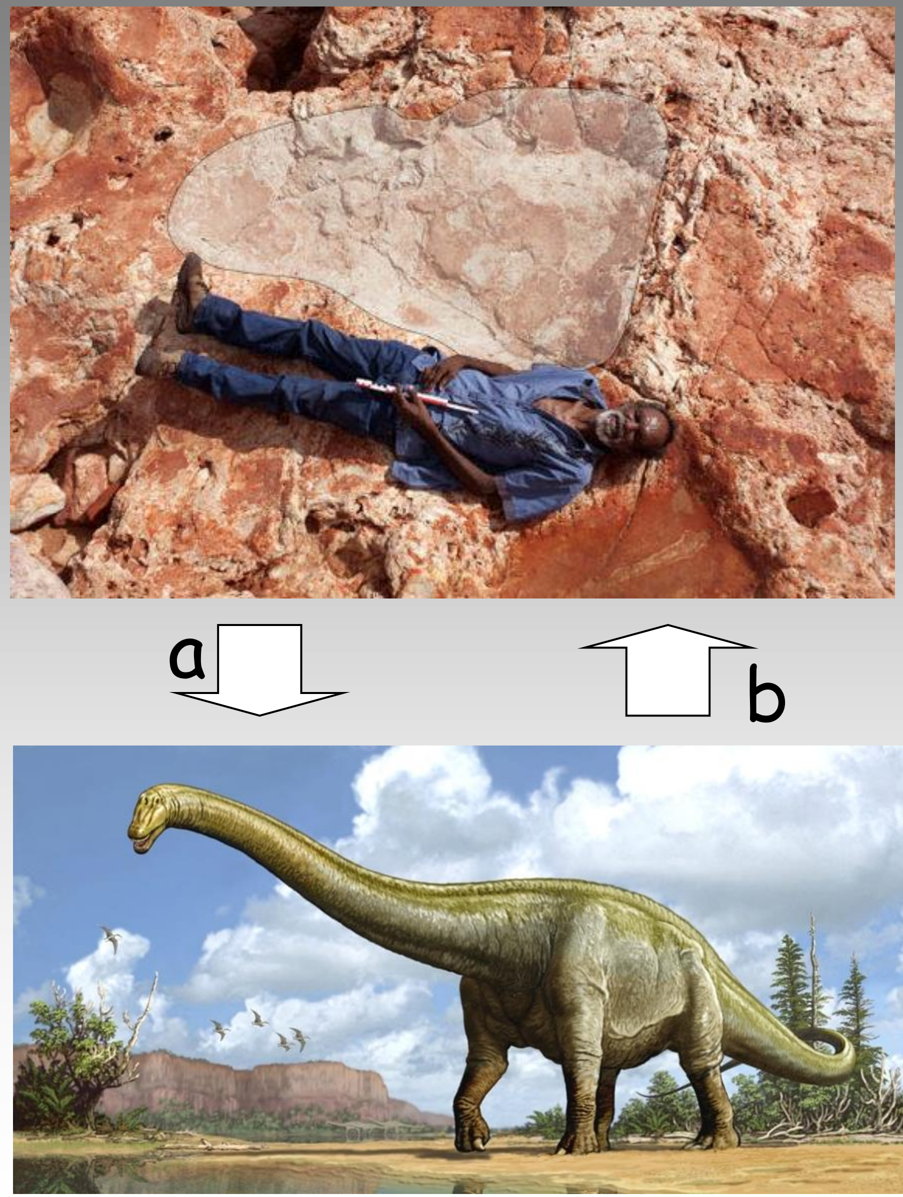
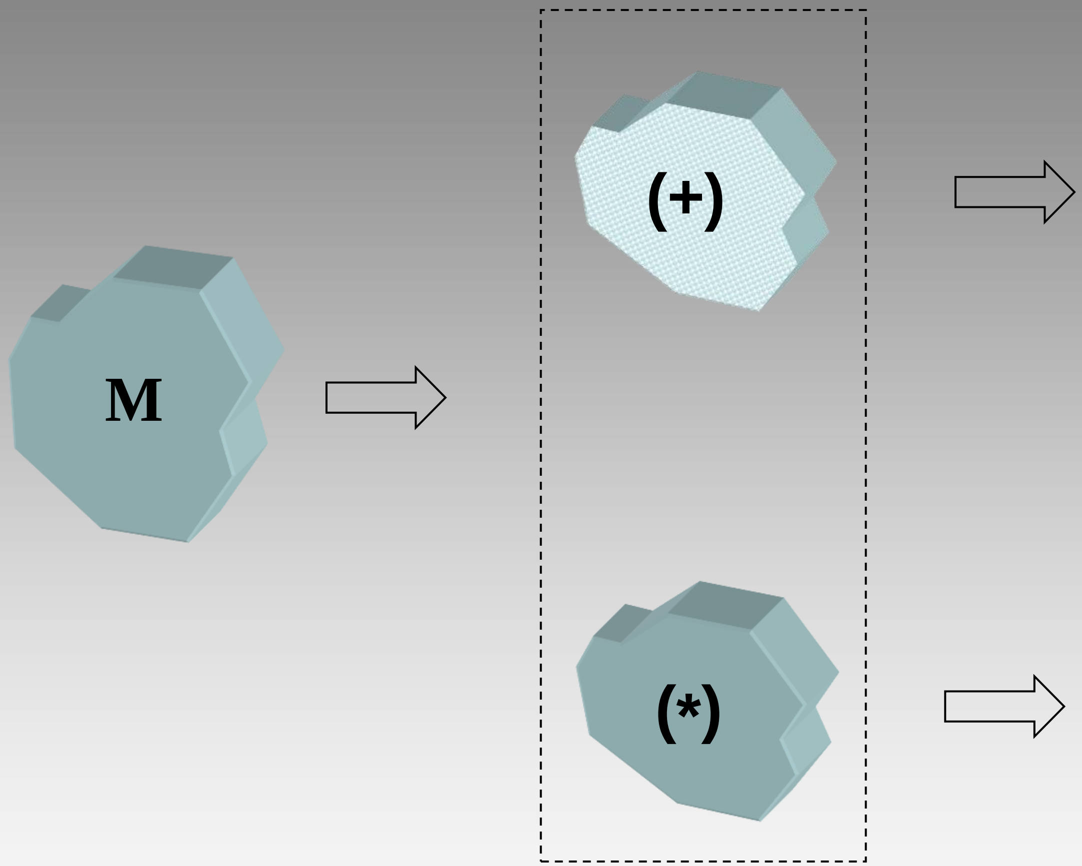
Обернена задача (radar) поляриметрії

Обернена задача (a) і пряма задача (b)



