

# **ЭЛЛИПСОМЕТРИЯ**

## **КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ**

**(Половинкин А.Н., Равин А.Р.)**

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ОГЛАВЛЕНИЕ .....</b>	<b>2</b>
<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>3</b>
<b>1. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН .....</b>	<b>5</b>
1.1 Поляризация плоской монохроматической волны.....	6
1.2 Вектор Джонса однородной плоской волны .....	8
<i>Векторы Джонса для некоторых состояний поляризации.....</i>	<i>10</i>
<i>Декартовы векторы Джонса заданного эллиптического состояния поляризации.....</i>	<i>12</i>
1.3 Представление поляризованного света с помощью декартовой комплексной плоскости ...	13
<b>2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОЛЯРИЗОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ПОЛЯРИЗУЮЩИМИ ОПТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ.....</b>	<b>15</b>
2.1 Формализм матрицы Джонса .....	15
2.2 Свойства матрицы Джонса и операции над ней .....	17
2.3 Матрицы Джонса для основных оптических устройств .....	17
<b>3. ТЕОРИЯ ЭЛЛИПСОМЕТРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ.....</b>	<b>23</b>
3.1 Нуль-эллипсометрия .....	24
3.2 Погрешности эллипсометрических измерений и усреднение по нескольким зонам .....	27
<b>4. ПОЛЯРИЗУЮЩИЕ ОПТИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ .....</b>	<b>29</b>
4.1 Линейные поляризаторы.....	29
<i>Поляризаторы с двулучепреломлением.....</i>	<i>29</i>
<i>Дихроичные поляризаторы .....</i>	<i>30</i>
<i>Отражательные поляризаторы .....</i>	<i>31</i>
4.2 Фазосдвигающие элементы (компенсаторы) .....	31
<i>Двулучепреломляющие фазосдвигающие элементы .....</i>	<i>32</i>
<i>Компенсаторы, основанные на явлении полного внутреннего отражения. Ромб Френеля.....</i>	<i>33</i>
4.3 Деполяризаторы .....	34
<b>5. ОТРАЖЕНИЕ ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД.....</b>	<b>35</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Совершенствование методов измерений является важнейшим фактором прогресса в любой области естественных наук. Всякое новое знание так или иначе связано с повышением чувствительности, точности и локальности измерений, расширением диапазона условий, в которых возможно их проведение.

Наше время заставляет предъявлять некоторые дополнительные требования к методам измерений. Весьма важны, например, принципиальная возможность и техническая реализуемость автоматизации процесса измерений. Не менее существенна и возможность комбинирования данного метода измерений с другими методами, что резко повышает общую информативность исследования.

С другой стороны, прогресс вычислительной техники резко снизил требования к простоте функциональных связей между непосредственно измеряемыми величинами и теми величинами, которые интересуют экспериментатора. Обработка результатов измерений с помощью ЭВМ позволяет успешно применять и такие методы, где эти связи весьма сложны, а получение конечного результата требует проведения громоздких вычислений и преобразований.

Интенсивное развитие эллипсометрии, может служить ярким примером отмеченных выше тенденций.

*Сущность эллипсометрического метода измерений состоит в исследовании изменения состояния поляризации пучка света в результате его взаимодействия с изучаемым объектом.*

В зависимости от того, какой способ взаимодействия, приводящий к изменению состояния поляризации света, преобладает, мы можем различать:

- отражательную эллипсометрию, или эллипсометрию поверхности;
- эллипсометрию пропускания (поляриметрию);
- эллипсометрию рассеяния.

Интересно отметить, что, хотя в основе всех трех методов лежат одни и те же принципы, приведенное выше деление соответствует трем различным направлениям исследований, которые почти не перекрываются между собой.

*Отражательная эллипсометрия* уже давно играет важную роль в исследованиях поверхностей и тонких пленок. Приведем некоторые важнейшие примеры применений отражательной эллипсометрии

1) Измерение оптических свойств материалов и их частотной зависимости (дисперсия по длинам волн), при этом материалы могут находиться как в жидкой, так и в твердой фазе, быть оптически изотропными или анизотропными, кроме того, можно использовать как объемные образцы, так и тонкие пленки. 2) Контроль явлений на поверхности, к числу которых относятся рост тонких пленок, начинающийся с субмонослойных покрытий. (например, окисление, осаждение, адсорбция или диффузия примесей), либо удаление таких пленок (например, десорбция, возгонка или диффузия). 3)- Измерение физических факторов, влияющих на оптические свойства, например электрических или магнитных полей, механических напряжений или температуры.

*Эллипсометрия пропускания* (поляриметрия) представляет собой хорошо разработанный аналитический метод физической химии. Этот метод используется главным образом для измерений на объемных образцах (газообразных, жидких или твердых), на которых исследуются следующие свойства. 1) Естественное оптическое вращение и круговой дихроизм, естественное линейное двулучепреломление и линейный дихроизм и, в более общем случае, естественное эллиптическое двулучепреломление и эллипти-

ческий дихроизм. 2) Индуцированная оптическая анизотропия, как то: двойное лучепреломление в потоке, фотоупругость, эффекты Фарадея, Керра и Коттона — Мутона. 3) Дисперсия перечисленных выше свойств по длинам волн. Основная задача таких исследований заключается в изучении и идентификации молекулярной структуры вещества.

*Эллипсометрия рассеяния* имеет широкий диапазон применений. Она используется а) в промышленности при измерениях плотности и при оценке распределения по размерам частиц коллоидных растворов и аэрозолей; б) в метеорологии при изучении тумана, облаков, дождя; в) в астрономии при исследовании планетных атмосфер и межпланетной пыли.

Эллипсометрический метод исследования имеет ряд очень важных особенностей, которые делают его весьма привлекательным.

Во-первых, это не только неразрушающий, но и невозмущающий характер эллипсометрических измерений (при правильном выборе длины волны и интенсивности света), что дает возможность проведения измерений не только *in situ*, но и *in vitro*.

Во-вторых, она весьма чувствительна к слабым эффектам на границе раздела, к числу которых относится, в частности, образование островкового атомного и молекулярного субмонослоя.

При использовании современных технических средств эллипсометрия позволяет разработать целый ряд чрезвычайно чувствительных методов исследования состояния поверхности, структуры тонких поверхностных пленок и явлений на границе двух фаз. Так например эллипсометрические исследования физической и химической адсорбции газов на поверхности кремния позволяют измерять адсорбционные покрытия с точностью до 0,02 долей монослоя. Также существуют варианты эллипсометрического метода, позволяющие измерять показатели преломления сверхтонких пленок (вплоть до 15—20 Å) с точностью до третьего знака после запятой.

Наконец, в-третьих, эллипсометрические измерения могут проводиться в широком интервале температур и давлений, причем агрессивность окружающей среды также не является помехой.

Основным препятствием для развития эллипсометрии служили ранее сложность и громоздкость математической обработки результатов измерений. Только для простейших систем удавалось достичь такого упрощения общих теоретических соотношений, которое позволяло производить прямое определение интересующих экспериментатора величин по измеренным поляризационным характеристикам отраженного пучка света. В более сложных и интересных случаях такое прямое определение подлежащих измерению величин оказывалось невозможным. Необходимо было проводить предварительный, как правило, весьма сложный и громоздкий расчет амплитудных коэффициентов отражения света, поляризованного в плоскости падения, и света, поляризованного перпендикулярно к этой плоскости, для модели отражающей системы, адекватной исследуемому объекту. Только сопоставление экспериментальных результатов с данными такого расчета позволяло определить интересующие исследователя характеристики объекта.

Однако прогресс вычислительной техники и широкое ее внедрение во все области науки и техники устранили практически все трудности, связанные с интерпретацией результатов эллипсометрических измерений, и создали предпосылки для превращения эллипсометрии в весьма эффективный, обладающий уникальными возможностями инструмент, находящий применение при проведении самых разнообразных исследований в таких областях, как физика твердого тела, физика и химия поверхности, биология, медицина и т. п.

# 1. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Поляризация – общее свойство всех типов векторных волн. Этим свойством обладают электромагнитные волны, а также, например, упругие и спиновые волны в твердых телах. Для всех типов векторных волн поляризация характеризует поведение во времени одного из векторов поля, связанного с данной волной, наблюдаемое в некоторой фиксированной точке пространства.

Световые волны имеют электромагнитную природу, так что для их полного описания требуется четыре основных вектора поля: напряженность электрического поля  $E$ , вектор электрического смещения  $D$ , напряженность магнитного поля  $H$  и вектор магнитной индукции  $B$ . Из этих четырех векторов для определения состояния поляризации световых волн выбран вектор напряженности электрического поля  $E$ . Такой выбор объясняется тем, что при взаимодействии света с веществом сила, действующая на электроны, с точностью до пренебрежимо малой поправки (сила Лоренца!) определяется именно электрическим полем световой волны. Вообще если поведение  $E$  определено, то поведение трех оставшихся векторов может быть найдено с помощью уравнений Максвелла и материальных уравнений связи. В дальнейшем будем считать, что состояние поляризации света полностью определяется поведением во времени  $t$  вектора напряженности электрического поля  $E(t,r)$ , наблюдаемого в фиксированной точке пространства  $r$ .

Временной фурье-анализ  $E(t,r)$  для световых волн дает спектральные (фурье) компоненты с частотами примерно от  $10^{12}$  Гц (далекая ИК-область) до  $10^{16}$  Гц (далекая УФ-область). Эта область, охватывающая четыре декады частот, составляет оптическую часть спектра электромагнитных колебаний, причем видимому свету соответствует только одна октава (примерно  $(4 - 8)10^{14}$  Гц). Оптическая область непрерывно переходит в микроволновую со стороны низких частот и в область рентгеновского излучения со стороны высоких частот. Световая волна называется полихроматической, если в результате фурье-анализа мы получаем частотный спектр с непрерывным или дискретным распределением; если же спектр состоит из одной единственной дискретной частотной компоненты с нулевой спектральной шириной, то волна называется монохроматической. Промежуточное положение между этими двумя крайними случаями занимает квазимонохроматическая волна, которая характеризуется узкой спектральной линией, имеющей очень малую, но не нулевую ширину. В дальнейшем мы будем рассматривать только монохроматические световые волны. Однако следует помнить, что бесконечная монохроматическая волна – есть лишь математическая модель, описывающая в некотором приближении физически существующие квазимонохроматические волны.

Другим важным приближением рабочего светового пучка в эллипсометрии является однородная плоская электромагнитная волна. Плоской электромагнитной волной называется электромагнитное поле, векторы которого в каждый момент времени принимают постоянные значения на системе параллельных плоскостей (фазовых фронтов). Таким образом, если выбрать систему координат так, чтобы ось  $z$  была перпендикулярна этим плоскостям, и её положительное направление совпадало с направлением распространения волны, то электрический вектор плоской монохроматической волны можно записать в виде

$$(1) \quad \vec{E}(z,t) = [E_{mx} \cos(\omega t - kz + \delta_x)] \vec{x}_0 + [E_{my} \cos(\omega t - kz + \delta_y)] \vec{y}_0,$$

где  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  - модуль волнового вектора,  $\delta_x$  и  $\delta_y$  - начальные фазы x- и y-компонент соответственно.

## 1.1 Поляризация плоской монохроматической волны

Исследуем вопрос о поляризации плоской монохроматической волны, т. е. выясним поведение во времени электрического вектора в некоторой фиксированной точке пространства.

На первом этапе рассмотрим векторное колебание, задаваемое выражениями.

$$(2) \quad \begin{cases} \vec{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} \\ \begin{cases} A_x = A \cos(\varepsilon) \cos(\omega t + t_0) \\ A_y = A \sin(\varepsilon) \sin(\omega t + t_0) \end{cases} \end{cases}$$

Для выяснения траектории конца вектора  $\vec{A}$  запишем эту систему следующим образом:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{A_x}{A \cos(\varepsilon)} = \cos(\omega t + t_0) \\ \frac{A_y}{A \sin(\varepsilon)} = \sin(\omega t + t_0) \end{cases}$$

после этого возведем в квадрат каждое уравнение и сложим их. В результате получим каноническое уравнение эллипса, большая и малая полуоси которого лежат на координатных осях X и Y соответственно.

$$(4) \quad \frac{A_x^2}{a^2} + \frac{A_y^2}{b^2} = 1$$

где  $a = A \cos(\varepsilon)$  - большая полуось эллипса,  $b = A \sin(\varepsilon)$  - малая полуось эллипса,  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$  - амплитуда эллиптического колебания. Угол эллиптичности  $\varepsilon$  определяет отношение полуосей и направление обхода эллипса  $\operatorname{tg}(\varepsilon) = \frac{b}{a}$  и лежит в области

$-\frac{\pi}{4} \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{4}$ . Положительные значения угла эллиптичности соответствуют обходу эллипса по часовой стрелке при наблюдении против направления оси Z. Абсолютная фаза  $t_0$  - определяет угол между начальным положением электрического вектора в момент времени  $t=0$  и большой полуосью эллипса и лежит в области  $-\pi \leq t_0 < \pi$ .

Таким образом, мы выяснили, что траектория конца вектора  $\vec{A}$  задаваемого выражениями (2) является эллипсом. Подобный тип колебаний называется эллиптически поляризованным. Эллипс поляризации нашего колебания ориентирован так, что большая и малая полуоси лежат на координатных осях X и Y. В общем случае большая полуось эллипса может составлять некоторый угол  $\theta$  с осью X, называемый азимутом. Азимут  $\theta$  отсчитывается от положительного направления оси X. Все физически различимые азимуты лежат в диапазоне  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ . Для получения эллиптического колебания общего вида необходимо воспользоваться матричным соотношением

$$(5) \quad \vec{A}' = R(\alpha) \vec{A}$$

где  $R(\alpha)$  - матрица поворота системы координат.

$$(6) \quad R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Выражения (5), (6) представляют собой правило преобразования векторов при повороте системы координат.

Запишем теперь выражения для эллиптического колебания общего вида с азимутом  $\theta$ . Для этого систему координат необходимо повернуть на угол  $-\theta$ . В результате имеем:

$$(7) \quad \begin{cases} A_x = A \cos(\varepsilon) \cos(\theta) \cos(\omega t + t_0) - A \sin(\varepsilon) \sin(\theta) \sin(\omega t + t_0) \\ A_y = A \cos(\varepsilon) \sin(\theta) \cos(\omega t + t_0) + A \sin(\varepsilon) \cos(\theta) \sin(\omega t + t_0) \end{cases}$$

Таким образом, мы выяснили, что эллиптическое колебание общего вида описывается выражениями (7) и может быть охарактеризовано четырьмя параметрами, характеризующими форму и направление обхода эллипса (угол эллиптичности  $\varepsilon$ ), размер (амплитуда  $A$ ), ориентацию (азимут  $\theta$ ) и положение вектора в начальный момент времени (абсолютная фаза  $t_0$ ). Отметим здесь, что в зависимости от значений угла эллиптичности эллипс поляризации может вырождаться в прямую линию ( $\varepsilon = 0$ ) или окружности противоположных направлений обхода ( $\varepsilon = \pm \frac{\pi}{4}$ ). То есть линейная и круговая поляризации являются частным случаем эллиптической поляризации.

