

В.П. Бакалов, В.Ф. Дмитриков, Б.И. Крук

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

3-е издание,
переработанное и дополненное

Под редакцией профессора В.П. Бакалова

Допущено Министерством информационных
технологий и связи РФ в качестве учебника для подготовки
бакалавров, дипломированных специалистов и магистров
по направлению «Телекоммуникации» (210400)

Москва
Горячая линия — Телеком

УДК 621.373(075)

ББК 32.88

Б 19

Федеральная программа поддержки книгоиздания России

Рецензенты: проф. Ю.Ф. Урядников, проф. А.Е. Дубинин

Бакалов В.П., Дмитриков В.Ф., Крук Б.И.

Б 19 Основы теории цепей: Учебник для вузов; Под ред. В.П. Бакалова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – с.: ил.
ISBN 5-256-01472-2.

Излагается теория электрических цепей, на основе которой дается представление об анализе и синтезе схем усилителей, генераторов, фильтров, корректоров и других устройств. По сравнению с предыдущим изданием расширена глава, посвященная дискретным цепям и цифровым фильтрам, в конце глав приводятся тесты для самоконтроля.

Для студентов вузов, обучающихся по направлению «Телекоммуникации».

ББК 32.88

ISBN 5-256-01472-2

© Бакалов В.П., Дмитриков В.Ф.,
Крук Б.И., 2007

ПРЕДИСЛОВИЕ к 3-му изданию

В основе 3-го издания учебника «Основы теории цепей» лежит учебник, изданный авторами в издательстве «Радио и связь» в 2000 г. [1].

Принятие новой концепции высшего образования, в основу которой положена 2-х уровневая система (бакалавриат, магистратура), изменение номенклатуры специальностей, потребовало внесение в учебник некоторых изменений, ориентированных на новые специальности связи и направление «Телекоммуникации».

Учитывая все большее применение цифровых методов обработки сигналов, расширена глава, посвященная дискретным цепям и цифровым фильтрам. В частности добавлен раздел, посвященный методу переменных состояния в дискретных цепях и эффектам квантования в цифровых фильтрах.

В подготовке 3-го издания учебника большую помощь оказали авторам сотрудники кафедры ТЭЦ Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики (СибГУТИ) и в частности ст. пр. Гусельникова Н.М., которым авторы выражают глубокую благодарность.

Отв. редактор, дтн., проф. В.П. Бакалов

ПРЕДИСЛОВИЕ ко 2-му изданию

Дисциплина «Основы теории цепей» (ОТЦ) является базовым курсом при подготовке бакалавров, магистров по направлениям «Телекоммуникации», «Радиотехника», а также инженеров по специальностям связи.

Несмотря на то, что курс ОТЦ имеет сложившуюся структуру и уже значительную историю, бурное развитие телекоммуникаций и информатики потребовало внести в его содержание и методику изложения целый ряд изменений, которые нашли отражение во втором издании настоящего учебника. Это касается в первую очередь расширения разделов, посвященных теории активных цепей и цепей с обратной связью. Дополнены и переработаны разделы, посвященные машинным методам анализа и синтеза электрических цепей. Существенно переработаны и дополнены главы, в которых изучаются нелинейные и автоколебательные цепи, в частности, включен материал, посвященный анализу автогенераторов методом медленно меняющихся амплитуд.

Учитывая все большее применение цифровых методов обработки сигналов, полностью переработана и расширена глава, посвященная дискретным цепям и цифровым фильтрам.

С целью лучшего усвоения материала большинство теоретических положений проиллюстрировано примерами. В отличие от предыдущего издания каждая глава дополнена перечнем контрольных вопросов и задач с ответами, позволяющих закрепить изученный материал. Для удобства пользования учебник снабжен предметным указателем.

В конце учебника приведен список основной и дополнительной литературы, которая может быть использована при изучении курса теории электрических цепей. Кроме того, по тексту изложения материала сделаны дополнительные ссылки на литературу, где более подробно освещены некоторые специальные вопросы.

В подготовке второго издания учебника большую помощь оказали авторам сотрудники кафедр ТЭЦ Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики (СибГУТИ) и Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. М.А. Бонч-Бруевича (СПГУТ), которым авторы выражают глубокую благодарность.

Мы также признательны своим коллегам из Московского технического университета связи и информатики (зав. кафедрой ТЭЦ проф. Урядников Ю.Ф.), Поволжской академии телекоммуникаций и информатики (зав. кафедрой ТЭЦ проф. Дубинин А.Е.) за их замечания, способствующие улучшению содержания учебника.

Отв. редактор, дтн., проф. В.П. Бакалов

Введение

Одной из главных тенденций развития человеческого общества в XXI веке явился стремительный рост потоков разнообразной информации, обеспечивающей его жизнедеятельность. Мировое общество вступило в новую эру — эру информатизации, в котором знания и информация становятся главным фактором его поступательного развития.. Эффективное управление государством, экономикой, удовлетворение потребностей населения, развитие науки, культуры, здравоохранения требует постоянного развития и совершенствования системы информационного обеспечения.

Техническую базу информатизации составляет связь и вычислительная техника, грань между которыми все больше стирается. Сети связи являются транспортной средой для информационных систем. В основе развития систем связи лежат современные достижения многих наук и в первую очередь электротехники, радиотехники и электроники. Общим для этих наук является изучение электромагнитных процессов в пассивных и активных электрических цепях с целью создания различных устройств для преобразования, передачи, обработки и хранения информации. На основе достижений в области радиотехники и электроники развиваются средства связи, автоматика и вычислительная техника, телеметрия, радиолокация и навигация, системы управления технологическими процессами и др.

Основными задачами электротехники являются генерирование, передача и преобразование электрической энергии в другие виды энергии (механическую, тепловую, световую, химическую и т. д.).

Одна из главных задач радиотехники — передача, преобразование информации и осуществление связи на расстоянии с использованием электромагнитных волн.

Зарождение науки об электричестве относится к XVI в., когда английский ученый У. Гильберт (1544—1603) написал свой знаменитый трактат «О магните, магнитных телах и большом магните — «Земле». В XVII—XVIII вв. были проведены многочисленные опыты, позволившие установить существование электрических зарядов двух типов — положительных и отрицательных, изобрести первый конденсатор (Ж. Нолле, 1745), разработать первую последовательную теорию электрических явлений (Б. Франклин).

Во второй половине XVIII в. началось «количественное изучение» электрических и магнитных явлений, появились первые измерительные приборы — электроскопы. В 1756 г. петербургский

физик Ф. Эпинус (1724—1802) изобрел воздушный конденсатор, с помощью которого показал, что стекло в «лейденской» банке обладает свойством накапливать электричество, открыл явление электризации некоторых тел (турмалин) при нагревании (пироэлектричество). В работе Ф. Эпинуса впервые предпринята систематическая попытка подойти к изучению электрических явлений не только с качественной, но и с количественной стороны. В частности, им было установлено, что сила взаимодействия между зарядами пропорциональна величине этих зарядов. И хотя он не установил, как эта сила зависит от расстояния, однако значение его работы очень велико, так как она дала определенное направление дальнейшим исследованиям. Наконец, в 1784 г. французский 48-летний военный инженер Ш. Кулон (1736—1806) открывает закон, согласно которого сила взаимодействия между электрическими зарядами обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. С помощью созданных им крутильных весов, а также ряда оригинальных методов (методы колебаний) этот человек, никогда специально не занимавшийся электричеством и магнетизмом, проводя в качестве побочного занятия свои исследования, заложил основы количественной электростатики.

21 июля 1820 г. появилась небольшая заметка датского физика Г. Эрстеда (1777—1851), в которой он доказал, что ток в прямом проводнике, идущем вдоль меридиана, отклоняет от него магнитную иглу. Это сообщение произвело большое впечатление на ученый мир, так как из опыта Эрстеда явствовало, что сила, действовавшая между элементом тока и магнитным полюсом, направлена не по соединяющей их прямой, а по нормали к ней. Эта работа вызвала первую трещину в ньютоновской модели мира.

Особое значение в развитии теории электрических явлений сыграли открытия законов Ома (1826) и Кирхгофа (1847), а также открытие М. Фарадеем (1831) явления электромагнитной индукции. В 1833 г. русский ученый Э. Ленц (1804—1865) открыл закон, устанавливающий связь между направлением индукционных токов и их электромагнитными взаимодействиями. Таким образом, к концу XIX в. было установлено единство электромагнитных явлений, получивших свое логическое завершение в работах Дж. Максвелла, сформулировавшего в 1873 г. фундаментальные уравнения классической электродинамики.

В конце XIX — начале XX веков с открытий дискретного характера зарядов (Дж. Томсон, 1897 г.) начался новый этап в развитии науки об электричестве. В этот период были заложены основы электронной теории строения вещества как совокупности электрически заряженных частиц, создана квантовая теория электромагнитных процессов, что привело к рождению электроники как науки о взаимодействии электронов с электромагнитными полями и о методах создания электронных приборов и устройств.

Со второй половины XIX в. началось широкое использование электрических и магнитных явлений в технике: построены электродвигатели и генераторы тока, появились первые электромагниты, массовое распространение получило электрическое освещение, начало которому положило изобретение электрической свечи русским ученым П.П. Яблочковым. Начало применения электрической энергии для технологических целей положили работы Б.С. Якоби (1838 г.), предложившего использовать электрический ток для нанесения различных металлических покрытий. Электроэнергию стали использовать при получении алюминия, меди, цинка, для резки и сварки металлов, упрочения деталей и в других технологических процессах; начинается применение электроэнергии на транспорте. Большое значение для развития электротехники имели изобретения русского инженера М.О. Доливо-Добровольского, разработавшего к концу 90-х гг. ряд промышленных конструкций трехфазных асинхронных двигателей, трансформаторов и построившего трехфазную линию электропередачи Лауфен—Франкфурт длиной 175 км, положившей начало современному развитию электротехники.

Подлинную революцию в электросвязи произвел П.Л. Шиллинг (1786—1837) в 1832 г. в России, который построил первый в мире электромагнитный телеграф и осуществил связь между Зимним дворцом и Министерством путей сообщений. Дальнейшее развитие эта идея получила в 1835 г., когда американцем С. Морзе (1791—1872) был разработан специальный алфавит и создана модель телеграфа в Нью-Йоркском университете. Это были первые практические применения науки об электричестве в электросвязи. А уже в 1866 г. вступило в строй первое величайшее сооружение того времени — линия трансатлантической кабельной связи между Европой и Америкой. К 1870 г. в России было создано свыше 700 телеграфных станций и введена в эксплуатацию 91 тыс. км телеграфных линий, в том числе линия Москва—Владивосток протяженностью 12 тыс. км.

Качественно новый этап в развитии электросвязи возник после изобретения в 1876 г. А. Беллом телефона. Существенный вклад в развитие телефонной связи внес русский физик Л.М. Голубицкий, в 1882—1883 г. были построены первые телефонные станции в Москве и С.-Петербурге.

Особенно важное значение имело изобретение А.С. Поповым (1895) радио, открывшее новую страницу в развитии научно-технического прогресса. Значительную роль в практической реализации радио в телеграфии сыграл итальянский радиотехник и предприниматель Г. Маркони (1874—1937).

Открытие радио привело к рождению радиотехники как области науки и техники, занимающейся вопросами изучения и применения электромагнитных колебаний и волн радиодиапазонов для переда-

чи информации — в радиосвязи, радиовещании и телевидении в радиолокации и радионавигации, в радиотелеметрии и радиоправлении, при контроле за различными технологическими процессами и механизмами, в научных исследованиях и др.

В XX в. начинается бурное развитие электроники — обширной области науки, техники и производства, охватывающей исследование и разработку электронных приборов и принципов их использования, в частности, в электросвязи. В истории развития электроники можно выделить четыре основных этапа: электронных ламп, транзисторов, интегральных схем и функциональных устройств.

Первый этап начался в 1904 г., когда английским ученым Д.А. Флемингом была изготовлена первая электронная лампа — диод. Прототипом электронной лампы явилась лампа накаливания, созданная русским электротехником А. Н. Лодыгиным в 1872 г. В 1907 г. была предложена электронная лампа с управляющим электродом — триод, способная усиливать и генерировать электрические сигналы. В последующие годы, наряду с совершенствованием электронных ламп, разрабатывались и другие электронные приборы: электронно-лучевые, ионные, фотоэлектронные.

Начало второго этапа развития электроники связано с открытием в конце 1947 г. американскими учеными У. Браттейном, Дж. Бардиным и У. Шотки транзисторного эффекта. В 1948 г. были изготовлены первые промышленные образцы биполярных транзисторов, а в 1952 г. — полевые транзисторы. В транзисторах были реализованы идеи, которые впервые были сформулированы русским ученым О.В. Лосевым в 1922 г.

Непрерывное расширение функций электронной аппаратуры и ее усложнение привели в 1958 г. к началу третьего этапа — возникновению микроэлектроники. В настоящее время разработаны сверхбольшие интегральные схемы (БИС), содержащие более 10^5 элементов. Однако сейчас уже становится ясным, что увеличение степени интеграции не может быть беспределельным.

Научно-техническое направление, связанное с отказом от компонентной структуры микроэлектронных изделий и основанное на использовании объемных эффектов в твердом теле, является началом четвертого этапа развития электроники, получившего название функциональной микроэлектроники.

Крупный вклад в развитие электротехники, радиотехники и электроники внесли русские ученые. Фундаментальные исследования в области физики и технологии электронных и полупроводниковых приборов выполнили М.А. Бонч-Бруевич, Л.И. Мандельштам, А.Ф. Иоффе, С.И. Вавилов, А.А. Чернышев; по проблемам возбуждения и преобразования электрических колебаний, распространения и приема радиоволн — Б.А. Введенский, В.О. Калмыков, М.В. Шулейкин, А.А. Расплетин и др.

Современные системы и сети связи являются сложнейшими техническими сооружениями, сконцентрировавшими все самые по-

следние достижения научно-технической революции в области радиотехники, электроники и вычислительной техники. В последнее время разработаны и эксплуатируются в ряде стран мира разнообразные федеральные и международные телекоммуникационные сети, оснащенные цифровыми автоматическими коммутационными станциями, цифровыми системами передачи, волоконно-оптическими линиями связи, спутниковыми системами связи и др.

В России разработана государственная концепция в области связи, предусматривающая построение подобной телекоммуникационной сети общего пользования (ТСР). На базе ТСР будут созданы интеллектуальные сети России (ИСР), которые должны предоставлять абонентам широкий круг различных услуг; российская сеть передачи данных (РСПД); цифровая сеть связи с интеграцией служб (ЦСИС) (многофункциональный телефон, факс, телекс, видеотекс и др.); сотовые мобильные и персональные сети связи (СМПС), широкополосные цифровые сети с интеграцией услуг и др.

Создание и эксплуатация подобных сетей потребует подготовки качественно новых специалистов. Среди дисциплин, составляющих основу базовой подготовки специалистов в области связи, важнейшее место отводится курсу «Основы теории цепей» (ОТЦ). Одним из основоположников курса был доктор технических наук, профессор А.Ф. Белецкий, внесший большой вклад в ее становление как самостоятельной дисциплины.

Содержание этой дисциплины составляют задачи анализа и синтеза линейных и нелинейных электрических цепей, изучение как с качественной, так и количественной стороны установившихся и переходных процессов, протекающих в различных электронных приборах и устройствах. ОТЦ базируется на курсах математики, физики, технической электроники, вычислительной техники и является базовым для изучения последующих общетехнических и специальных дисциплин.

Данный учебник соответствует программе курса «Основы теории цепей» по специальностям «Сети связи и системы коммутации» (210406); «Многоканальные телекоммуникационные системы» (210404); «Радиосвязь, радиовещание и телевидение» (210405) и по направлению бакалавриата и магистратуры по направлению «Телекоммуникации» (210400). Он может также использоваться для специальностей «Средства связи с подвижными объектами» (210402); «Аудиовизуальная техника» (210312); «Физика и техника оптической связи» (210401), а также других родственных специальностей.

Проф. В.П. Бакаловым написано введение, гл. 1–9, 14; проф. В.Ф. Дмитриковым — гл. 10, 11; проф. Круком Б.И. — гл. 12–13, 16–18; гл. 15 — написана совместно В.Ф. Дмитриковым и Б.И. Круком; гл. 19 — написана совместно Бакаловым В.П. и Круком Б.И. Общее редактирование учебника выполнил проф. В.П. Бакалов.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

1.1. Ток, напряжение, мощность

Понятия электрического тока и напряжения являются одними из основных в теории электрических цепей. *Электрический ток* в проводящей среде есть упорядоченное движение электрических зарядов под воздействием электрического поля (ток проводимости в металлах, электролитах, газах; ток переноса в электровакуумных приборах и др.).

Количественно электрический ток в каждый момент времени характеризуется скалярной величиной $i = i(t)$ — *мгновенным значением тока*, характеризующим скорость изменения заряда q во времени:

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}, \quad (1.1)$$

где Δq — электрический заряд, прошедший за время Δt через поперечное сечение проводника. В системе СИ заряд измеряется в кулонах (Кл), время — в секундах (с), ток — в амперах (А). В дальнейшем для краткости электрические токи и напряжения будем просто называть токами и напряжениями.

В соответствии с приведенным выше определением понятие «ток» может использоваться в двух смыслах: ток как физический процесс и ток как количественная характеристика (вместо «силы тока»).

Как функция времени ток $i(t)$ может принимать положительные и отрицательные значения. Принято считать значение тока $i(t)$ положительным, если движение положительно заряженных частиц совпадает с заранее выбранным направлением отсчета тока и отрицательным — в противном случае. Выбор направления отсчета тока

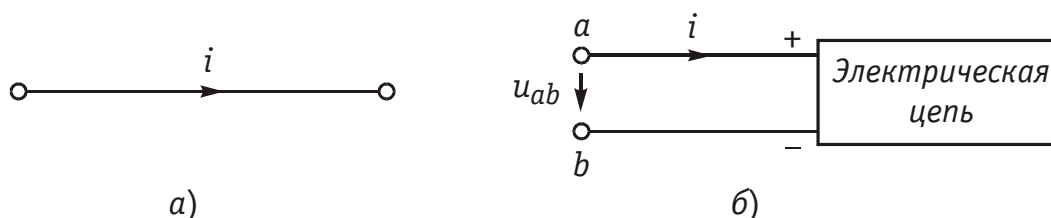


Рис. 1.1

произволен, положительное направление отсчета тока показывается стрелкой (рис. 1.1).

Электрическое напряжение между двумя точками электрической цепи определяется количеством энергии, затрачиваемой на перемещение единичного заряда из одной точки в другую:

$$u = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta q} = \frac{dW}{dq}, \quad (1.2)$$

где W — энергия электрического поля. Единица измерения напряжения в системе СИ — вольт (В), энергии — джоуль (Дж).

В потенциальном электрическом поле напряжение между двумя точками совпадает по значению с разностью потенциалов между ними. Например, напряжение между точками a и b цепи, показанной на рис. 1.1, б,

$$u_{ab} = V_a - V_b, \quad (1.3)$$

где V_a и V_b — потенциалы точек a и b .

