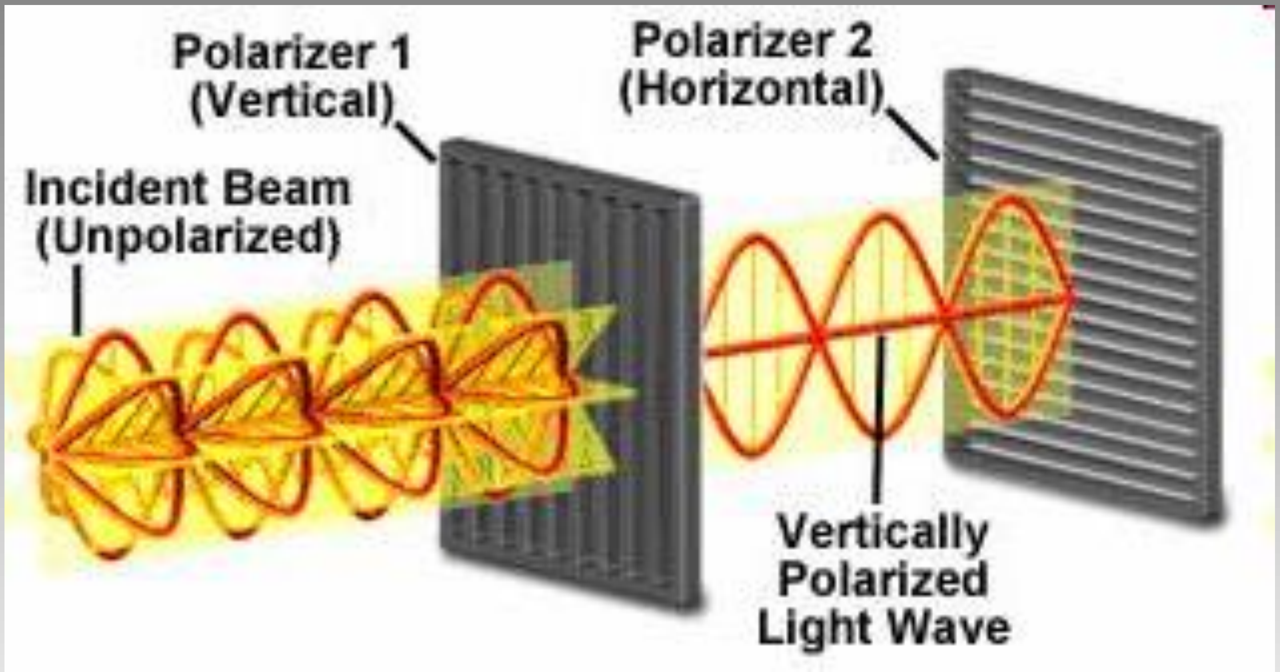
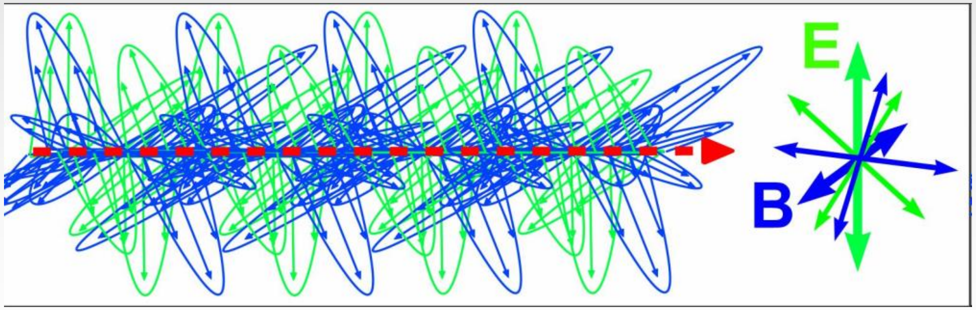
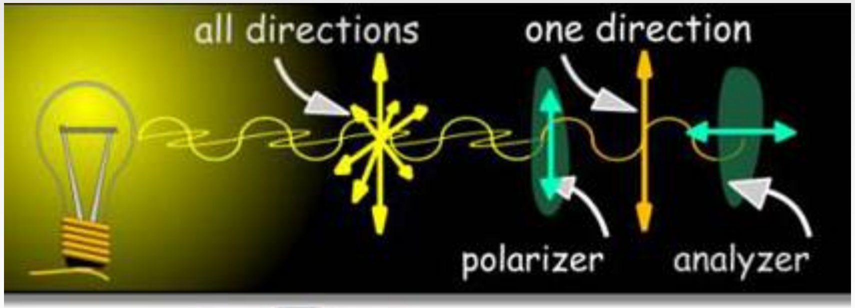
Поляризації електромагнітного випромінювання і її опис