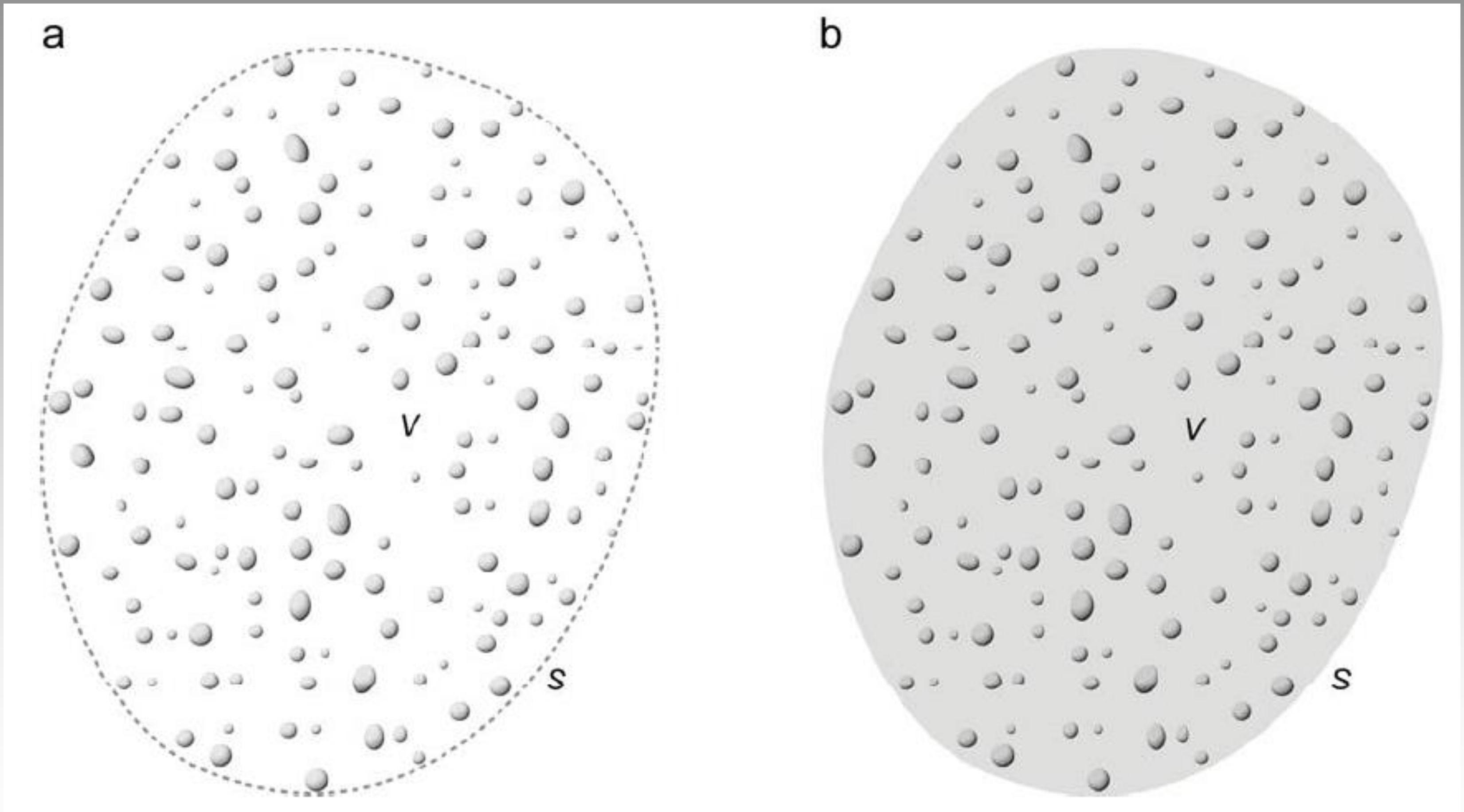
Модель об'єкта (середовища)