Значение напряжения в любой заданный момент t называется *мгновенным* и обозначается $u = u(t)$. Являясь скалярной величиной, $u(t)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Для однозначного определения знака напряжения выбирают положительное направление его отсчета, которое показывается стрелкой (рис. 1.1, б), направленной от одной точки электрической цепи к другой. Для определенности будем считать, что положительное направление отсчета совпадает с направлением стрелки от более высокого потенциала, т. е. «+», к более низкому, т. е. «−» (рис. 1.1, б). При этом положительные направления отсчета напряжения и тока будут между собой *согласованы*, так как положительное направление отсчета напряжения u_{ab} соответствует направлению перемещения положительно заряженных частиц от более высокого потенциала $V_a(+)$ к более низкому $V_b(-)$. Очевидно, что $u_{ab} = -u_{ba}$. Применительно к напряжению на участке цепи, по которому протекает ток, часто используют термин «*падение напряжения*».

Электрическая энергия, затраченная на перемещение единичного положительного заряда между двумя точками участка цепи с напряжением u (разностью потенциалов) к моменту времени t определится согласно (1.1) и (1.2) уравнением

$$W = \int_0^q u dq = \int_{-\infty}^t u i dt, \quad (1.4)$$

где принято $W = 0$ при $t = -\infty$.

Производная энергии по времени определяет *мгновенную мощность*, потребляемую элементами, входящими в участок цепи:

$$p = dW/dt = ui. \quad (1.5)$$

Мощность измеряется в ваттах (Вт). Знак мощности p определяется знаком напряжения и тока. Если $p > 0$, мощность потребляется элементами *участка цепи*, а при $p < 0$ — отдается.

По характеру изменения во времени различают постоянные, гармонические, периодические несинусоидальные, непериодические токи и напряжения. В ряде случаев (например, в цепях с распределенными параметрами) токи и напряжения могут быть не только функциями времени, но и функциями пространственных координат. В технике связи токи и напряжения как материальные носители сообщений называют *сигналами*.

1.2. Электрическая цепь, ее элементы и модели

Электрической цепью называют совокупность устройств, предназначенных для прохождения тока и описываемых с помощью понятий тока и напряжения. Электрическая цепь состоит из источников (генераторов) и приемников электрической энергии.

Источником называют устройство, создающее (генерирующее) токи и напряжения. В качестве источников могут выступать как первичные устройства, преобразующие различные виды энергии в электрическую (аккумуляторы, электромашинные генераторы, термоэлементы, пьезодатчики и т. д.), так и устройства, преобразующие электрическую энергию первичных источников в энергию электрических колебаний требуемой формы.

Приемником называют устройство, потребляющее (запасающее) или преобразующее электрическую энергию в другие виды энергии (тепловую, механическую, световую и т. д.). Физическими элементами реальной электрической цепи являются резисторы, катушки индуктивности, конденсаторы, трансформаторы, транзисторы, электронные лампы и другие компоненты электроники. При этом электрическая цепь может конструктивно выполняться либо из указанных выше дискретных компонентов, либо изготавливаться в едином технологическом цикле (интегральные схемы). Электрические цепи, содержащие как интегральные, так и дискретные компоненты, получили наименование *гибридных*.

В основе теории электрических цепей лежит *принцип моделирования*. При этом реальные электрические цепи заменяются некоторой идеализированной моделью, состоящей из взаимосвязанных идеализированных элементов. Последние представляют собой простые модели, используемые для аппроксимации (приближения) свойств простых физических элементов или физических явлений. В зависимости от точности приближения одна и та же физическая электрическая цепь может быть представлена различными моделями, причем, чем точнее модель, тем она сложнее. На практике обычно ограничиваются наиболее простыми моделями, обеспечи-

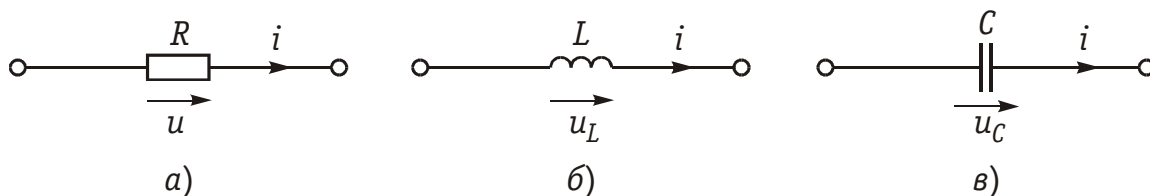


Рис. 1.2

вающими решение задач анализа и синтеза реальной цепи с заданной точностью. Важно иметь в виду, что если физические элементы и явления могут быть описаны лишь приближенно, то идеализированные элементы определяются точно. К простейшим идеализированным элементам модели электрической цепи относятся независимые и зависимые источники (активные элементы) и элементы резистивного сопротивления, индуктивности и емкости (пассивные элементы).

Систему уравнений, описывающую модель электрической цепи, называют *математической моделью цепи*. В теории электрических цепей изучаются общие свойства моделей цепей, поэтому в дальнейшем под электрической цепью будем понимать ее модель, свойства которой близки к свойствам реальной физической цепи.

Пассивные элементы. *Резистивным сопротивлением* называют идеализированный элемент, обладающий только свойством необратимого рассеивания энергии. Условное обозначение резистивного сопротивления показано на рис. 1.2, а. Математическая модель, описывающая свойства резистивного сопротивления, определяется законом Ома:

$$u = Ri \quad \text{или} \quad i = Gu. \quad (1.6)$$

Коэффициенты пропорциональности R и G в формулах (1.6) называются соответственно *сопротивлением* и *проводимостью* элемента и являются его количественной характеристикой, причем при согласованных направлениях тока и напряжения R и G положительны и связаны обратной зависимостью $R = 1/G$. Измеряют в системе СИ сопротивление R в омах (Ом), а проводимость G — в сименсах (См).

Уравнение (1.6) определяет зависимость напряжения от тока и носит название *вольт-амперной характеристики (ВАХ)* резистивного сопротивления. Если R постоянно, то ВАХ линейна (рис. 1.3, а) и соответствует линейному резистивному элементу. Если же R зависит от протекающего через него тока или приложенного к нему напряжения, то ВАХ становится нелинейной (рис. 1.3, б) и соответствует нелинейному резистивному сопротивлению.

Мощность в резистивном сопротивлении можно определить согласно уравнению (1.5):

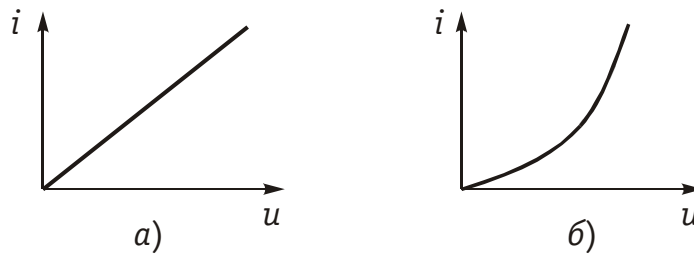


Рис. 1.3

$$p = ui = Ri^2 = Gu^2. \quad (1.7)$$

Мощность в резистивном сопротивлении всегда больше нуля, так как оно только потребляет энергию, преобразуя ее в тепло или другие виды энергии.

Индуктивным элементом называют идеализированный элемент электрической цепи, обладающий только свойством накопления им энергии магнитного поля. Условное обозначение индуктивного элемента изображено на рис. 1.2, б.

Математическая модель, описывающая свойства индуктивного элемента определяется соотношением

$$\Psi = Li, \quad (1.8)$$

где Ψ — потокосцепление, характеризующее суммарный магнитный поток, пронизывающий катушку:

$$\Psi = \sum_{k=1}^{\omega} \Phi_k,$$

где ω — число витков катушки; k — номер витка, с которым сцеплен поток Φ_k . В простейшем случае, когда каждый из потоков Φ_k сцеплен со всеми витками катушки $\Psi = \Phi \omega$.

Коэффициент пропорциональности L в формуле (1.8) называется *индуктивностью*. Он имеет положительное значение и является количественной характеристикой индуктивного элемента. Измеряется индуктивность L в генри (Гн), а магнитный поток Φ — в веберах (Вб). Если величина L постоянна, то зависимость (1.8) (*вебер-амперная характеристика*) линейна и соответствует линейному индуктивному элементу. Если же L зависит от электрического режима (тока или напряжения), то зависимость (1.8) нелинейна и соответствует нелинейному элементу индуктивности.

Связь между током и напряжением на индуктивном элементе определяется согласно закону электромагнитной индукции выражением

$$u = \frac{d\Psi}{dt} = L \frac{di}{dt}, \quad (1.9)$$

т. е. напряжение на индуктивном элементе пропорционально скорости изменения протекающего через него тока. Следовательно,

при протекании через L постоянного тока $u=0$ и свойства индуктивного элемента эквивалентны коротко замкнутому (КЗ) участку (см. рис. 1.1, а).

Мгновенная мощность электрических колебаний в индуктивном элементе

$$p = u_L i = Li \frac{di}{dt},$$

т. е. может быть как положительной (при совпадении направлений u и i), так и отрицательной (при несовпадении направлений u и i). Причем в первом случае ($p > 0$) магнитная энергия запасается индуктивным элементом, а во втором ($p < 0$) — отдается во внешнюю цепь.

Энергия, запасенная в индуктивном элементе к моменту t , определится согласно (1.4)

$$W_L = \int_{-\infty}^t p(dt) = \int_{-\infty}^t Li \frac{di}{dt} dt = \frac{Li^2}{2}, \quad (1.10)$$

т. е. всегда положительна.

Емкостным элементом называют идеализированный элемент электрической цепи, обладающий только свойством накапливать энергию электрического поля. Условное обозначение емкостного элемента показано на рис. 1.2, в.

Математическая модель, описывающая свойства емкостного элемента, определяется *вольт-кулонной характеристикой*

$$q = Cu_C. \quad (1.11)$$

Коэффициент пропорциональности C в формуле (1.11) называется *емкостью* и является количественной характеристикой емкостного элемента. При согласованных направлениях тока и напряжения величина C всегда положительна. Измеряется C в фарадах (Ф).

Если величина C постоянная, то вольт-кулонная характеристика (1.11) линейна и соответствует линейному емкостному элементу. Если же параметр C зависит от электрического режима, то характеристика (1.11) нелинейна и соответствует нелинейному элементу.

Между током и напряжением на емкостном элементе существует связь, определяемая согласно (1.1) и (1.11) равенством

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}, \quad (1.12)$$

т. е. ток в емкостном элементе пропорционален скорости изменения приложенного к нему напряжения. При постоянном напряжении $u = \text{const}$, $i = 0$ и емкостной элемент по своим свойствам эквивалентен разрыву цепи.

Мощность электрических колебаний в емкостном элементе

$$p = u_C i = C u_C \frac{du_C}{dt},$$

т. е. может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от направлений тока и напряжения. При $p > 0$ энергия электрического поля запасается емкостным элементом, а при $p < 0$ — отдается во внешнюю цепь.

Энергия, запасенная в емкостном элементе к моменту t ,

$$W_C = \int_{-\infty}^t p dt = \int_{-\infty}^t C u_C \frac{du_C}{dt} dt = \frac{C u_C^2}{2}, \quad (1.13)$$

т. е. всегда положительна.

В инженерной практике резистивное сопротивление, индуктивный и емкостной элементы часто называют просто сопротивлением, индуктивностью и емкостью, отождествляя, по существу, элемент с его параметром. В дальнейшем для простоты, где это не приведет к недоразумениям, также будем пользоваться этой терминологией.

Рассмотренные идеализированные резистивный, индуктивный и емкостной элементы могут служить простейшими моделями резисторов, высококачественных катушек индуктивностей с малыми потерями и электрических конденсаторов с высокими диэлектрическими свойствами в области низких и средних частот. В области высоких, а особенно сверхвысоких частот модели резисторов, катушек индуктивности и конденсаторов становятся более сложными. Так, на высоких частотах резисторы уже нельзя с достаточной точностью описать идеальным резистивным элементом (1.6) из-за влияния различных «паразитных» емкостей. Более точной здесь

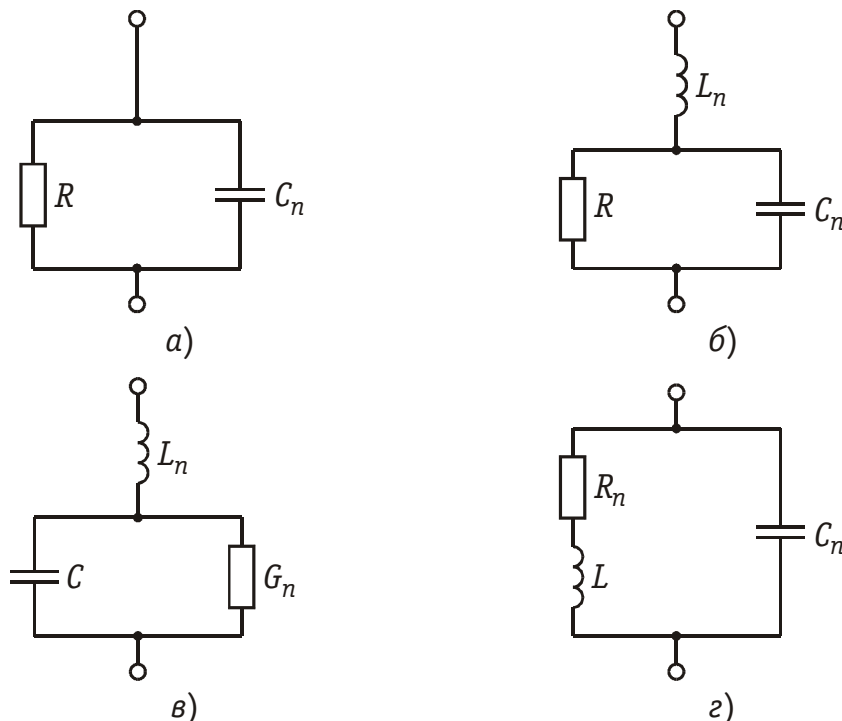


Рис. 1.4

будет модель параллельного соединения R и $C_{\text{п}}$, изображенная на рис. 1.4, *а*. В некоторых случаях возникает необходимость учета, «паразитной» индуктивности $L_{\text{п}}$, учитывающей эффект накопления энергии магнитного поля в элементах резистора (рис. 1.4, *б*).

На высоких и сверхвысоких частотах также начинает проявляться поверхностный эффект, выражающийся в неравномерном распределении тока по сечению проводника (*скин-эффект*). В результате этого сопротивление R проводника начинает расти с увеличением частоты. Причем, чем толще проводник, тем при меньших частотах начинает проявляться скин-эффект. На сверхвысоких частотах зависимость сопротивления круглого медного проводника от частоты f можно выразить эмпирической формулой

$$R = R_0 \cdot 3,85d\sqrt{f},$$

где R_0 — сопротивление проводника постоянному току, Ом; d — диаметр сечения проводника, мм; f — частота, МГц.

Модель конденсатора, кроме емкостного элемента C , может содержать параллельную проводимость $G_{\text{п}}$, учитывающую потери энергии в диэлектрике, и последовательную индуктивность $L_{\text{п}}$, учитывающую эффект запасения энергии магнитного поля в конструктивных элементах конденсатора (рис. 1.4, *в*).

Модель катушки индуктивности может учитывать потери энергии в проводе и энергию электрического поля, запасаемую между витками катушки путем дополнительного включения сопротивления $R_{\text{п}}$ и «паразитной» емкости $C_{\text{п}}$ (рис. 1.4, *г*).

В зависимости от условий применения и конструктивных особенностей, требований к точности анализа могут использоваться и более сложные модели резисторов, катушек индуктивностей и конденсаторов.

В зависимости от соотношения между длинами цепи l и волны тока и напряжения λ различают *цепи с сосредоточенными и распределенными параметрами*. При $l < \lambda$ можно считать, что параметры R , L , C сосредоточены в резисторах, катушках индуктивности и конденсаторах; при $l \gg \lambda$ необходимо пользоваться моделью цепи с распределенными параметрами (см. гл. 13).

Рассмотренные выше резистивные, индуктивные и емкостные элементы относятся к *двухполюсным*, так как содержат только два зажима (полюса, вывода). Однако кроме двухполюсных элементов в теории цепей и электронике широко используются *трехполюсные, четырехполюсные и многополюсные элементы*. Например, свойства трансформатора как физического устройства, содержащего две индуктивно связанные катушки, не могут быть описаны моделью только двухполюсных элементов с индуктивностями L_1 и L_2 . Для его моделирования необходимо введение еще одного параметра — *взаимной индуктивности* M ; при этом моделью

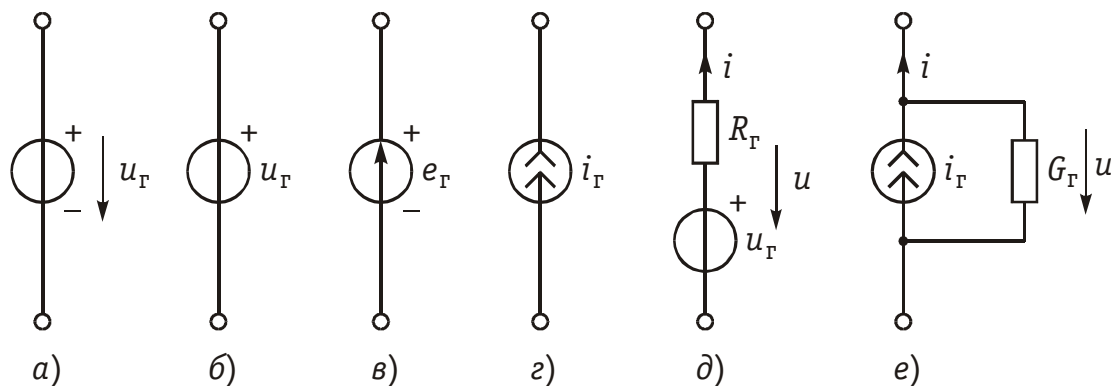


Рис. 1.5

трансформатора будет являться четырехполюсный элемент (см. гл. 3).

Активные элементы. Активными элементами электрической цепи являются зависимые и независимые источники электрической энергии. К зависимым источникам относятся электронные лампы, транзисторы, операционные усилители и другие, к независимым источникам — аккумуляторы, электрогенераторы, термоэлементы, пьезодатчики и другие преобразователи. Независимые источники можно представить в виде двух моделей: источника напряжения и источника тока.

Независимым источником напряжения называют идеализированный двухполюсный элемент, напряжение на зажимах которого не зависит от протекающего через него тока. Условное обозначение источника напряжения показано на рис. 1.5, а.

Источник напряжения полностью характеризуется своим задающим напряжением u_r , или *электродвижущей силой* (ЭДС) e_r (рис. 1.5, в). Внутреннее сопротивление источника напряжения равно нулю и иногда при изображении источника напряжения обозначают знаком «+» только один из зажимов и не показывают стрелкой положительное направление u_r , имея в виду, что оно действует от «+» к «—» (рис. 1.5, б). Часто при анализе цепей ограничиваются изображением только зажимов источника напряжения, как показано на рис. 1.1, б.

Вольт-амперная характеристика идеального источника напряжения представляет собой прямую, параллельную оси токов (рис. 1.6, а). Такой идеализированный источник способен отдавать во внешнюю цепь бесконечно большую мощность. Ясно, что физически такой источник реализовать нельзя. Однако в определенных пределах изменения тока он достаточно близко отражает реальные свойства независимых источников.

Независимым источником тока называют идеализированный двухполюсный элемент, ток которого не зависит от напряжения на его зажимах. Условное обозначение источника тока показано на рис. 1.5, г. Источник тока полностью характеризуется своим за-

дающим током i_r . Внутренняя проводимость источника тока равна нулю (внутреннее сопротивление бесконечно велико) и ВАХ представляет собой прямую, параллельную оси напряжений (рис. 1.6, б). Такой источник также способен отдавать во внешнюю цепь бесконечно большую мощность и является идеализацией реальных независимых источников.