Неполяризоване світло (природне світло)







Вектор Джонса (Максвелла)

$$\boldsymbol{E}(z,\ t)=\tilde{E}_x\cos(\omega t-kz+\delta_x)\,\boldsymbol{x}+\tilde{E}_y\cos(\omega t-kz+\delta_y)\,\boldsymbol{y},$$

$$\boldsymbol{E}(z,\ t)=\left|\begin{matrix}\hat{E}_x\exp(\omega t-kz+\delta_x)\\ \hat{E}_y\exp(\omega t-kz+\delta_y)\end{matrix}\right|=$$

$$=\exp(i\omega t)\exp(-ikz)\left|\begin{matrix}E_x\\ E_y\end{matrix}\right|.$$

Обмежившись описом стаціонарних процесів, відкидаємо часовий множник) - отримуємо вектор Джонса (Максвелла)

Вектор Джонса (Максвелла)

$$\begin{vmatrix} E_x \exp i\delta_x \\ E_y \exp i\delta_y \end{vmatrix}.$$

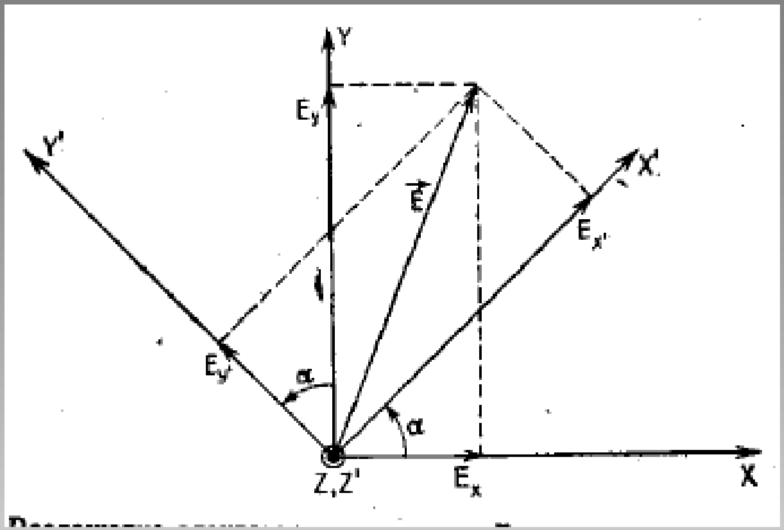
$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = Ae^{j\delta} \begin{bmatrix} (\cos\theta\cos\varepsilon - j\sin\theta\sin\varepsilon) \\ (\sin\theta\cos\varepsilon + j\cos\theta\sin\varepsilon) \end{bmatrix}$$

$$I = \mathbf{E}^* \mathbf{E}$$

$$E_x = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad E_y = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix},$$

$$E_{\text{пр}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 \\ i \end{vmatrix}.$$

Перетворення векторів Джонса при повороті системи координат



$$E_{x'} = (\cos\alpha)\,E_x + (\sin\alpha)\,E_y,$$
$$E_{y'} = (-\sin\alpha)\,E_x + (\cos\alpha)\,E_y.$$