Теперь рассмотрим плоскую монохроматическую световую волну, электрический вектор которой задается выражением (1). Без ограничения общности рассуждений будем рассматривать его поведение в точке  $z = 0$ , тогда выражения для  $x$ - и  $y$ -компонент вектора  $\vec{E}$  можно записать в виде

$$(8) \quad \begin{cases} E_x = E_{mx} \cos(\omega t + \delta_x) \\ E_y = E_{my} \cos(\omega t + \delta_y) \end{cases}$$

Покажем, что поле, определяемое выражением (8) эллиптически поляризовано и установим связь между четырьмя параметрами поля (амплитудами  $E_{mx}$ ,  $E_{my}$  и начальными фазами  $\delta_x$  и  $\delta_y$ ) и параметрами эллипса поляризации ( $\varepsilon$ ,  $\theta$ ,  $A$ ,  $t_0$ ). Для этого нам необходимо приравнять соответствующие правые части систем (7) и (8).

$$(9) \quad \begin{cases} A \cos(\varepsilon) \cos(\theta) \cos(\omega t + t_0) - A \sin(\varepsilon) \sin(\theta) \sin(\omega t + t_0) & E_{mx} \cos(\omega t + \delta_x) \\ A \cos(\varepsilon) \sin(\theta) \cos(\omega t + t_0) + A \sin(\varepsilon) \cos(\theta) \sin(\omega t + t_0) & E_{my} \cos(\omega t + \delta_y) \end{cases}$$

Раскрытие косинусов и синусов сумм, приведение подобных членов и приравнивание соответствующих выражений при  $\cos(\omega t)$  и  $\sin(\omega t)$  приводит к следующей системе уравнений:

$$(10) \quad \begin{cases} A \cos(\varepsilon) \cos(\theta) \cos(t_0) - A \sin(\varepsilon) \sin(\theta) \sin(t_0) = E_{mx} \cos(\delta_x) \\ A \cos(\varepsilon) \cos(\theta) \sin(t_0) + A \sin(\varepsilon) \sin(\theta) \cos(t_0) = E_{mx} \sin(\delta_x) \\ A \cos(\varepsilon) \sin(\theta) \cos(t_0) + A \sin(\varepsilon) \cos(\theta) \sin(t_0) = E_{my} \cos(\delta_y) \\ A \cos(\varepsilon) \sin(\theta) \sin(t_0) - A \sin(\varepsilon) \cos(\theta) \cos(t_0) = E_{my} \sin(\delta_y) \end{cases}$$

Найдем сумму первого и четвертого уравнения системы (10) и разность третьего и второго. Выполняя соответствующие преобразования, получаем следующую подсистему:

$$(11) \begin{cases} A[\cos(\varepsilon) - \sin(\varepsilon)]\cos(\theta - t_0) & E_{mx} \cos(\delta_x) + E_{my} \sin(\delta_y) \\ A[\cos(\varepsilon) - \sin(\varepsilon)]\sin(\theta - t_0) & E_{my} \cos(\delta_y) - E_{mx} \sin(\delta_x) \end{cases}$$

Из которой делением второго уравнения на первое получаем:

$$(12) \quad \operatorname{tg}(\theta - t_0) = \frac{E_{my} \cos(\delta_y) - E_{mx} \sin(\delta_x)}{E_{mx} \cos(\delta_x) + E_{my} \sin(\delta_y)}$$

Сумма квадратов первого и второго уравнения подсистемы (11) дает

$$(13) \quad A^2 [1 - \sin(2\varepsilon)] = E_{mx}^2 + E_{my}^2 + 2E_{mx}E_{my} \sin(\delta_y - \delta_x).$$

Теперь вновь вернемся к системе (10). Сумма квадратов всех уравнений системы (10) дает нам выражение для амплитуды A:

$$(14) \quad A^2 = E_{mx}^2 + E_{my}^2$$

Рассмотрим разности квадратов первого и четвертого уравнений системы (10) и третьего и второго:

$$(15) \begin{cases} A^2 \cos^2(\theta) \cos(2\varepsilon) \cos^2(t_0) - A^2 \sin^2(\theta) \cos(2\varepsilon) \sin^2(t_0) & E_{mx}^2 \cos^2(\delta_x) - E_{my}^2 \sin^2(\delta_y) \\ A^2 \sin^2(\theta) \cos(2\varepsilon) \cos^2(t_0) - A^2 \cos^2(\theta) \cos(2\varepsilon) \sin^2(t_0) & E_{my}^2 \cos^2(\delta_y) - E_{mx}^2 \sin^2(\delta_x) \end{cases}$$

Разность первого и второго уравнения подсистемы (15) приводит нас к соотношению

$$(16) \quad A^2 \cos(2\varepsilon) \cos(2\theta) = E_{mx}^2 - E_{my}^2$$

Соотношения (12), (13), (14) и (16) позволяют нам записать следующие выражения, связывающие параметры эллиптического колебания с амплитудами и фазами компонент поля:

$$(17) \quad \varepsilon = -\frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{2E_{mx}E_{my} \sin(\delta_y - \delta_x)}{E_{mx}^2 + E_{my}^2} \right)$$

$$(18) \quad \theta = \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{E_{mx}^2 - E_{my}^2}{\sqrt{(E_{mx}^2 + E_{my}^2)^2 - 4E_{mx}^2 E_{my}^2 \sin^2(\delta_y - \delta_x)}} \right)$$

$$(19) \quad A^2 = E_{mx}^2 + E_{my}^2$$

$$(20)$$

$$t_0 = -\operatorname{arctg} \left( \frac{E_{my} \cos(\delta_y) - E_{mx} \sin(\delta_x)}{E_{mx} \cos(\delta_x) + E_{my} \sin(\delta_y)} \right) + \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{E_{mx}^2 - E_{my}^2}{\sqrt{(E_{mx}^2 + E_{my}^2)^2 - 4E_{mx}^2 E_{my}^2 \sin^2(\delta_y - \delta_x)}} \right)$$

Таким образом, нами доказано, что плоская монохроматическая волна в общем случае обладает эллиптической поляризацией. Можно показать, что это справедливо для любой монохроматической волны. Связь параметров эллипса поляризации с амплитудами и фазами x- и y-компонент поля задается выражениями (17)-(19). Важно отметить, что параметры, характеризующие форму и ориентацию эллипса ( $\varepsilon$ ,  $\theta$ ) определяются значением амплитуд и разностью фаз между компонентами поля. Сами значения начальных фаз влияют только на абсолютную фазу  $t_0$ , характеризующую начальное положение вектора  $\vec{E}$ .

## 1.2 Вектор Джонса однородной плоской волны

Из электродинамики известно, что однородная плоская монохроматическая электромагнитная волна может быть записана в комплексной форме:

$$(21) \begin{cases} E_x = \dot{E}_{mx} \cdot e^{i(\omega t - kz)} \\ E_y = \dot{E}_{my} \cdot e^{i(\omega t - kz)} \end{cases}$$

где  $\dot{E}_{mx} = E_{mx} \cdot e^{i\delta_x}$ ,  $\dot{E}_{my} = E_{my} \cdot e^{i\delta_y}$  - комплексные амплитуды соответствующих компонент поля. Как и прежде будем рассматривать плоскость  $z = 0$ . Вся информация о волне содержится именно в комплексных амплитудах компонент поля. Поэтому для компактного описания однородных монохроматических плоских волн удобно ввести вектор Джонса, определяемый следующим выражением:

$$(22) \quad \vec{E} = \begin{bmatrix} \dot{E}_{mx} \\ \dot{E}_{my} \end{bmatrix}$$

Для перехода от комплексного представления полей к действительному, следует восстановить временную зависимость, умножив вектор Джонса на  $e^{i\omega t}$ , и взять действительные части его компонент.

При повороте системы координат вектор Джонса преобразуется, как и любой другой вектор, с помощью матрицы поворота (6):

$$(23) \quad \vec{E}' = R(\alpha)\vec{E}$$

Рассмотрим как выражается интенсивность электромагнитной волны через вектор Джонса. В дальнейшем рассмотрении нас нигде не будет интересовать абсолютная интенсивность волны, поэтому используем следующее определение интенсивности поля, опускающее постоянный множитель:

$$(24) \quad I = |\dot{E}_{mx}|^2 + |\dot{E}_{my}|^2 = \dot{E}_{mx}^* \dot{E}_{mx} + \dot{E}_{my}^* \dot{E}_{my}$$

С помощью вектора Джонса интенсивность может быть записана как

$$(25) \quad I = \vec{E}^+ \vec{E}$$

где  $\vec{E}^+$  - эрмитово-сопряженный вектор Джонса. Матрицей эрмитово-сопряженной данной, называется матрица, комплексно-сопряженная транспонированной матрице, следовательно  $\vec{E}^+ = \begin{bmatrix} \dot{E}_{mx}^* & \dot{E}_{my}^* \end{bmatrix}$  - вектор-строка.

Волна с единичной интенсивностью называется нормированной, а ее вектор Джонса - нормальным. Такой вектор удовлетворяет условию

$$(26) \quad \vec{E}^+ \vec{E} = 1$$

Говорят, что два вектора  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  ортогональны, если они удовлетворяют условию

$$(27) \quad \vec{E}_1 \vec{E}_2^+ = \vec{E}_2 \vec{E}_1^+ = 0$$

где крестиком (+), как и раньше, обозначены эрмитово-сопряженные величины.

Эллипсы поляризации, соответствующие двум ортогональным векторам Джонса, характеризуются равными по величине, но противоположными по знаку значениями эллиптичности, и их главные оси взаимно перпендикулярны.

Если векторы  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  не только взаимно ортогональны, но и нормальны, т.е. каждый из них удовлетворяет условию (26), то пара векторов Джонса  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  называется ортонормальной парой векторов.

Любой вектор Джонса вида (22) можно представить в виде линейной комбинации двух ортогональных векторов Джонса

$$(28) \vec{E} = E_1 \vec{e}_1 + E_2 \vec{e}_2$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$  играют роль базисных векторов, подобно тому как  $\vec{x}_0, \vec{y}_0$  играют роль базисных векторов в соотношении  $\vec{r} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0$ . Полное пространство векторов Джонса сканируется, когда пара комплексных чисел  $E_1$  и  $E_2$  принимает все возможные значения; подобным же образом компоненты  $x$  и  $y$  положительного вектора  $\vec{r}$ , принимая все возможные действительные значения, пробегают все точки плоскости в реальном пространстве. Состояния поляризации, которые соответствуют базисным векторам Джонса  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ , называются базисными состояниями поляризации, для пространства векторов Джонса.

*Отметим, что базисные вектора Джонса в общем случае соответствуют ортогональным эллиптическим поляризациям. Это означает, что любое произвольное состояние поляризации может быть разложено на сумму двух эллиптических (в частных случаях линейных или круговых) состояний поляризации.*

Отметим, что в базисные векторы Джонса в общем случае соответствуют ортогональным эллиптическим поляризациям. Это означает, что любое произвольное состояние поляризации может быть представлено в виде линейной комбинации двух эллиптических (в частных случаях линейных или круговых) поляризаций. Выбор того или иного базиса диктуется соображениями удобства описания взаимодействия излучения с поляризующими оптическими элементами. Так, например, если мы имеем дело с оптически активной средой, в которой при распространении света имеет место вращение плоскости поляризации, то в качестве базиса удобно выбирать так называемые круговые базисные векторы, соответствующие двум ортогональным круговым поляризациям.

В дальнейшем мы будем иметь дело только с декартовыми базисными векторами Джонса, которые соответствуют линейным базисным поляризациям.

## Векторы Джонса для некоторых состояний поляризации

Приведем векторы Джонса для некоторых типичных состояний поляризации. Например, вектор Джонса

$$(29) \vec{E}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

описывает линейно-поляризованную волну, электрический вектор которой совершает простое гармоническое колебание вдоль оси  $x$  с единичной амплитудой ( $A = 1$ ) и нулевой начальной фазой ( $\phi = 0$ ). Аналогично вектор Джонса

$$(30) \vec{E}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

описывает линейно-поляризованную волну, электрический вектор которой совершает простое гармоническое колебание вдоль оси  $y$  с единичной амплитудой и нулевой начальной фазой. Выражения (29) и (30) описывают пару ортогональных линейно-поляризованных волн, каждая из которых имеет единичную интенсивность. В случае произвольной линейной поляризации волны электрический вектор колеблется вдоль направления  $X'$  в плоскости волнового фронта, причем азимутальный угол между  $X'$  и

фиксированным направлением оси X равен  $\alpha$ . Для такой волны вектор Джонса имеет вид

$$(31) \vec{E}_{x'} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$$

причем линейное колебание снова имеет нулевую начальную фазу и единичную амплитуду. Состояние линейной поляризации, ортогональное состоянию, представленному выражением (29), получаем, производя подстановку  $\alpha \rightarrow \alpha - \pi/2$ :

$$(32) \vec{E}_{y'} = \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{bmatrix}$$

Индекс Y' указывает на то, что линейное колебание направлено вдоль оси Y', которая ортогональна оси X'. (Ортогональная пара  $E_x, E_y$  описываемая соотношениями (29-30), очевидно, представляет собой частный случай ортогональной пары  $E_{x'}, E_{y'}$ , описываемой соотношениями (31-32), соответствующий  $\alpha = 0$ .)

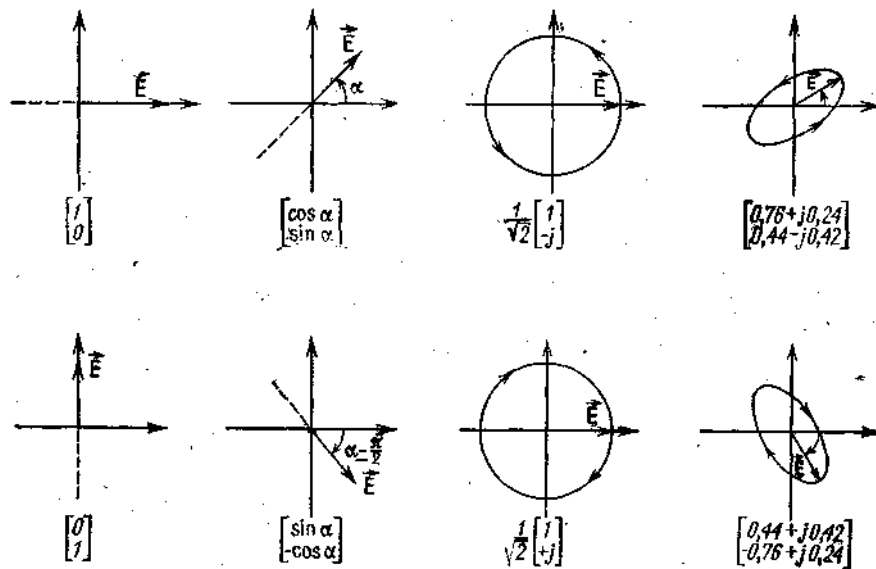


Рис. 2. Векторы Джонса для некоторых состояний поляризации.

Другая пара ортогональных волн, представляющая интерес, — это волны с левой и правой круговой поляризацией, или лево- и правополюсированные волны, векторы Джонса которых имеют следующий вид:

$$(33) \vec{E}_l = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$(34) \vec{E}_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Векторы  $E_l$  и  $E_r$  построены из линейных колебаний вдоль координатных осей x и y, имеющих равные амплитуды  $1/\sqrt{2}$  и сдвинутых по фазе на  $\pi/2$ , относительно друг друга. В случае левоциркулярного состояния поляризации y-компонента запаздывает по фазе на  $\pi/2$  относительно x-компоненты, тогда как в случае правополюсированного состояния (y-компонента опережает x-компоненту на  $\pi/2$ ).

Состояния линейной и круговой поляризации представляют собой предельный случай более общего состояния эллиптической поляризации. Для непосредственного определения эллипса поляризации, соответствующего произвольному вектору Джонса (22), необходимо восстановить временную зависимость. Для этого комплексный вектор Джонса умножают на  $\exp(i\omega t)$  и берут действительную часть произведения. Зависящие от времени компоненты поля имеют вид (8) и параллельны координатным осям X и y Y плоскости волнового фронта  $z = 0$ .

### Декартовы векторы Джонса заданного эллиптического состояния поляризации

Ранее нами была рассмотрена задача нахождения параметров эллипса поляризации по известным компонентам поля. Теперь рассмотрим обратную задачу: найдем вектор Джонса электромагнитной волны по заданным параметрам эллипса поляризации.