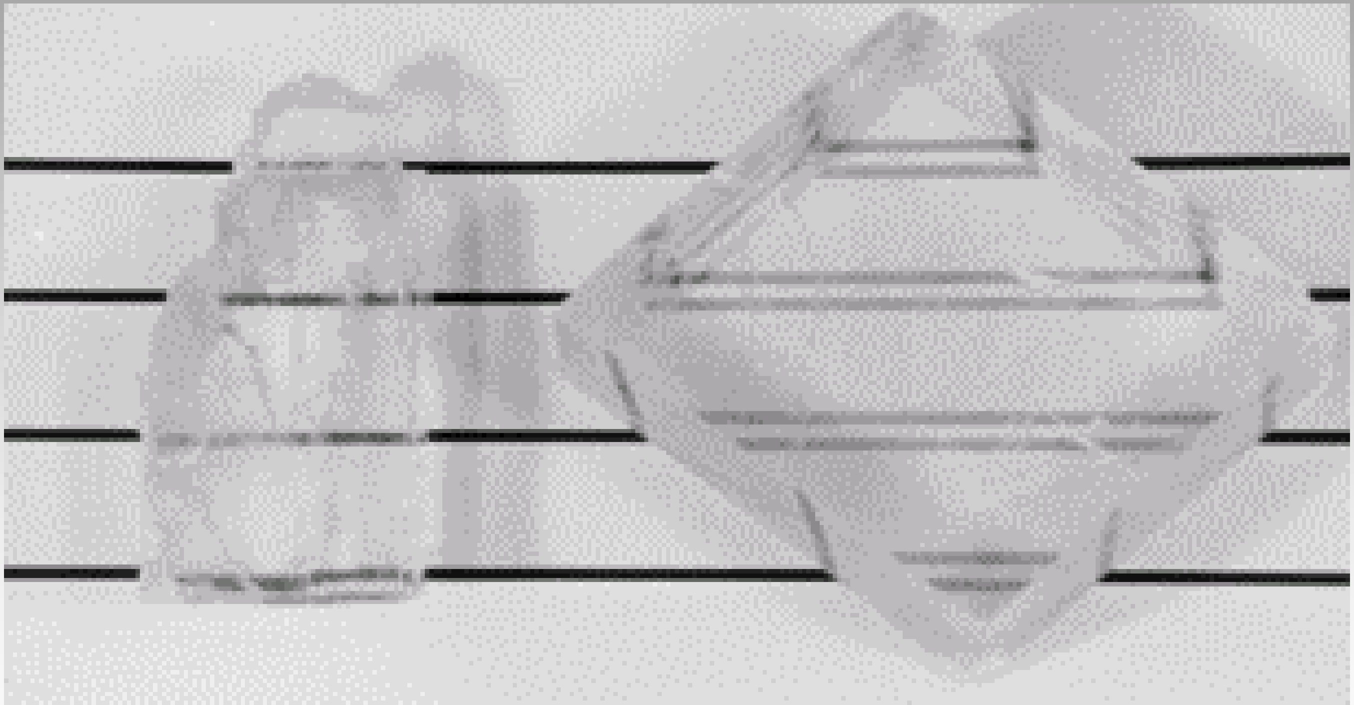
Наближення дискретного середовища

Наближення суцільного середовища

Дискретне середовище

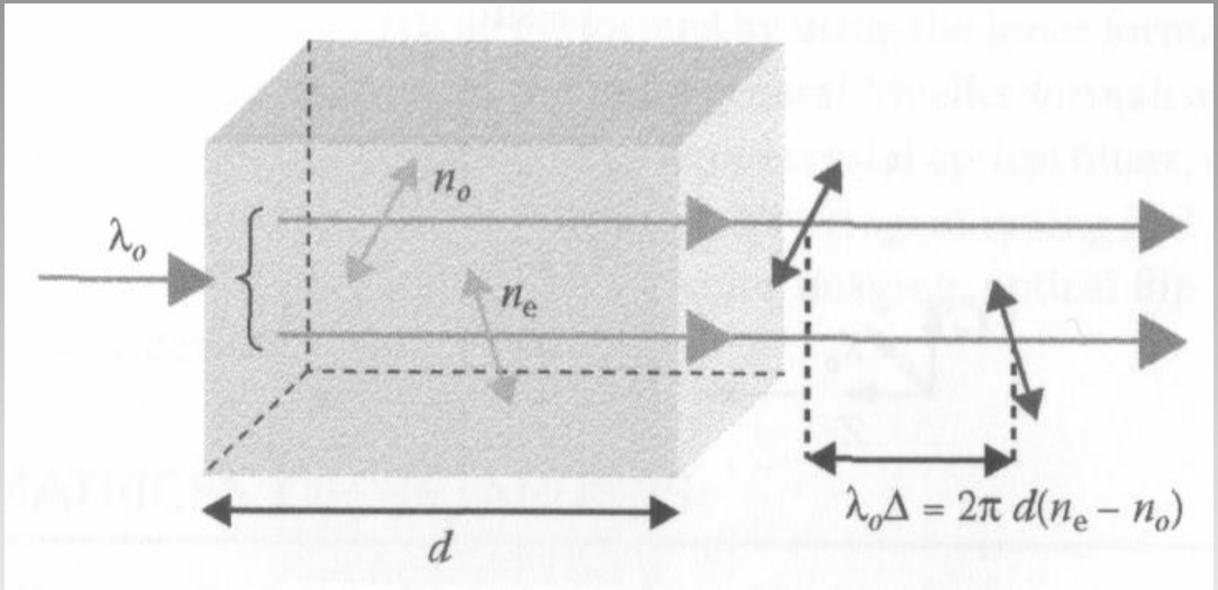


Суцільне середовище



Елементарні ефекти (механізми)

Фазова анізотропія



$$\mathbf{T}^{CP}(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & \sin(\varphi)\\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix}$$

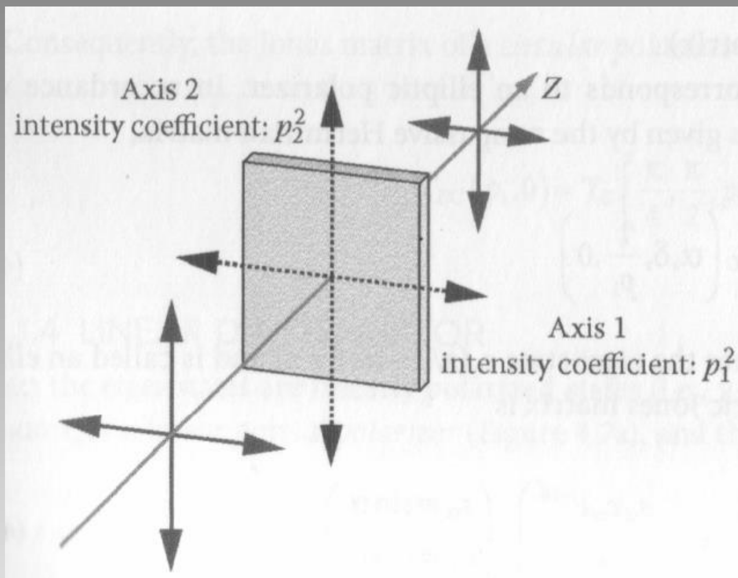
$$\mathbf{M}^{CP}(\varphi)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) & 0\\ 0 & -\sin(2\varphi) & \cos(2\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{LP}(\delta,\alpha)=\begin{pmatrix}\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)\exp(-i\delta) & \cos(\alpha)\sin(\alpha)(1-\exp(-i\delta))\\ \cos(\alpha)\sin(\alpha)(1-\exp(-i\delta)) & \sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)\exp(-i\delta)\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{LP}(\delta,\alpha)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos^2(2\alpha)+\sin^2(2\alpha)\cos(\delta) & \cos(2\alpha)\sin(2\alpha)(1-\cos(\delta)) & -\sin(2\alpha)\sin(\delta)\\ 0 & \cos(2\alpha)\sin(2\alpha)(1-\cos(\delta)) & \sin^2(2\alpha)+\cos^2(2\alpha)\cos(\delta) & \cos(2\alpha)\sin(\delta)\\ 0 & \sin(2\alpha)\sin(\delta) & -\cos(2\alpha)\sin(\delta) & \cos(\delta)\end{pmatrix}$$

Елементарні ефекти (механізми)

Амплітудна анізотропія



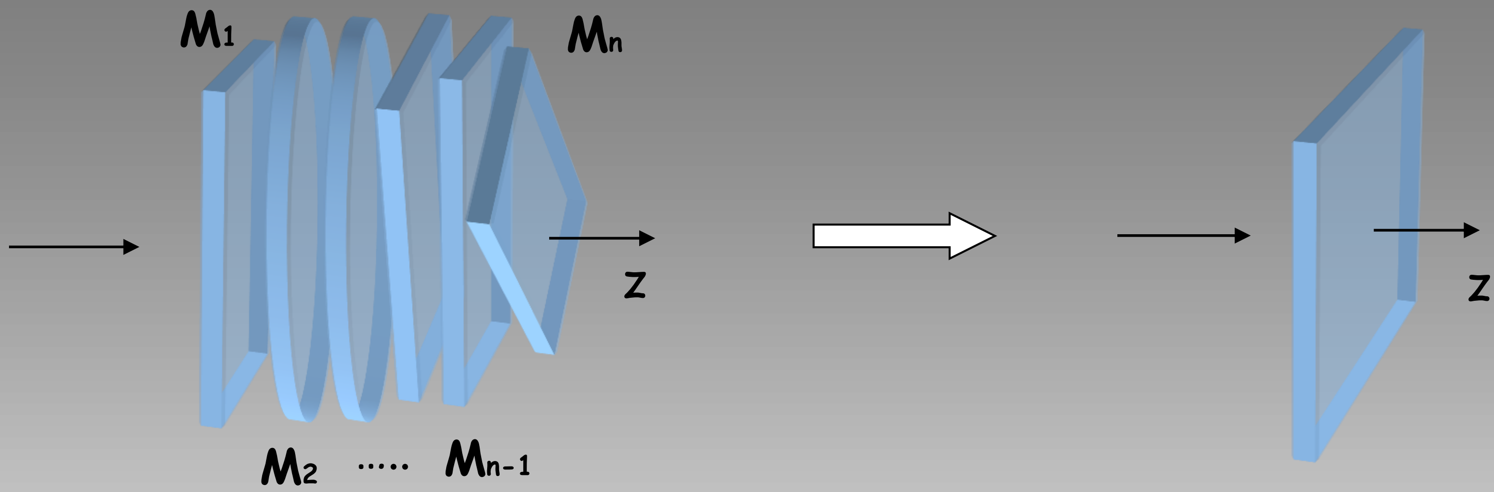
$$\mathbf{T}^{CA}(R)=\begin{pmatrix} 1 & -iR \\ iR & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{CA}(R)=\begin{pmatrix} 1+R^2 & 0 & 0 & 2R \\ 0 & 1-R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-R^2 & 0 \\ 2R & 0 & 0 & 1+R^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{LA}(P,\theta)=\begin{pmatrix} \cos^2(\theta)+P\sin^2(\theta) & (1-P)\cos(\theta)\sin(\theta) \\ (1-P)\cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta)+P\cos^2(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{LA}(P,\theta)=\begin{pmatrix} 1+P & (1-P)\cos(2\theta) & (1-P)\sin(2\theta) & 0 \\ (1-P)\cos(2\theta) & \cos^2(2\theta)(1+P)+2\sin^2(2\theta)\sqrt{P} & \cos(2\theta)\sin(2\theta)(1-\sqrt{P})^2 & 0 \\ (1-P)\sin(2\theta) & \cos(2\theta)\sin(2\theta)(1-\sqrt{P})^2 & \sin^2(2\theta)(1+P)+2\cos^2(2\theta)\sqrt{P} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{P} \end{pmatrix},$$