Опис повороту в матричній формі

$$\begin{bmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{E}_{x',\,y'} = \mathbf{R}(\alpha)\,\mathbf{E}_{x,\,y},$$

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

R(α) – матриця повороту, що має властивості:

$$\mathbf{R}^{-1}(\alpha) = \mathbf{R}^{\dagger}(\alpha) = \mathbf{R}(-\alpha),$$
$$\mathbf{R}(\alpha_1)\,\mathbf{R}(\alpha_2) = \mathbf{R}(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Інваріантність інтенсивності електромагнітного випромінювання при унітарних перетвореннях

$$I_{x',y'} = \mathbf{E}^{\dagger}_{x',y'}\mathbf{E}_{x',y'}.$$

$$\begin{aligned}
I_{x',y'} &= [\mathbf{R}(\alpha)\,\mathbf{E}_{x,y}]^{\dagger}\,[\mathbf{R}(\alpha)\,\mathbf{E}_{x,y}] = \\
&= \mathbf{E}^{\dagger}_{x,y}\mathbf{R}^{\dagger}(\alpha)\,\mathbf{R}(\alpha)\,\mathbf{E}_{x,y} = \\
&= \mathbf{E}^{\dagger}_{x,y}\mathbf{E}_{x,y} = \\
&= I_{x,y}.
\end{aligned}$$

Представлення поляризаційних станів комплексними числами

У випадках, коли інформація про амплітуду та фазу еліптичного коливання електричного вектора є неважливою, можна використовувати ще більш компактне представлення стану поляризації випромінювання

$$\chi = E_y / E_x.$$

$$\chi = \frac{|E_y|}{|E_x|} e^{j(\delta_y - \delta_x)},$$

$$|\chi| = |E_y| / |E_x|, \qquad \arg(\chi) = \delta_y - \delta_x.$$

$$\chi = \frac{\operatorname{tg}\theta + j \operatorname{tg}\varepsilon}{1 - j \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\varepsilon}$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\operatorname{Re}(\chi)}{1 - |\chi|^2},$$

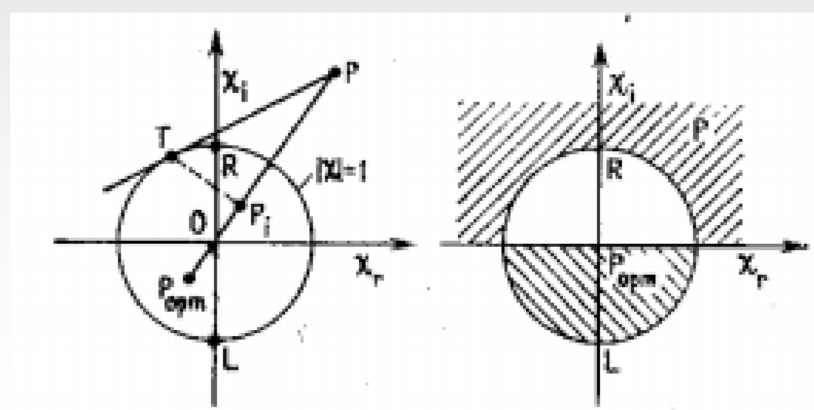
$$\sin 2\varepsilon = \frac{2\operatorname{Im}(\chi)}{1 + |\chi|^2},$$

Для ортогональних станів поляризації

$$\chi_{\text{орт}} = -\frac{1 + j \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\theta - j \operatorname{tg}\varepsilon}.$$

$$\chi \chi^*_{\text{орт}} = \chi^* \chi_{\text{орт}} = -1.$$

$$\chi_{\text{орт}} = -\frac{1}{\chi^*} = -\frac{\chi}{|\chi|^2}. \rightarrow \mathbf{E}^{\dagger}_{\text{орт}}\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\dagger}\mathbf{E}_{\text{орт}} = 0,$$