В системе координат (X', Y'), оси которой совпадают с большой и малой осями эллипса поляризации, декартов вектор Джонса эллиптического колебания с единичной амплитудой ( $A = 1$ ), нулевой начальной фазой ( $\delta = 0$ ), нулевым азимутом ( $\theta = 0$ ) и углом эллиптичности  $\varepsilon$  определяется следующим выражением:

$$(35) \vec{E}' = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ i \cdot \sin \varepsilon \end{bmatrix}$$

в чем легко убедиться, если восстановить временную зависимость. Умножение выражения (35) на  $A \cdot \exp(i \cdot t_0)$  изменяет амплитуду эллиптического колебания, которая теперь становится равной A (вместо единицы); кроме того, изменяется и начальное положение электрического вектора в начальный момент времени; угол между ним и большой осью эллипса теперь отличен от нуля и равен  $\arctg[tg(\varepsilon) \cdot tg(t_0)]$  см. (2). Умножая слева (35) на матрицу обратного поворота  $R(-\theta)$ , получаем вектор Джонса

$$(36) \vec{E} = A \cdot e^{i \cdot t_0} R(-\theta) \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ i \cdot \sin \varepsilon \end{bmatrix}$$

который описывает эллиптическое колебание с амплитудой A, фазой  $t_0$ , азимутом  $\theta$  и углом эллиптичности  $\varepsilon$ . Двухступенчатая операция синтеза произвольного эллиптического колебания иллюстрируется рис. 3. Используя матрицу поворота (6), получаем развернутую форму выражения (36):

$$(37) \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = A \cdot \exp(i \cdot t_0) \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cdot \cos(\varepsilon) - i \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varepsilon) \\ \sin(\theta) \cdot \cos(\varepsilon) + i \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\varepsilon) \end{bmatrix}$$

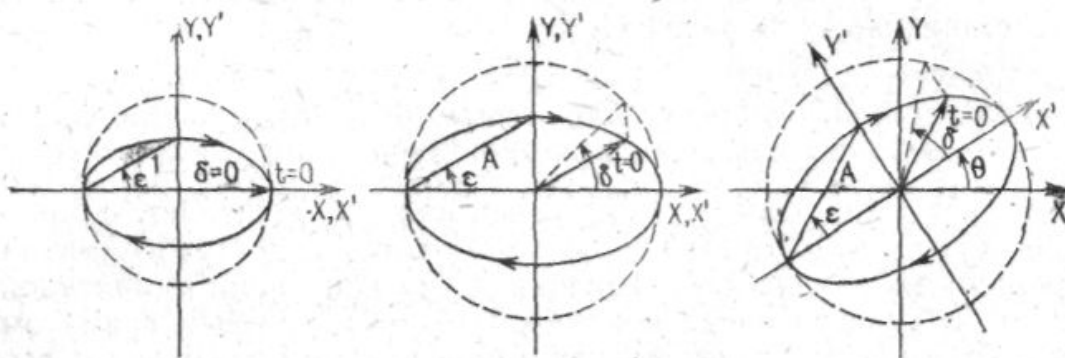


Рис. 3. Двухступенчатая процедура синтеза вектора Джонса для произвольного состояния поляризации.

### 1.3 Представление поляризованного света с помощью декартовой комплексной плоскости

Двухкомпонентный вектор Джонса, обсуждавшийся в предыдущем разделе, несет информацию об амплитуде  $A$ , абсолютной фазе  $t_0$ , азимуте  $\theta$  и угле эллиптичности  $\varepsilon$  эллиптического колебания вектора электрического поля однородной монохроматической плоской световой ТЕ волны. Это явно видно из соотношения (37).

Хотя вектор Джонса обеспечивает компактное представление электрического вектора плоской ТЕ волны, существуют случаи, когда адекватным оказывается более простое представление. Это такие случаи, когда информация об амплитуде  $A$  и фазе  $t_0$  эллиптического колебания электрического вектора представляет второстепенный интерес, так что ее можно опустить. Информация об эллипсе поляризации как таковом, характеризующимся азимутом  $\theta$  и углом эллиптичности  $\varepsilon$ , может быть получена из двухкомпонентного - декартова вектора Джонса (22), если мы возьмем отношение его компонент

$$(38) \chi = \frac{E_y}{E_x}$$

Если  $E_x$  и  $E_y$  выражены через свои амплитуды и фазовые углы, то поляризационная переменная  $\chi$  имеет вид

$$(39) \chi = \frac{|E_y|}{|E_x|} \exp \left[ i(\delta_y - \delta_x) \right]$$

Формулы (38) и (39) выражают тот простой факт, что если электрический вектор разложен на две компоненты вдоль двух ортогональных направлений в плоскости волнового фронта, то эллипс поляризации полностью определяется *относительной амплитудой и относительной фазой* одной осциллирующей компоненты по отношению к другой компоненте. Используя соотношение (37), находим, что поляризационная переменная  $\chi$ , определяемая соотношением (38), является комплексной функцией - двух действительных аргументов: азимута  $\theta$  и угла эллиптичности  $\varepsilon$ :

$$(40) \chi = \frac{\operatorname{tg} \theta + i \cdot \operatorname{tg} \varepsilon}{1 - i \cdot \operatorname{tg} \theta \cdot \operatorname{tg} \varepsilon}$$

Таким образом, мы имеем явное выражение, показывающее, что любое эллиптическое состояние поляризации с азимутом  $\theta$  и углом эллиптичности  $\varepsilon$  можно охарак-

теризовать единственным комплексным числом  $\chi$ . Каждому комплексному числу  $\chi$  можно поставить в соответствие представляющую точку на комплексной плоскости. Таким образом, комплексную плоскость можно рассматривать как пространство состояний поляризации света. Такое представление называется представлением декартовой комплексной плоскостью, поскольку определение  $\chi$  (38) основано на компонентах декартова вектора Джонса. Если  $\theta$  и  $\varepsilon$  лежат в пределах  $-\pi/2 \leq \theta < \pi/2$  и  $-\pi/4 \leq \varepsilon \leq \pi/4$ , формула (40) выражает взаимнооднозначное соответствие между точками комплексной плоскости и различными поляризационными состояниями света. Для определения эллипсов поляризации, соответствующих различным точкам комплексной плоскости, используются как формулы (39), так и (30).

Чтобы определить азимут и угол эллиптичности эллипса поляризации представленного поляризационной переменной  $\chi$  необходимо обратить формулу (40). Это можно сделать, выделив действительную, мнимую части и абсолютную величину левой и правой частей формулы (40), и вычислив затем величину  $|\chi|^2$ . Откуда имеем:

$$(41) \quad \operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2 \operatorname{Re}(\chi)}{1 - |\chi|^2}$$

$$(42) \quad \sin(2\theta) = \frac{2 \operatorname{Im}(\chi)}{1 + |\chi|^2}$$

Используя понятие поляризационной переменной  $\chi$  можно записать вектор Джонса в следующей форме:

$$(43) \quad \vec{E} = \frac{A_c}{\sqrt{1 + \chi\chi^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \chi \end{bmatrix}$$

$$(44) \quad A_c = E_x \sqrt{1 + \frac{E_y E_y^*}{E_x E_x^*}}$$

где  $A_c$  - полная комплексная амплитуда электромагнитной волны. Это форма записи вектора Джонса в которой информация только о эллипсе поляризации (содержащаяся в  $\chi$ ) отделена от информации о полной амплитуде и абсолютной фазе (содержащейся в  $A_c$ ). Комплексную амплитуду  $A_c$  можно выразить через действительную амплитуду и фазу:

$$(45) \quad A_c = A \cdot e^{it_0}$$

## 2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОЛЯРИЗОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ПОЛЯРИЗУЮЩИМИ ОПТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

В эллипсометре пучок поляризованного света пропускается через последовательный ряд оптических элементов, каждый из которых вносит свой вклад в изменение состояния поляризации. Эллипсометры принадлежат к классу оптических приборов, для которых поляризация является основным свойством волны, и относятся к поляризационным приборам в отличие от других классов оптических устройств, которые оказывают воздействие не на поляризацию, а на какие-либо иные свойства волны. Так, например, в оптической системе, предназначенной для получения изображений, оптические элементы, помещенные на пути световой волны, преобразуют распределение амплитуды по волновому фронту. Оптические системы приборов различных классов, естественно, включают в себя различные элементы. В то время как поляризующая оптическая система может состоять из поляризаторов, фазосдвигающих устройств и устройств для вращения плоскости поляризации (оптических вращателей, или ротаторов), оптическая система, предназначенная для получения изображений, состоит преимущественно из линз и пространственных фильтров.

В этой главе мы будем рассматривать взаимодействие пучка поляризованного света с элементами поляризационной оптической системы, изменяющими состояние поляризации пучка. При этом сделаны следующие упрощающие предположения.

1. Световой пучок аппроксимируется однородной бесконечной плоской ТЕ волной, которая может быть монохроматической или квазимонохроматической.

2. Взаимодействие между падающим пучком и оптическим устройством является линейным и происходит без изменения частоты света. Это исключает нелинейные оптические эффекты, неупругое рамановское или бриллюэновское рассеяние света и подобные эффекты. Кроме того, падающая волна при взаимодействии может распадаться на одну или несколько плоских волн. Поперечность электромагнитного поля при этом, естественно, сохраняется.

3. Особое значение придается только внешним (переходным от входа к выходу) характеристикам оптического прибора или оптической системы. Внутренним процессам, ответственным за изменение поляризации, внимания уделяется меньше.

### 2.1 Формализм матрицы Джонса

Рассмотрим однородную монохроматическую плоскую ТЕ волну, падающую на недеполяризующую оптическую систему, состоящую либо из отдельного оптического элемента, либо из последовательности таких элементов. В результате взаимодействия падающей волны с оптической системой на выходе системы появляется одна или несколько модифицированных плоских волн. На рис. 4 представлены принципиальная схема оптической системы, падающая волна и одна из, выходящих модифицированных плоских волн. Две фиксированные в пространстве правосторонние декартовы системы координат  $(x, y, z)$  и  $(x', y', z')$  связаны с падающей и выходящей плоскими волнами, направления  $z$  и  $z'$  параллельны волновым векторам  $k$  и  $k'$  соответственно ( $k$  и  $k'$  могут быть непараллельными). Опорные координатные плоскости  $z = 0$  и  $z' = 0$  на входе и

выходе расположены произвольно, хотя обычно эти плоскости располагают непосредственно перед входной и непосредственно после выходной поверхности системы (прибора).

Оси координат  $(x, y)$  и  $(x', y')$  на входе и выходе могут иметь любую подходящую азимутальную ориентацию относительно волновых векторов падающей и выходящей волн  $k$  и  $k'$ .

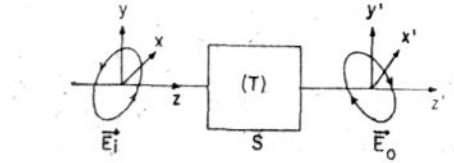


Рис. 4. Падающая и выходящая из оптической системы S плоские волны характеризуются векторами Джонса  $E_i$  и  $E_o$ , отнесенными к декартовым системам координат  $(x, y, z)$  и  $(z', y', z')$  на входе и выходе системы S  $E_o = (T)E_i$  где (T) — матрица Джонса для системы S.

Пусть падающая и выходящая плоские волны описываются их векторами Джонса  $E_i$  и  $E_o$ , отнесенными к системам координат на входе и выходе. Вектор Джонса E на входе представляет собой комплексный вектор-столбец, элементами которого  $E_{ix}$  и  $E_{iy}$  являются синусоидальные колебания декартовых проекций электрического вектора падающей световой волны на оси координат x и y. Подобным же образом элементами  $E_{ox'}$  и  $E_{oy'}$  вектора Джонса  $E_o$  на выходе являются синусоидальные колебания декартовых проекций электрического вектора выходящей волны на оси координат x' и y'. В отсутствие нелинейности и других процессов, приводящих к изменению частоты, пара колебаний  $E_{ox'}$  и  $E_{oy'}$  на выходе оптической системы связана с парой колебаний  $E_{ix}$  и  $E_{iy}$  на ее входе следующими линейными уравнениями:

$$(46) \begin{cases} E_{ox'} = T_{11}E_{ix} + T_{12}E_{iy} \\ E_{oy'} = T_{21}E_{ix} + T_{22}E_{iy} \end{cases}$$

Уравнения (46) можно объединить, представив их в матричной форме:

$$(47) \vec{E}_o = T E_i$$

где

$$(48) T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

Соотношение (47) выражает закон взаимодействия падающей волны с оптической системой в виде простого линейного матричного преобразования вектора Джонса этой волны. Это соотношение является тем фундаментом, на котором полностью базируется формализм матрицы Джонса. 2x2 матрица преобразования T называется матрицей Джонса для оптической системы (или оптического прибора); ее элементы  $T_{ij}$  являются в общем случае комплексными числами. Матрица Джонса зависит от:

1. рассматриваемой оптической системы (прибора);
2. частоты падающей волны (процессы, изменяющие поляризацию внутри системы, являются в общем случае дисперсионными);
3. ориентации системы по отношению к волновому вектору падающего пучка;
4. расположения опорных координатных плоскостей  $z = 0$  и  $z' = 0$  на входе и выходе системы соответственно;

5. азимутальной ориентации осей координат (x, y) и (x', y') на входе и выходе относительно волновых векторов падающего и выходящего пучков света соответственно;
6. данной выходящей плоской волны, если в результате взаимодействия между падающей волной и оптической системой возникает более чем одна такая волна.

## 2.2 Свойства матрицы Джонса и операции над ней

Нижеследующий материал основывается на теории линейных операторов, изучаемой в рамках курса линейной алгебры.

Рассмотрим последовательность из N поляризующих элементов, каждый из которых описывается своей матрицей Джонса  $T_1 - T_N$ . Совместное действие всех элементов можно описать результирующей матрицей Джонса T:

$$(49) \vec{E}_o = T \vec{E}_i; \quad T = T_N T_{N-1} \dots T_2 T_1$$

Таким образом последовательное действие поляризующих оптических элементов описывается произведением их матриц Джонса.

При повороте системы координат матрица Джонса преобразуется по закону

$$(50) T_{нов} = R(\alpha) T_{стар} R(-\alpha)$$

Как известно матрица линейного оператора имеет наиболее простой (диагональный) вид в базисе, состоящем из собственных векторов. При этом по главной диагонали расположены собственные значения линейного оператора. Собственные векторы матрицы Джонса являются векторами Джонса и определяют собственные поляризации оптической системы. Если на оптическую систему падает волна, поляризация которой совпадает с одной из собственных поляризаций системы, то на выходе системы мы имеем волну, характеризуемую тем же самым эллипсом поляризации, что и падающая волна, при этом в общем случае изменяется только полная комплексная амплитуда (45).

Поскольку матрица Джонса имеет размерность 2x2, то оптическая система, описываемая невырожденной матрицей Джонса, имеет две ортогональные собственные поляризации. Примером устройства, описываемого вырожденной матрицей Джонса, может являться идеальный поляризатор.

Ниже мы рассмотрим примеры поляризующих оптических систем и запишем их матрицы Джонса.

## 2.3 Матрицы Джонса для основных оптических устройств

1. По-видимому, простейшей матрицей Джонса является матрица, описывающая свободное распространение плоской световой волны на расстояние d без всякого взаимодействия. В этом случае матрица Джонса записывается в виде

$$(51) T = \begin{bmatrix} \exp\left(\frac{-i2\pi nd}{\lambda}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{-i2\pi nd}{\lambda}\right) \end{bmatrix} = \exp\left(\frac{-i2\pi nd}{\lambda}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица Джонса (51) выражает тот простой факт, что фаза волны, длина которой в вакууме равна  $\lambda$ , изменяется на величину  $\frac{2\pi nd}{\lambda}$ . Наш оптический прибор представляет собой в данном случае плоскопараллельный участок изотропной среды с показателем

преломления  $n$ , через который свободно распространяется плоская волна. Толщина такого участка равна  $d$ , системы координат  $(x, y)$  и  $(x', y')$  на входе и выходе совпадают с ограничивающими плоскостями и параллельны друг другу (рис. 5). Описанный выше прибор можно условно назвать изотропным фазосдвигающим устройством (или фазовой пластинкой).