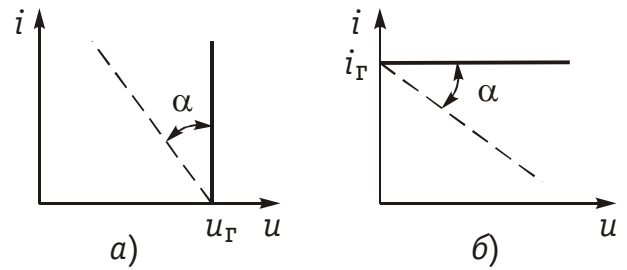


Рис. 1.6

Свойства реальных источников с конечным внутренним сопротивлением R_r можно моделировать с помощью независимых источников напряжения и тока с дополнительно включенными резистивными сопротивлениями R_r или проводимостью G_r (см. рис. 1.5, д, е). Напряжение u и отдаваемый ток i этих источников зависят от параметров подключаемой к ним цепи, а их ВАХ имеет тангенс угла наклона α , пропорциональный R_r и G_r соответственно (штриховые линии на рис. 1.6).

Однако свойства целого ряда электронных устройств нельзя описать моделью соединенных между собой указанных выше независимых источников и пассивных двухполюсных элементов. К числу таких устройств относятся электронные лампы, транзисторы, операционные усилители и другие электронные приборы. Это так называемые зависимые или управляемые источники.

Зависимый источник представляет собой четырехполюсный элемент (рис. 1.7) с двумя парами зажимов — входных (1, 1') и выходных (2, 2'). Входные ток i_1 и напряжение u_1 являются управляющими. Различают следующие разновидности зависимых источников: источник напряжения, управляемый напряжением

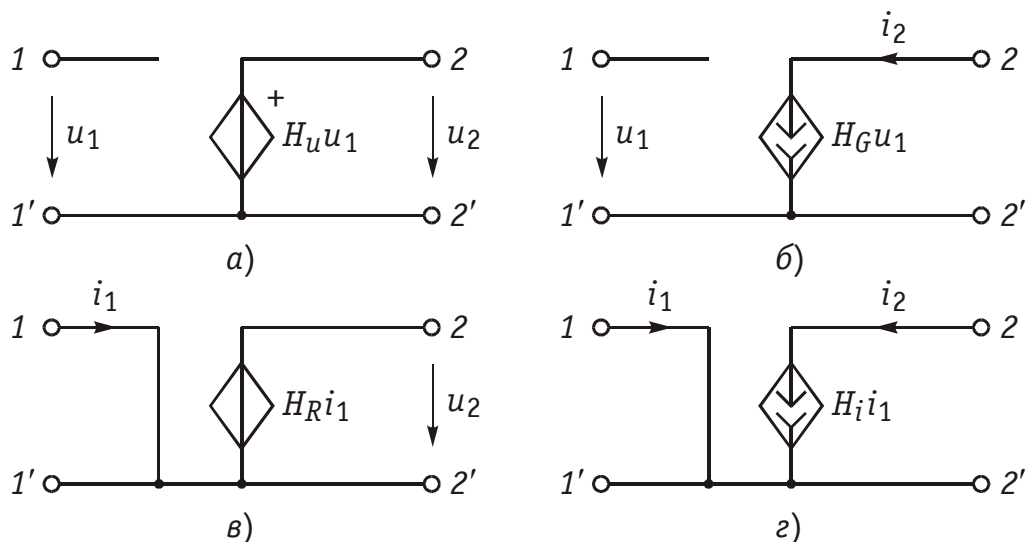


Рис. 1.7

(ИНУН); источник тока, управляемый напряжением (ИТУН); источник напряжения, управляемый током (ИНУТ); источник тока управляемый током (ИТУТ). На рис. 1.7 показаны условные обозначения зависимых источников различного типа.

В ИНУН (рис. 1.7, а) входное сопротивление бесконечно велико, входной ток $i_1=0$, а выходное напряжение u_2 связано со входным u_1 равенством $u_2=H_u u_1$, где H_u — коэффициент, характеризующий усиление по напряжению зависимого источника. Источник типа ИНУН является идеальным усилителем напряжения.

В ИТУН (см. рис. 1.7, б) выходной ток i_2 управляется входным напряжением u_1 , причем $i_1=0$ и ток i_2 связан с u_1 равенством $i_2=H_G u_1$, где H_G — коэффициент, имеющий размерность проводимости.

В ИНУТ (рис. 1.7, в) входным током i_1 управляется выходное напряжение u_2 , входная проводимость бесконечно велика: $u_1=0$, $u_2=H_R i_1$, где H_R — коэффициент, имеющий размерность сопротивления.

В ИТУТ (рис. 1.7, г) управляющим током является i_1 , а управляемым i_2 . Входная проводимость ИТУТ, как и ИНУТ, бесконечно велика, $u_1=0$, $i_2=H_i i_1$, где H_i — коэффициент, характеризующий усиление по току. Источник типа ИТУТ является идеальным усилителем тока. Коэффициенты H_u , H_G , H_R , H_i , представляют собой вещественные положительные или отрицательные числа и полностью характеризуют соответствующий источник.

Примером зависимого источника является операционный усилитель (ОУ). Выпускаемые в виде отдельной микросхемы (рис. 1.8, а) ОУ широко применяются в качестве активных элементов электрической цепи.

Операционный усилитель имеет два входа: 1 — неинвертирующий и 2 — инвертирующий. При подаче напряжения u_1 на вход 1 — выходное напряжение u_2 имеет ту же полярность, что и u_1 , а

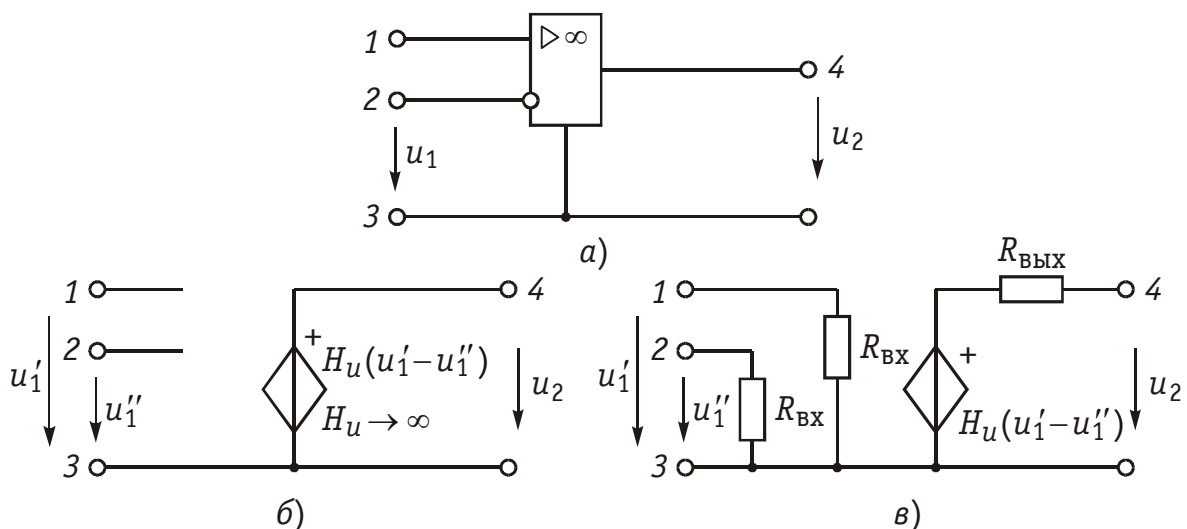


Рис. 1.8

при подаче u_1 на вход 2 напряжение u_2 меняет свою полярность на противоположную.

Идеальный ОУ (рис. 1.8, б) представляет собой ИНУН с бесконечно большим коэффициентом усиления ($H_u \rightarrow \infty$), бесконечно большими входным сопротивлением и выходной проводимостью (выходное сопротивление равно нулю).

Реальный ОУ можно представить в виде ИНУНа с конечными входным $R_{вх}$ и выходным $R_{вых}$ сопротивлениями (рис. 1.8, в).

Кроме ОУ в качестве активных элементов электрических цепей широко используются различные электронные и полупроводниковые приборы: электронные лампы, биполярные и полевые транзисторы и др.

На рис. 1.9, а приведена электронная лампа (триод) и ее модели (эквивалентные схемы замещения) в форме ИТУН (рис. 1.9, б) и ИНУН (рис. 1.9, в), где обозначены $G_i = 1/R_i$ — внутренняя проводимость лампы, $S = di_2/du$ — крутизна; $\mu = SR_i$ — коэффициент усиления лампы. Параметры G_i , S , μ обычно приводятся в справочниках. Эти эквивалентные схемы являются линейными и могут использоваться в области низких частот. В нелинейном режиме работы активного элемента используются более сложные модели (см. гл. 10, 11). В области высоких частот в моделях активных элементов появляются кроме резисторов, реактивные элементы — обычно емкость (см. табл. 1.1).

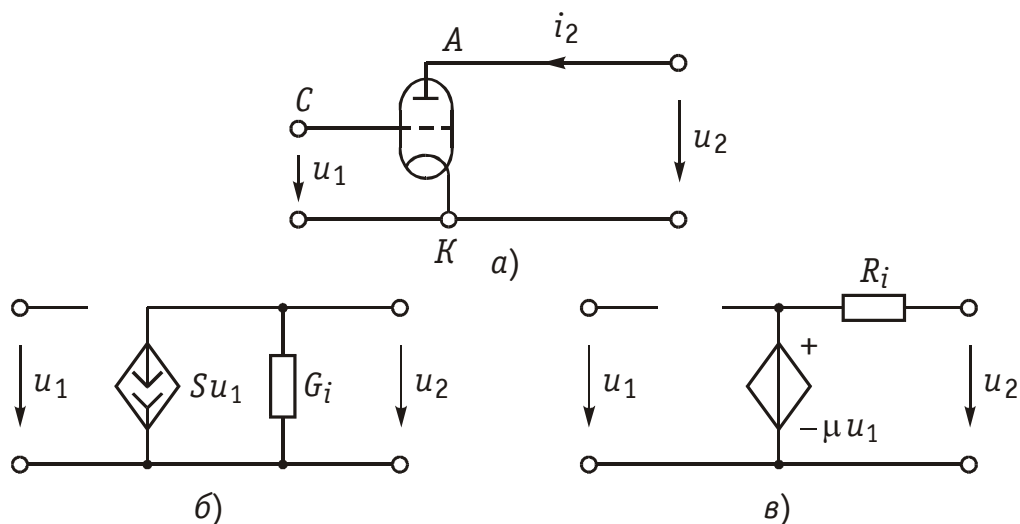


Рис. 1.9

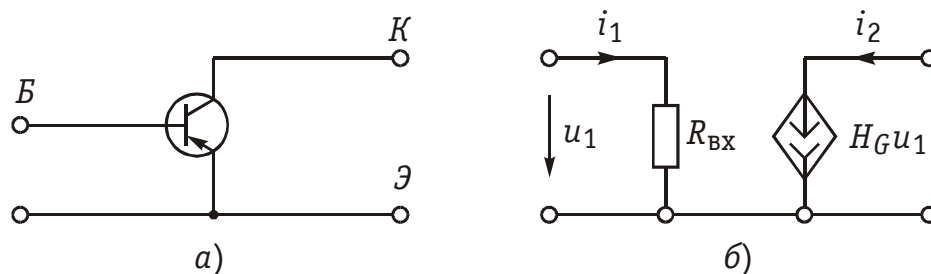
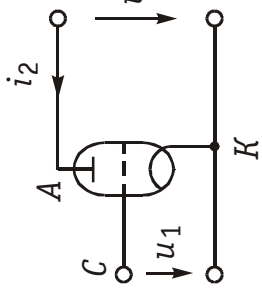
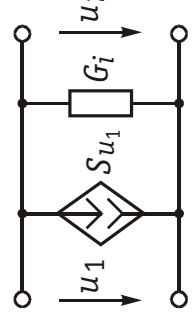
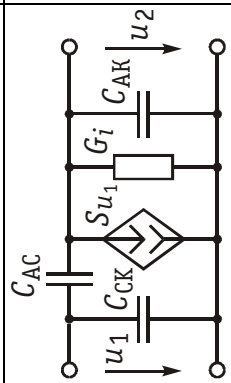
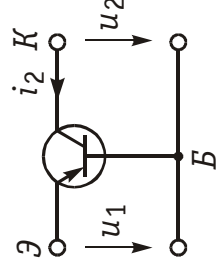
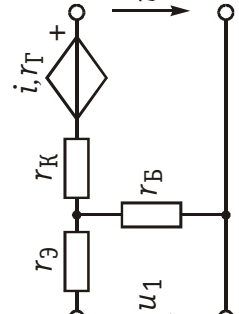
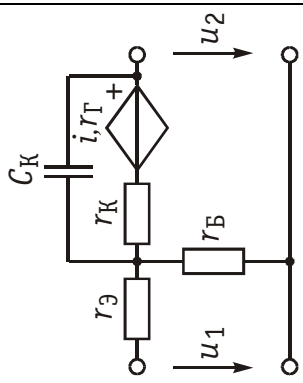
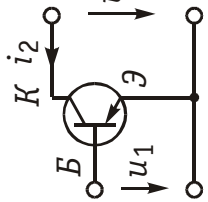
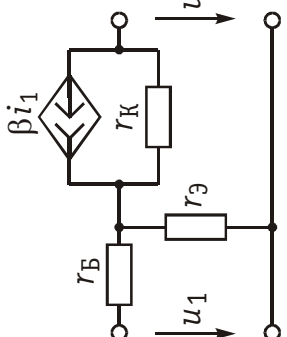
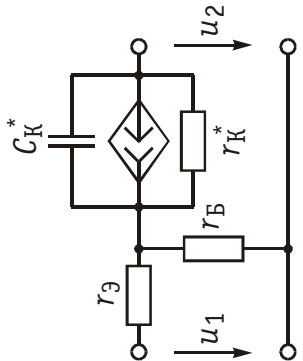
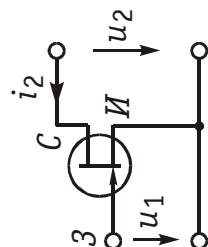
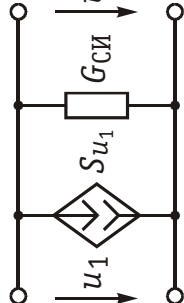
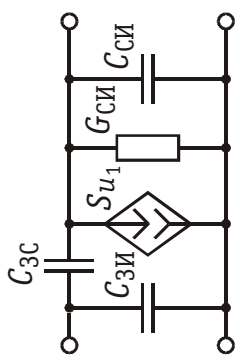


Рис. 1.10

Таблица 1.1

Тип активного элемента	Обозначение на схеме	Эквивалентная схема в области Нч	Эквивалентная схема в области Вч	Уравнение модели
Триод	 <p> A — анод K — катод C — сетка </p>		 <p> C_{AC} — емкость анод-сетка C_{CK} — емкость сетка-катод C_{AK} — емкость анод-катод </p>	$S = \frac{di_2}{du_1}$ $G_i = \frac{1}{R_i} = \frac{di_2}{du_2}$
Биполярный транзистор (ОБ)	 <p> Б — база К — коллектор Э — эмиттер </p>		 <p> C_K — емкость коллектора </p>	$r_{\text{Э}} = R_{11} - R_{12}; \quad r_{\text{Б}} = R_{12}$ $r_{\text{К}} = R_{22} - R_{12}; \quad r_{\text{п}} = R_{21} - R_{12}$ $R_{11} = \frac{du_1}{di_1}; \quad R_{12} = \frac{du_1}{di_2}$ $R_{21} = \frac{du_2}{di_1}; \quad R_{22} = \frac{du_2}{di_2}$

Окончание табл. 1.1

Тип активного элемента	Обозначение на схеме	Эквивалентная схема в области Нч	Эквивалентная схема в области Вч	Уравнение модели
Биполярный p - n - p транзистор (ОЭ)				$\beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha}; \quad \alpha = \frac{r_{\Gamma}}{r_K}$ $r_K^* = (1 - \alpha)r_K$ $C_K^* = (1 + \beta)C_K$
Полевой транзистор с каналом n -типа**	 <p>З — затвор И — исток С — сток</p>		 <p>$C_{ЗИ}$ — емкость затвор-исток $C_{ЗС}$ — емкость затвор-сток $C_{СИ}$ — емкость сток-исток</p>	$G_{СИ} = \frac{di_2}{du_2}$

* Биполярный транзистор p - n - p типа имеет модель аналогичную p - n - p .

** Полевой транзистор с p -каналом имеет модель аналогичную канала n -типа.

Транзисторы, как правило, имеют более сложную структуру, чем лампы и описываются в зависимости от решаемых задач более сложными моделями [2]. Наиболее распространенными для биполярных транзисторов являются T -образные и Π -образные эквивалентные схемы замещения, причем, последние можно получить из первых методами преобразования «звезда — треугольник» (см. § 1.5). В табл. 1.1 приведены T -образные схемы замещения биполярных транзисторов, включенных по схеме с общей базой (ОБ) и общим эмиттером (ОЭ) в области низких и высоких частот и основные соотношения, описывающие их модели.

Иногда для анализа цепей с биполярными транзисторами используют модель ИТУН с конечным входным сопротивлением (рис. 1.10). Для полевых транзисторов обычно используется модель в форме ИТУН (табл. 1.1).

Кроме рассмотренных эквивалентных схем нередко (особенно в справочной литературе) электронные лампы и транзисторы рассматриваются как бесструктурные четырехполюсники с той или иной системой параметров (см. гл. 12).

Отличительной особенностью зависимых источников является их необратимость, т. е. цепи с этими источниками имеют четко выраженный вход и выход. Таким образом, для цепей с зависимыми источниками различают путь прямого прохождения сигнала (от входа к выходу) и обратного прохождения (с выхода на вход), реализуемого с помощью специальных цепей обратной связи (ОС) (гл. 14). Необходимость введения в активные цепи ОС объясняется рядом важных качеств, которыми эти цепи обладают: возможностью моделирования различных функций (см. § 2.7) (суммирование, интегрирование, дифференцирование и др.), генерированием и усилением колебаний, моделированием пассивных элементов типа R , L , C и их преобразованием (например, C и L), перемещение нулей и полюсов функции цепи (см. гл. 14, 15) и др.

1.3. Электрическая схема, топология электрической цепи

Кроме понятия электрической цепи в инженерной практике широкое распространение нашел термин «электрическая схема». В теории цепей *схемой* называют графическое изображение электрической цепи. Элементом схемы соответствуют активные и пассивные элементы электрической цепи.