Представлення поляризованого світла точками на циркулярній комплексній площині

$$\chi = E_r / E_l.$$

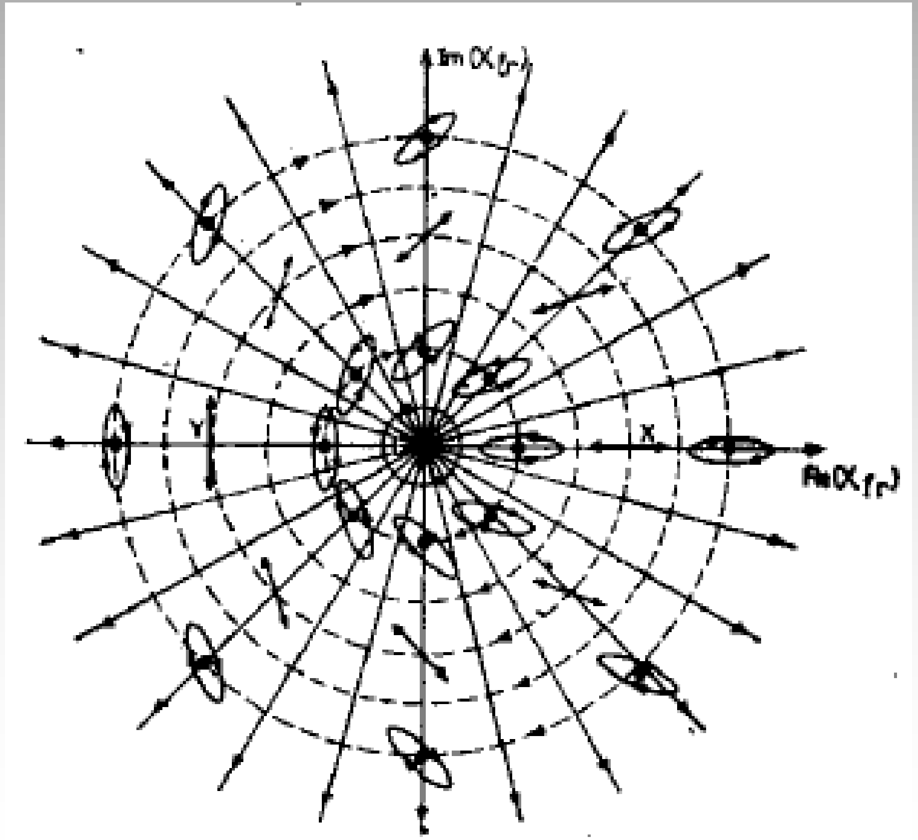
$$\chi = \frac{|E_r|}{|E_l|} e^{j(\delta_r - \delta_l)},$$

$$|\chi| = |E_r| / |E_l|, \qquad \arg(\chi) = \delta_r - \delta_l.$$

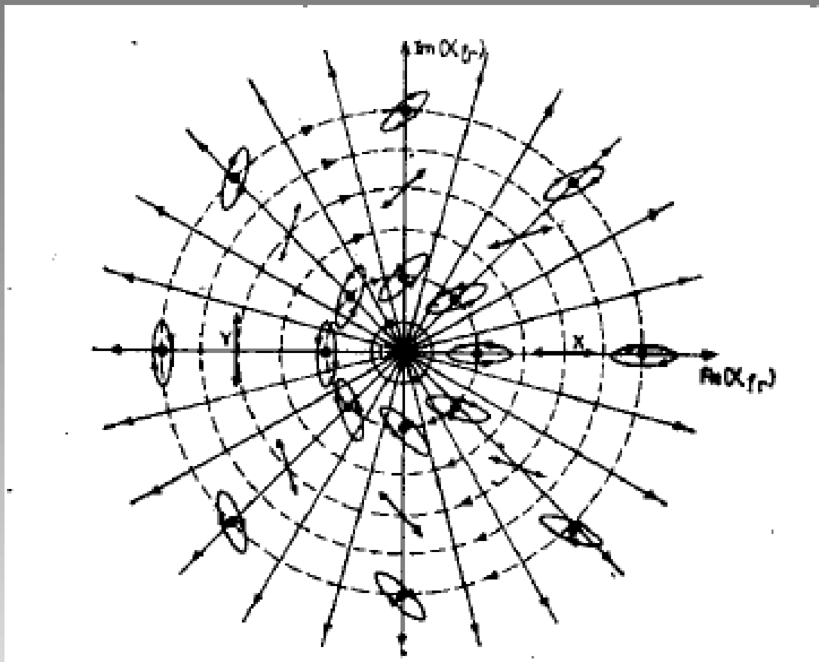
$$\chi = \mathrm{tg}\left(e + \frac{\pi}{4}\right) e^{-j2\theta}.$$