Добуток матриць

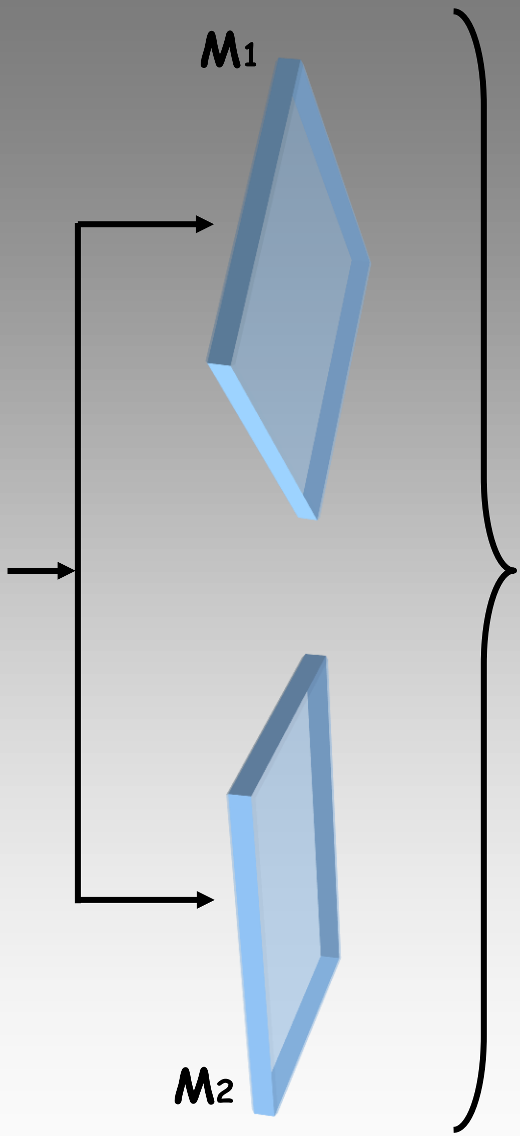


$M = M_n \ldots M_2 M_1$

$M_1 M_2 \neq M_2 M_1$!

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{J}_H^{LA} &= \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{J}_{\pi/2}^{CP} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \mathbf{J}_{\pi/2}^{CP}\,\mathbf{J}_H^{LA} = \begin{pmatrix} 0 & r_2 \\ -r_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{J}_H^{LA}\,\mathbf{J}_{\pi/2}^{CP} = \begin{pmatrix} 0 & r_1 \\ -r_2 & 0 \end{pmatrix}$$

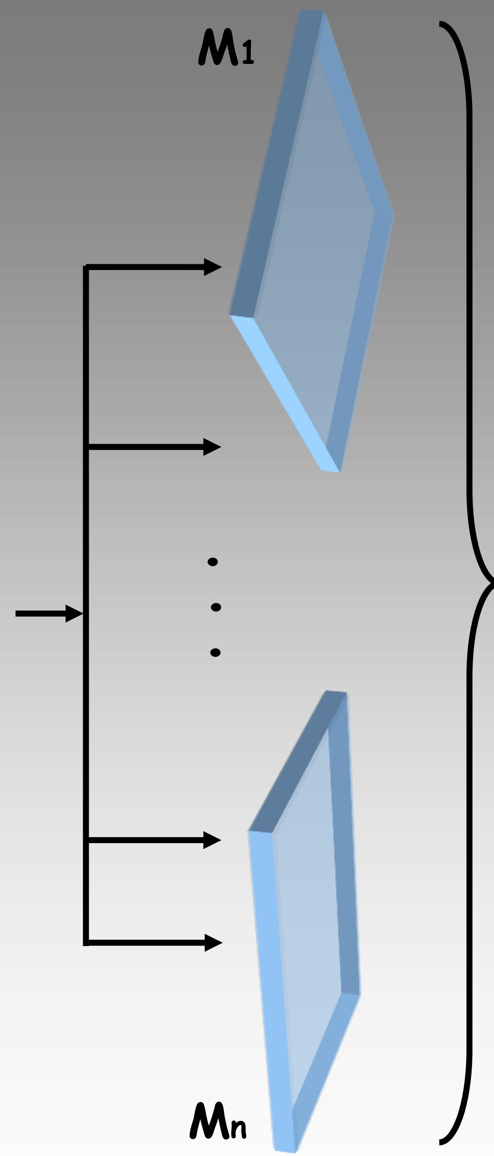
Сума матриць



$M_1 + M_2$

$pM_1 + (1-p)M_2$

$0 \le p \le 1$



$$\mathbf{M} = \sum_{1}^{n} p_i \mathbf{M}_i$$

$$\left(\sum_{1}^{n} p_i = 1 \right)$$

Особливості розв'язку оберненої задачі

1. Загальність
2. Однозначність
3. Трансцендентність
4. Стійкість

Спектральна задача та спектральне розкладення

$$\mathbf{T}\mathbf{E_{e1}} = V_1 \mathbf{E_{e1}}$$

$$\mathbf{T}\mathbf{E_{e2}} = V_2 \mathbf{E_{e2}}$$

$$V_{1,2} = \exp(\pm i\delta)$$

$$V_{1,2} = \exp(\pm a)$$

$$V_1 = V_2$$

$$\mathbf{E}_e = \begin{pmatrix} 1 \\ \chi_e \end{pmatrix}; \quad \chi_e = \frac{|E_{ey}|}{|E_{ex}|} \exp i(\eta_x - \eta_y)$$