В микроэлектронике понятие электрической цепи и электронной схемы часто отождествляют между собой. Так, *микросхемой* (интегральной схемой) называют интегральную электрическую цепь, содержащую сотни и тысячи простейших активных и пассивных элементов. Чтобы не ломать сложившуюся традицию, будем использовать термин «электрическая схема» или просто «схема» примени-

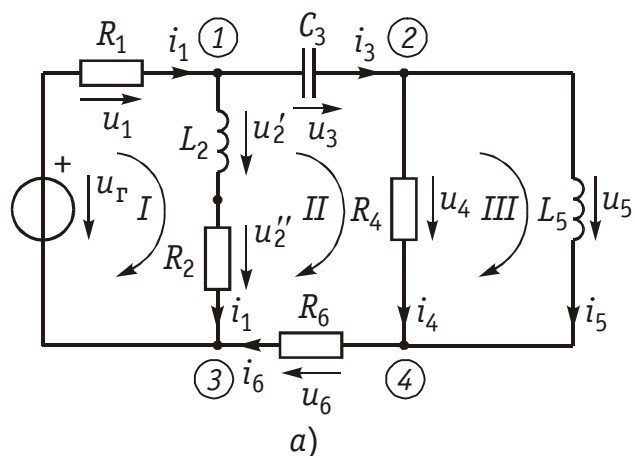


Рис. 1.11

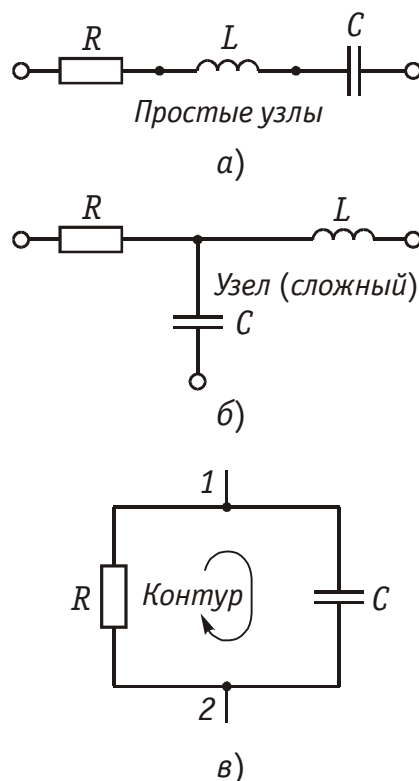


Рис. 1.12

тельно к графическому изображению электрической цепи или электронной схемы и термины «электрическая цепь» или «электронная (микроэлектронная, интегральная) схема» применительно к моделям реальных физических электрических или электронных устройств.

Для анализа электрических цепей в последнее время все большее распространение находят *матрично-топологические методы*. В их основе лежит представление электрической схемы с помощью графа цепи. *Графом цепи* называют геометрическую систему линий (ветвей), соединяющих заданные точки (узлы). Если ветви графа ориентированы по направлению токов ветвей, то граф называется *ориентированным* (направленным). На рис. 1.11, а изображена электрическая схема и ее ориентированный (рис. 1.11, б) граф. Граф содержит всю информацию о геометрической структуре схемы.

Простым узлом называют место соединения зажимов двух элементов (рис. 1.12, а), а сложным — место соединения зажимов трех и более элементов (рис. 1.12, б).

Ветвью называют часть цепи, включенной между двумя узлами, через которые она обменивается энергией с остальной цепью. Ветви, подсоединенные к одной паре узлов, образуют *параллельное соединение* (рис. 1.12, в).

Последовательно соединенные ветви, связывающие два заданных узла образуют *простой путь*, если в нем нет повторяющихся узлов. Например, между узлами 1 и 4 (рис. 1.11, б) простой путь

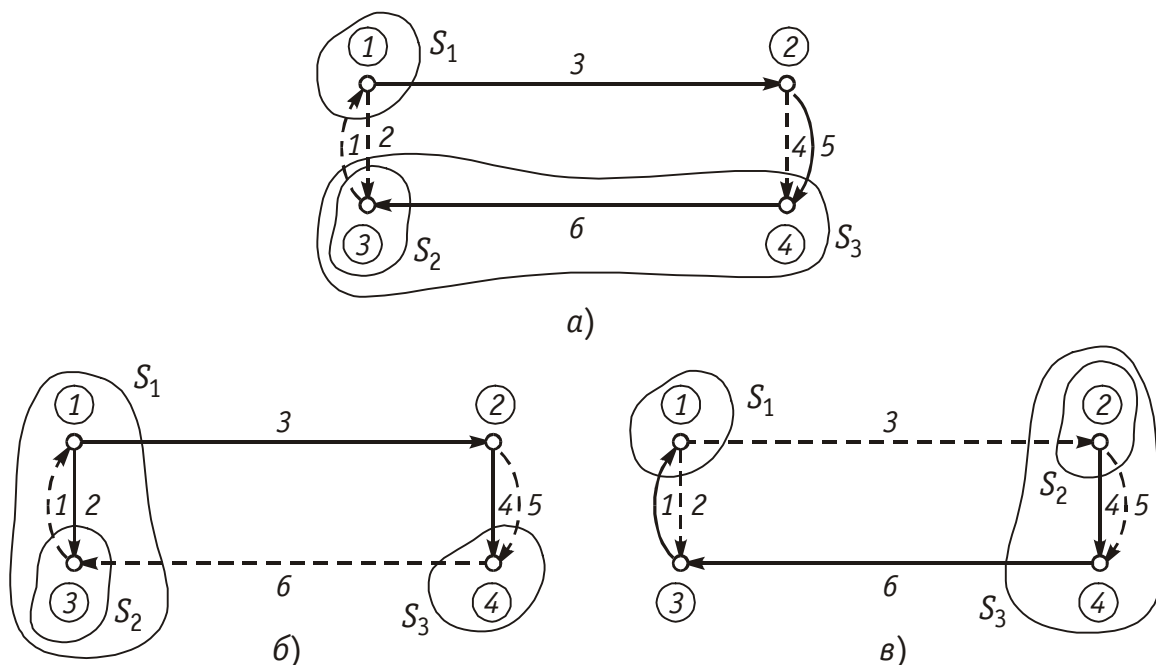


Рис. 1.13

образуется ветвями 3, 5 или 3, 4 и т. д. Замкнутый путь называется *контуром* (рис. 1.12, в).

Подграфом называют часть графа. Подграф является *связным*, если любые его два узла связаны, т. е. соединены ветвями.

Деревом графа называют связный подграф, содержащий все узлы, но не содержащий ни одного контура (рис. 1.13). Ветви дерева называют *ребрами* (на рис. 1.13 показаны сплошными линиями).

В теории графов доказывается, что число ветвей дерева, содержащего n_y узлов, определяется уравнением

$$n_d = n_y - 1. \quad (1.14)$$

Совокупность ветвей не входящих в состав дерева, образует его *дополнение* (на рис. 1.13 помечено штриховыми линиями). Ветви дополнения называют *хордами*. Можно показать, что число хорд

$$n_x = n_b - n_y + 1, \quad (1.15)$$

где n_b — общее число ветвей исходного графа.

Сечением графа называют минимальное множество ветвей, удаление которых разбивает граф на две несвязанные части (подграфы). На рис. 1.11, б показан пример двух сечений, образованных ветвями 1, 2, 4, 5 (по линии А—А) и 3, 6 (по линии В—В). Добавление любой из ветвей сечения делает граф связным. Обычно сечение изображают в виде замкнутой линии, рассекающей граф цепи на несвязанные компоненты. Сечение, «рассекающее» только одну ветвь дерева, называют *главным сечением*. Причем, каждому

дереву соответствует своя совокупность главных сечений (рис. 1.13, сечения S_1, S_2, S_3). Число главных сечений равно числу ветвей дерева (1.14).

Аналитически граф можно описать с помощью *структурной матрицы* A_c (матрицы соединений, инцидентий), представляющей собой прямоугольную таблицу с числом столбцов, равным числу ветвей, и числом строк, равным числу узлов. Если положительное направление тока в ветви l выбрать от узла k , то элементы структурной матрицы a_{kl} определяются из условия:

$$a_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{если ветвь } l \text{ выходит из узла } k; \\ -1, & \text{если ветвь } l \text{ входит в узел } k; \\ 0, & \text{если ветвь } l \text{ не связана с узлом } k. \end{cases}$$

Например, для графа, изображенного на рис. 1.11, b матрица A_c имеет вид

$$A_c = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Ветви} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Узлы} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \left\| \begin{matrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{matrix} \right\| \end{matrix}.$$

Анализ матрицы A_c показывает, что сумма элементов каждого ее столбца равна нулю. Это является следствием зависимости одной из строк, поэтому ее можно исключить из A_c . Узел, строка которого исключается, называют *базисным*, а матрица A_0 , образующаяся при этом, *редуцированная*.

Кроме матрицы A_c при анализе электрических цепей используется *матрица сечений* C , представляющая собой таблицу со строками, соответствующими сечениям графа и столбцами — его ветвями. Если за положительное направление принять направление ветви внутрь области, охваченной сечением, то элементы матрицы сечений c_{kl} определяются следующим образом:

$$c_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{если ветвь } l \text{ направлена внутрь области, охваченной} \\ & \text{линией сечения;} \\ -1, & \text{если ветвь } l \text{ направлена наружу;} \\ 0, & \text{если ветвь } l \text{ не принадлежит сечению.} \end{cases}$$

Так, матрица главных сечений для графа, изображенного на рис. 1.13, b , будет иметь вид

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Ветви} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Сечения} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{matrix} \right\| \end{matrix}.$$

Матрицей контуров **B** называют таблицу, с числом строк равным числу независимых контуров, и числом столбцов равным числу ветвей. Элементы матрицы контуров определяются по правилу

$$b_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{если направление ветви } l \text{ совпадает с направлением} \\ & \text{обхода контура } k; \\ -1, & \text{если направление ветви } l \text{ противоположно направле-} \\ & \text{нию обхода контура } k; \\ 0, & \text{если ветвь } l \text{ — не входит в состав контура.} \end{cases}$$

Например, для графа, изображенного на рис. 1.11, б, матрица

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \text{Контур} \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \begin{array}{c} \text{Ветви} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\ \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right\| \end{array}.$$

Число независимых контуров определяется числом хорд графа (1.15).

1.4. Законы Кирхгофа

В теории цепей различают два типа задач: задачи анализа и синтеза электрических цепей. К *задаче анализа* относятся все задачи, связанные с определением токов, напряжений или мощностей в элементах цепи, конфигурация и параметры которой известны. В *задачах синтеза*, напротив — известны токи и напряжения в отдельных элементах и требуется определить вид цепи и ее параметры, т. е. синтез является обратной задачей по отношению к анализу. Следует отметить, что задача синтеза существенно сложнее задачи анализа и будет рассмотрена в гл. 16.

В основе методов анализа электрических цепей лежат законы Кирхгофа.

Первый закон — *закон токов Кирхгофа* (ЗТК) формулируется по отношению к узлам электрической цепи и отражает тот факт, что в узлах не могут накапливаться заряды. Он гласит: *алгебраическая сумма токов ветвей, сходящихся в любом узле электрической цепи, равна нулю*. Формально это записывается так:

$$\sum_{k=1}^m i_k = 0, \quad (1.16)$$

где m — число ветвей, сходящихся в узле.

В уравнении (1.16) токи, одинаково ориентированные относительно узла, имеют одинаковые знаки. Условимся знаки выходящих токов считать положительными, а входящих — отрицательными. Тогда, например, для узла 1 схемы, изображенной на

рис. 1.11, *a*, согласно ЗТК $-i_1 + i_2 + i_3 = 0$. Число независимых уравнений, составляемых по ЗТК, равно числу независимых узлов электрической цепи и определяется уравнением (1.14).

Закон токов справедлив и по отношению к сечениям электрической цепи. Покажем это на примере сечения S_3 (рис. 1.13, *a*). Запишем ЗТК для узлов 1 и 2:

$$\begin{aligned} \text{для узла 1: } & -i_1 + i_2 + i_3 = 0; \\ \text{для узла 2: } & -i_3 + i_4 + i_5 = 0. \end{aligned}$$

Сложив между собой эти уравнения, получим ЗТК для сечения S_3 :

$$-i_1 + i_2 + i_4 + i_5 = 0.$$

Второй закон — *закон напряжений Кирхгофа* (ЗНК) формулируется по отношению к контурам и гласит: алгебраическая сумма напряжений ветвей в любом контуре равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n u_k = 0, \quad (1.17)$$

где n — число ветвей, входящих в контур.

В уравнении (1.17) напряжения, совпадающие с направлением обхода контура, записываются со знаком «+», а не совпадающие — со знаком «−».

Составим, например, уравнение по ЗНК для цепи, изображенной на рис. 1.11, *a*. В соответствии с направлением для контура I: $-u_1 + u_2 + u_3' + u_4'' = 0$ для контура II: $-u_3' - u_4'' + u_5 + u_6 + u_7 = 0$; для контура III: $-u_6 + u_7 = 0$.

Общее число линейно-независимых уравнений, составляемых по ЗНК, определяется числом независимых контуров, равных числу хорд (см. (1.15)).

Уравнение ЗТК и ЗНК можно записать в матричной форме, используя редуцированную структурную матрицу \mathbf{A}_0 и контурную матрицу \mathbf{B} .

Закон токов получается путем перемножения матрицы \mathbf{A}_0 на матрицу-столбец токов ветвей:

$$\mathbf{I}_B = \| i_1, i_2 \dots i_m \|^\mathrm{T},$$

где T — знак транспонирования;

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{I}_B = 0. \quad (1.18)$$

Закон токов можно записать и через матрицу главных сечений:

$$\mathbf{C} \mathbf{I}_B = 0. \quad (1.19)$$

Умножив контурную матрицу \mathbf{B} на матрицу-столбец напряжения ветвей $\mathbf{U}_B = \| u_1 u_2 \dots u_n \|^\mathrm{T}$ получим ЗНК в матричной форме:

$$\mathbf{B} \mathbf{U}_B = 0. \quad (1.20)$$

1.5. Принцип эквивалентности. Преобразования электрических схем

В основе различных методов преобразования электрических схем лежит *принцип эквивалентности*, согласно которому напряжения и токи в ветвях схемы, не затронутых преобразованием, остаются неизменными. Преобразования электрических схем применяются для упрощения расчетов. Рассмотрим наиболее типичные преобразования, основанные на принципе эквивалентности.

Последовательное соединение элементов. Согласно ЗТК при последовательном соединении элементов через них протекает один и тот же ток (рис. 1.14). Согласно ЗНК напряжение, приложенное ко всей цепи,

$$u = \sum_{k=1}^n u_k. \quad (1.21)$$

Тогда для последовательного соединения резистивных элементов R_1, R_2, \dots, R_n (рис. 1.14, а) с учетом (1.6) будем иметь

$$u = i \sum_{k=1}^n R_k = iR,$$

где

$$R = \sum_{k=1}^n R_k. \quad (1.22)$$

Для последовательного соединения индуктивных элементов L_1, L_2, \dots, L_n с учетом (1.9) получаем (рис. 1.14, б)

$$u = \sum_{k=1}^n L_k \frac{di}{dt} = L \frac{di}{dt},$$

где

$$L = \sum_{k=1}^n L_k. \quad (1.23)$$

Для последовательного соединения емкостных элементов C_1, C_2, \dots, C_n с учетом (1.12) находим (рис. 1.14, в)

$$u = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \int i dt = \frac{1}{C} \int i dt,$$

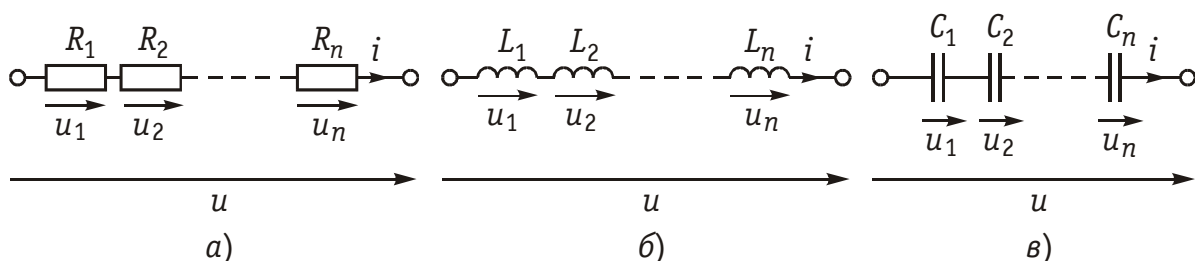


Рис. 1.14

где

$$\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}. \quad (1.24)$$

Таким образом, цепь из n последовательно соединенных резистивных, индуктивных или емкостных элементов может быть заменена одним эквивалентным резистивным, индуктивным или емкостным элементом с параметрами, определяемыми формулами (1.22)–(1.24). Причем, при нахождении эквивалентного сопротивления или эквивалентной индуктивности необходимо суммировать сопротивления и индуктивности отдельных резистивных и индуктивных элементов, а для нахождения эквивалентной обратной емкости — суммировать величины, обратные емкости отдельных емкостных элементов. В частности, при $n = 2$

$$C = C_1 C_2 / (C_1 + C_2). \quad (1.25)$$

При последовательном соединении независимых источников напряжения они заменяются одним эквивалентным источником напряжения с задающим напряжением u_{Γ} , равным алгебраической сумме задающих напряжений отдельных источников. Причем со знаком «+» берутся задающие напряжения, совпадающие с задающим напряжением эквивалентного источника, а со знаком «−» — несовпадающие (рис. 1.15).

Параллельное соединение элементов. При параллельном соединении элементов согласно ЗНК к ним будет приложено одно и то же напряжение (рис. 1.16). Согласно ЗТК для тока каждой из схем, изображенных на рис. 1.16, можно записать

$$i = \sum_{k=1}^n i_k. \quad (1.26)$$

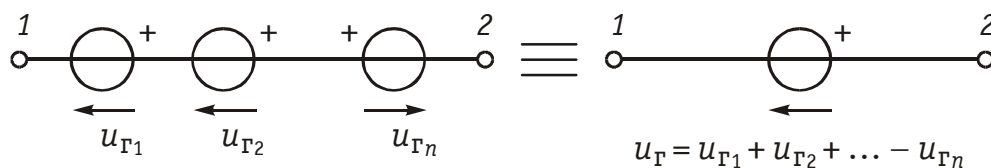


Рис. 1.15

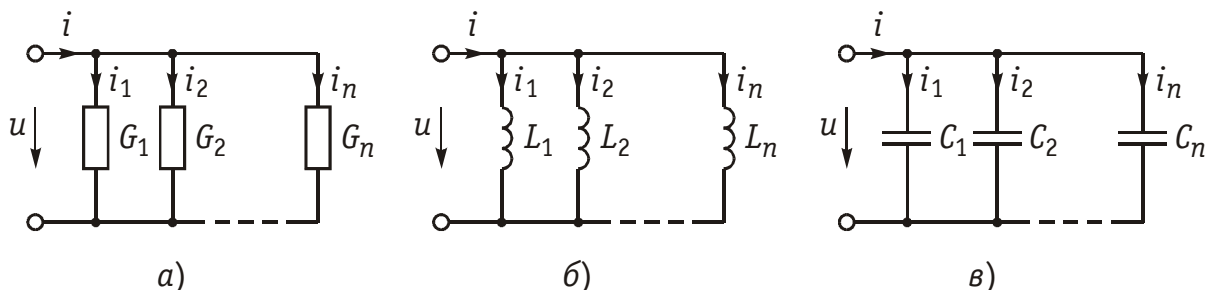


Рис. 1.16

На основании этого, уравнения с учетом формул (1.6), (1.9) и (1.12) получаем:

для параллельного соединения резистивных элементов

$$i = u \sum_{k=1}^n G_k = uG,$$

где

$$G = \sum_{k=1}^n G_k; \quad (1.27)$$

для параллельного соединения емкостных элементов

$$i = \sum_{k=1}^n C_k \frac{du}{dt} = C \frac{du}{dt},$$

где

$$C = \sum_{k=1}^n C_k; \quad (1.28)$$

для параллельного соединения индуктивных элементов

$$i = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \int u dt = \frac{1}{L} \int u dt,$$

где

$$\frac{1}{L} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}. \quad (1.29)$$

Следовательно, цепь из n параллельно соединенных резистивных, индуктивных или емкостных элементов можно заменить одним эквивалентным резистивным, индуктивным или емкостным элементом с параметрами, определяемыми формулами (1.27)–(1.29).