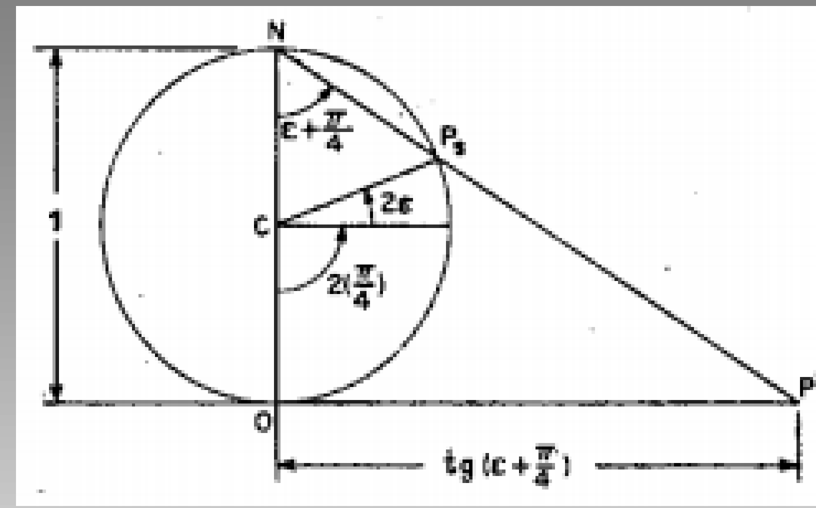
$$\theta = -\,{}^1\!/_2 \arg(\chi),$$

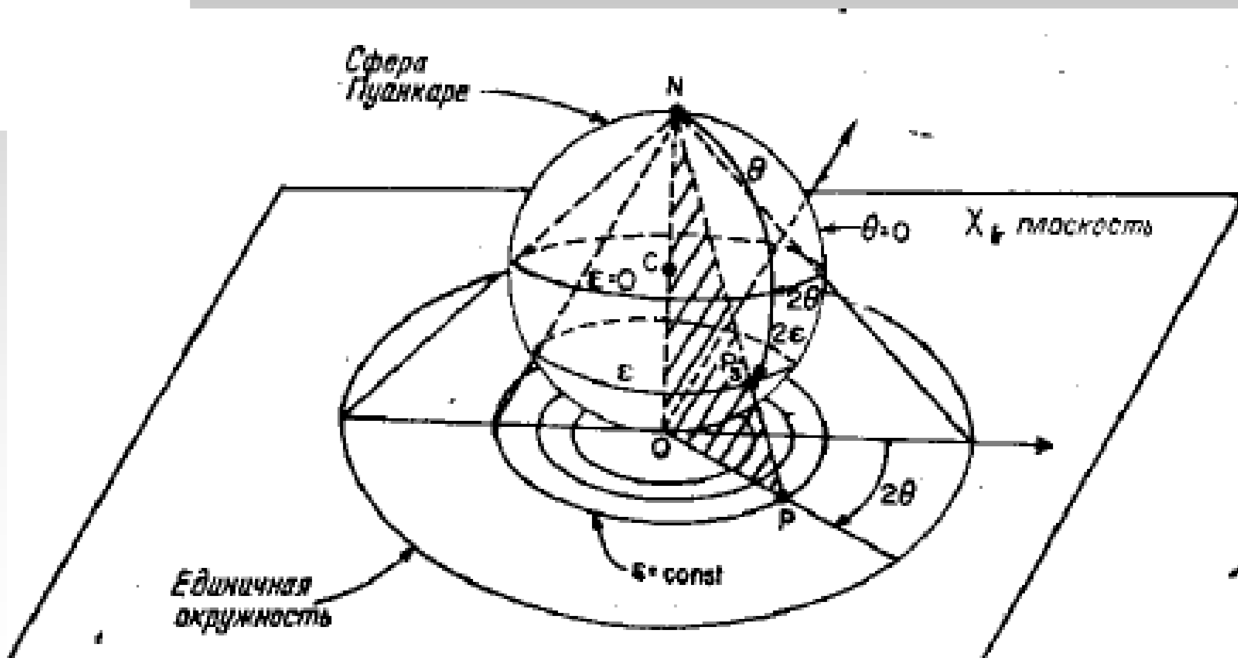
$$\mathrm{tg}\, e = \frac{|\chi| - 1}{|\chi| + 1}.$$