Власні поляризації

$$\chi_{e1,2} = \frac{1}{2T_{12}} \{(T_{22} - T_{11}) \pm [(T_{22} - T_{11})^2 + 4T_{12}T_{21}]^{1/2}\}.$$

Власні значення

$$V_{e1,2} = \frac{1}{2} \{(T_{22} + T_{11}) \pm [(T_{22} - T_{11})^2 + 4T_{12}T_{21}]^{1/2}\},$$

Спектральне розкладення

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}\mathbf{T}_{\mathbf{eigen}}\mathbf{F}^{\mathbf{-1}}$$

$$\mathbf{T} = \frac{-1}{\chi_{e1} - \chi_{e2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \chi_{e1} & \chi_{e2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{e2} & -1 \\ -\chi_{e1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$t_{11} = \frac{1}{\chi_{e1} - \chi_{e2}} \left(V_2 \chi_{e1} - V_1 \chi_{e2} \right)$$

$$t_{12} = \frac{1}{\chi_{e1} - \chi_{e2}} \left(V_1 - V_2 \right)$$

$$t_{21} = -\frac{\chi_{e1}\chi_{e2}}{\chi_{e1} - \chi_{e2}} \left(V_1 - V_2 \right)$$

$$t_{22} = \frac{1}{\chi_{e1} - \chi_{e2}} \left(V_1 \chi_{e1} - V_2 \chi_{e2} \right)$$

Загальна класифікація середовищ на основі спектрального розкладення

1.Еліптично двопроменезаломлююче середовище.

Ортогональні власні поляризації

$$\chi_{e1}\chi_{e2}^{*} = -1$$

Уявні власні числа

$$V_{e1} = \exp(i\delta/2) \quad V_{e1} = \exp(-i\delta/2)$$

$$V_{e1} = V_{e2}^{*} \qquad V_{e1}V_{e2} = 1$$

Матриця Джонса

$$\mathbf{T} = \left(1 + \chi_{e1}\chi_{e2}^{*}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \left(\exp(i\delta/2) + \chi_{e1}\chi_{e2}^{*}\exp(-i\delta/2)\right) & 2i\chi_{e2}^{*}\sin(\delta/2) \\ 2i\chi_{e1}\sin(\delta/2) & \left(\chi_{e1}\chi_{e2}^{*}\exp(i\delta/2) + \exp(-i\delta/2)\right) \end{pmatrix}$$

$$t_{11} = t_{22}^{*} \qquad t_{12} = -t_{21}^{*} \qquad \det(\mathbf{T}) = 1$$

$$\mathbf{T}_{\ddot{a}\mathring{a}\hat{e}} = \begin{pmatrix} \left(\cos(\theta)^2\exp(i\delta/2) + \sin(\theta)^2\exp(-i\delta/2)\right) & 2i\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\delta/2) \\ 2i\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\delta/2) & \left(\sin(\theta)^2\exp(i\delta/2) + \cos(\theta)^2\exp(-i\delta/2)\right) \end{pmatrix}$$

Загальна класифікація середовищ на основі спектрального розкладення

2.Еліптично дихроїчне середовище.

Ортогональні власні поляризації

$$\chi_{e1}\chi_{e2}^{*} = -1$$

Дійсні власні числа

$$V_{e1} = \exp(\alpha/2) \qquad V_{e1} = \exp(-\alpha/2)$$

$$V_{e1}V_{e2} = 1$$

Матриця Джонса

$$\mathbf{T} = \left(1 + \chi_{e1}\chi_{e1}^{*}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \left(\exp(\alpha/2) + \chi_{e1}\chi_{e1}^{*}\exp(-\alpha/2)\right) & 2\chi_{e1}^{*} sh(\alpha/2) \\ 2\chi_{e1} sh(\alpha/2) & \left(\chi_{e1}\chi_{e1}^{*}\exp(\alpha/2) + \exp(-\alpha/2)\right) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{\ddot{a}\mathring{a}\hat{e}} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\alpha/2) & ish(\alpha/2) \\ -ish(\alpha/2) & \mathrm{ch}(\alpha/2) \end{pmatrix}$$

Загальна класифікація середовищ на основі спектрального розкладення

3.Еліптично сингулярне середовище (ідеальний поляризатор).

Ортогональні власні поляризації

$$\chi_{e1}\chi_{e2}^{*} = -1$$

Дійсні власні числа

$$V_{e1} = 1 \qquad V_{e1} = 0$$

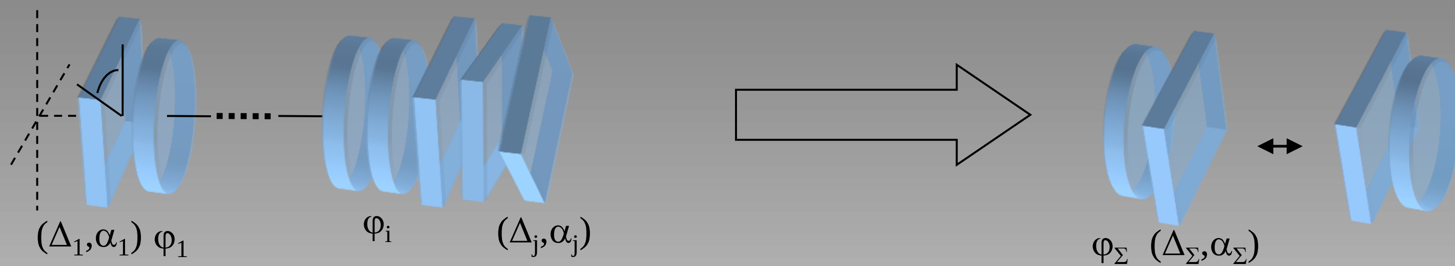
Матриця Джонса

$$\mathbf{T} = \left(1 + \chi_{e1}\chi_{e1}^{*}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \chi_{e1}^{*} \\ \chi_{e1} & \chi_{e1}\chi_{e1}^{*} \end{pmatrix}$$

