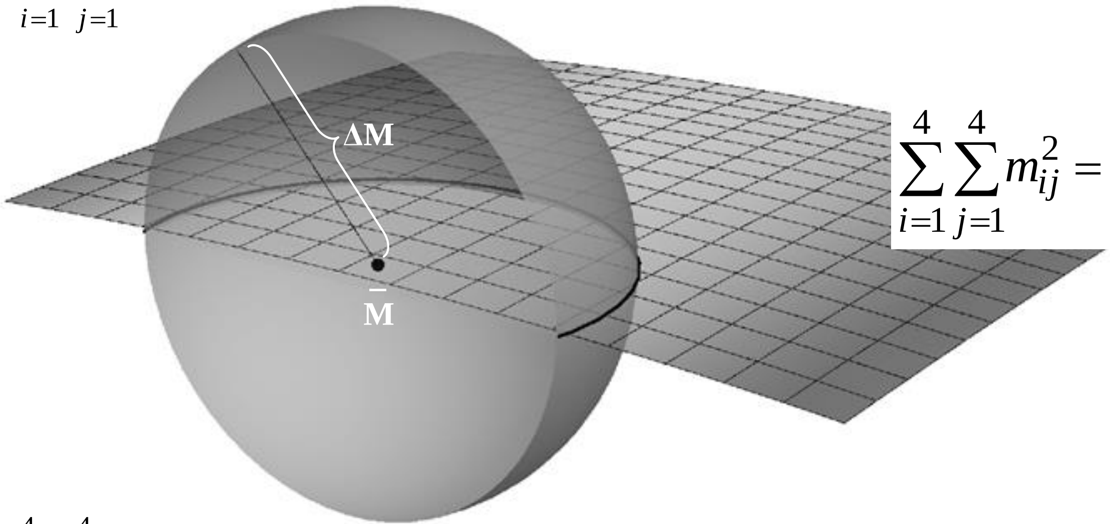


Eliakim Hastings Moore
1862-1932

Роджер Пенроуз
1931 р.н.

Некоректність оберненої задачі поляриметрії

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} m_{ij}^2 > 4m_{11}^2$$



$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} m_{ij}^2 = 4m_{11}^2$$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} m_{ij}^2 < 4m_{11}^2$$

Розподіл однократних вимірювання матриці Мюллера однорідного анізотропного середовища.

1. Існування розв'язку
2. Однозначність розв'язку
3. Стійкість розв'язку $\left\| \mathbf{G} - \mathbf{G}' \right\| \le \varepsilon$

$\left\| \mathbf{M} - \mathbf{M}' \right\| \le \delta(\varepsilon)$

$$\left\| \mathbf{W_M}\vec{\mathbf{M}} - \mathbf{G} \right\| = 0$$

Жак Адамар
1865-1963

Жозеф Луи Лагранж
1736-1813

$$\left\| \mathbf{W_M}\vec{\mathbf{M}} - \mathbf{G} \right\| \to \min$$

Некоректність оберненої задачі поляриметрії

$$cond(\mathbf{W}_M) = \left\|\mathbf{W}_M\right\| \left\|\mathbf{W}_M^{-1}\right\|, \quad \text{де} \quad \left\|\mathbf{W}\right\| = \sqrt{\sum_{i,j} \left|W_{ij}\right|^2}$$