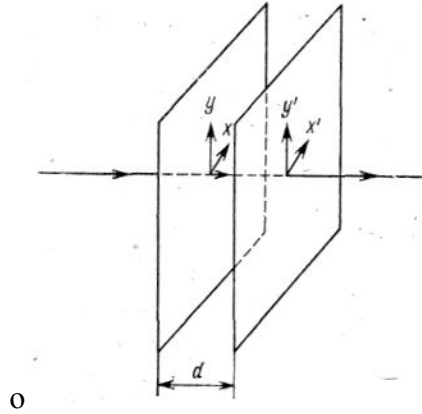


Рис. 5. Плоскопараллельный слой изотропной среды действует как изотропная фазовая пластинка.

2. Предположим, что волна распространяется не через изотропную, а через одноосную линейную двулучепреломляющую среду и что направление распространения перпендикулярно оптической оси этой среды. Если волна линейно-поляризована параллельно оптической оси, то для такой волны показатель преломления среды равен  $n_e$ , и волна распространяется в рассматриваемой среде со скоростью  $c/n_e$ , где  $c$  — скорость света в вакууме. Если же волна линейно-поляризована перпендикулярно оптической оси, то для такой волны среда будет иметь другой показатель преломления  $n_o$  и волна распространяется в среде со скоростью  $c/n_o$ . Величины  $n_o$  и  $n_e$  принято называть обыкновенным и необыкновенным показателями преломления среды. Матрица Джонса подобного устройства представляет собой непосредственное обобщение соотношения (51):

$$(52) T = \begin{bmatrix} \exp\left(\frac{-i2\pi n_e d}{\lambda}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{-i2\pi n_o d}{\lambda}\right) \end{bmatrix} = \exp\left(\frac{-i2\pi n_e d}{\lambda}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{-i2\pi (n_o - n_e) d}{\lambda}\right) \end{bmatrix}$$

Описанный участок среды толщиной  $d$  действует как линейное *фазосдвигающее устройство*, причем фазы компонент электрического вектора вдоль двух выбранных направлений, параллельного и перпендикулярного оптической оси, изменяются по-разному: на  $\frac{2\pi n_e d}{\lambda}$  и на  $\frac{2\pi n_o d}{\lambda}$ , соответственно. Величину  $(n_e - n_o)$  обычно называют двулучепреломлением среды. Если  $n_e < n_o$  (отрицательное двулучепреломление), ось  $x$  (оптическая ось) называется быстрой осью линейного фазосдвигающего устройства, а ось  $y$  — медленной осью. Если же  $n_e > n_o$  (положительное двулучепреломление), ось  $x$  (оптическая ось) и ось  $y$  меняются ролями, т. е. ось  $x$  становится медленной, а ось  $y$  — быстрой осью. Эта терминология основана на том, что волна распространяется быстрее

(медленнее), когда она линейно-поляризована в направлении более низкого (более высокого) показателя преломления.

Отметим, что при рассмотрении влияния участка анизотропной среды на распространяющуюся волну мы не производили реального (физического) выделения этого участка. На практике для получения линейного фазосдвигающего устройства изготавливается плоскопараллельная пластинка из кристалла, в которой оптическая ось параллельна входной и выходной граням. Если на такое устройство из вакуума (или воздуха) падает плоская волна, то его действие только приблизительно описывается матрицей (52). Это объясняется наличием многократных отражений между параллельными гранями фазосдвигающего устройства, которое действует как интерферометр Фабри-Перо. Это делает неприменимыми простые рассуждения, основанные на предположении о наличии только одной распространяющейся вперед волны.

3. В среде, которая является одновременно изотропно-преломляющей и изотропно-поглощающей, запаздывание и затухание плоской волны, прошедшей расстояние  $A$ , не зависит от направления распространения или состояния поляризации волны. Участок среды толщиной  $d$  действует как изотропное фазосдвигающее и поглощающее устройство и описывается матрицей Джонса следующего вида:

$$(53) T = \begin{bmatrix} \exp\left(\frac{-i2\pi(n-ik)d}{\lambda}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{-i2\pi(n-ik)d}{\lambda}\right) \end{bmatrix} = \exp\left(\frac{-i2\pi(n-ik)d}{\lambda}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

которую легко получить из матрицы Джонса для изотропной фазовой пластинки [выражение (51)] путем подстановки комплексного показателя преломления  $(n-ik)$  вместо действительного показателя преломления  $n$ . Величина  $k$  называется коэффициентом поглощения среды. Амплитуда колебания электрического поля (линейного, кругового или эллиптического) затухает с расстоянием согласно выражению

$$(54) A(d) = A(0) \exp\left(\frac{-\alpha d}{2}\right)$$

тогда как изменение интенсивности волны  $I = A^2$  описывается выражением

$$(55) I(d) = A^2(0) \exp(-\alpha d)$$

где  $A(0)$  — начальная амплитуда и

$$(56) \alpha = \frac{4\pi k}{\lambda}$$

Величина  $\alpha$  называется обычно коэффициентом экстинкции. Так как поглощение и преломление среды изотропны, эллипс поляризации остается неизменным.

4. В одноосной линейной дихроичной среде затухание линейно-поляризованной волны, распространяющейся в направлении, перпендикулярном оптической оси (поглощения), зависит от направления колебаний поперечного электрического поля относительно оптической оси. Поглощение максимально для колебаний, параллельных оптической оси и минимально для колебаний, перпендикулярных оси. Пусть  $k_e$  и  $k_o$  означают соответственно «необыкновенный» и «обыкновенный» коэффициенты поглощения среды для света, линейно-поляризованного параллельно и перпендикулярно оптической оси. Для участка среды толщиной  $A$  матрицу Джонса можно получить из выражения (53), обобщив его следующим образом:

$$(57) T = \exp\left(\frac{-i \cdot 2\pi nd}{\lambda}\right) \begin{bmatrix} \exp\left(\frac{-2\pi k_e d}{\lambda}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{-2\pi k_o d}{\lambda}\right) \end{bmatrix}$$

где внешний скалярный множитель описывает изотропную задержку по фазе. Величина  $(k_e - k_o)$  является мерой дихроизма среды и может быть положительной или отрицательной в зависимости от того, какая величина больше,  $k_e$  или  $k_o$ . Участок линейной дихроичной среды, описанной выше, действует как линейный частичный поляризатор. Термин «частичный поляризатор» применяется потому, что падающий- неполяризованный свет, проходя через участок среды, обладающий описанными- свойствами, превращается в частично поляризованный. [Обычно происходит увеличение степени поляризации падающего частично поляризованного света.] Приведенные выше рассуждения основаны на предположении, что участок бесконечной среды не выделяется фактически из среды. Следовательно, для устройства, представляющего собой плоскопараллельную пластинку из линейно-дихроичного материала (с оптической осью, параллельной граням), матрицу Джонса (57) следует рассматривать только как приближение.

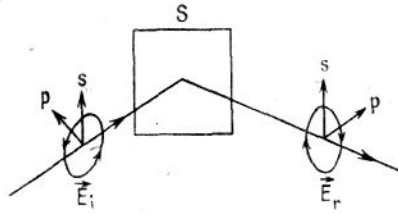
5. Частным случаем линейно-дихроичного прибора является идеальный линейный поляризатор. Для него  $k_e = 0$ ,  $k_o = \infty$  и матрица Джонса принимает простой вид:

$$(58) T = \exp\left(\frac{-i \cdot 2\pi nd}{\lambda}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

где первый сомножитель описывает изотропные свойства преломляющей среды. Для реального линейного поляризатора  $k_e \approx 0$ ,  $k_o \gg 1$ , и матрица (58) применима только как приближение. Идеальный линейный поляризатор свободно пропускает или полностью гасит падающий линейно-поляризованный свет в зависимости от того, параллельно или перпендикулярно направлению линейной поляризации оси пропускания поляризатора. Ось пропускания линейного поляризатора — это ось, вдоль которой коэффициент поглощения равен нулю (или очень мал), тогда как вдоль оси гашения коэффициент поглощения имеет бесконечно большую величину. В приведенном выше примере ось пропускания совпадает с оптической осью дихроизма. Наиболее известный тип дихроичного поляризатора — поляроидная пластинка.

Все описанные выше устройства относятся к устройствам пропускающего типа, так как волна в них видоизменяется при прохождении через среду (изотропную или анизотропную). Однако существует еще другой класс устройств — устройства отражательного типа, в которых волна изменяется при отражении от поверхности среды (изотропной или анизотропной). Основное различие между этими двумя классами устройств заключается в том, что при прохождении через среду устройства пропускающего типа волна изменяется непрерывно, тогда как при отражении (однократном или многократном) от поверхности устройства отражательного типа она испытывает скачкообразное изменение. Простейшее устройство отражательного типа — это устройство, в котором волна испытывает однократное отражение от единственной границы раздела между двумя различными средами. Здесь мы ограничимся рассмотрением отражения света от границы раздела между двумя средами в предположении, что изменение показателя преломления при переходе из одной среды в другую происходит резким скачком (описывается ступенчатой функцией). Обе среды изотропны. Если электрический век-

тор падающей плоской волны параллелен (p) плоскости падения, электрический вектор отраженной волны также параллелен плоскости падения.



**Рис. 6. Отражение света от поверхности S. Направления риз лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения (р параллельно, а s перпендикулярно плоскости падения).**

Подобным же образом, если электрический вектор перпендикулярен (s) плоскости падения, то и в отраженной волне он перпендикулярен плоскости падения. Разлагая электрические векторы падающей  $E_i$  и отраженной  $E_r$  волн на компоненты вдоль направлений p и s (рис. 2.5), отражение можно описать следующим соотношением-

$$(59) E_r = R E_i$$

где матрица Джонса для отражения R имеет вид

$$(60) R = \begin{bmatrix} r_p & 0 \\ 0 & r_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |r_p| \exp(i\delta_{pp}) & 0 \\ 0 & |r_s| \exp(i\delta_{ss}) \end{bmatrix}$$

Диагональные коэффициенты отражения  $r_p$  и  $r_s$  определяются формулами Френеля и в общем случае комплексны.

Каждому из обсуждавшихся выше устройств, «работающих на пропускание», соответствует устройство, «работающее на отражение». В фазосдвигающем устройстве отражательного типа используется полное внутреннее отражение, когда волна падает на границу раздела диэлектрик-диэлектрик со стороны оптически более плотной среды. Если выполняется условие полного отражения  $|r_p| = |r_s| = 1$ , то величину скачков  $\delta_p$  и  $\delta_s$  можно задавать, подбирая значения диэлектрических проницаемостей (показателей преломления) сред и угла падения. На этом принципе основана работа фазосдвигающих устройств типа ромба Френеля. Если при отражении от границы диэлектрик — диэлектрик свет падает из оптически менее плотной среды, то фазовые скачки  $\delta_p$  и  $\delta_s$  принимают «тривиальные» значения 0. или  $\pi$ , в то время как величины  $|R_{pp}|$  и  $|R_{ss}|$  по-прежнему зависят от показателей преломления сред и угла падения. Для любого угла падения, отличного от угла Брюстера, в этом случае мы получаем линейный частичный поляризатор отражательного типа. При угле Брюстера  $|r_p| = 0$  и мы имеем идеальный линейный поляризатор. Если одна из двух сред поглощающая, мы имеем линейное частично поляризующее фазосдвигающее устройство отражательного типа. Оптические ротаторы отражательного типа получаются при отражении света от поверхности оптически активных сред. Однако эффект слишком мал, чтобы на его основе можно было создать практически полезное устройство.

Итак, мы рассмотрели математическое описание состояния поляризации плоских монохроматических волн и их взаимодействия с поляризующими оптическими элементами. В основу этого описания легли понятия вектора Джонса, матрицы Джонса и по-

ляризационной переменной  $\chi$ . На основе этого далее мы перейдем к рассмотрению устройства и принципа работы эллипсометра.

### 3. ТЕОРИЯ ЭЛЛИПСОМЕТРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Как было сказано ранее, в общем случае эллипсометрию можно определить как методику измерения состояний поляризации поляризованной векторной волны. В этой главе мы уделяем особое внимание оптической эллипсометрии поляризованных световых волн.

Хотя измерение состояния поляризации световой волны важно само по себе, к эллипсометрии часто прибегают для того, чтобы получить информацию об оптической системе, которая изменяет состояние поляризации. Здесь рассматривается общая схема эллипсометрии, когда поляризованный световой пучок взаимодействует с исследуемой оптической системой. Это взаимодействие изменяет состояние поляризации волны (а также, весьма вероятно, и другие свойства). Измерение начального и конечного состояний поляризации, выполненное для достаточно большого числа различных исходных состояний, позволяет найти закон преобразования поляризации этой системой, который можно описать, скажем, матрицей Джонса. Чтобы извлечь более полную информацию об оптической системе, чем это удастся сделать с помощью матрицы Джонса, *необходимо изучить с позиций электромагнитной теории света взаимодействие света с веществом внутри системы*. Другими словами, мы должны подробно изучить внутренние процессы, которые изменяют поляризацию и ответственны за внешнее поведение системы, описываемое измеренной матрицей Джонса.

Предполагается, что взаимодействие между световой волной и оптической системой является линейным и не изменяет частоты света. Оптическая система может изменять состояние поляризации исследуемой волны посредством одного из следующих основных процессов или их комбинаций.

*Отражение или преломление.* Когда световая волна отражается или преломляется на границе между двумя разнородными средами, состояние поляризации изменяется скачком. Такое изменение обусловлено тем, что френелевские коэффициенты отражения или пропускания имеют разную величину для линейных поляризаций, параллельной (p) и перпендикулярной (s) плоскости падения.

*Пропускание.* Состояние поляризации здесь изменяется постепенно по мере прохождения света через среду, которая проявляет оптическую анизотропию (анизотропию преломления, поглощения, либо ту и другую).

*Рассеяние.* Оно имеет место, когда световая волна распространяется в среде с пространственно-неоднородным показателем преломления, что может быть связано с наличием рассеивающих центров, как это происходит в аэрозолях или эмульсиях. В отличие от отражения и пропускания, которые мало влияют на коллимацию пучка, рассеяние обычно сопровождается перераспределением рассеянной энергии в широком диапазоне телесных углов.

*Наше внимание далее будет сосредоточено на отражательной эллипсометрии, причем мы будем предполагать, что исследуемая система обладает линейными собственными поляризациями.*

На рис. 7 приведена схема рассматриваемой эллипсометрической установки. Хорошо коллимированный пучок монохроматического или квазимонохроматического циркулярно-поляризованного или неполяризованного (естественного) света от подходящего источника пропускается через поляризующую часть прибора, состоящую из линейного поляризатора Р и линейного фазосдвигающего устройства (52), или компенсатора С. Полностью поляризованный свет, выходящий из поляризующей части прибо-

ра, падает на исследуемую оптическую систему. Состояние поляризации света определяется углами поворота поляризатора и компенсатора вокруг оси пучка. Исследуемая оптическая система  $S$  характеризуется ортогональными линейными собственными поляризациями вдоль осей  $x$  и  $y$  прямоугольных координат. Оптическая система изменяет состояние поляризации падающего светового пучка, если это состояние отличается от ее собственных состояний поляризации. Модифицированное состояние поляризации светового пучка, выходящего из оптической системы, анализируется линейным анализатором  $A$  и расположенным за ним приемником света  $D$ , образующими анализирующую часть прибора. Фотодетектор  $D$  измеряет интенсивность света, прошедшего через последовательность элементов поляризатор-компенсатор-система-анализатор (PCSA).