Таким образом, при параллельном соединении резистивных, емкостных и индуктивных элементов для нахождения эквивалентных проводимостей и емкости цепи проводимости или емкости отдельных элементов складываются. Эквивалентная обратная индуктивность цепи находится суммированием обратных индуктивностей отдельных индуктивных элементов. В частности, при $n = 2$

$$R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2); \quad L = L_1 L_2 / (L_1 + L_2). \quad (1.30)$$

Параллельно соединенные независимые источники тока можно заменить одним эквивалентным источником тока с задающим током, равным алгебраической сумме задающих токов отдельных источников. Причем со знаком «+» берутся задающие токи, совпадающие по направлению с задающим током эквивалентного источника, а со знаком «−» — не совпадающие (рис. 1.17).

При расчете электрических цепей часто возникает необходимость преобразования источника напряжения с параметрами u_{Γ} и

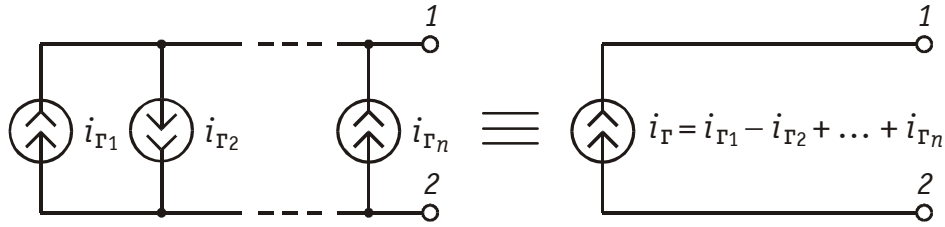


Рис. 1.17

R_{Γ} (см. рис. 1.5, ∂) в эквивалентный источник тока с параметрами i_{Γ} и G_{Γ} (см. рис. 1.5, e), или наоборот — преобразование источника тока в эквивалентный источник напряжения. Эти преобразования осуществляются в соответствии с формулами

$$i_{\Gamma} = u_{\Gamma} / R_{\Gamma}; \quad G_{\Gamma} = 1 / R_{\Gamma}, \quad (1.31)$$

которые могут быть получены из ЗНК и ЗТК для схемы на рис. 1.5, ∂ , e и принципа эквивалентности.

1.6. Принцип наложения

Принцип наложения (суперпозиции) имеет важнейшее значение в теории линейных электрических цепей. Подавляющее число методов анализа линейных цепей базируется на этом принципе. Если рассматривать напряжения и токи источников как *задающие воздействия*, а напряжение и токи в отдельных ветвях цепи как *реакцию* (отклик) цепи на эти воздействия, то принцип наложения можно сформулировать следующим образом: *реакция линейной цепи на сумму воздействий равна сумме реакций от каждого воздействия в отдельности*.

Принцип наложения можно использовать для нахождения реакции в линейной цепи, находящейся как под воздействием нескольких источников, так и при сложном произвольном воздействии одного источника.

Рассмотрим вначале случай, когда в линейной цепи действует несколько источников. В соответствии с принципом наложения для нахождения тока i или напряжения u в заданной ветви осуществим поочередное воздействие каждым источником и найдем соответствующие частные реакции i_k и u_k на эти воздействия. Тогда результирующая реакция в соответствии с принципом наложения определится как

$$i = \sum_{k=1}^n i_k; \quad u = \sum_{k=1}^n u_k, \quad (1.32)$$

где n — общее число источников.

Если в линейной цепи приложено напряжение сложной формы, применение принципа наложения позволяет после разложения это-

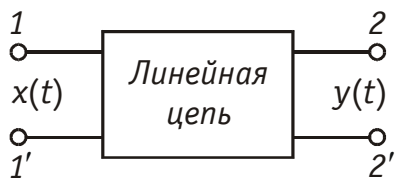


Рис. 1.18

го воздействия на сумму простейших найти реакцию цепи на каждое из них в отдельности с последующим наложением полученных результатов. Следует отметить, что принцип наложения является следствием линейности уравнений, которые описывают цепь, поэтому его можно

применить к любым физическим величинам, которые связаны между собой линейной зависимостью (например, ток и напряжение). В то же время этот принцип нельзя использовать при вычислении мощности, так как она связана с напряжением и током квадратичной зависимостью (1.7).

Принцип наложения лежит в основе большинства временных и частотных методов расчета линейных цепей, которые рассматриваются в последующих главах. В отличие от линейных для нелинейных цепей принцип суперпозиции неприменим — и это обстоятельство часто служит критерием оценки линейности или нелинейности электрической цепи.

Для оценки линейности электрической цепи подадим на ее вход воздействие $x(t)$ в виде напряжения или тока (рис. 1.18) и будем наблюдать реакцию $y(t)$ на выходе. Если при воздействии $kx(t)$ (где k — вещественное число) реакция равна $ky(t)$, то данная цепь будет линейной. Если такой пропорциональности нет, то цепь является нелинейной.

Многие нелинейные цепи в режиме малых сигналов также могут считаться линейными и к ним может быть применен принцип суперпозиции. Все это свидетельствует о чрезвычайно важном месте, который занимает принцип наложения в теории электрических цепей.

Большая часть радиотехнических устройств и систем относится к классу линейных цепей: это усилители, фильтры, корректоры, интеграторы, дифференциаторы, другие цепи, предназначенные для линейной обработки сигналов. В то же время имеется значительное количество устройств, которые нельзя отнести к классу линейных цепей и для их анализа необходимо использовать специальные методы (см. гл. 10, 11, 15).

1.7. Теорема замещения

При обосновании некоторых методов анализа электрических цепей используется *теорема замещения*, которую можно сформулировать следующим образом: *значение всех токов и напряжений в цепи не изменится, если любую ветвь цепи с напряжением u и током i (рис. 1.19, а) заменить источником напряжения с задающим напряжением $u_{\Gamma} = u$ (рис. 1.19, б) или источником тока с задающим током $i_{\Gamma} = i$ (рис. 1.19, в).*

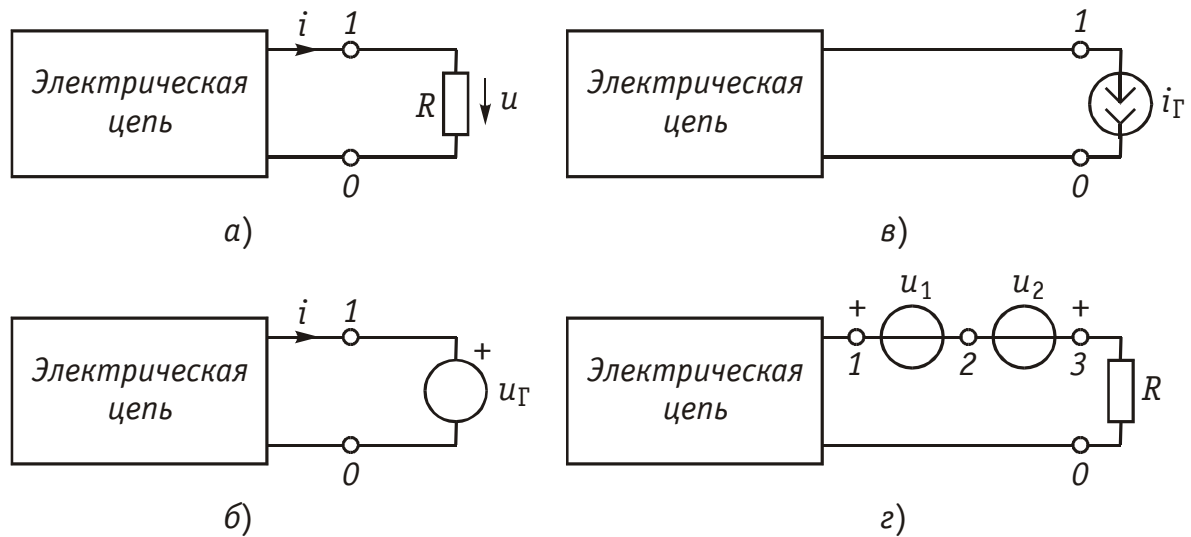


Рис. 1.19

Докажем эту теорему на примере источника напряжения (рис. 1.19, б). Для этого включим в ветвь с R (рис. 1.19, а) два источника напряжения с задающим напряжением $u_1 = u_2 = Ri$ и направленные навстречу друг другу (рис. 1.19, г).

Приняв потенциал узла $V_0 = 0$, найдем потенциалы узлов V_3 , V_2 , V_1 :

$$V_3 = Ri, \quad V_2 = V_3 - u_2 = Ri - Ri = 0; \quad V_1 = V_2 + u_1 = Ri.$$

Таким образом, потенциал узла I в схеме рис. 1.19, а и в схеме рис. 1.19, г оказывается одинаковым. А так как $V_2 = 0$ и $V_0 = 0$, то закорачивая их между собой, приходим к схеме рис. 1.19, б, что и доказывает теорему. Аналогично доказывается и теорема замещения источником тока (рис. 1.19, в).

Теорема замещения справедлива как по отношению к линейным, так и нелинейным цепям, так как при ее доказательстве не накладывается на выделенную ветвь никаких ограничений, кроме того, что она обменивается энергией с остальной частью цепи только через зажимы $1-0$ с помощью тока i .

1.8. Теорема об активном двухполюснике

Теорема об активном двухполюснике используется обычно в случае, когда надо найти реакцию цепи (ток или напряжение) в одной ветви. При этом удобно всю остальную часть цепи, к которой подключена данная ветвь, рассматривать в виде двухполюсника (на рис. 1.20, а) показана резистивная ветвь). Двухполюсник называют *активным*, если он содержит источники электрической энергии, и *пассивным* — в противном случае. На рисунках активный двухполюсник будем обозначать буквой A , а пассивный — Π . Более подробно определение и общая теория двухполюсников излагается в гл. 4.

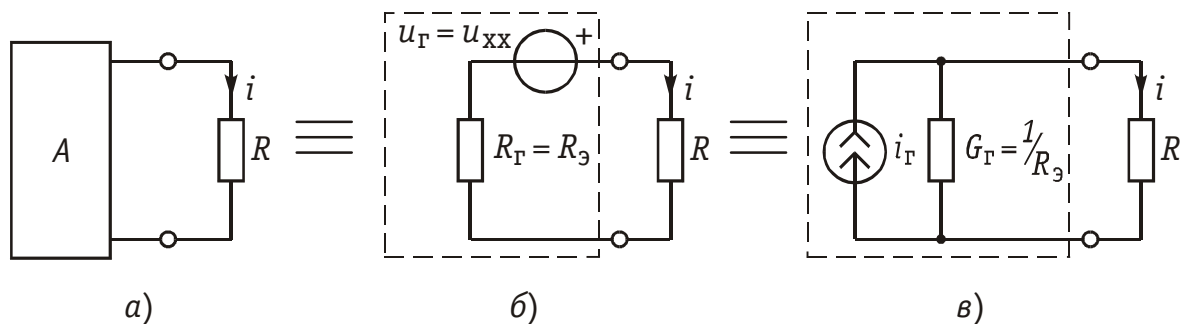


Рис. 1.20

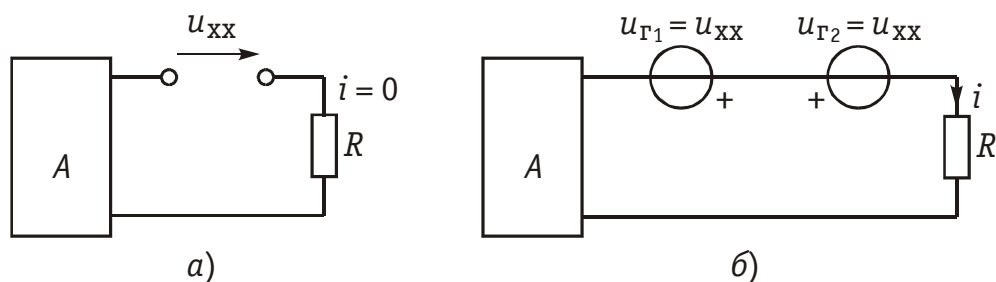


Рис. 1.21

Различают две модификации теоремы об активном двухполюснике: теорема об эквивалентном источнике напряжения (теорема Тевенина) и теорема об эквивалентном источнике тока (теорема Нортона).

Теорема об эквивалентном источнике напряжения. Согласно теореме Тевенина *ток в любой ветви линейной электрической цепи не изменится, если активный двухполюсник, к которому подключена данная ветвь, заменить эквивалентным источником (генератором) напряжения с задающим напряжением, равным напряжению холостого хода на зажимах разомкнутой ветви и внутренним сопротивлением, равным эквивалентному входному сопротивлению пассивного двухполюсника со стороны разомкнутой ветви* (рис. 1.20, б).

Для доказательства этой теоремы предположим, что цепь не содержит зависимых источников. Тогда, разомкнув ветвь с элементом R , определим расчетным или экспериментальным путем напряжение холостого хода u_{xx} (рис. 1.21, а). Затем включим в эту ветвь навстречу друг другу два источника напряжения с задающим напряжением $u_{Г} = u_{xx}$ (рис. 1.21, б). Ток в ветви с R при этом (рис. 1.21, б) не изменится по сравнению с током i в исходной схеме (рис. 1.20, а). Результирующий ток в выделенной ветви найдем в соответствии с принципом наложения: $i = i_A + i_1 + i_2$, где i_A — частичный ток, обусловленный активным двухполюсником; i_1 — ток, обусловленный действием источника $u_{Г1}$; i_2 — ток, обусловленный действием источника $u_{Г2}$. Однако напряжение активного двухполюсника и задающее $u_{Г2}$ действует навстречу друг другу, поэтому $i_A + i_2 = 0$. Следовательно, ток в цепи $i = i_1$ будет

обусловлен только действием источника с $u_{Г1} = u_{xx}$ (см. рис. 1.20, б). Частичный ток i_1 может быть найден, если положить все задающие напряжения и токи активного двухполюсника равными нулю. Получившийся при этом пассивный двухполюсник полностью характеризуется своим эквивалентным сопротивлением $R_э = R_Г$ относительно выделенных зажимов. Таким образом, приходим к схеме, изображенной на рис. 1.20, б и теорема доказана.

Теорема об эквивалентном источнике тока (теорема Нортон): ток в любой ветви линейной электрической цепи не изменится, если активный двухполюсник, к которому подключена данная ветвь, заменить эквивалентным источником тока с задающим током, равным току короткого замыкания этой ветви, и внутренней проводимостью, равной эквивалентной входной проводимости со стороны разомкнутой ветви (см. рис. 1.20, в).

Доказательство этой теоремы проще всего осуществить путем преобразования эквивалентного источника напряжения (см. рис. 1.20, б) в эквивалентный источник тока (рис. 1.20, в) с параметрами

$$G_Г = 1/R_Г; \quad i_Г = i_{кз} = u_{xx} G_Г, \quad (1.33)$$

где $i_{кз}$ — ток короткого замыкания рассматриваемой ветви.

Из (1.33) следует формула, которую можно положить в основу экспериментального определения параметров пассивного двухполюсника:

$$R_э = R_Г = 1/G_Г = u_{xx}/i_{кз}. \quad (1.34)$$

Теорема об активном двухполюснике существенно упрощает расчет сложной цепи, так как позволяет ее представить в виде простейшей схемы эквивалентного источника напряжения или тока с конечным внутренним сопротивлением $R_Г$ или внутренней проводимостью $G_Г$. В отличие от идеальных источников напряжения и тока (см. § 1.2) напряжение и ток этих источников зависят от сопротивления R ветви.

Теорема об активном двухполюснике справедлива и для случая, когда последний содержит зависимые источники с ограниченными задающими напряжениями и токами. При этом при нахождении параметров эквивалентного генератора следует положить равными нулю задающие напряжения и токи лишь независимых источников.

1.9. Принцип дуальности

Анализ уравнений для напряжений и токов, полученных в предыдущих разделах, позволяет сформулировать важный принцип теории электрических цепей — *принцип дуальности* (двойственности). Этот принцип гласит: *если для данной электрической цепи*

Таблица 1.2

Понятия	
Исходные	Дуальные
Напряжение u Сопротивление R Индуктивность L Задающее напряжение u_T	Ток i Проводимость G Емкость C Задающий ток i_T
ЗТК: $\sum_k i_k = 0$ $u_R = Ri; \quad u_L = L \frac{di}{dt}$ $u_C = \frac{1}{C} \int i dt$ Теорема об эквивалентном генераторе напряжения	ЗНК: $\sum_k u_k = 0$ $i_R = Gu; \quad u_C = C \frac{du}{dt}$ $i_L = \frac{1}{L} \int u dt$ Теорема об эквивалентном генераторе тока
Последовательное соединение $R = \sum_k R_k$ $L = \sum_k L_k$ $\frac{1}{C} = \sum_k \frac{1}{C_k}$	Параллельное соединение $G = \sum_k G_k$ $C = \sum_k C_k$ $\frac{1}{L} = \sum_k \frac{1}{L_k}$

справедливы некоторые законы, уравнения или соотношения, то они будут справедливы и для дуальных величин в дуальной цепи. Этот принцип проявляется, например, в сходстве законов изменения напряжения в одной цепи и законов изменения токов в другой цепи (дуальной). Табл. 1.2 иллюстрирует двойственный характер основных законов и соотношений в электрических цепях.

Использование принципа дуальности в ряде случаев позволяет существенно упростить расчет. Так, если найдены уравнения для одной цепи, то используя дуальные соотношения можно сразу записать законы изменения дуальных величин в дуальной цепи.

1.10. Теорема Телледжена. Баланс мощности

Теорема Телледжена является одной из наиболее общих теорем теории электрических цепей. Рассмотрим граф произвольной электрической цепи, содержащей n_v ветвей и n_u узлов. Для согласованных направлений напряжений и токов ветвей теорема Телледжена гласит: *сумма произведений напряжений u_k и токов i_k всех ветвей графа, удовлетворяющих законам Кирхгофа, равна нулю.*

$$\sum_{k=1}^{n_B} u_k i_k = 0. \quad (1.35)$$

Докажем эту теорему на примере цепи, изображенной на рис. 1.22. Составим сумму произведений $u_k i_k$ для каждой из ветвей:

$$\sum_k u_k i_k = (-u_{r1} + u_1) i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3 + u_4 i_4 + u_5 i_5.$$

Согласно ЗНК должны выполняться условия: $-u_r + u_1 = -u_2$; $u_3 = u_2 - u_4$; $u_4 = u_5$. Поэтому равенство (1.35) можно переписать в форме

$$\begin{aligned} \sum_k u_k i_k &= -u_2 i_1 + u_2 i_2 + u_2 i_3 - u_4 i_3 + u_4 i_4 + u_4 i_5 = \\ &= u_2 (i_2 + i_3 - i_1) + u_4 (i_4 + i_5 - i_3) = 0, \end{aligned}$$

так как выражения, стоящие в скобках, равны нулю согласно ЗТК, что и доказывает теорему. Необходимо подчеркнуть, что поскольку теорема Телледжена следует непосредственно из законов Кирхгофа, то она справедлива для любых электрических цепей: линейных и нелинейных, активных и пассивных; цепей, параметры которых изменяются во времени (*параметрических цепей*). В общем случае эта теорема справедлива и для случая попарных произведений u_k и i_l разных ветвей, если для них выполняются ЗНК и ЗТК.