Представлення поляризації точками на сфері Пуанкаре

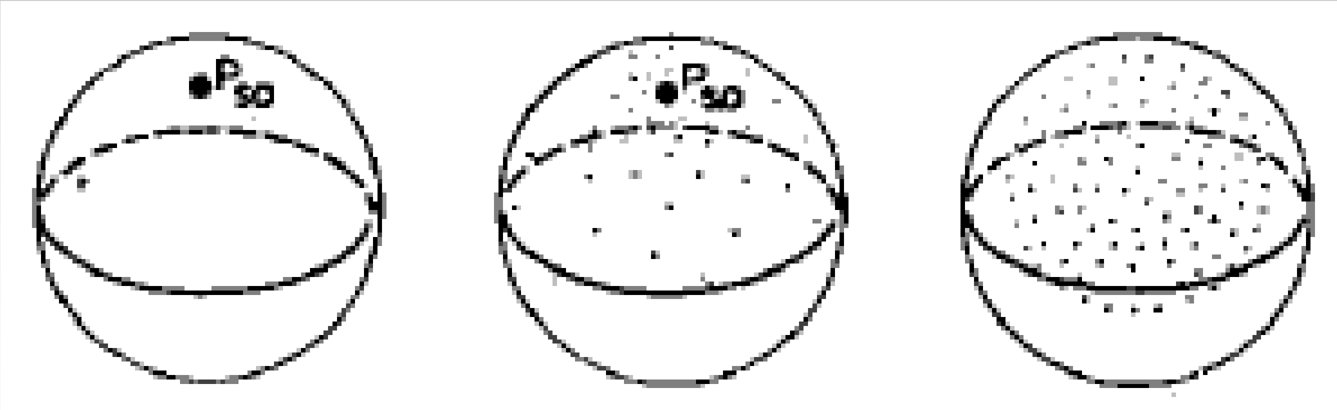






Вектор Джонса квазімонохроматичного випромінювання

$$\mathbf{E}_{x,\,y}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{E}_x(t)\, e^{j\delta_x(t)} \\ \tilde{E}_y(t)\, e^{j\delta_y(t)} \end{bmatrix}$$



Параметри Стокса та вектор Стокса

$$S_0 = I_0 = (I_x + I_y) = (I_{+\pi/4} + I_{-\pi/4})$$
$$S_1 = I_x - I_y,$$
$$S_2 = I_{+\pi/4} - I_{-\pi/4},$$
$$S_3 = I_r - I_l.$$