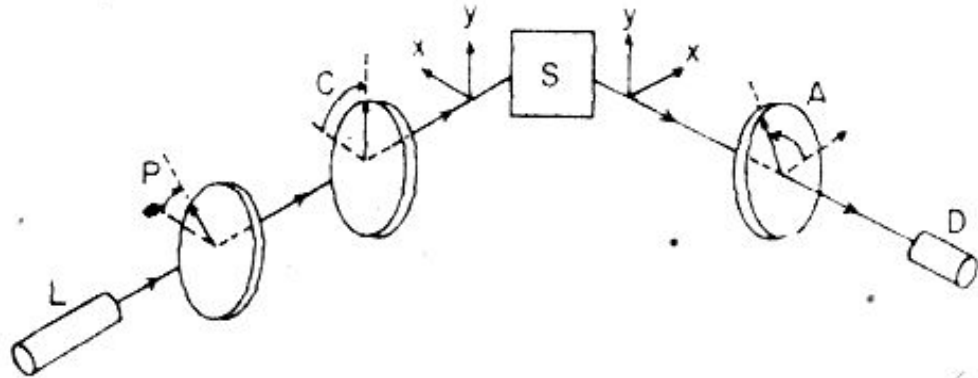


Рис. 7. Эллипсометрическая установка, собранная по схеме PCSA. Поляризирующая часть состоит из линейного поляризатора  $P$  и компенсатора (линейного фазосдвигающего устройства)  $C$ , анализирующая часть — из линейного анализатора  $A$ . Через  $S$  обозначена исследуемая оптическая система с собственными линейными  $x$ - и  $y$ -поляризациями:  $L$  — источник света;  $D$  — детектор. Символы  $P$ ,  $C$  и  $A$  обозначают также азимутальные углы поворота поляризатора, компенсатора и анализатора, измеренные от направления  $x$  линейной собственной поляризации исследуемой оптической системы.

Ориентации поляризатора, компенсатора и анализатора по отношению к оси пучка определяются соответственно азимутальными углами  $P$ ,  $C$  и  $A$  (рис. 7). Для поляризатора и анализатора азимуты  $P$  и  $A$  характеризуют ориентацию их осей пропускания (т. е. направления прошедших линейных собственных поляризаций). Для компенсатора азимут  $C$  определяет ориентацию его быстрой оси (т.е. направление быстрой линейной собственной поляризации). Все азимуты ( $P$ ,  $C$  и  $A$ ) отсчитываются от  $x$ -направления линейной собственной поляризации исследуемой оптической системы, причем им приписывается положительный знак, если вращение происходит против часовой стрелки при наблюдении против направления распространения светового пучка (т. е. навстречу пучку).

### 3.1 Нуль-эллипсометрия

Нулевые методы эллипсометрии основаны на нахождении таких наборов азимутальных углов ( $P$ ,  $C$  и  $A$ ), при которых выполняется *условие гашения*, т. е. интенсивность света, попадающего на фотодетектор равна нулю. Эти наборы азимутальных углов позволят нам в дальнейшем определить отношение собственных поляризаций системы

$$(61) \rho_s = \frac{r_p}{r_s} \frac{|r_p|}{|r_s|} \exp i(\delta_p - \delta_s)$$

Соотношение (61) часто записывают в виде

$$(62) \rho_s = \operatorname{tg} \psi \cdot \exp(i\Delta),$$

где

$$(63) \operatorname{tg} \psi = \frac{|r_p|}{|r_s|}$$

$$\Delta = \delta_p - \delta_s$$

Углы  $\psi$  и  $\Delta$  называются эллипсометрическими углами отражателя. Как видно из соотношений (63)  $\psi$  представляет собой угол, тангенс которого дает отношение ослаблений (или усиления) амплитуд при отражении света с р- и s-поляризацией, величина  $\Delta$  представляет собой разность сдвигов фаз испытываемых при отражении светом с р- и s-поляризацией.

*Задача эллипсометрии состоит с одной стороны в экспериментальном определении эллипсометрических углов (с помощью эллипсометра), с другой – в построении математической модели системы S, позволяющей связать измеренные эллипсометрические углы с реальными физическими параметрами системы.*

В этой главе нами рассматривается задача определения эллипсометрических углов по значениям азимутов (Р, С и А) в положениях гашения (нулевых азимутов).

При исследовании состояния поляризации светового пучка в процессе его распространения через оптическую систему эллипсометра мы будем описывать световой пучок вектором Джонса, а элементы оптической системы эллипсометра — матрицами Джонса. Нами будет рассматриваться распространенная схема в которой компенсатор обладает постоянной фазовой задержкой равной четверти длины волны или  $\pi/2$ . В качестве основной системы отсчета будем использовать систему координат, в которой матрица Джонса того или иного оптического устройства диагональна (предполагается, что одна и та же система координат используется на входе и выходе устройства). Переход от одной системы координат к другой будет осуществляться, как и раньше, с помощью матрицы поворота  $R(\alpha)$ .

Выпишем матрицы Джонса всех оптических элементов, входящих в состав эллипсометра.

$$T_P = K_P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ - матрица Джонса поляризатора}$$

$$T_C = K_C \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \text{ - матрица Джонса компенсатора}$$

$$T_S = \begin{bmatrix} r_p & 0 \\ 0 & r_s \end{bmatrix} \text{ - матрица Джонса исследуемой системы}$$

$$T_A = K_A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ - матрица Джонса анализатора}$$

Сравните соответствующие матрицы с матрицами (52, 58, 60).

Пусть на поляризатор падает циркулярно-поляризованный свет вектор Джонса которого в системе координат связанной с поляризатором равен  $\vec{E}_i = A_i \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ , найдем вектор

Джонса электромагнитной волны, падающей на фотодетектор эллипсометра. Для этого в соответствии с изложенным в предыдущей главе необходимо перемножить матрицы Джонса всех элементов оптической системы, с учетом того, что собственные

поляризации оптических элементов составляют азимутальные углы (P, C и A) с осью x системы координат связанной с исследуемой системой S (см. рис. 7). Запишем выражение для вектора Джонса на выходе системы:

$$(64) \vec{E}_o = T_A R(A) T_S R(-C) T_C R(P-C) T_P \vec{E}_i$$

В выражении (64), после взаимодействия света с одним оптическим элементом, мы с помощью матрицы поворота переходим в систему координат следующего элемента. Это позволяет нам использовать диагональный вид матриц Джонса.

Так сигнал фотодетектора пропорционален интенсивности падающего на него излучения вычислим эту интенсивность в соответствии с формулой (25)  $I = \vec{E}_o^+ \vec{E}_o$ . Выполняя соответствующие математические преобразования интенсивность света падающего на фотодетектор можно записать в виде:

$$(65) I = K \cdot |L|^2,$$

где

$$(66) L = r_p \cos A \cdot [\cos C \cos(P-C) - i \sin C \sin(P-C)] + \\ + r_s \sin A [\sin C \cos(P-C) + i \cos C \sin(P-C)]$$

$$(67) K = K_A K_C K_P A_i$$

Из выражения (66) видно, что интенсивность света, падающего на фотодетектор, является функцией азимутов поляризатора, компенсатора и анализатора и комплексных коэффициентов отражения системы.

Поскольку для получения информации о коэффициентах отражения исследуемой системы нас интересуют такие наборы азимутов, при которых выполняется условие гашения, приравняем интенсивность нулю, это приведет нас к следующему соотношению:

$$(68) \frac{r_p}{r_s} = \rho_s = -tgA \cdot \left[ \frac{tgC + i \cdot tg(P-C)}{1 - i \cdot tgC \cdot tg(P-C)} \right]$$

где набор азимутов (P, C и A) обеспечивает гашение света. Таким образом, на основании выражения (68) мы можем сделать вывод о том, что отношение комплексных коэффициентов отражения исследуемой системы с линейными собственными поляризациями  $\rho_s$  можно измерить при помощи только одного набора нулевых углов (P, C и A).

На практике часто применяется схема эллипсометра с фиксированным положением компенсатора  $C = \pm \pi / 4$ . В этом случае удастся минимизировать ошибки связанные с неидеальностью оптических элементов эллипсометра, а также упростить вычисления.

Рассмотрим случай  $C = \pi / 4$ . В этом случае, используя известное тождество  $(1 - i \cdot tg\theta) / (1 + i \cdot tg\theta) = \exp(-i \cdot 2\theta)$  получаем

$$(69) \rho_s = -tgA \cdot \exp[-i \cdot 2(P - \pi / 4)]$$

При этом если  $(P', A')$  - набор углов отвечающих положению гашения, то другая пара углов

$$(70) (P'', A'') = (P' + \pi / 2, \pi - A')$$

также будет обеспечивать гашение, это легко проверить прямой подстановкой в (69).

Если азимут компенсатора равен  $C = -\pi / 4$ , то вместо (69) мы имеем

$$(71) \rho_s = tgA \cdot \exp[i \cdot 2(P + \pi / 4)]$$

При этом соотношение (70) также остается справедливым.

Имеются правила для обозначения положений различных положений гашения, возникающих при вращении поляризатора и анализатора. Две различимые пары углов поляризатор-анализатор, которые приводят к гашению света на выходе эллипсометра при  $C = \pi/4$ , обозначаются  $(P_2, A_2)$  и  $(P_4, A_4)$ . При этом говорят, что они обеспечивают *гашение в измерительных зонах 2 и 4*. Аналогично пары углов поляризатор-анализатор, которые приводят к гашению света на выходе эллипсометра при  $C = -\pi/4$ , обозначаются  $(P_1, A_1)$  и  $(P_3, A_3)$ . При этом говорят, что они обеспечивают *гашение в измерительных зонах 1 и 3*. Для одного и того же значения азимута компенсатора два положения поляризатора в двух *сопряженных зонах* (2, 4 или 1,3) ортогональны:

$$(72) \quad \begin{aligned} P_4 &= P_2 + \pi/2 \\ P_3 &= P_1 + \pi/2 \end{aligned}$$

Соответствующие азимутальные углы анализатора связаны следующим образом:

$$(73) \quad \begin{aligned} A_2 + A_4 &= \pi \\ A_1 + A_3 &= \pi \end{aligned}$$

Полученные выражения (69, 71, 72, 73) Дают нам теперь возможность записать выражения для введенных ранее эллипсометрических углов  $\psi$  и  $\Delta$  (62) при измерениях в различных зонах:

Зона	P, A	$\psi$ и $\Delta$
1. $C = -\pi/4$	$P_1 = \Delta/2 - \pi/4$ $A_1 = \psi$	$\Delta = 2P_1 + \pi/2$ $\psi = A_1$
2. $C = \pi/4$	$P_2 = -\Delta/2 - \pi/4$ $A_2 = \psi$	$\Delta = -2P_2 - \pi/2$ $\psi = A_2$
3. $C = -\pi/4$	$P_3 = \Delta/2 + \pi/4$ $A_3 = -\psi$	$\Delta = 2P_3 - \pi/2$ $\psi = -A_3$
4. $C = \pi/4$	$P_4 = -\Delta/2 + \pi/4$ $A_4 = -\psi$	$\Delta = -2P_4 + \pi/2$ $\psi = -A_4$

### 3.2 Погрешности эллипсометрических измерений и усреднение по нескольким зонам

В эллипсометрии погрешности измерения отношения  $\rho_s$  собственных значений исследуемой оптической системы являются функциями погрешности измерения азимутальных углов (P, C и A) и несовершенство оптических элементов, через которые проходит световой поток.

В предыдущих разделах предполагалось, что все азимутальные углы измеряются абсолютно точно и что оптические элементы эллипсометра являются идеальными. В реальной ситуации азимутальные углы регистрируются с ошибками; кроме того, неизбежны отклонения характеристик оптических элементов эллипсометра от идеальных.

В качестве примера несовершенных оптических элементов можно назвать линейные поляризаторы, пропускающие эллиптически поляризованный свет с малой эллиптичностью; компенсаторы, действительный фазовый сдвиг которых отличается от номинального значения (например от четверти волны), и входные и выходные окна технологических вакуумных камер через которые производятся измерения, оказывающие,

как правило, существенное влияние на состояние поляризации прошедшего или отраженного светового пучка.

Многие из этих ошибок можно исключить, проводя усреднение измеренных значений  $\psi$  и  $\Delta$  по двум или четырем зонам. Приведем здесь соответствующие соотношения:

$$(74) \quad \begin{aligned} \psi_{2,4} &= -\frac{1}{2}(A_4 - A_2) \\ \Delta_{2,4} &= -(P_2 + P_4) \end{aligned} \quad (75) \quad \begin{aligned} \psi_{1,3} &= -\frac{1}{2}(A_3 - A_1) \\ \Delta_{1,3} &= P_1 + P_3 \end{aligned}$$

$$(76) \quad \begin{aligned} \psi_{1-4} &= -\frac{1}{4}(A_3 - A_1 + A_4 - A_2) \\ \Delta_{1-4} &= \frac{1}{2}(P_1 + P_3 - P_2 - P_4) \end{aligned}$$

## 4. ПОЛЯРИЗУЮЩИЕ ОПТИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ

### 4.1 Линейные поляризаторы

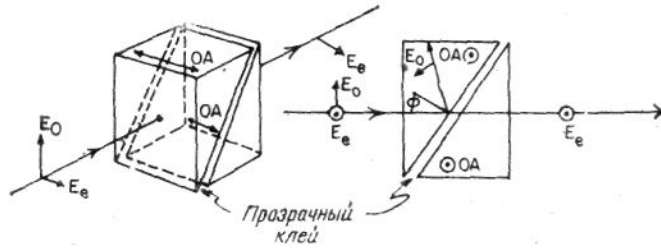
Идеальный линейный поляризатор преобразует свет с любым состоянием поляризации на входе в линейно-поляризованный свет на выходе. Используя термины «собственная поляризация» и «собственные значения», линейный поляризатор можно охарактеризовать как устройство, собственные поляризации которого линейны, а одно собственное значение равно нулю. Так как падающий на поляризатор свет может быть разложен, на две компоненты, «параллельные» его собственным поляризациям, одна из этих компонент всегда полностью гасится, тогда как другая проходит, правда с некоторым ослаблением.

Реальные линейные поляризаторы имеют ортогональные линейные собственные поляризации, скажем  $x$  и  $y$ ; с ними связаны собственные значения  $V_{ex}$  и  $V_{ey}$ , ни одно из которых не равно нулю. Если собственная поляризация  $y$  почти полностью гасится, т. е.  $|V_{ey}| \ll 1$ , то отношение  $e_r = |V_{ex}|^2 / |V_{ey}|^2$  называется отношением гашения поляризатора. Это один из важных параметров, описывающих работу поляризатора. В общем случае, чтобы полностью описать действие поляризатора на состояние поляризации, необходимо указывать отношение комплексных собственных значений  $\alpha_p = V_{ex} / V_{ey}$ .

Гашение одной из двух ортогонально поляризованных компонент света линейным поляризатором может быть обусловлено различными физическими явлениями, а именно оно может достигаться за счет 1) двулучепреломления, 2) дихроизма и 3) отражения. Это обстоятельство лежит в основе классификации линейных поляризаторов.

### Поляризаторы с двулучепреломлением

Когда луч света падает на плоскую поверхность прозрачного одноосного или двухосного анизотропного кристалла он в общем случае дает два преломленных луча в объеме кристалла. Эти два луча пространственно разделены и обладают ортогональными линейными поляризациями. Если в дальнейшем использовать только один из этих лучей, то двойное лучепреломление можно рассматривать как чисто поляризующий механизм. На этом принципе основано много разнообразных поляризаторов. Одним из наиболее распространенных поляризаторов, основанных на двулучепреломлении, является призма Глана-Томпсона. Как показано на рис. 8, призма Глана — Томпсона состоит из двух кальцитовых призм, которые либо склеены оптически прозрачным изотропным клеем (например, канадским бальзамом), либо разделены малым воздушным зазором. Призма второго типа (обычно называемая призмой Глана - Фуко) может использоваться для работы в ближней ультрафиолетовой области электромагнитного спектра. Оптические оси обеих половинок призмы параллельны друг другу и плоскостям параллельных входной и выходной граней. Принцип действия такого устройства заключается в следующем. Свет, падающий перпендикулярно на одну из граней призмы, проходит до границы между двумя половинками призмы, не испытывая преломления.