Из теоремы Телледжена вытекает ряд следствий, важнейшим из которых является баланс мощности. Действительно, произведение $u_k i_k$ согласно формуле (1.5) представляет собой мгновенную мощность p_k k -ветви, поэтому в соответствии с (1.35) алгебраическая сумма мощностей всех ветвей цепи равняется нулю. Если в (1.35) выделить ветви с независимыми источниками, то *баланс мощности* можно сформулировать следующим образом: *алгебраическая сумма мощностей, отдаваемых независимыми источниками, равняется алгебраической сумме мощностей, потребляемых остальными ветвями электрической цепи.*

Пример. Составить баланс мощности для цепи, изображенной на рис. 1.23. Алгебраическая сумма мгновенных мощностей, развиваемых источниками на-

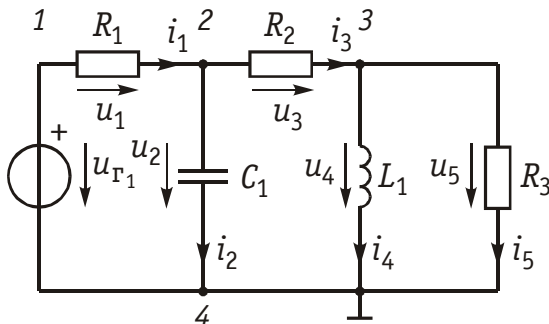


Рис. 1.22

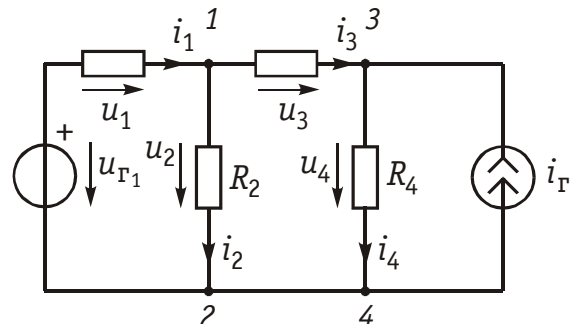


Рис. 1.23

пряжения и тока $p_{\text{ист}} = u_{Г1} i_1 + u_{34} i_Г$. Потребляемая мощность с учетом закона Ома

$$p_{\text{пот}} = u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3 + u_4 i_4 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + R_3 i_3^2 + R_4 i_4^2.$$

В соответствии с балансом мощностей

$$p_{\text{ист}} = p_{\text{пот}}.$$

Следует отметить, что при определении $p_{\text{ист}}$ произведение $u_{Г1} i_1$ берется со знаком «+», если направления задающего напряжения $u_{Г1}$ и тока i_1 направлены навстречу друг другу, и со знаком «−» в противном случае. Аналогичное правило знаков для источников тока: если напряжение на зажимах источника направлено навстречу задающему току $i_Г$, берется знак «+», а если напряжение совпадает с током — знак «−». Баланс мощности выражает не что иное, как закон сохранения энергии в электрической цепи.

Вопросы и задания для самопроверки

1. Что называется электрическим током, напряжением, мощностью, энергией?
2. Дать определения активных и пассивных элементов электрической цепи.
3. Дать определения зависимых и независимых источников электрической энергии и привести примеры тех и других.
4. В чем суть принципа суперпозиции? Для каких электрических цепей он применим?
5. В чем суть теоремы замещения? Для каких цепей она применима?
6. В чем суть теоремы об активном двухполюснике? Какие величины являются параметрами эквивалентного источника напряжения, эквивалентного источника тока?
7. Что отражает баланс мощностей в электрической цепи? Могут ли не совпадать значения мощностей, отдаваемых источниками в цепь и потребляемых элементами цепи?

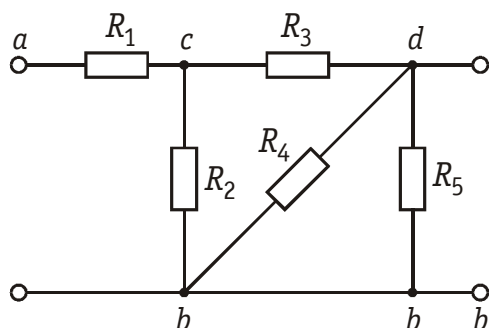


Рис. 1.24

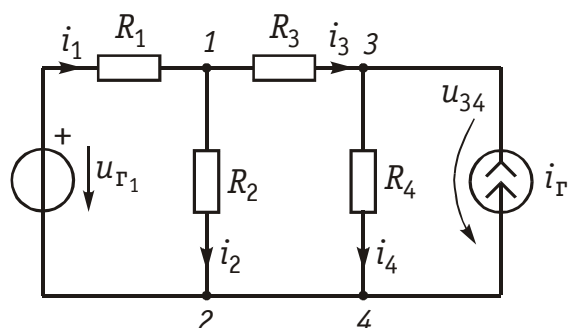


Рис. 1.25



Рис. 1.26

8. Дать определения графа, узла, ветви, дерева, контура электрической цепи.
9. Дать определения I и II законов Кирхгофа для электрической цепи. Как они записываются в матричной форме?
10. Определить эквивалентное сопротивление цепи, изображенной на рис. 1.24, относительно точек ab , cd , db , ad .

Ответ: $R_{ab} = R_1 + \frac{R_2 \cdot \left(R_3 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} \right)}{R_2 + R_3 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}}; R_{cd} = \frac{R_3 \cdot \left(R_2 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} \right)}{R_3 + R_2 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}};$

$$R_{db} = \frac{R_5 \cdot \frac{R_4 (R_2 + R_3)}{R_4 + R_2 + R_3}}{R_5 + \frac{R_4 (R_2 + R_3)}{R_4 + R_2 + R_3}}; R_{ad} = R_1 + \frac{R_3 \cdot \left(R_2 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} \right)}{R_3 + R_2 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}}.$$

11. Составить баланс мощности для цепи, изображенной на рис. 1.25.

Ответ: $p_{\text{ист}} = u_{Г1} \cdot i_1 + u_{34} \cdot i_Г;$

$$p_{\text{потр}} = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + R_3 i_3^2 + R_4 i_4^2; \quad p_{\text{ист}} = p_{\text{потр}}.$$

12. Определить параметры источника тока, изображенного на рис. 1.26, б, эквивалентного заданному источнику напряжения, если $U_Г = 100$ В, $R_Г = 2$ Ом.

Ответ: $i_Г = 50$ А; $G_Г = 0,5$ Ом⁻¹.

ГЛАВА 2. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ В РЕЖИМЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

2.1. Метод законов Кирхгофа

В электрических цепях, содержащих активные элементы (электронные лампы, транзисторы, операционные усилители и другие зависимые источники) важным режимом работы является статический. В *статическом режиме* на электроды активного элемента подаются постоянные токи и напряжения, обеспечивающие заданные условия работы того или иного устройства. Статический ре-

жим характеризуется зависимостями между постоянными токами и напряжениями в отдельных частях электрической цепи и является одним из *основных режимов работы* любого электрического устройства. Поэтому анализ цепей в режиме постоянного тока играет важную роль в общей теории электрической связи.

Как отмечалось в § 1.2 при постоянном токе и напряжении индуктивность эквивалентна короткозамкнутому участку (рис. 1.1, *а*), емкость — разрыву цепи. Таким образом, в режиме постоянного тока в модели цепи будут отсутствовать реактивные элементы, и она приобретет чисто резистивный характер. Линейные резистивные цепи полностью описываются системой линейных алгебраических уравнений, составляемых на основании закона Кирхгофа. В этой главе рассмотрим основные методы анализа линейных резистивных цепей, находящихся под воздействием постоянных токов и напряжений. Постоянные токи и напряжения в дальнейшем будем обозначать прописными буквами I и U соответственно.

Метод расчета электрических цепей, основанный на законах Кирхгофа, в которых независимыми переменными являются токи в ветвях, называют *методом токов ветвей*. В соответствии с этим методом для нахождения токов или напряжений ветвей составляются $(n_y - 1)$ уравнений (1.16) по ЗТК и $(n_b - n_y + 1)$ уравнений (1.17) по ЗНК. В результате получаем систему из $(n_y - 1) + (n_b - n_y + 1) = n_b$ линейно-независимых уравнений, число которых равно числу токов ветвей. Совместное решение этой системы позволяет найти все токи.

При выборе независимых контуров необходимо руководствоваться топологией электрической цепи (§ 1.3): составить граф цепи, выбрать дерево, дополнить его хордой, при этом образуется контур. Путем последовательного дополнения хордами дерева до исходного графа получаем $(n_b - n_y + 1)$ независимых контуров.

Пример. Рассчитать токи ветвей схемы резистивной цепи, изображенной на рис. 2.1. *а* по методу уравнений Кирхгофа.

Построим граф цепи (рис. 2.1, *б*) и выберем дерево (рис. 2.1, *в*). Дополним дерево хордами 2, 5, 6 (на рис. 2.1, *в* показано пунктиром). В результате образуется три независимых контура *I*, *II*, *III* (рис. 2.1, *а*). Составим уравнение по ЗТК и ЗНК.

Схема имеет $n_y = 4$ узла, $n_b = 6$ ветвей. Выберем узел 4 в качестве базисного и составим $n_y = 3$ уравнения по ЗТК:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{для узла } 1 & -I_1 + I_3 + I_4 = 0, \\ \text{для узла } 2 & -I_2 - I_3 + I_5 = 0, \\ \text{для узла } 3 & I_2 - I_4 + I_6 = 0. \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

По ЗНК составляем $n_b - n_y + 1 = 3$ уравнения для контуров, показанных на рис. 2.1, *а* стрелками: для контура *I* $-U_{r1} + U_1 + U_3 + U_5 = 0$; для контура *II* $U_{r2} + U_2 - U_3 + U_4 = 0$; для контура *III* $-U_{r2} - U_2 + U_6 - U_5 = 0$. Или с учетом закона Ома (1.6):

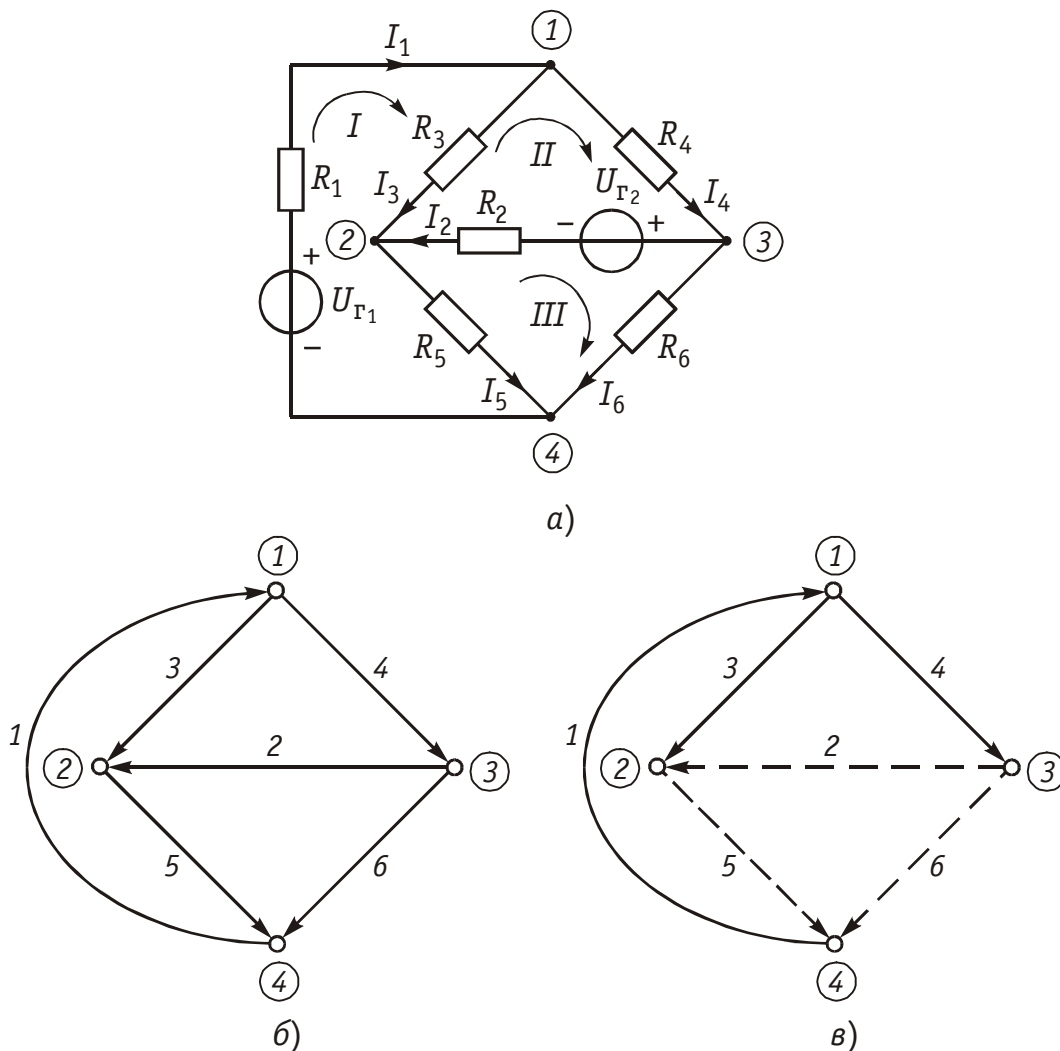


Рис. 2.1

$$\left. \begin{aligned} -U_{r1} + R_1 I_1 + R_3 I_3 + R_5 I_5 &= 0, \\ U_{r2} + R_2 I_2 - R_3 I_3 + R_4 I_4 &= 0, \\ -U_{r2} - R_2 I_2 + R_6 I_6 - R_5 I_5 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Решая совместно системы уравнений (2.1) и (2.2), найдем искомые токи.

При использовании законов Кирхгофа в качестве независимых переменных можно было взять напряжения ветвей (*метод напряжения ветвей*) или токи одних ветвей и напряжения других (*гибридный метод*).

В случае, если в цепи имеется ветвь с источником тока, то неизвестным параметром в этой ветви является напряжение на зажимах источника, которое можно найти методом напряжения ветвей.

2.2. Преобразование резистивных электрических цепей

В случае, когда на цепь воздействует один источник постоянного напряжения или тока, наиболее эффективным является метод

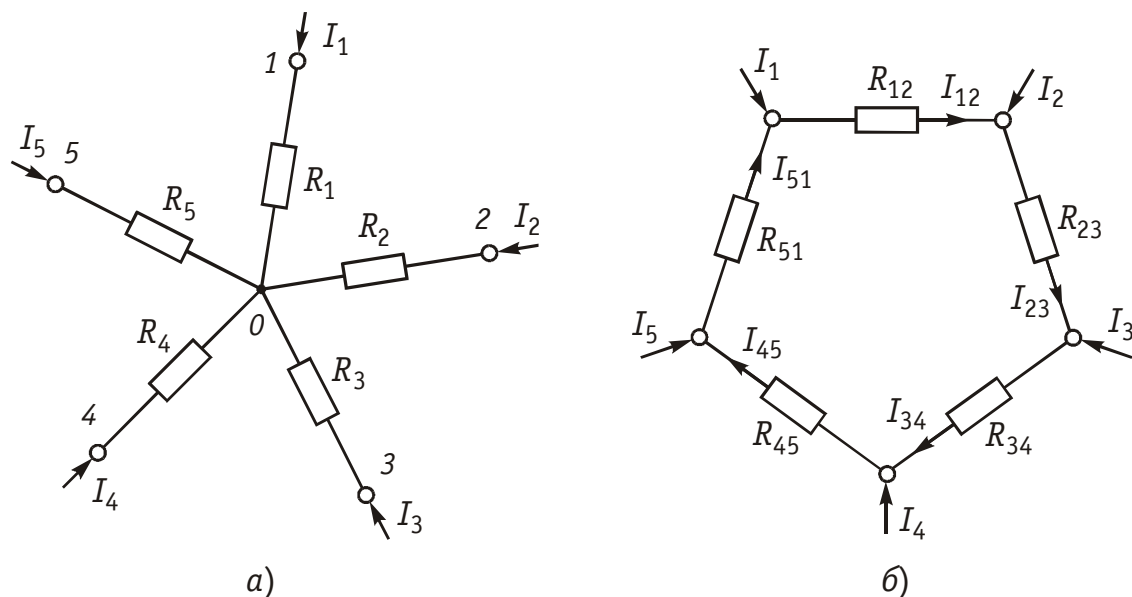


Рис. 2.2

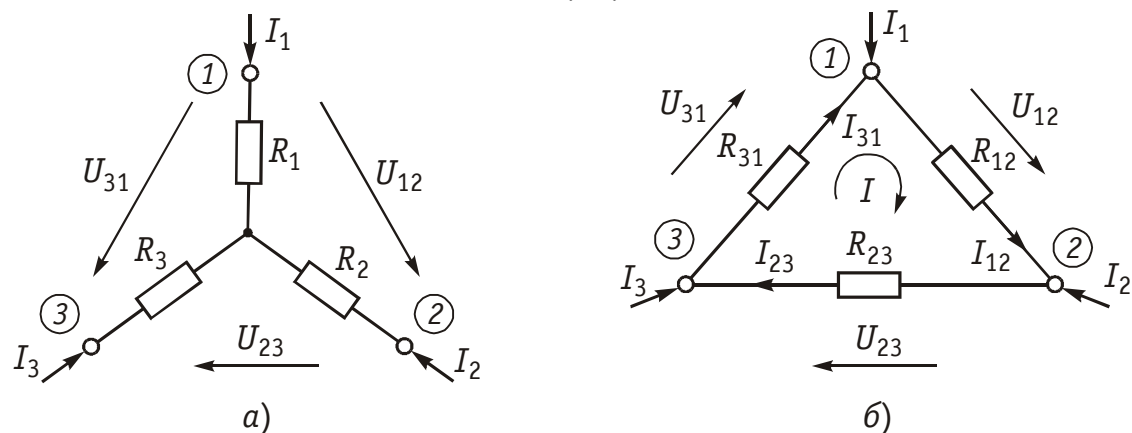


Рис. 2.3

преобразования электрических цепей. Суть этого метода заключается в нахождении эквивалентного сопротивления цепи относительно зажимов (полюсов) источника.

В § 1.5 были рассмотрены простейшие методы преобразования последовательного и параллельного соединенных пассивных элементов (см. формулы (1.22)–(1.24) и (1.27)–(1.29)). Однако на практике встречаются более сложные соединения элементов, которые нельзя свести только к последовательному или параллельному. Примером подобного соединения являются соединения многолучевой звездой (рис. 2.2, а) и многоугольником (рис. 2.2, б).

Характерной особенностью этих соединений является наличие внутреннего узла 0 в звезде и внутреннего контура в многоугольнике. Наиболее часто встречаются случаи трехлучевой звезды и треугольника (рис. 2.3, а, б).