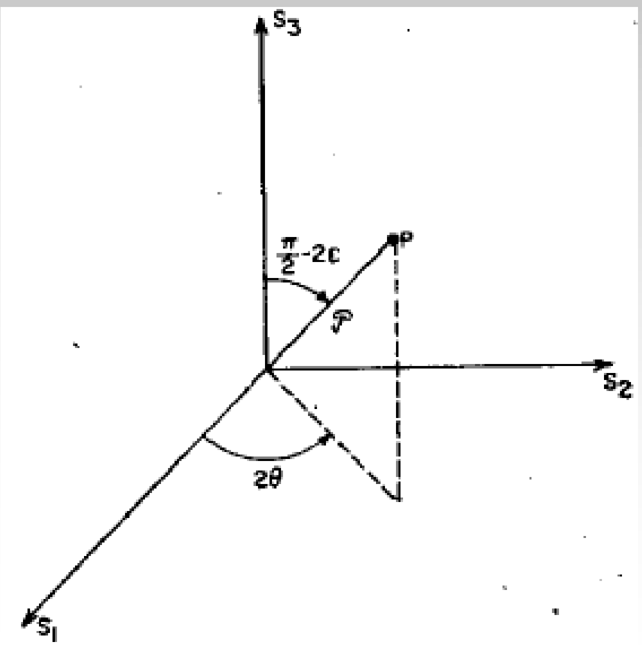
Повністю поляризоване випромінювання

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2.$$

Частково поляризоване випромінювання

$$S_0^2 > S_1^2 + S_2^2 + S_3^2. \qquad \mathbf{S} = \mathbf{S}_{\text{непол}} + \mathbf{S}_{\text{пол}},$$

$$\mathbf{S}_{\text{непол}} = \{[S_0 - (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{1/2}],\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\mathbf{S}_{\text{пол}} = \{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{1/2},\ S_1,\ S_2,\ S_3\}.$$



Ступінь поляризації

$$\mathscr{P} = (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{1/2}/S_0,$$

Загальне представлення вектора Стокса через параметри випромінювання

$$\mathbf{S} = I\,\{1, \mathscr{P}\cos 2\varepsilon \cos 2\theta,\ \mathscr{P}\cos 2\varepsilon \sin 2\theta,\ \mathscr{P}\sin 2\varepsilon\}.$$

$$\theta = {}^1/_2 \operatorname{arctg}(S_2/S_1), \qquad \varepsilon = {}^1/_2 \arcsin\left[S_3/(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{1/2}\right].$$

Представлення квазімонохроматричного випромінювання матрицею когерентності

$$\mathbf{J} = \langle \mathbf{E}_{x,y}(t) \times \mathbf{E}^{+}_{x,y}(t) \rangle = \begin{bmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_y E_x^* \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix},$$

$$I = \langle E_x E_x^* \rangle + \langle E_y E_y^* \rangle = J_{xx} + J_{yy} = \mathrm{Sp}\,\mathbf{J}.$$

$$\mathbf{J} = I \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad \mathbf{J} = I \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J} = \frac{1}{2} I \begin{bmatrix} 1 & \pm j \\ \mp j & 1 \end{bmatrix}.$$

Загальний випадок для повністю поляризованого випромінювання

$$\frac{1}{2} I \begin{bmatrix} (1 + \cos 2\theta \cos 2\varepsilon) & (\sin 2\theta \cos 2\varepsilon - j \sin 2\varepsilon) \\ (\sin 2\theta \cos 2\varepsilon + j \sin 2\varepsilon) & (1 - \cos 2\theta \cos 2\varepsilon) \end{bmatrix}.$$

Загальний випадок

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{непол}} + \mathbf{J}_{\text{пол}}, \qquad \mathscr{P} = \left[1 - \frac{4 \det \mathbf{J}}{(\mathrm{Sp}\,\mathbf{J})^2}\right]^{1/2}$$

$$\mathbf{J}_{\text{дек}} = \frac{1}{2} I \begin{bmatrix} (1 + \mathscr{P} \cos 2\theta \cos 2\varepsilon) & \mathscr{P}(\sin 2\theta \cos 2\varepsilon - j \sin 2\varepsilon) \\ \mathscr{P}(\sin 2\theta \cos 2\varepsilon + j \sin 2\varepsilon) & (1 - \mathscr{P} \cos 2\theta \cos 2\varepsilon) \end{bmatrix}.$$