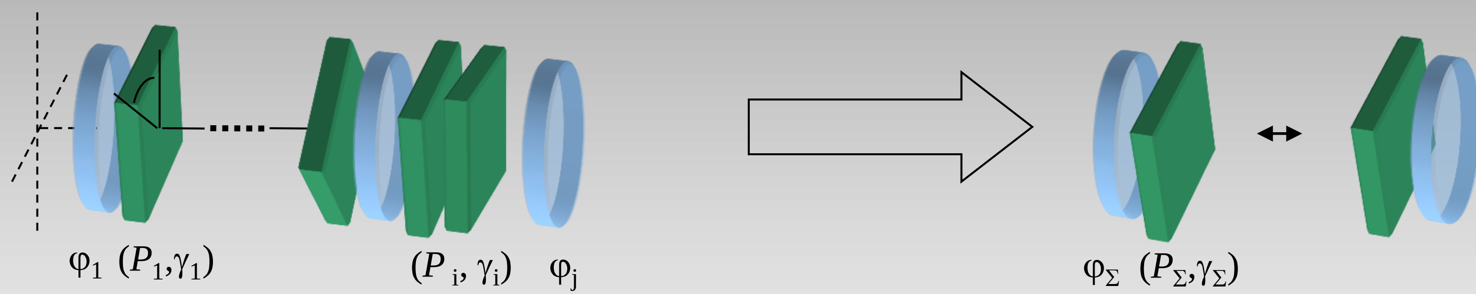
$$\det(\mathbf{T}) = 0$$

Теореми еквівалентності Джонса

Перша теорема

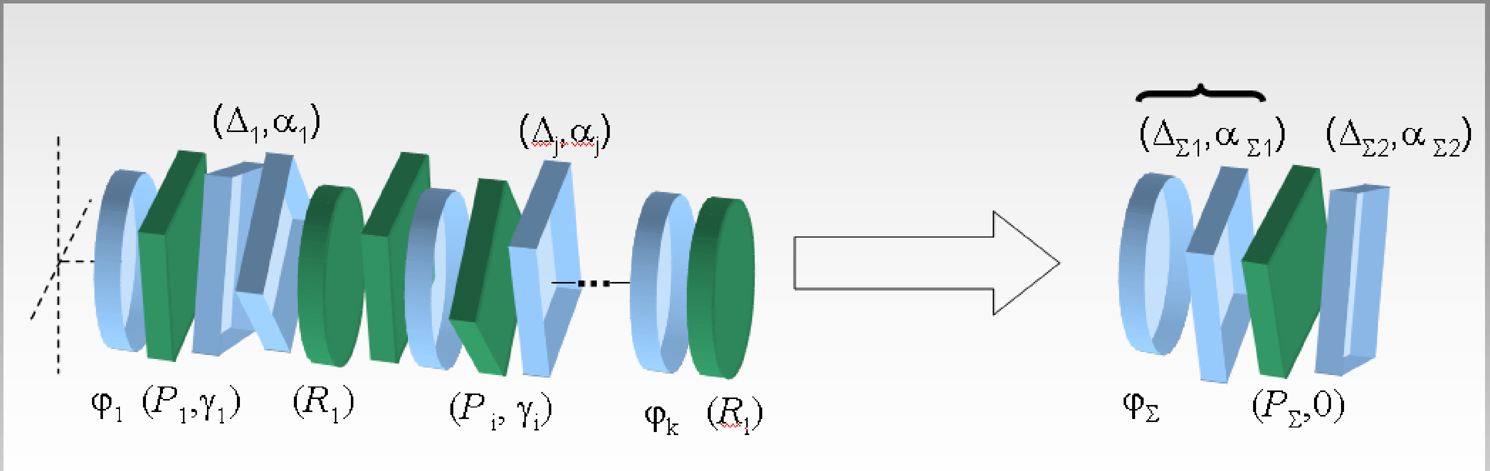


Друга теорема



Теореми еквівалентності Джонса

Третя теорема



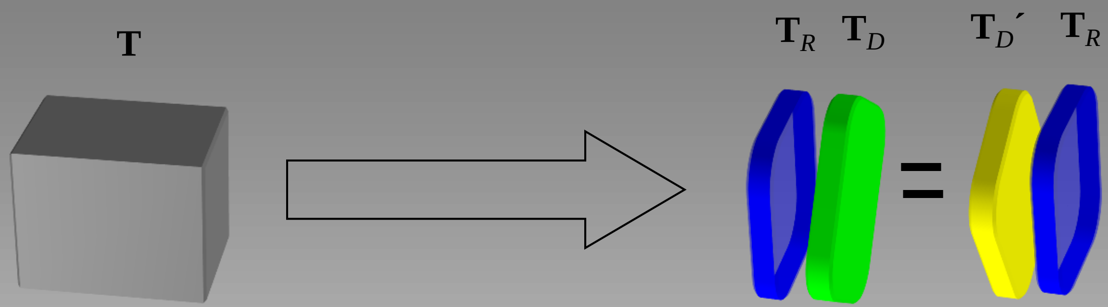
$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_U \mathbf{T}_D \mathbf{T}_V \qquad \mathbf{T}_D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}\mathbf{v} = \sigma \mathbf{u} \qquad \mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{T}\mathbf{T}^{+}$$

$$\mathbf{T}^{+}\mathbf{u} = \sigma \mathbf{v} \qquad \mathbf{v} \longrightarrow \mathbf{T}^{+}\mathbf{T}$$

$$\mathbf{T}_{U/V} = \mathbf{T}^{CP_{U/V}} \mathbf{T}^{LP_{U/V}}$$

Полярне розкладення



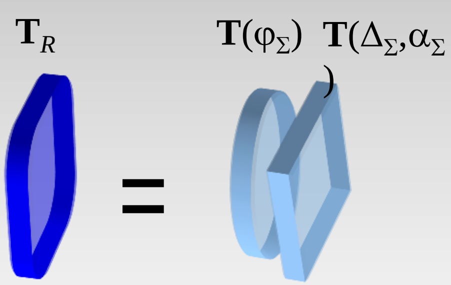
$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_D \mathbf{T}_R = \mathbf{T}_R^{'} \mathbf{T}_D^{'}$$

якщо: 1. $\mathbf{T}$ - норм.

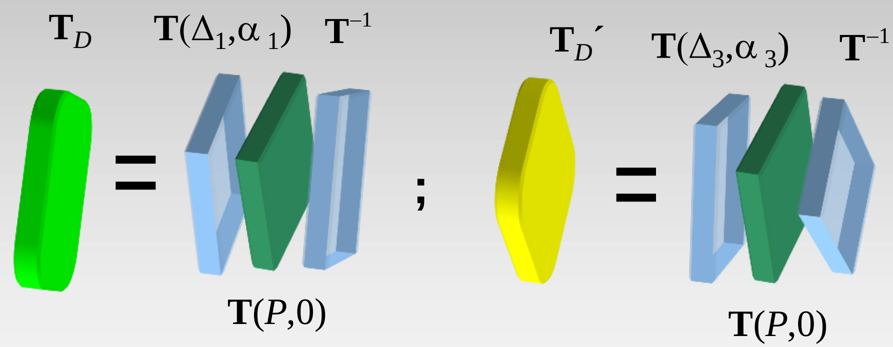
$$\mathbf{T}_D = \mathbf{T}_D^{'}$$
$$\mathbf{T}_R = \mathbf{T}_R^{'}$$

2. $\det(\mathbf{T}) \neq 0$

$$\mathbf{T}_R = \mathbf{T}_R^{'}$$
$$\mathbf{T}_D = \sqrt{\mathbf{T}\mathbf{T}^{+}}$$