Найдем формулы преобразования соединения «треугольника» в «звезду». Запишем для схемы «треугольник» уравнения по ЗТК и ЗНК (рис. 2.3, б):

$$\left. \begin{array}{l} \text{для узла 1} \quad I_{12} - I_{31} - I_1 = 0, \\ \text{для узла 2} \quad I_{23} - I_{12} - I_2 = 0, \\ \text{для контура I} \quad U_{12} + U_{23} + U_{31} = 0. \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

Решая систему (2.3) относительно U_{12} с учетом равенств $U_{23} = R_{23}I_{23}$ и $U_{31} = R_{31}I_{31}$, получаем

$$U_{12} = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} I_1 - \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} I_2. \quad (2.4)$$

Для схемы «звезда» на основании ЗНК для U_{12} можно записать (см. рис. 2.3, а):

$$U_{12} = R_1 I_1 - R_2 I_2. \quad (2.5)$$

Так как на основании принципа эквивалентности напряжение U_{12} и токи I_1 и I_2 из (2.4) и (2.5) равны друг другу, то попарно равны и сомножители при токах I_1 и I_2 :

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (2.6)$$

Уравнение для R_3 получаем аналогично (круговой заменой индексов):

$$R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (2.7)$$

Уравнения (2.6) и (2.7) позволяют осуществить переход от соединения резистивных элементов «треугольник» к соединению «звезда». Обратный переход можно получить по формулам

$$\left. \begin{array}{l} R_{12} = R_1 + R_2 + R_1 R_2 / R_3, \\ R_{23} = R_2 + R_3 + R_2 R_3 / R_1, \\ R_{31} = R_3 + R_1 + R_3 R_1 / R_2, \end{array} \right\} \quad (2.8)$$

осуществляемые из (2.6) и (2.7).

Если выразить сопротивление сторон треугольника и лучей звезды через проводимости $G_{12} = 1/R_{12}$, $G_{23} = 1/R_{23}$, $G_{31} = 1/R_{31}$, $G_1 = 1/R_1$, $G_2 = 1/R_2$, $G_3 = 1/R_3$, то формулы (2.8) примут дуальный вид (2.6), (2.7):

$$\begin{aligned} G_{12} &= \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}, \\ G_{23} &= \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}, \\ G_{31} &= \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Пример. Рассчитать токи ветвей схемы резистивной цепи, изображенной на рис. 2.4, а. Данная схема может служить моделью измерительного моста, который находит широкое применение в различных измерительных приборах, в частности для измерения сопротивлений. Принцип работы моста основан на выполнении условий баланса его плечей.

$$R_{31}R_{24} = R_{12}R_{34}.$$

При этом потенциалы узлов 2 и 3 оказываются одинаковыми и в диагонали моста R_{23} ток будет равен нулю. Таким образом, если включить в диагональ моста вместо R_{23} измерительный прибор — амперметр, то путем изменения одного из сопротивлений плеча (например, R_{24} с помощью магазина сопротивлений), можно найти сопротивление другого (например R_{31}). Для случая, когда $R_{12} = R_{31} = R$, условие баланса достигается при $R_{34} = R_{24}$.

Преобразуем треугольник R_{12} , R_{23} , R_{31} в звезду с лучами R_1 , R_2 , R_3 (рис. 2.4, б), где R_1 , R_2 , R_3 определяются формулами (2.6) и (2.7). Тогда эквивалентное сопротивление цепи относительно зажимов источника (узлы 1 и 4)

$$R_{\text{э}} = R_1 + \frac{(R_3 + R_{34})(R_2 + R_{24})}{R_3 + R_{34} + R_2 + R_{24}}.$$

Ток источника определяем по закону Ома:

$$I = U_{\text{г}}/R_{\text{э}},$$

а токи ветвей I_{34} и I_{24} по «формуле разброса», которая может быть получена на основании ЗТК и закона Ома для сопротивлений $(R_3 + R_{34})$ и $(R_2 + R_{24})$:

$$I_{34} = I \frac{R_2 + R_{24}}{R_2 + R_{24} + R_3 + R_{34}}; \quad I_{24} = I \frac{R_3 + R_{34}}{R_2 + R_{24} + R_3 + R_{34}}.$$

Для нахождения токов I_{12} и I_{31} определим напряжение U_{12} для преобразованной схемы (рис. 2.4, б): $U_{12} = R_1 I + R_2 I_{24}$. Учитывая, что U_{12} в схеме треугольника (рис. 2.4, а) и в схеме звезды (рис. 2.4, б) равны согласно принципа эквивалентности, найдем ток $I_{12} = U_{12}/R_{12}$. Токи I_{23} и I_{31} определяем по ЗТК: $I_{23} = I_{12} - I_{24}$; $I_{31} = I_{23} - I_{34}$.

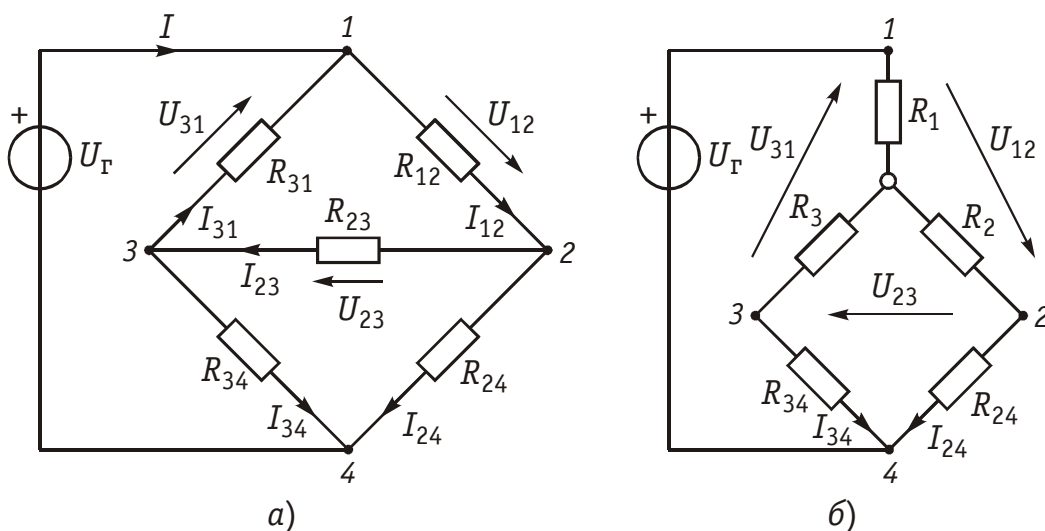


Рис. 2.4

Аналогично формуле (2.9) можно получить формулы преобразования n -лучевой звезды в полный многоугольник с числом ветвей равным $n_{\text{в}} = n(n - 1)/2$:

$$G_{lm} = \frac{G_l G_m}{\sum_{k=1}^{n_{\text{в}}} G_k}. \quad (2.10)$$

Следует отметить, что обратная задача преобразования многоугольника в эквивалентную n -лучевую звезду при $n > 3$ не имеет решения, так как при этом оказывается число уравнений $n(n - 1)/2$ превышает число неизвестных.

2.3. Метод наложения

В основе метода наложения лежит принцип суперпозиции (наложения), линейных электрических цепей (§ 1.6). Этот метод применяется в случае, когда в цепи действует несколько источников напряжения или тока. При этом в соответствии с этим принципом находят частичные токи и напряжения, а результирующие реакции определяются путем алгебраического суммирования частичных токов и напряжений.

Проиллюстрируем принцип наложения на примере резистивной цепи, изображенной на рис. 2.5, а, содержащей идеальные источники напряжения. Найдем ток в резистивном элементе R_3 . Положим вначале, что в цепи действует только один источник $U_{\Gamma 1}$; второй источник напряжения исключается и зажимы его закорачиваются. При этом получаем частичную схему, изображенную на рис. 2.5, б. Определим ток I_3' от воздействия напряжения $U_{\Gamma 1}$:

$$I_3' = I_1' \frac{R_2}{R_1 + R_3}, \quad \text{где} \quad I_1' = \frac{U_{\Gamma 1}}{R_1 + R_2 R_3 / (R_2 + R_3)}.$$

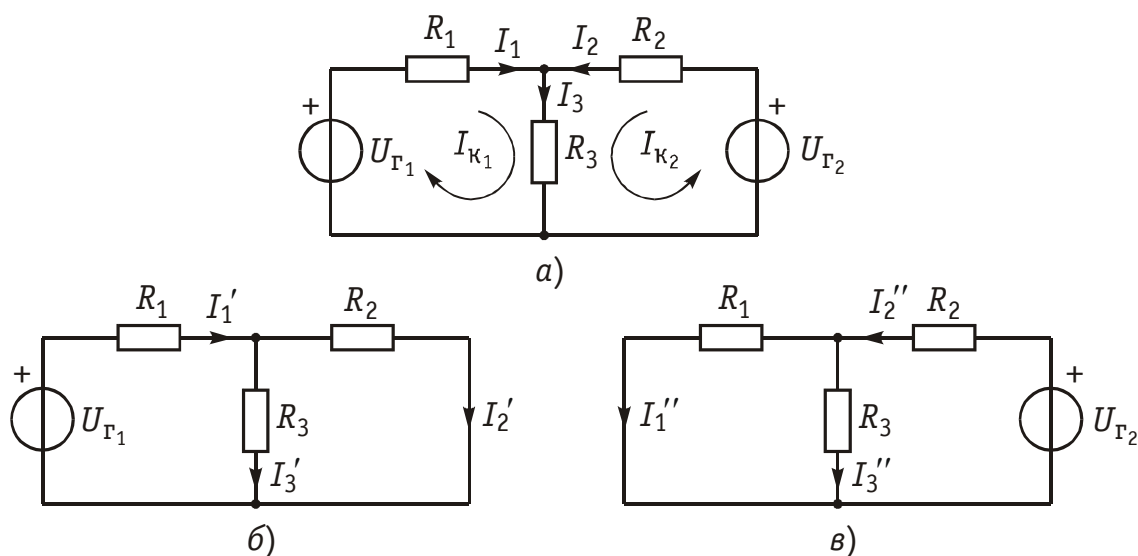


Рис. 2.5

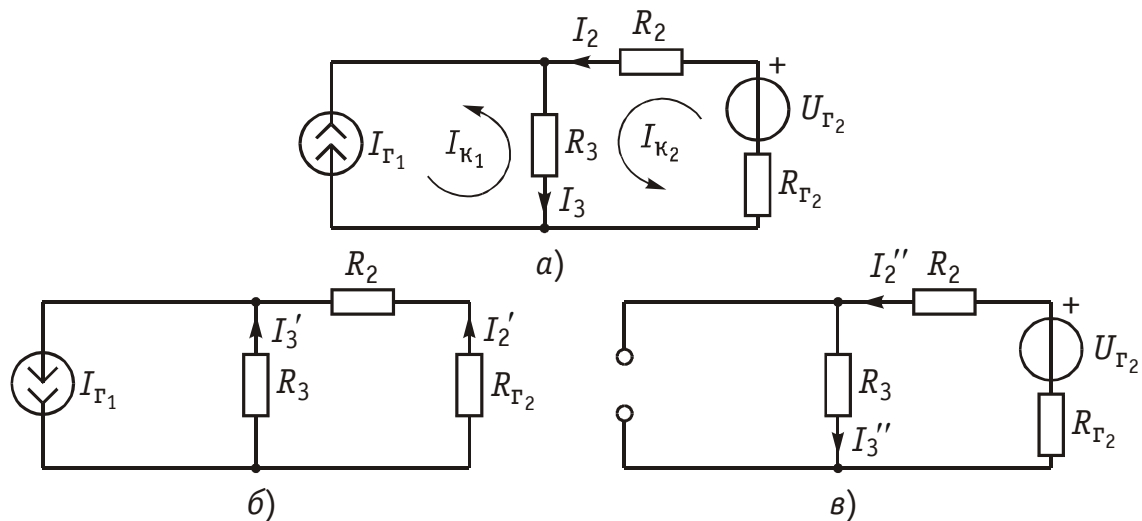


Рис. 2.6

Теперь полагаем, что в цепи действует только источник $U_{Г2}$. Исключив источник $U_{Г1}$, получим вторую частичную схему (рис. 2.5, в). Ток I_3'' от воздействия $U_{Г2}$ определится как

$$I_3'' = I_2'' \frac{R_1}{R_1 + R_3}, \text{ где } I_2'' = \frac{U_{Г2}}{R_2 + R_1 R_3 / (R_1 + R_3)}.$$

Результирующий ток I_3 найдем как алгебраическую сумму частных токов I_3' и I_3'' : $I_3 = I_3' + I_3''$. При определении результирующих токов знак «+» берут у частных токов, совпадающих с выбранным положительным направлением результирующего тока, и знак «-» — у несовпадающих. Как следует из рассмотренного примера, при составлении частных электрических схем исключаемые идеальные источники напряжения закорачиваются. В случае, если в цепи действуют источники напряжения с внутренними сопротивлениями $R_{Г}$, при их исключении они заменяются своими внутренними сопротивлениями $R_{Г}$.

При наличии идеальных источников тока соответствующие ветви исключаемых источников размыкаются, а при наличии реальных источников они заменяются своими внутренними проводимостями $G_{Г}$.

Пример. Определить ток I_3 в цепи, изображенной на рис. 2.6, а. Составляем две частные схемы (рис. 2.6, б, в), для которых находим частичные токи:

$$I_3' = I_{Г1} \frac{R_2 + R_{Г2}}{R_2 + R_{Г2} + R_3}; \quad I_3'' = \frac{U_{Г2}}{R_{Г2} + R_2 + R_3}.$$

Результирующий ток $I_3 = I_3'' - I_3'$.

При наличии в цепи зависимых источников они остаются в частных схемах неизменными.

и со знаком «—», если направление напряжения и контурного тока совпадают.

Решая систему уравнений (2.11), найдем значения контурных токов

$$I_{k1} = \Delta_1 / \Delta_R; \quad I_{k2} = \Delta_2 / \Delta_R; \quad \dots \quad I_{kk} = \Delta_k / \Delta_R,$$

где Δ_R — главный определитель системы (2.11):

$$\Delta_R = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1k} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{k1} & R_{k2} & \dots & R_{kk} \end{vmatrix}. \quad (2.12)$$

Определитель Δ_k находится путем замены k -го столбца в (2.12) правой частью системы (2.11). Например, для Δ_1 имеем:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} U_{k1} & R_{12} & \dots & R_{1k} \\ U_{k1} & R_{22} & \dots & R_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{kk} & R_{k2} & \dots & R_{kk} \end{vmatrix}. \quad (2.13)$$

Разлагая определитель Δ_1 по элементам первого столбца, можем получить уравнение для I_{k1} в другой форме:

$$I_{k1} = U_{k1} \frac{\Delta_{11}}{\Delta_R} + U_{k2} \frac{\Delta_{21}}{\Delta_R} + \dots + U_{kk} \frac{\Delta_{k1}}{\Delta_R} = \frac{1}{\Delta_R} \sum_{l=1}^k U_{kl} \Delta_{l1}, \quad (2.14)$$

где Δ_{11} , Δ_{12} , ..., Δ_{k1} — алгебраические дополнения определителя (2.12).

Аналогичные уравнения можно получить для остальных токов:

$$I_{k2} = \frac{1}{\Delta_R} \sum_{l=1}^k U_{kl} \Delta_{l2}, \dots, I_{kk} = \frac{1}{\Delta_R} \sum_{l=1}^k U_{kl} \Delta_{lk}. \quad (2.15)$$

Как следует из уравнений (2.14) и (2.15), контурный ток может быть получен алгебраическим суммированием частичных токов от воздействия каждого контурного задающего напряжения в отдельности. Таким образом, полученный результат отражает рассмотренный в § 1.6 принцип наложения.

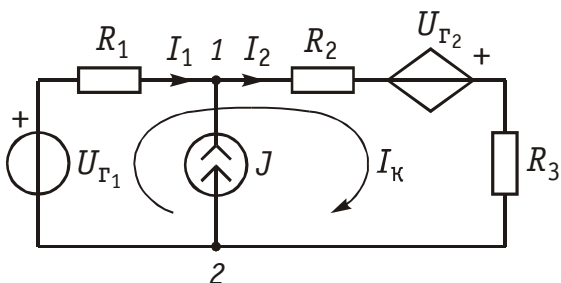


Рис. 2.7

Если в схеме кроме источников напряжения содержится n -ветвей с источниками тока, то независимые контуры выбираются так, чтобы источник тока входил только в один контур. Это можно сделать, если выбрать дерево графа цепи таким, чтобы источник тока входил в одну из хорд.

Число контурных уравнений при этом уменьшается до

$$n_{\text{к}} = n_{\text{в}} - n_{\text{у}} + 1 - n_{\text{г}}. \quad (2.16)$$

Напряжения от задающих токов этих источников учитываются в левой части системы (2.11) на взаимных сопротивлениях, которые эти токи обтекают. Например, для схемы, изображенной на рис. 2.6, а, составляется только одно уравнение для II контура:

$$R_{22}I_{\text{к}2} - I_{\text{г}1}R_3 = (R_{\text{г}2} + R_2 + R_3)I_{\text{к}2} - R_3I_{\text{г}1} = U_{\text{г}2}.$$

Сформулированные выше правила составления уравнений по методу контурных токов справедливы и в случае зависимых источников напряжения ИНУН и ИНУТ.

Пример. Найдем токи в цепи содержащей ИНУТ с задающим напряжением $U_{\text{г}2} = H_R I_1$ (рис. 2.7) по методу контурных токов.

Учитывая, что цепь содержит ветвь с идеальным независимым источником тока J согласно (2.15) составим всего одно уравнение для контурного тока $I_{\text{к}}$. При этом задающий ток источника тока J замыкаем по ветви с R_1 и $U_{\text{г}1}$, в результате получим

$$\begin{aligned} I_{\text{к}}(R_1 + R_2 + R_3) - JR_1 &= \\ &= U_{\text{г}1} + U_{\text{г}2} = U_{\text{г}1} + H_R I_1, \end{aligned}$$

или с учетом того, что $I_1 = I_{\text{к}} - J$, окончательно получим

$$I_{\text{к}}(R_1 + R_2 + R_3 - H_R) = U_{\text{г}1} - (H_R - R_1).$$

Отсюда следует

$$I_{\text{к}} = I_2 = \frac{U_{\text{г}1} - (H_R - R_1)}{(R_1 + R_2 + R_3 - H_R)}.$$

Запишем уравнение контурных токов в матричной форме. Закон Ома в матричной форме имеет вид

$$\mathbf{I}_{\text{в}} = \mathbf{G}_{\text{в}} (\mathbf{U}_{\text{гв}} + \mathbf{U}_{\text{в}}), \quad (2.17)$$

или

$$\mathbf{R}_{\text{в}} \mathbf{I}_{\text{в}} = \mathbf{U}_{\text{гв}} + \mathbf{U}_{\text{в}} \quad (2.18)$$

где $\mathbf{G}_{\text{в}} = \mathbf{R}_{\text{в}}^{-1}$, $\mathbf{G}_{\text{в}}$, $\mathbf{R}_{\text{в}}$ — квадратная диагональная матрица проводимостей и сопротивлений ветвей.

$\mathbf{I}_{\text{в}}$, $\mathbf{U}_{\text{гв}}$, $\mathbf{U}_{\text{в}}$ — матрицы-столбцы токов, задающих напряжений источников и напряжений ветвей. Умножив слева обе части равенства (2.17) на контурную матрицу \mathbf{B} и учтя, что согласно ЗНК (1.20) $\mathbf{B}\mathbf{U}_{\text{в}} = 0$, получим

$$\mathbf{B}\mathbf{R}_{\text{в}}\mathbf{I}_{\text{в}} = \mathbf{B}\mathbf{U}_{\text{гв}}. \quad (2.19)$$

Токи ветвей связаны с контурными токами соотношением:

$$\mathbf{I}_{\text{в}} = \mathbf{B}^T \mathbf{I}_{\text{к}} \quad (2.20)$$

где \mathbf{I}_K — матрица-столбец контурных токов.