**Рис. 8.** Призма Глана-Томпсона состоит из двух склеенных кальцитовых призм с параллельными оптическими осями (ОА). Призма действует как поляризатор, поскольку обыкновенный луч (вектор  $E_o$ ) испытывает полное внутреннее отражение, так что проходит только необыкновенный луч (вектор  $E_e$ ).

Этот свет можно разложить на две компоненты, электрические векторы которых направлены параллельно и перпендикулярно оптической оси. Для двух ортогонально поляризованных компонент волны величина скачка показателя преломления на границе кальцит — зазор имеет разную величину. Для линейной поляризации, параллельной оптической оси (необыкновенный луч), скачок равен  $n_e - n_g$ , а для поляризации, перпендикулярной оси (обыкновенный луч), он равен  $n_o - n_g$ . Если и  $n_o$ , и  $n_e$  больше, чем  $n_g$  (это условие всегда справедливо для воздушного зазора, где  $n_g = 1$  но может удовлетворяться и при выборе подходящего клея), а угол падения  $\varphi$  на границу (который определяется в основном геометрией призмы) таков, что  $n_g / n_o < \sin \varphi < n_g / n_e$ , то обыкновенная компонента луча испытывает полное внутреннее отражение, а необыкновенная проходит. Для гашения луча, претерпевающего полное внутреннее отражение, плоскость призмы, на которую он падает, обычно матируют и чернят.

Условие полного внутреннего отражения обыкновенного луча продолжает выполняться, если угол падения его на одну из входных плоскостей призмы лежит в пределах «допустимого» телесного угла. В этом случае падающий и выходящий лучи не коллинеарны; они пространственно смещены на величину, пропорциональную полной толщине призмы. Если грани призмы не параллельны, появляется угловое смещение между падающим и прошедшим лучами, которое пропорционально углу при вершине «клина», образуемого этими плоскостями. При использовании таких призм в эллипсомере наряду с отношением гашения, типичная величина которого для призм Глана-Томпсона равна  $10^5$ , необходимо знать и величину угла клина.

## Дихроичные поляризаторы

В некоторых поглощающих средах затухание, испытываемое линейно-поляризованным светом, зависит от направления линейной поляризации. Такую среду называют линейно-дихроичной. Поглощение имеет максимальную и минимальную величину в тех случаях, когда направление колебаний электрического поля совпадает с двумя взаимно перпендикулярными направлениями, называемыми главными осями дихроизма. Когда произвольно поляризованный пучок света проходит через такую среду, его линейная поляризация увеличивается из-за избирательного поглощения одной из компонент поляризации. Когда луч проходит достаточно большое расстояние в среде, одна из компонент может почти полностью поглотиться.

В естественных кристаллах обычно наблюдается и линейный дихроизм, и линейное двулучепреломление, хотя в пределах определенной спектральной области, тот или

другой механизм может быть выражен сильнее (интегральное уравнение Крамерса-Кронига связывает оба эти свойства с длиной волны). В качестве примера можно привести турмалин, в котором ярко выражен, дихроизм в видимой области спектра.

Дихроизм можно создать искусственным путем; для этого в изотропную прозрачную матрицу вводят иглообразные частицы (или макромолекулы) и ориентируют их определенным образом. Тогда линейно-поляризованный свет, электрический вектор которого параллелен, длине иглолок, поглощается сильнее, чем свет, поляризованный перпендикулярно иглолкам. Разнообразные типы дихроичных поляризаторов изготавливаются из поляроидных пленок. Они обычно имеют форму пластинок толщиной 1 мм и иногда называются плоскими поляризаторами. Отношение гашения этих поляризаторов, как правило, на один или два порядка ниже ( $\sim 10^3 - 10^4$ ), чем у кристаллических (двулучепреломляющих) поляризаторов. Кроме того, спектральные окна (области прозрачности) поляроидных плоских поляризаторов более ограничены, чем у кристаллических поляризаторов.

К другому типу поляризаторов, которые работают по тому же принципу, что и дихроичные поляризаторы, относятся металлические «проволочные» решетки. Они представляют собой прозрачную подложку с вытравленным рельефом в виде полосок, на которые, наносится металлическое покрытие («проволочки»), причем расстояние между такими «проволочками» должно быть много меньше длины волны света. Каждая «проволочка» представляет собой как бы «вытянутую иглу» дихроичного поляризатора. В этом случае сильное поглощение испытывают только параллельные проволочкам линейные колебания электрического поля. Несмотря на то что отношение поглощения для решеток-поляризаторов весьма невелико  $\sim 10 - 10^3$ , они играют важную роль в эллипсометрии в ИК области спектра.

## **Отражательные поляризаторы**

Как известно, при отражении света от идеально гладкой поверхности диэлектрика компонента поля, электрический вектор которой параллелен плоскости падения, полностью гасится при падении луча света под углом Брюстера. Поляризаторы, основанные на этом принципе, обычно не используются в видимой области, но с успехом применяются в ИК области спектра. Чтобы получить отражающий поляризатор с коллинеарными падающим и прошедшим лучами (что необходимо для эллипсометрии), используют систему, в которой свет испытывает отражение 3 раза. Такой поляризатор можно вращать для изменения азимута линейной поляризации выходящего пучка.

На основе системы пленка-подложка можно изготовить поляризатор, который гасит либо параллельную (p), либо перпендикулярную (s) компоненты поляризованного света. Этот тип поляризаторов в настоящее время, по-видимому, не выпускается промышленностью, так что нет никаких сведений об использовании их в эллипсометрии. Однако они перспективны, в особенности для той области длин волн, в которой непригодны классические типы поляризаторов.

## **4.2 Фазосдвигающие элементы (компенсаторы)**

Фазосдвигающим называется оптический элемент, создающий относительный сдвиг фаз между двумя ортогонально поляризованными компонентами, на которые можно разложить падающий на элемент свет, без изменения отношения их амплитуд.

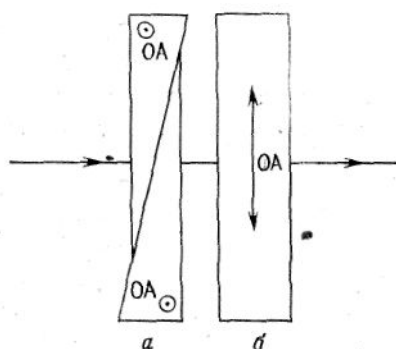
Фазосдвигающий элемент характеризуется двумя ортогональными компонентами — его собственными поляризациями, которые в общем случае могут быть линейными, круговыми или эллиптическими. В эллипсометрии используются линейные фазосдвигающие элементы. Для линейного фазосдвигающего элемента характерно наличие двух направлений, или осей: быстрой и медленной. При прохождении света через фазосдвигающий элемент компонента падающего поляризованного света с электрическим вектором, параллельным медленной оси, испытывает задержку по фазе относительно компоненты с электрическим вектором, параллельным быстрой оси. Когда относительный сдвиг по фазе составляет  $\pi/2$  или  $\pi$ , фазосдвигающий элемент называют соответственно четвертьволновым или полуволновым. В эллипсометрии чаще всего используется четвертьволновое фазосдвигающее устройство.

Относительный сдвиг по фазе между двумя линейными компонентами поляризованного света может возникать либо при прохождении через линейную двулучепреломляющую среду, либо в результате полного внутреннего отражения.

## Двулучепреломляющие фазосдвигающие элементы

Рассмотрим пластину из одноосного анизотропного кристалла, оптическая ось которого параллельна ее входной и выходной плоскостям. Свет, перпендикулярно падающий на пластину, разделяется на две компоненты, линейно поляризованные параллельно и перпендикулярно оптической оси. Если обозначить через  $n_o$  и  $n_e$  обыкновенный и необыкновенный показатели преломления кристалла, то скорость прохождения через кристалл компонент, поляризованных параллельно или перпендикулярно оптической оси, равна  $c/n_o$  или  $c/n_e$  ( $c$  — скорость света в вакууме). Общий сдвиг фазы, возникающий за счет разности скоростей обыкновенной и необыкновенной компонент, при толщине пластины  $d$  равен  $(2\pi d/\lambda)(n_o - n_e)$ , где  $\lambda$  — длина волны света в вакууме. С помощью, вышеприведенного упрощенного выражения можно рассчитать толщину материала с известным двулучепреломлением  $(n_o - n_e)$ , необходимую для получения заданного сдвига фазы. Это выражение справедливо только в том случае, когда исключены эффекты, обусловленные многократным отражением света между плоскопараллельными гранями двулучепреломляющей пластинки. Было выведено более точное выражение, учитывающее многократное отражение. Теория, на основе которой получен этот вывод, предсказывает различное пропускание вдоль быстрой и медленной осей. Этот частный случай «дихроизма», вызванного интерференцией, имеет большое значение при интерпретации эллипсометрических измерений.

Фазосдвигающие двулучепреломляющие элементы чаще всего изготавливаются из кварца и слюды. Кварц оптически активен, хотя его оптическая активность не проявляется, если свет проходит перпендикулярно оптической оси, как это обычно имеет место в фазосдвигающих элементах. Слюда — двухосный анизотропный материал. Однако две главные оси эллипсоида диэлектрической проницаемости параллельны плоскости пластинки, поэтому для перпендикулярно падающего света она ведет себя как одноосный кристалл. В качестве материала для изготовления компенсаторов в принципе пригоден кальцит. Однако он обладает сравнительно большим двулучепреломлением, поэтому для получения необходимого сдвига фазы нужно изготавливать очень тонкие пластинки; кроме того, высокие требования предъявляются к плоскопараллельности и шероховатости входной и выходной плоскостей. Все это создает серьезные практические трудности.



4

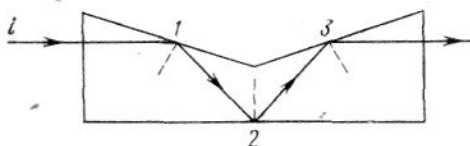
**Рис. 8.** Компенсатор Бабинэ-Солейля состоит из двух кварцевых блоков а и б. Блок а составлен из двух клиньев, которые могут скользить относительно друг друга и имеют оптическую ось ОА. Блок б сплошной; его оптическая ось ОА перпендикулярна оси блока а.

Для спектроскопической эллипсометрии желательно иметь возможность перестраивать вносимый компенсатором сдвиг фаз, чтобы при изменении длины волны компенсатор всегда представлял собой четвертьволновую пластинку. Одним из хорошо известных перестраиваемых компенсаторов является компенсатор Бабинэ-Солейля (рис. 8). Он состоит из двух блоков кварца: блока переменной толщины и блока фиксированной толщины. Блок переменной толщины образован двумя клиньями с параллельными оптическими осями, сдвигающимися относительно друг друга; при этом их общая толщина изменяется. Блок постоянной толщины сделан из кварцевой пластины, оптическая ось которой параллельна входной и выходной граням. Оба блока склеиваются вместе так, чтобы их оптические оси были перпендикулярны друг другу. Когда оба блока имеют одинаковую толщину, сдвиг фазы равен нулю; если же имеется разность толщин  $d$ , то сдвиг фазы приблизительно равен  $(2\pi d / \lambda)(n_o - n_e)$ .

Настройка компенсатора Бабинэ производится путем смещения одного из двух клиньев блока переменной толщины относительно другого; эта операция обычно выполняется при помощи точного микрометра, прокалиброванного в величинах сдвига фазы.

### **Компенсаторы, основанные на явлении полного внутреннего отражения. Ромб Френеля.**

В ромбе Френеля используется разность сдвигов фаз, возникающих при полном внутреннем отражении р- и s-компонент светового пучка.



**Рис. 9.** Компенсатор (ромб Френеля), в котором используются три отражения 1—3 для сохранения коллинеарности входящего (0) и выходящего (1) пучков света.

Одно из таких устройств показано на рис. 9. В нем используются три отражения, что обеспечивает коллинеарность падающего и прошедшего пучков света. Нанося на ромб соответствующее покрытие, его можно сделать достаточно ахроматическим; при изменении длины волны в видимой области сдвиг фазы близок к  $\pi/2$ , т. е. элемент

действует как четвертьволновая пластина. Ахроматизм ромба Френеля делает его весьма удобным для спектроскопической эллипсометрии.

### **4.3 Деполяризаторы**

Деполяризаторы представляют собой устройства, функциональное назначение которых заключается в разупорядочении состояния поляризации светового пучка. В идеальном случае они могут преобразовывать поляризованный либо частично поляризованный свет в неполяризованный (естественный) свет. Практически это условие невыполнимо, хотя приемлемую деполяризацию можно получить, например, с помощью толстой пластинки материала с сильным двулучепреломлением, толщина которой флюктуирует по сечению пучка света. В этом случае световой пучок поляризуется в каждой точке своего сечения, но поляризация меняется от точки к точке случайным образом; в результате суммирования по сечению пучка мы получаем удовлетворительную деполяризацию. Одним из примеров «псевдодеполяризатора» такого типа может служить клин из кристаллического кальцита.

Деполяризаторы устанавливаются в эллипсометре до и после основных элементов оптической схемы. Деполяризатор, помещенный между источником света и эллипсометром, исключает влияние поляризации источника, а деполяризатор, помещенный перед фотоприемником устраняет влияние поляризации падающего света на чувствительность приемника.

## 5. ОТРАЖЕНИЕ ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

Как говорилось ранее для того, чтобы связать результаты эллипсометрических измерений с физическими свойствами конкретной системы, необходимо построить её математическую модель. В этом разделе мы изучим простейшую отражательную систему – границу раздела двух сред.

Рассмотрим отражение и пропускание плоской световой волны, наклонно падающей на плоскую границу между двумя полубесконечными однородными оптически изотропными средами 0 и 1 с комплексными показателями преломления  $N_0$  и  $N_1$  ( $N = n - i \cdot k$ ) (рис. 10). Предполагается, что изменение показателя преломления на границе раздела происходит резко (ступенчатая функция).

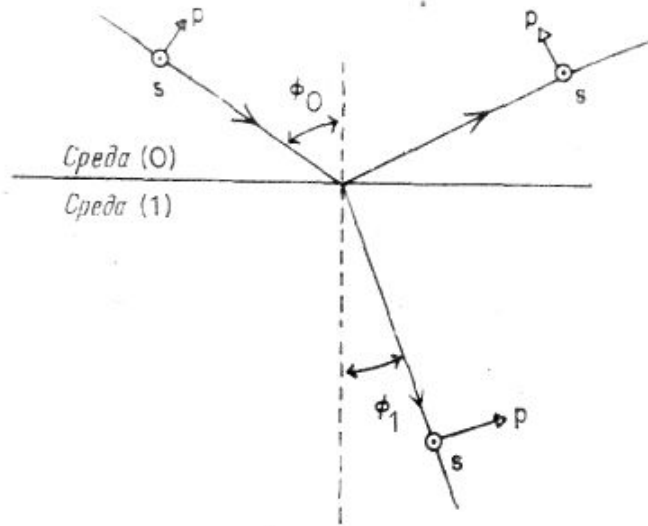


Рис. 10. Отражение и пропускание плоской волны, падающей под углом к плоской границе раздела между двумя полубесконечными средами 0 и 1. Через  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  обозначены углы падения и преломления; p и s-оси; параллельная и перпендикулярная плоскости падения.

Как известно из курсов электродинамики и оптики, подобная система может быть описана формулами Френеля.