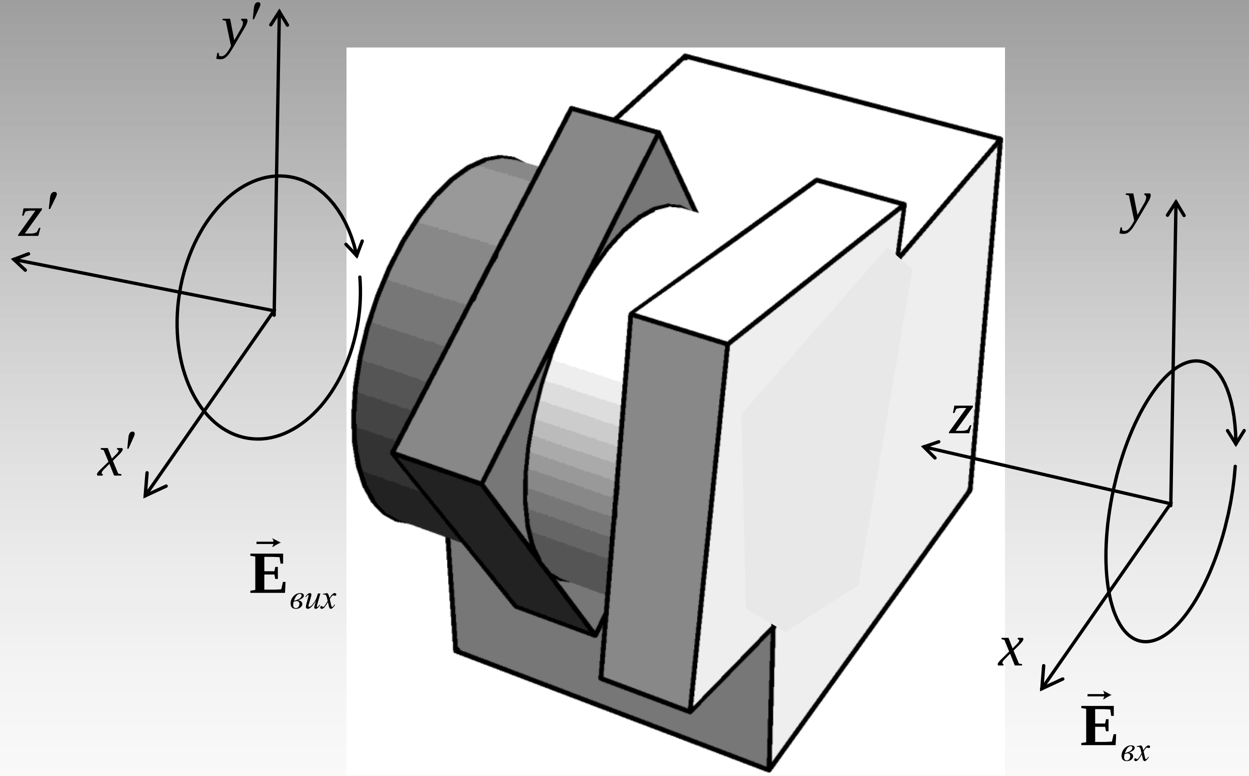
$\mathbf{T}_R$ - унітарна полярна форма



$\mathbf{T}_D \neq \mathbf{T}_D^{'}$ - ермітова полярна форма

ортогональні власні поляризації

Узагальнена теорема еквівалентності

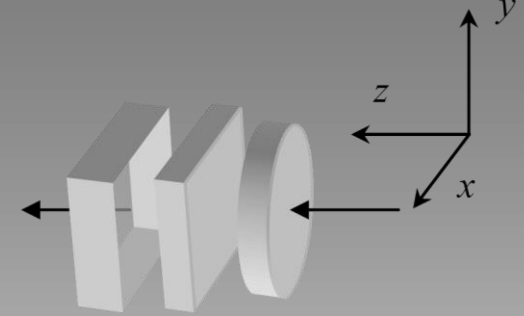


Однозначність розв'язку оберненої задачі

$$\mathbf{T}^{CP}\,\mathbf{T}^{LP}\,\mathbf{T}^{LA}\,\mathbf{T}^{CA}$$

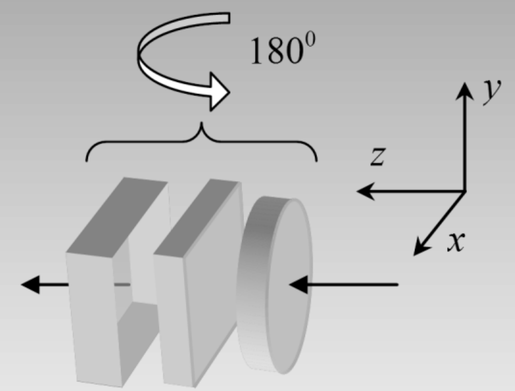
$$\mathbf{T}^{CA}\,\mathbf{T}^{LA}\,\mathbf{T}^{LP}\,\mathbf{T}^{CP}$$

$$\underbrace{\varphi\;(\delta,\alpha)\;(P,\theta)\;R}$$



$$\mathbf{T}^{CP}\,\mathbf{T}^{LP}\,\mathbf{T}^{CA}\,\mathbf{T}^{LA}$$

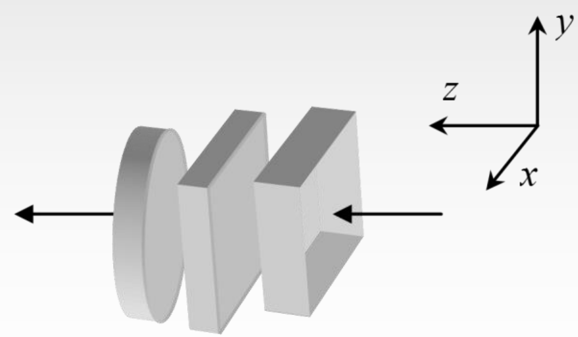
$$\mathbf{T}^{LA}\,\mathbf{T}^{CA}\,\mathbf{T}^{LP}\,\mathbf{T}^{CP}$$



$$\mathbf{T}^{CA}\,\mathbf{T}^{LP}\,\mathbf{T}^{CP}\,\mathbf{T}^{LA}$$

$$\mathbf{T}^{LA}\,\mathbf{T}^{CP}\,\mathbf{T}^{LP}\,\mathbf{T}^{CA}$$

$$\overbrace{R\;(P,-\theta)\;(\delta,-\alpha)\;\varphi}$$



Матрична модель довільного однорідного анізотропного середовища

Поляризаційний базис: $\mathbf{T}^{CP}\,\mathbf{T}^{LP}\,\mathbf{T}^{CA}\,\mathbf{T}^{LA}$

$$t_{11}=\left[s_\varphi c_\alpha s_\alpha\left(1-\exp\left(-i\delta\right)\right)+c_\varphi\left(c_\alpha^2+s_\alpha^2\exp\left(-i\delta\right)\right)\right]\left[c_\theta^2+s_\theta^2P-iRc_\theta s_\theta\left(1-P\right)\right]+$$
$$+\left[s_\varphi\left(s_\alpha^2+c_\alpha^2\exp\left(-i\delta\right)\right)+c_\varphi c_\alpha s_\alpha\left(1-\exp\left(-i\delta\right)\right)\right]\left[c_\theta s_\theta\left(1-P\right)+iR\left(c_\theta^2+s_\theta^2P\right)\right],$$