властивості

$$cond(\mathbf{W}_M) \geq 1$$

$$cond(\alpha\mathbf{W}_M) = cond(\mathbf{W}_M)$$

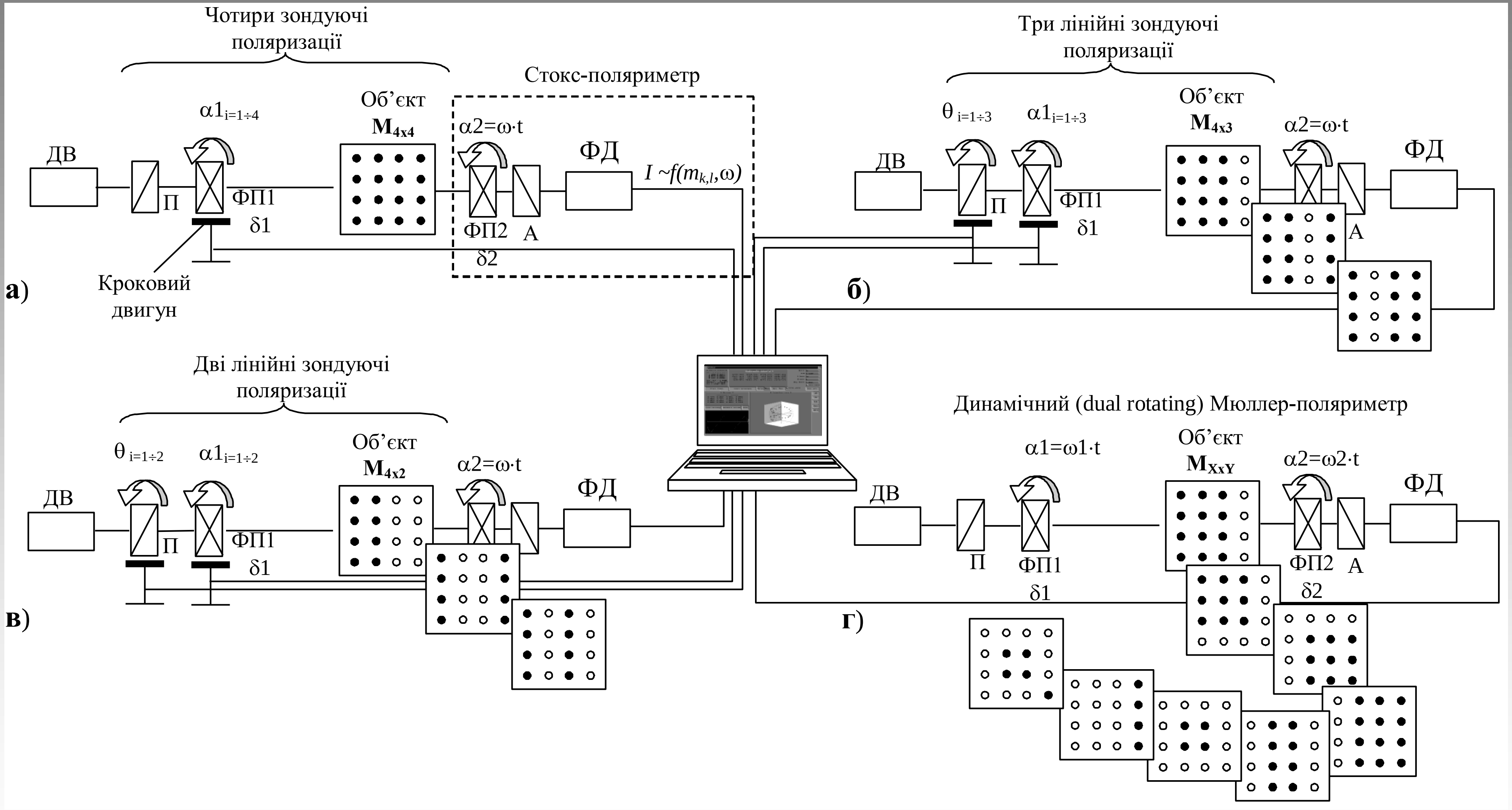
$$cond(\mathbf{I}) = 1$$

якщо

$$\delta S = \frac{\left\|\mathbf{S}_{табл} - \mathbf{S}_{експ}\right\|}{\left\|\mathbf{S}_{табл}\right\|}, \qquad \delta M = \frac{\left\|\mathbf{M}_{табл} - \mathbf{M}_{експ}\right\|}{\left\|\mathbf{M}_{табл}\right\|}$$

$$\delta M \leq \frac{2cond(\mathbf{W}_M)\delta S}{1 - cond(\mathbf{W}_M)\delta S} \longrightarrow cond(\mathbf{W}_M) \rightarrow \delta M \rightarrow \min$$

Адаптивний Мюллер-поляриметр



Адаптивний Мюллер-поляриметр