Пусть  $(E_{ip}, E_{is})$ ,  $(E_{rp}, E_{rs})$ ,  $(E_{tp}, E_{ts})$  представляют собой комплексные амплитуды компонент электрических векторов падающей, отраженной и прошедшей волн в точках непосредственно над и под границей раздела. Формулы Френеля запишутся тогда следующим образом:

$$(77) \frac{E_{rp}}{E_{rs}} = r_p = \frac{N_1 \cos \varphi_0 - N_0 \cos \varphi_1}{N_1 \cos \varphi_0 + N_0 \cos \varphi_1}$$

$$(78) \frac{E_{rs}}{E_{rs}} = r_s = \frac{N_0 \cos \varphi_0 - N_1 \cos \varphi_1}{N_0 \cos \varphi_0 + N_1 \cos \varphi_1}$$

$$(79) \frac{E_{tp}}{E_{ts}} = t_p = \frac{2 N_0 \cos \varphi_0}{N_1 \cos \varphi_0 + N_0 \cos \varphi_1}$$

$$(80) \frac{E_{ts}}{E_{is}} = t_s = \frac{2N_0 \cos \varphi_0}{N_0 \cos \varphi_0 + N_1 \cos \varphi_1}$$

Эти формулы определяют френелевские коэффициенты отражения ( $r$ ) и пропускания ( $t$ ) по комплексной амплитуде для р- и s-поляризаций.

Необходимо отметить, что выражения (77)–(80) основаны на таком выборе р- и s-направлений, при котором эти направления совместно с направлениями распространения падающей, отраженной и прошедшей волн образуют правосторонние декартовы системы координат (рис. 10).

Чтобы исследовать влияние отражения и преломления (или пропускания) на амплитуду и фазу волны по отдельности, запишем комплексные френелевские коэффициенты в виде

$$(81) r_p = |r_p| \exp(i \cdot \delta_{rp})$$

$$(82) r_s = |r_s| \exp(i \cdot \delta_{rs})$$

$$(83) t_p = |t_p| \exp(i \cdot \delta_{tp})$$

$$(84) t_s = |t_s| \exp(i \cdot \delta_{ts})$$

Величины  $|r_p|$ ,  $|r_s|$ ,  $|t_p|$ ,  $|t_s|$  дают отношения амплитуд колебаний электрических векторов отраженной и прошедшей волн к амплитуде падающей волны, когда последняя поляризована параллельно или перпендикулярно плоскости падения. Величины  $\delta_{rp}$  и  $\delta_{tp}$  представляют собой фазовые сдвиги при отражении и преломлении, которые претерпевают электрические колебания, параллельные плоскости падения. Аналогичный смысл имеют  $\delta_{rs}$  и  $\delta_{ts}$  для колебаний, перпендикулярных плоскости падения.

Если падающая волна поляризована произвольным образом (т. е. не находится в р- и s-линейных состояниях), поляризации отраженной и прошедшей волн будут отличаться от состояния поляризации падающей волны. Это вытекает непосредственно из того факта, что френелевские коэффициенты для р- и s-компонент различны, так что амплитудные и фазовые соотношения между этими двумя компонентами изменяются при отражении и преломлении. Очевидно, что изменение поляризации будет иметь место, если либо модули, либо фазовые углы (либо те и другие) френелевских коэффициентов отражения ( $r_p$  и  $r_s$ ) или преломления ( $t_p$  и  $t_s$ ) различны.

Метод отражательной эллипсометрии основан на измерении состояний поляризации падающей и отраженной волн, что позволяет определять отношение  $\rho$  комплексных френелевских коэффициентов отражения для р- и s-поляризаций (61)–(63).

Если мы подставим в (61) значения  $r_p$  и  $r_s$  из (77) и (80) и используем закон Снеллиуса, то получим уравнение, которое позволяет выразить отношение  $N_1/N_0$  только через  $\rho$  и  $\varphi_0$ :

$$(85) \frac{N_1}{N_0} = \sqrt{\sin \varphi_0 \left[ 1 + \left( \frac{1-\rho}{1+\rho} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0 \right]}$$

или в несколько иной, но эквивалентной форме:

$$(86) N_1 = N_0 \cdot \operatorname{tg} \varphi_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{4\rho}{(1+\rho)^2} \sin^2 \varphi_0}$$

Из выражений (85-86) видно, что комплексный показатель преломления среды 1 можно определить, если известны показатель преломления среды 0 (среда падения) и эллипсометрическое отношение  $\rho$ , измеренное при одном угле падения  $\varphi_0$ .

Другими величинами, которые могут быть измерены, являются отражательные способности

$$(87) \quad \begin{aligned} R_p &= |r_p|^2 \\ R_s &= |r_s|^2 \end{aligned}$$

представляющие собой доли обоей интенсивности падающей плоской волны, приходящиеся на отраженные волны с р- и s-поляризацией.

На рис. 11-19 показаны изменения фазовых сдвигов  $\delta_{rp}$  и  $\delta_{rs}$  и отражательных способностей  $R_p$  и  $R_s$  при изменении угла падения  $\varphi(=\varphi_0)$  когда свет падает из вакуума (или воздуха) на поверхность прозрачного диэлектрика, полупроводника или металла. Показаны также изменения эллипсометрических углов  $\Delta$  и  $\psi$  при изменении угла падения в тех же условиях.

Если р-поляризованная световая волна падает на границу между двумя прозрачными средами, то при некотором угле падения, который называется *углом Брюстера*  $\varphi_B$  отраженная волна полностью исчезает и падающая волна полностью преломляется во вторую среду. Легко убедиться, что угол  $\varphi_B$  при котором  $r_p = 0$  определяется соотношением

$$(88) \quad \operatorname{tg} \varphi_B = \frac{n_1}{n_0}$$

где  $n_0$  и  $n_1$  — показатели преломления рассматриваемых сред. Из рис. 11 и 12 видно, что для р-поляризованного света при угле Брюстера отражательная способность  $R_p$  достигает минимального значения, равного нулю, а фазовый сдвиг  $\delta_{rp}$  изменяется скачком от  $2\pi$  ( $\varphi_0 < \varphi_B$ ) до  $\pi$  ( $\varphi_0 > \varphi_B$ ). Если падающая плоская волна s-поляризована, то отражательная способность  $R_s$  монотонно увеличивается, не проходя через минимум при угле Брюстера (рис. 12); фазовый сдвиг  $\delta_{rs}$  остается постоянным и равным  $\pi$  для всех углов падения (рис. 11). Соответствующие изменения эллипсометрических углов  $\Delta$  и  $\psi$  показаны на рис. 13. В частности отметим, что величина  $\Delta = \delta_{rp} - \delta_{rs}$  изменяется скачком от значения  $\pi$  при угле, немного меньшем угла Брюстера  $\varphi_B$ , до нуля при угле, немного превышающем его, в то время как  $\psi$  достигает минимального значения, равного нулю, при  $\varphi_B$ . Если неполяризованный или частично поляризованный свет падает под углом Брюстера, отраженный свет полностью s-поляризован (перпендикулярно плоскости падения). По этой причине иногда вместо угла Брюстера используют термин поляризующий угол, или угол полной поляризации. На явлении полной поляризации при отражении под углом Брюстера основан целый класс инфракрасных отражательных поляризаторов.

Если произвольно поляризованная плоская волна падает на границу двух прозрачных сред со стороны среды с более высоким показателем преломления, то возможно полное отражение. Оно имеет место при углах падения, превышающих критический угол  $\varphi_C$ , который определяется соотношением

$$(89) \sin \varphi_C = \frac{n_1}{n_0}$$

где  $n_0$  и  $n_1$ , как и раньше, — показатели преломления рассматриваемых сред, и  $n_0 > n_1$ . В условиях полного отражения модули коэффициентов отражения Френеля для р- и s-поляризаций равны единице, в то время как соответствующие им фазовые сдвиги  $\delta_{rp}$  и  $\delta_{rs}$  определяются следующим образом:

$$(90) \operatorname{tg} \left( \frac{\delta_{rp}}{2} \right) = \frac{\frac{n_0}{n_1} \sqrt{\left( \frac{n_0}{n_1} \right)^2 \sin^2 \varphi_0 - 1}}{\cos \varphi_0}$$

$$(91) \operatorname{tg} \left( \frac{\delta_{rs}}{2} \right) = \frac{\frac{n_1}{n_0} \sqrt{\left( \frac{n_0}{n_1} \right)^2 \sin^2 \varphi_0 - 1}}{\cos \varphi_0}$$

Эллипсометрический угол  $\Delta$  определяется из выражения

$$(92) \operatorname{tg} \left( \frac{\Delta}{2} \right) = \frac{\frac{n_1}{n_0} \sqrt{\left( \frac{n_0}{n_1} \right)^2 \sin^2 \varphi_0 - 1}}{\sin \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_0}$$

Соотношения (90) — (92) выводятся из выражений (77) - (80) для коэффициентов Френеля. На рис. 20 и 21 показано изменение фазовых сдвигов  $\delta_{rp}$  и  $\delta_{rs}$  и отражательных способностей  $R_p$  и  $R_s$  в зависимости от угла падения при отражении света от границы стекло — воздух. На рис. 22 показаны соответствующие изменения эллипсометрических параметров  $\Delta$  и  $\psi = \arctg \sqrt{R_p / R_s}$ . Отметим, что при  $\varphi_0 \geq \varphi_C$  угол  $\psi$  равен  $\pi / 4$ .

Если мы вернемся к рис. 15 и 18, то увидим, что для поглощающего материала (полупроводника или металла) отражательная способность  $R_p$  для р-поляризованного света не достигает нуля при изменении угла падения, а имеет минимум, величина которого зависит от значения коэффициента поглощения  $k$ . Угол падения, при котором величина  $R_p$  минимальна, называется псевдобрюстеровским углом  $\varphi_B$ . Другим важным углом падения является главный угол  $\varphi_p$ , при котором разность  $\Delta$  между фазовыми сдвигами  $\delta_{rp}$  и  $\delta_{rs}$ , испытываемыми линейными р- и s-колебаниями при отражении, равна  $\pi / 2$ . Различие между псевдобрюстеровским углом и главным углом обычно мало (в видимой области спектра менее  $1^\circ$ ) и приближается к нулю, когда коэффициент поглощения  $k$  достигает нуля в совершенном диэлектрике. Заметим, что для полупроводника (рис. 16) или для металла (рис. 19) в окрестностях главного угла падения имеет место плавное изменение угла  $\Delta$ , в то время как для диэлектрика при переходе через главный угол падения угол  $\Delta$  изменяется скачком (рис. 13). Чем меньше величина коэффициента поглощения, тем резче изменение угла  $\Delta$  вблизи угла падения. Падающий под главным углом линейно-поляризованный свет, азимут которого, отсчитываемый от плоскости падения, не равен нулю или  $\pi / 2$ , отражается эллиптически поляризованным, причем большая и малая оси эллипса поляризации расположены параллельно и перпендикулярно плоскости падения. Это следует из того, что р- и s-компоненты элек-

трического вектора, которые находятся в фазе перед отражением, после него приобретают сдвиг по фазе, равный  $\pi/2$  ( $\Delta = \pi/2$ ).

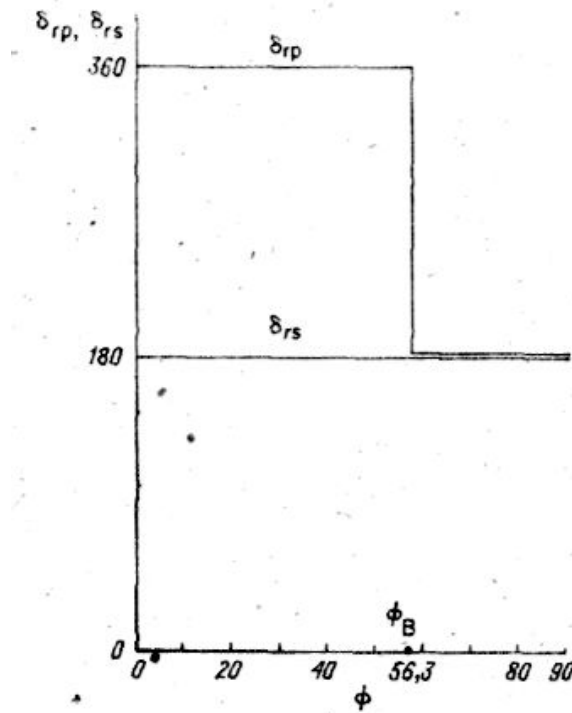


Рис. 11. Зависимость фазовых сдвигов  $\delta_{rp}$  и  $\delta_{rs}$  для р- и s-поляризаций от угла падения  $\varphi$  (градусы) при отражении на границе раздела воздух-стекло  $\lambda = 5461\text{Å}$ ,  $N_{\text{стекло}} = 1,50$ .

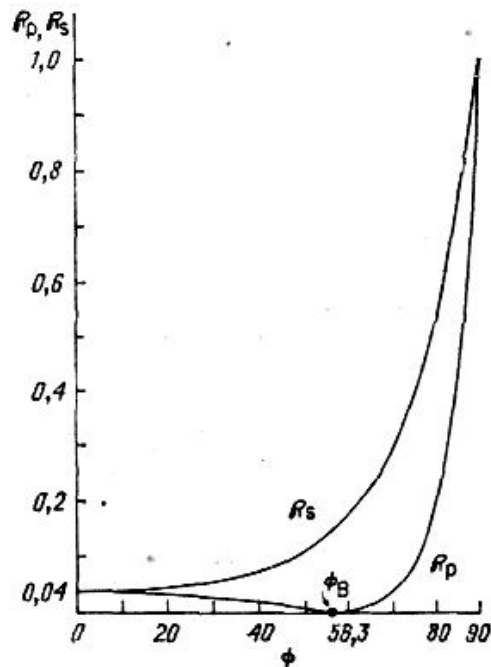


Рис. 12. Зависимость отражательной способности (по интенсивности)  $R_p$  и  $R_s$  для р- и s-поляризаций от угла падения  $\varphi$  (градусы) при отражении на границе раздела воздух-стекло  $\lambda = 5461\text{Å}$ ,  $N_{\text{стекло}} = 1,50$ .

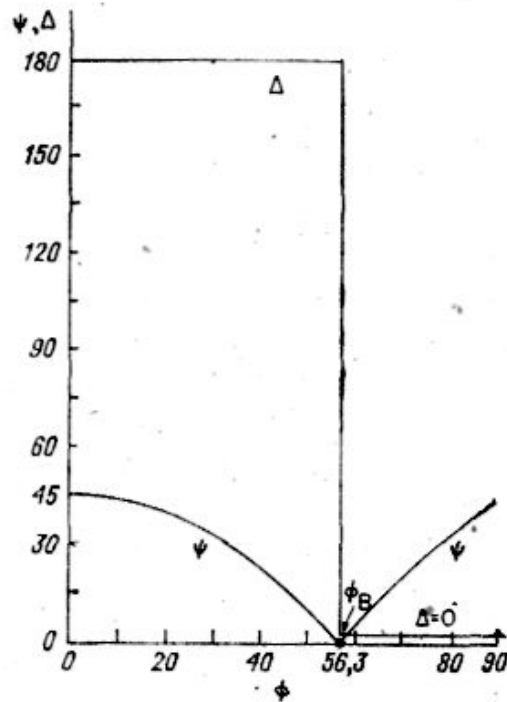


Рис. 13. Зависимость эллипсометрических углов  $\psi$  и  $\Delta$  от угла падения  $\varphi$  (градусы) при отражении на границе раздела воздух-стекло  $\lambda = 5461\text{Å}$ ,  $N_{\text{стекло}} = 1,50$ .