$$t_{21}=\left[c_\varphi c_\alpha s_\alpha\left(1-\exp\left(-i\delta\right)\right)+s_\varphi\left(c_\alpha^2+s_\alpha^2\exp\left(-i\delta\right)\right)\right]\left[c_\theta^2+s_\theta^2P-iRc_\theta s_\theta\left(1-P\right)\right]+$$
$$+\left[c_\varphi\left(s_\alpha^2+c_\alpha^2\exp\left(-i\delta\right)\right)+s_\varphi c_\alpha s_\alpha\left(1-\exp\left(-i\delta\right)\right)\right]\left[c_\theta s_\theta\left(1-P\right)+iR\left(c_\theta^2+s_\theta^2P\right)\right],$$

$$t_{12}=\left[s_\varphi c_\alpha s_\alpha\left(1-\exp\left(-i\delta\right)\right)-c_\varphi\left(c_\alpha^2+s_\alpha^2\exp\left(-i\delta\right)\right)\right]\left[c_\theta s_\theta\left(1-P\right)-iR\left(s_\theta^2+c_\theta^2P\right)\right]+$$
$$+\left[s_\varphi\left(s_\alpha^2+c_\alpha^2\exp\left(-i\delta\right)\right)-c_\varphi c_\alpha s_\alpha(1-\exp\left(-i\delta\right))\right]\left[s_\theta^2+c_\theta^2P+iRc_\theta s_\theta(1-P)\right],$$

$$t_{22}=\left[c_\varphi c_\alpha s_\alpha\left(1-\exp\left(-i\delta\right)\right)-s_\varphi\left(c_\alpha^2+s_\alpha^2\exp\left(-i\delta\right)\right)\right]\left[c_\theta s_\theta(1-P)-iR\left(s_\theta^2+c_\theta^2P\right)\right]+$$
$$+\left[c_\varphi\left(s_\alpha^2+c_\alpha^2\exp\left(-i\delta\right)\right)-s_\varphi c_\alpha s_\alpha(1-\exp\left(-i\delta\right))\right]\left[s_\theta^2+c_\theta^2P+iRc_\theta s_\theta(1-P)\right],$$

де $s_\varphi=\sin(\varphi)$ $s_\alpha=\sin(\alpha)$ $s_\theta=\sin(\theta)$

$c_\varphi=\cos(\varphi)$ $c_\alpha=\cos(\alpha)$ $c_\theta=\cos(\theta)$

Матрична модель середовища, власні числа якого є фазовими множниками

Вихідна умова

$$\frac{I_o}{I_i} = const$$

всі поляризації $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} t_{11}t_{12}^{*} + t_{21}t_{22}^{*} = 0 \\ \left|t_{12}\right|^{2} + \left|t_{22}\right|^{2} = const \\ \left|t_{11}\right|^{2} + \left|t_{21}\right|^{2} = const \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{V_1}{V_2}\right| = 1 \\ \chi_{e1}\chi_{e2}^{*} = -1 \end{cases}$$

власні поляризації $\Longrightarrow$

$$\left\{ \left|\frac{V_1}{V_2}\right| = 1 \right.$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \exp\left(i\dfrac{\phi}{2}\right) + \left|\chi_e\right|^2 \exp\left(-i\dfrac{\phi}{2}\right) & \left|\chi_e\right|\left[\exp\left(i\dfrac{\phi}{2}\right) - \exp\left(-i\dfrac{\phi}{2}\right)\right]\exp(-i\psi) \\ \left|\chi_e\right|\left[\exp\left(i\dfrac{\phi}{2}\right) - \exp\left(-i\dfrac{\phi}{2}\right)\right]\exp(i\psi) & \left|\chi_e\right|^2 \exp\left(i\dfrac{\phi}{2}\right) + \exp\left(-i\dfrac{\phi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \frac{|V|\exp(i\phi/2)}{\chi_{e1} - \chi_{e2}} \begin{pmatrix} \left(\chi_{e1} - \exp(i\phi)\chi_{e2}\right) & \left(\exp(i\phi) - 1\right) \\ -\left(\exp(i\phi) - 1\right)\chi_{e1}\chi_{e2} & \left(\exp(i\phi)\chi_{e1} - \chi_{e2}\right) \end{pmatrix}$$

Матрична модель середовища, власні числа якого є амплітудними множниками

Вихідна умова

$$\frac{\chi_o}{\chi_o^*} = \frac{\chi_i}{\chi_i^*} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Im}\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = 0, \quad \mathrm{Re}\left(\frac{V_1}{V_2}\right) \geq 0$$

$$\mathbf{T} = \frac{\exp(i\phi)}{\chi_{e1} - \chi_{e2}} \begin{pmatrix} |B|\chi_{e1} - |A|\chi_{e2} & |A| - |B| \\ -\chi_{e1}\chi_{e2}\left(|A| - |B|\right) & |A|\chi_{e1} - |B|\chi_{e2} \end{pmatrix}$$

Випадок ортогональних власних поляризацій

$$\chi_{e1}\chi_{e2}^* = -1$$

$$\mathbf{T}^{\perp} = \frac{e^{i\varphi}}{|\chi_{e1}|^2 + 1} \begin{pmatrix} |B||\chi_{e1}|^2 + |A| & \left(|A| - |B|\right)\chi_{e1}^* \\ \left(|A| - |B|\right)\chi_{e1} & |A||\chi_{e1}|^2 + |B| \end{pmatrix}$$

Властивості середовищ, власні числа яких є фазовими, амплітудними і виродженими в термінах параметрів анізотропії

Середовищ, власні числа якого є фазовими множниками:

$$R(P+1)\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\sin(\varphi)-(P-1)\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\cos\left(\varphi-2(\alpha-\theta)\right)=0$$

$$\left((P+1)\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\cos(\varphi)+R(P-1)\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\sin\left(\varphi-2(\alpha-\theta)\right)\right)^2-4P\left(1-R^2\right)<0$$

Матрична модель середовища, власні числа якого є амплітудними множниками:

$$R(P+1)\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\sin(\varphi)-(P-1)\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\cos\left(\varphi-2(\alpha-\theta)\right)=0$$

$$\left((P+1)\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\cos(\varphi)+R(P-1)\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\sin\left(\varphi-2(\alpha-\theta)\right)\right)^2-4P\left(1-R^2\right)>0$$

!

Середовище, яке характеризується виродженою анізотропією:

$$R(P+1)\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\sin(\varphi)-(P-1)\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\cos\left(\varphi-2(\alpha-\theta)\right)=0$$

$$\left((P+1)\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\cos(\varphi)+R(P-1)\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\sin\left(\varphi-2(\alpha-\theta)\right)\right)^2-4P\left(1-R^2\right)=0$$