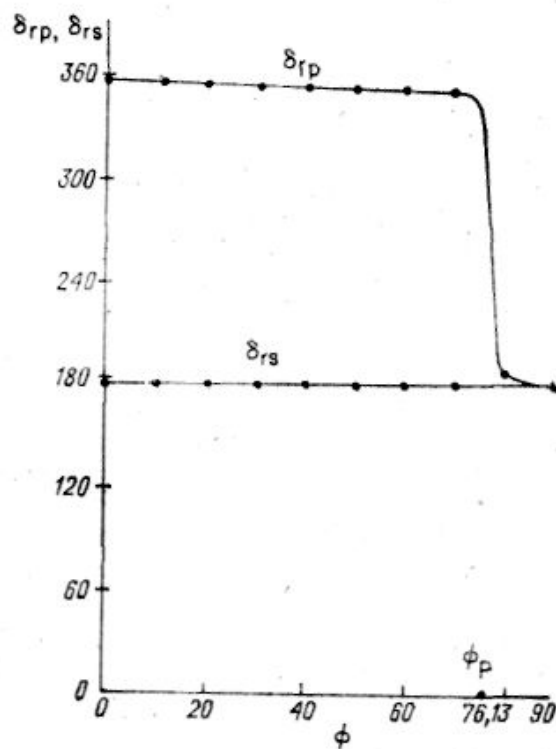


Рис. 14. Зависимость фазовых сдвигов  $\delta_{rp}$  и  $\delta_{rs}$  для р- и s-поляризаций от угла падения  $\varphi$  (градусы) при отражении на границе раздела воздух-кремний;  $\lambda = 5461\text{Å}$ ,  $N_{Si} = 4,05 - i \cdot 0,028$ .

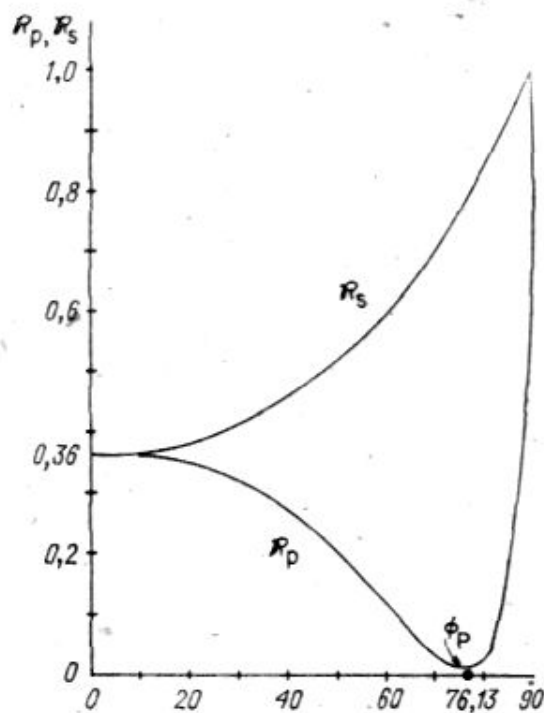


Рис. 15. Зависимость отражательной способности (по интенсивности)  $R_p$  и  $R_s$  для р- и s-поляризаций от угла падения  $\varphi$  (градусы) при отражении на границе раздела воздух-кремний;  $\lambda = 5461\text{Å}$ ,  $N_{Si} = 4,05 - i \cdot 0,028$ .

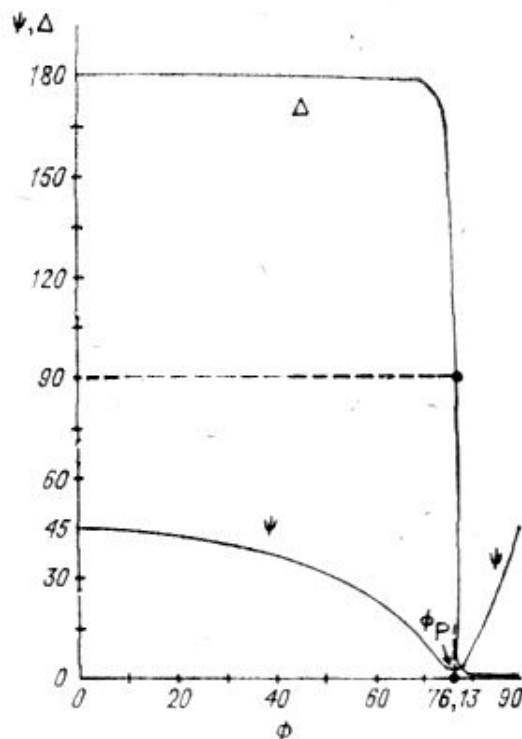


Рис. 16. Зависимость эллипсометрических углов  $\psi$  и  $\Delta$  от угла падения  $\varphi$  (градусы) при отражении на границе раздела воздух-кремний;  $\lambda = 5461\text{Å}$ ,  $N_{Si} = 4,05 - i \cdot 0,028$ .

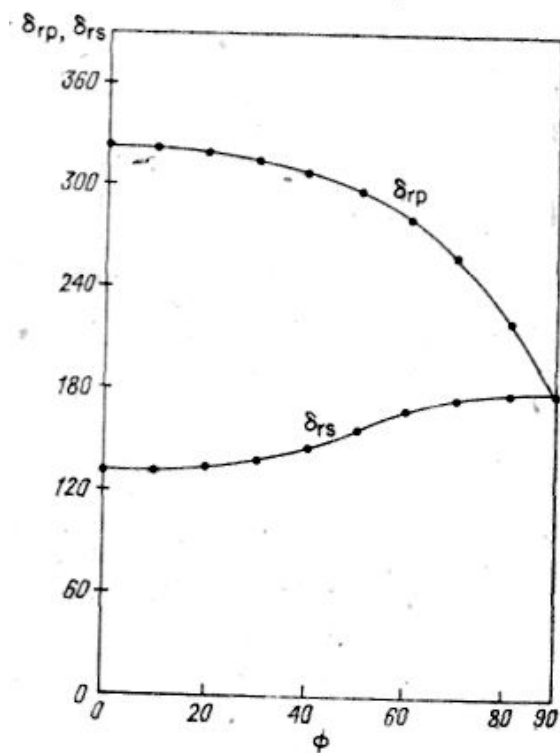


Рис. 17. Зависимость фазовых сдвигов  $\delta_{rp}$  и  $\delta_{rs}$  для р- и s-поляризаций от угла падения  $\varphi$  (градусы) при отражении на границе раздела воздух-золото;  $\lambda = 5461\text{Å}$ ,  $N_{Au} = 0,35 - i \cdot 2,45$ .

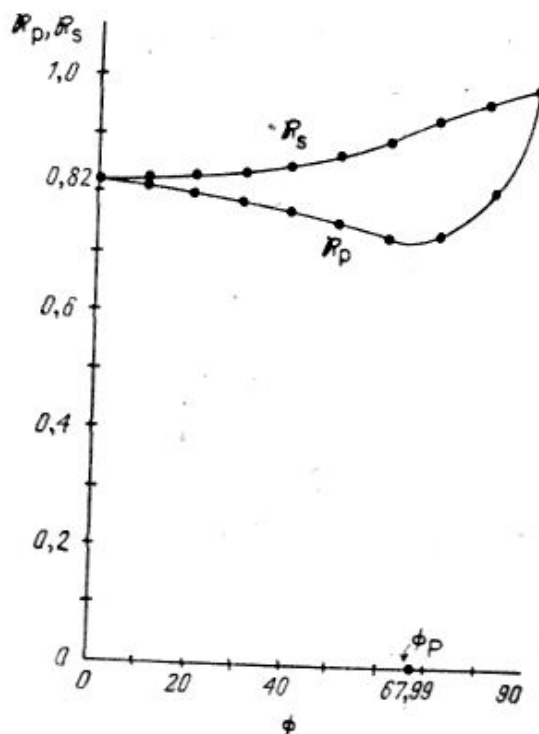


Рис. 18. Зависимость отражательной способности (по интенсивности)  $R_p$  и  $R_s$  для р- и s-поляризаций от угла падения  $\varphi$  (градусы) при отражении на границе раздела воздух-золото;  $\lambda = 5461\text{Å}$ ,  $N_{Au} = 0,35 - i \cdot 2,45$ .

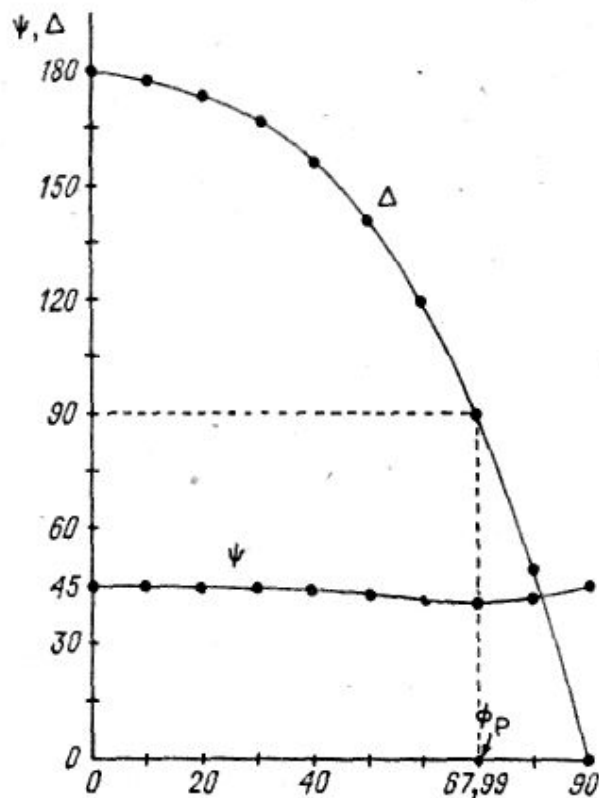


Рис. 19. Зависимость эллипсометрических углов  $\psi$  и  $\Delta$  от угла падения  $\varphi$  (градусы) при отражении на границе раздела воздух-золото;  $\lambda = 5461\text{Å}$ ,  $N_{Au} = 0,35 - i \cdot 2,45$ .

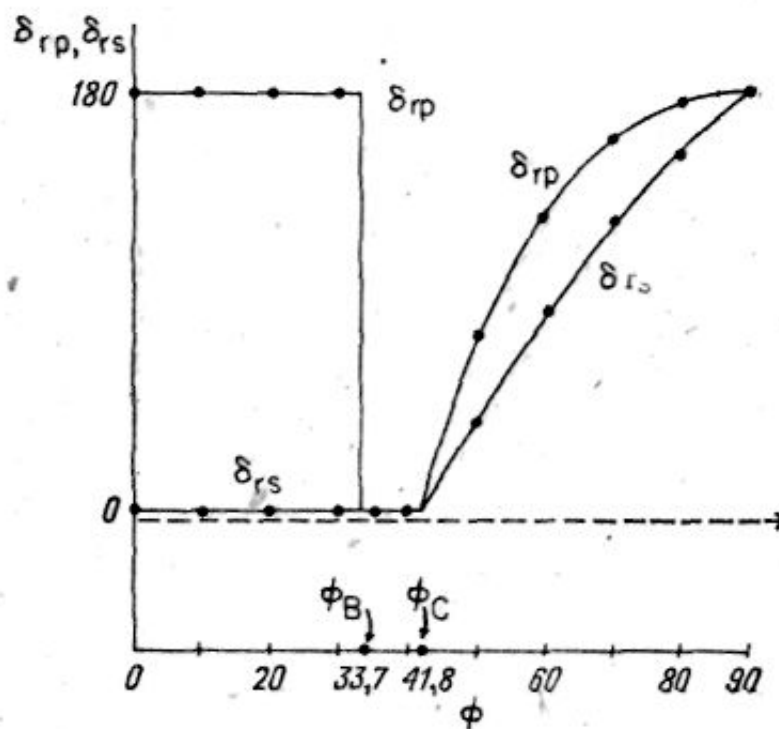


Рис. 20. Зависимость фазовых сдвигов  $\delta_{rp}$  и  $\delta_{rs}$  для р- и s-поляризаций от угла падения  $\varphi$  (градусы) при внутреннем отражении на границе стекло-воздух  $\lambda = 5461\text{Å}$ ,  $N_{стекло} = 1,50$ .

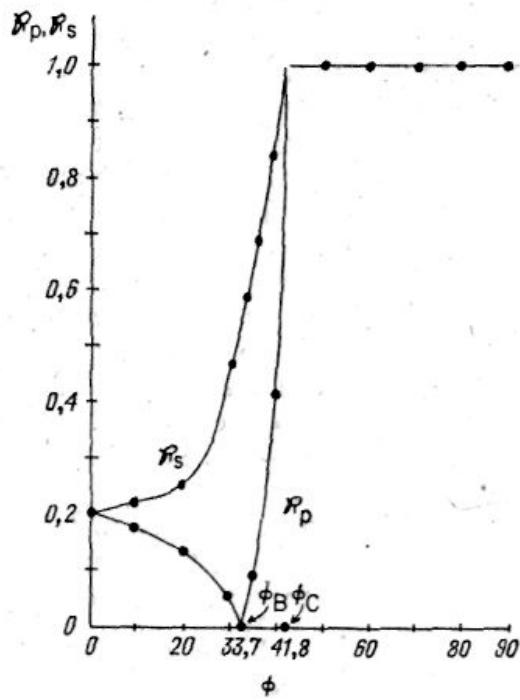


Рис. 21. Зависимость отражательной способности (по интенсивности)  $R_p$  и  $R_s$  для р- и s-поляризаций от угла падения  $\varphi$  (градусы) при отражении на границе раздела стекло-воздух  $\lambda = 5461\text{Å}$ ,  $N_{\text{стекло}} = 1,50$ .

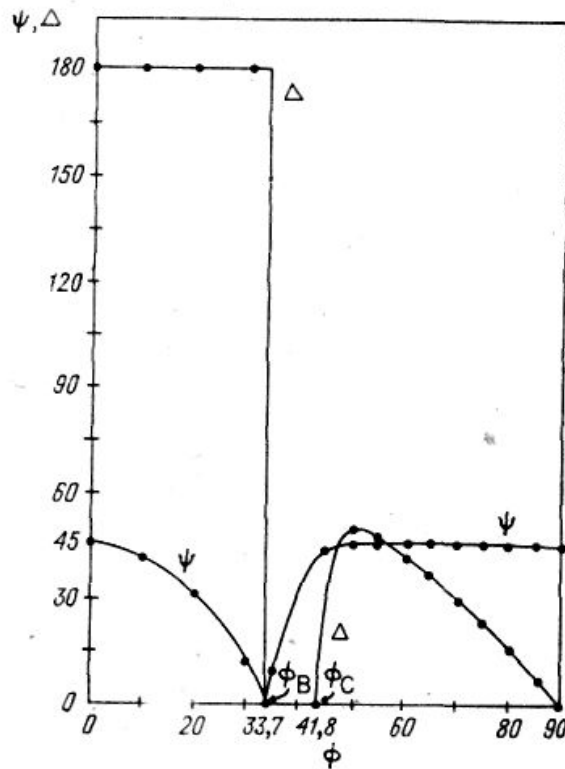


Рис. 22. Зависимость эллипсометрических углов  $\psi$  и  $\Delta$  от угла падения  $\varphi$  (градусы) при отражении на границе раздела стекло-воздух  $\lambda = 5461\text{Å}$ ,  $N_{\text{стекло}} = 1,50$ .

В заключение настоящего раздела отметим, что, если направление распространения преломленной волны в среде 1 меняется на обратное (рис. 10), то коэффициенты отражения и пропускания  $r_{10}$  и  $t_{10}$  на границе «среда 1 — среда 0» связаны с соответствующими коэффициентами  $r_{01}$  и  $t_{01}$  на границе «среда 0 — среда 1» соотношениями

$$\begin{aligned} r_{10} &= -r_{01} \\ (93) \quad t_{10} &= \frac{(1 - r_{01}^2)}{t_{01}} \end{aligned}$$

что можно доказать, поменяв местами  $N_0$  и  $N_1$  в выражениях (77) - (80). Соотношения (93) применимы к обеим линейным поляризациям, как параллельной, так и перпендикулярной плоскости падения.