Подставляя (2.19) в (2.18), получаем:

$$\mathbf{B}\mathbf{R}_B\mathbf{B}^T\mathbf{I}_K = \mathbf{B}\mathbf{U}_{гв}. \quad (2.21)$$

Если учесть, что

$$\mathbf{B}\mathbf{R}_B\mathbf{B}^T = \mathbf{R}_K, \quad \mathbf{B}\mathbf{U}_{гв} = \mathbf{U}_K, \quad (2.22)$$

где \mathbf{R}_K — квадратная матрица контурных сопротивлений; \mathbf{U}_K — матрица-столбец контурных задающих напряжений, то в соответствии с (2.20) получим матричное уравнение контурных токов

$$\mathbf{R}_K\mathbf{I}_K = \mathbf{U}_K. \quad (2.23)$$

Пример. Рассмотрим схему, изображенную на рис. 2.8, а. В соответствии с направлением токов строим направленный граф цепи (рис. 2.8, б) и дерево графа (рис. 2.8, в). Подсоединяя к дереву хорды (на рис. 2.8, г обозначены пунктиром), получаем три независимых контура. Выбрав направление обхода контуров I , II и III , в соответствии с правилом, изложенным в § 1.3, строим контурную матрицу

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Матрица сопротивлений ветвей \mathbf{R}_B будет иметь вид

$$\mathbf{R}_B = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 \end{bmatrix}.$$

Найдем матрицу контурных сопротивлений:

$$\mathbf{R}_K = \mathbf{B}\mathbf{R}_B\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} (R_1 + R_2 + R_5) - R_2 - R_5 \\ -R_2(R_2 + R_3 + R_4) - R_4 \\ -R_5 - R_4(R_4 + R_5 + R_6) \end{bmatrix}.$$

Матрицу контурных задающих напряжений найдем согласно (2.22)

$$\mathbf{U}_K = \mathbf{B}\mathbf{U}_{гв} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{г1} \\ -U_{г3} \\ -U_{г5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{г1} + U_{г5} \\ U_{г3} \\ -U_{г5} \end{bmatrix}.$$

Подставив \mathbf{U}_K и \mathbf{R}_K в уравнение (2.23), получим уравнение контурных токов в матричной форме. После нахождения \mathbf{I}_K токи ветвей определим согласно (2.20)

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{B}^T\mathbf{I}_K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{K1} \\ I_{K2} \\ I_{K3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{K1} \\ I_{K2} - I_{K1} \\ -I_{K2} \\ I_{K2} - I_{K3} \\ I_{K3} - I_{K1} \\ -I_{K3} \end{bmatrix}.$$

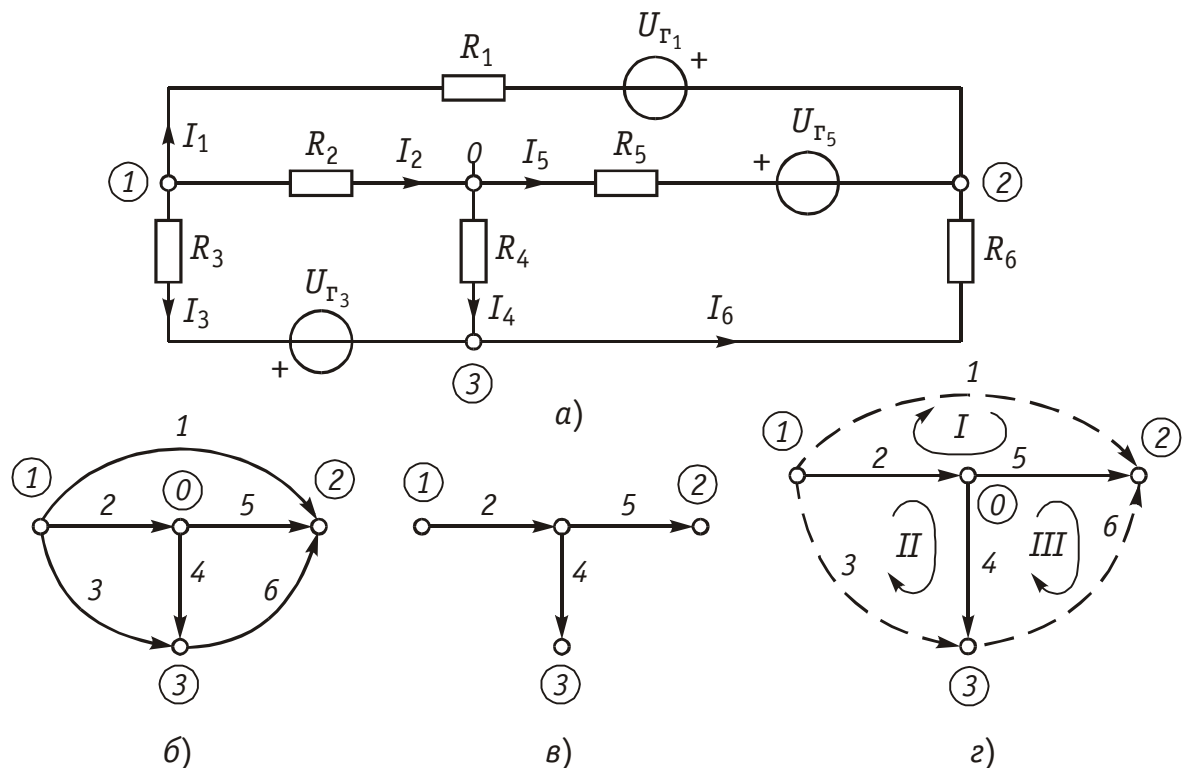


Рис. 2.8

Для линейных электрических цепей важную роль играет *принцип взаимности (теорема обратимости)*. Он гласит: *если источник напряжения, помещенный в какую-либо ветвь l пассивной линейной электрической цепи, вызывает в другой ветви k ток определенного значения, то этот же источник, будучи помещенный в ветвь k , вызывает в ветви l ток с тем же значением*. Справедливость этого принципа следует непосредственно из уравнений (2.14) и (2.15) с учетом того, что $\Delta_{lk} = \Delta_{kl}$.

2.5. Метод узловых потенциалов

Метод узловых потенциалов (узловых напряжений) является наиболее общим и широко применяется для расчета электрических цепей, в частности, в различных программах автоматизированного проектирования электронных схем.

Метод узловых потенциалов базируется на ЗТК и законе Ома. Он позволяет снизить число решаемых уравнений до величины, определяемой равенством (1.14). В основе этого метода лежит расчет напряжений в $(n_y - 1)$ -м узле цепи относительно базисного узла. После этого на основании закона Ома находятся токи или напряжения в соответствующих ветвях. Рассмотрим сущность метода узловых потенциалов на примере резистивной цепи, изображенной на рис. 2.9, а. Примем потенциал $V_3 = 0$ (базисный узел) и с помощью (1.31) преобразуем источники напряжения в эквивалентные источники тока

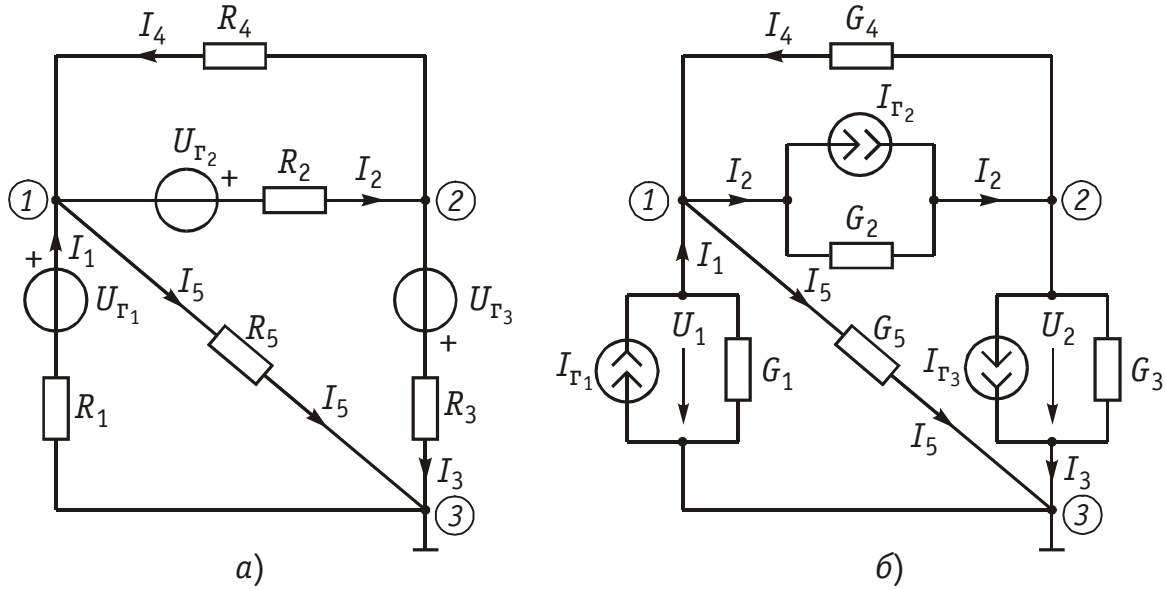


Рис. 2.9

(рис. 2.9, б); где $I_{r1} = U_{r1}G_1$; $I_{r2} = U_{r2}G_2$; $I_{r3} = U_{r3}G_3$; $G_1 = 1/R_1$; $G_2 = 1/R_2$; $G_3 = 1/R_3$; $G_4 = 1/R_4$; $G_5 = 1/R_5$.

Составим уравнения для узлов 1 и 2 по ЗТК:

$$-I_1 + I_2 - I_4 + I_5 = 0; \quad I_4 + I_3 - I_2 = 0. \quad (2.24)$$

Каждый из этих токов можно выразить через узловые потенциалы и токи I_{r1} , I_{r2} , I_{r3} :

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{r1} - V_1 G_1; \quad I_2 = I_{r2} - (V_2 - V_1) G_2; \\ I_3 &= I_{r3} + V_2 G_3; \quad I_4 = (V_2 - V_1) G_4; \quad I_5 = V_1 \cdot G_5. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в уравнение (2.24), получим после группировки членов при V_1 , V_2 и переносе I_{r1} , I_{r2} , I_{r3} в правую часть:

$$\left. \begin{aligned} (G_1 + G_2 + G_4 + G_5) V_1 - (G_2 + G_4) V_2 &= I_{r1} - I_{r2}, \\ -(G_2 + G_4) V_1 + (G_2 + G_3 + G_4) V_2 &= I_{r2} - I_{r3}. \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} G_{11} &= G_1 + G_2 + G_4 + G_5; \quad G_{22} = G_2 + G_3 + G_4; \\ G_{12} &= G_{21} = G_2 + G_4; \quad I_{y1} = I_{r1} - I_{r2}; \quad I_{y2} = I_{r2} - I_{r3}. \end{aligned}$$

Тогда система уравнений (2.25) примет вид

$$\left. \begin{aligned} G_{11} V_1 - G_{12} V_2 &= I_{y1}, \\ -G_{21} V_1 + G_{22} V_2 &= I_{y2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Проводимости G_{11} и G_{22} представляют собой арифметическую сумму проводимостей всех ветвей, подсоединенных соответственно к узлам 1 и 2; они называются *собственными проводимостями* узлов 1 и 2. Проводимости $G_{12} = G_{21}$ равны арифметической сумме проводимостей всех ветвей, включенных между узлами 1 и 2, и на-

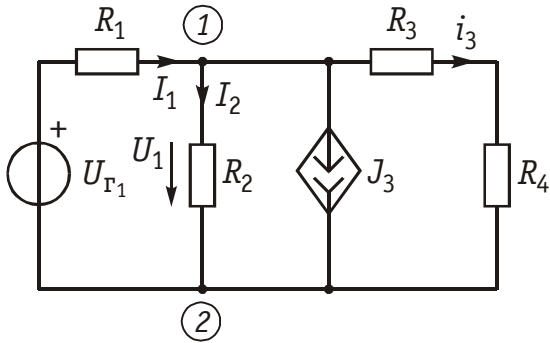


Рис. 2.10

частичных узловых потенциалов, обусловленных действием каждого задающего узлового тока в отдельности, т. е. как и в методе контурных токов уравнения (2.29) отражают принцип наложения, характерный для линейных электрических цепей.

Рассмотренный метод составления узловых напряжений справедлив

и при наличии в цепи зависимых источников типа ИТУТ и ИТУН. В цепи, изображенной на рис. 2.10, содержится кроме независимого источника напряжения $U_{Г1}$ зависимый ИТУН с задающим током $J_3 = H_G U_1$. Определим токи в цепи методом узловых потенциалов.

В соответствии с вышеизложенным методом примем за базисный узел $V_2 = 0$. Тогда для узла 1 получим

$$V_1(G_1 + G_2 + G_{3,4}) = U_{Г1}G_1 - J_3 = U_{Г1}G_1 - H_G V_1.$$

Отсюда находим

$$V_1 = U_{Г1}G_1 / (G_1 + G_2 + G_{3,4} + H_G); \quad I_1 = (U_{Г1} - V_1)G_1; \\ I_2 = V_1G_2; \quad I_3 = V_1G_{3,4},$$

где $G_1 = 1/R_1$; $G_2 = 1/R_2$; $G_{3,4} = 1/(R_3 + R_4)$.

Запишем уравнение по методу узловых потенциалов в матричной форме. Умножим элементы *редуцированной структурной матрицы* A_0 на потенциалы V соответствующих узлов, в результате получим матрицу напряжения ветвей:

$$U_B = A_0^T V_y. \quad (2.30)$$

Умножим левую и правую часть матричного уравнения (2.17) на матрицу A_0 и учитывая ЗТК в матричной форме (1.18) и равенство (2.30), получим

$$A_0 G_B A_0^T V_y = -A_0 G_B U_{ГВ}. \quad (2.30a)$$

Учтя, что

$$A_0 G_B A_0^T = G_y, \quad (2.31)$$

$$-A_0 G_B U_{ГВ} = I_y, \quad (2.32)$$

получим матричную форму уравнений равновесия узловых потенциалов:

$$G_y V_y = I_y, \quad (2.33)$$

где G_y — квадратная матрица узловых проводимостей, I_y — матрица-столбец узловых токов.

Пример. Составим уравнение узловых потенциалов в матричной форме для схемы, изображенной на рис. 2.8, а. Примем за базис нулевой узел $V_0 = 0$. Структурная матрица \mathbf{A}_0 в этой цепи в соответствии с правилом, изложенным в § 1.3, имеет вид

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицу узловых проводимостей найдем согласно (2.31)

$$\mathbf{G}_y = \mathbf{A}_0 \mathbf{G}_b \mathbf{A}_0^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_6 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (G_1 + G_2 + G_3) - G_1 - G_3 \\ -G_1(G_1 + G_5 + G_6) - G_6 \\ -G_3 - G_6(G_3 + G_4 + G_6) \end{bmatrix},$$

где

$$G_1 = 1/R_1; \quad G_2 = 1/R_2; \quad G_3 = 1/R_3; \quad G_4 = 1/R_4; \quad G_5 = 1/R_5; \quad G_6 = 1/R_6.$$

Матрица узловых токов определяется из (2.32):

$$\mathbf{I}_y = -\mathbf{A}_0 \mathbf{G}_b \mathbf{U}_{гв} = \begin{bmatrix} -\mathbf{U}_{г1}G_1 + \mathbf{U}_{г3}G_3 \\ \mathbf{U}_{г1}G_1 - \mathbf{U}_{г5}G_5 \\ -\mathbf{U}_{г3}G_3 \end{bmatrix}.$$

Подставив \mathbf{G}_y и \mathbf{I}_y в (2.33), получим уравнение узловых потенциалов в матричной форме. После определения матрицы узловых потенциалов \mathbf{V}_y найдем матрицу напряжений ветвей согласно (2.30) и токи ветвей по закону Ома (2.17).

Для решения матричных уравнений в (2.23) или (2.33) обычно используют ЭВМ (см. § 2.7).

2.6. Метод эквивалентного генератора

Метод эквивалентного генератора базируется на теореме об активном двухполюснике (см. § 1.8) и позволяет упростить решение многих задач, связанных с передачей сигналов и электрической энергии от источника к приемнику. При этом обычно источник рассматривается как активный двухполюсник с известными задающими напряжениями U_Γ или током I_Γ и внутренними сопротивлением R_Γ или проводимостью G_Γ , а приемник — как пассивный

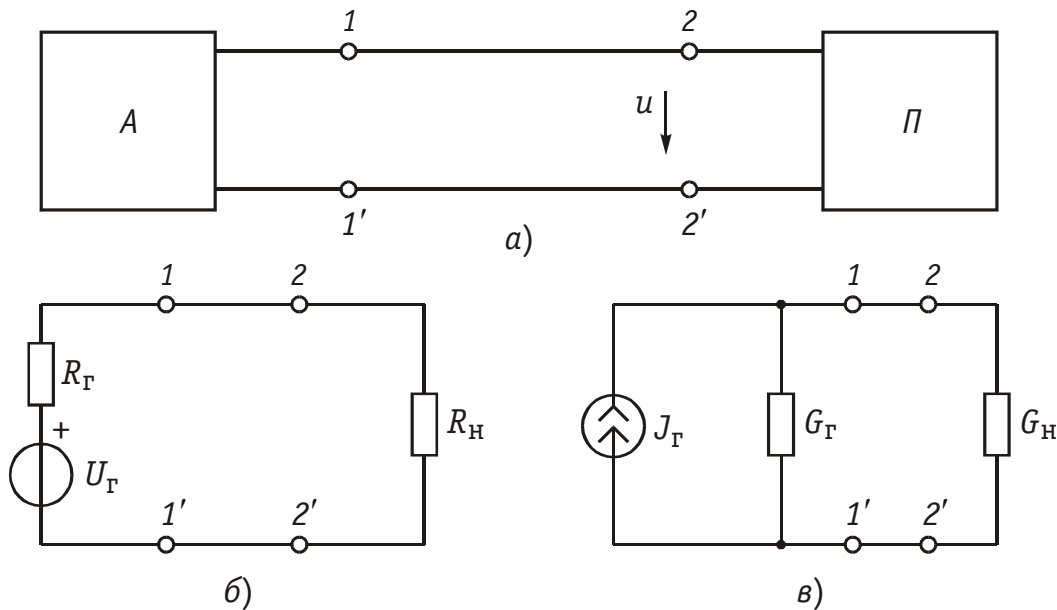


Рис. 2.11

двухполюсник с внутренним сопротивлением нагрузки R_H или проводимостью G_H (рис. 2.11).

Таким образом, система передачи, изображенная на рис. 2.11, а может быть представлена в виде двух эквивалентных схем: с источником напряжения (рис. 2.11, б) и с источником тока (рис. 2.11, в).

В соответствии с теоремами Тевенина и Нортонa (см. § 1.8) задающее напряжение генератора определяется как напряжение холостого хода на разомкнутых зажимах активного двухполюсника $U_{\Gamma} = U_{xx}$, а задающий ток — как ток короткого замыкания $J_{\Gamma} = I_{кз}$. Внутреннее сопротивление активного двухполюсника R_{Γ} или его проводимость G_{Γ} находятся как эквивалентные входные сопротивления или проводимость относительно разомкнутых зажимов пассивного двухполюсника, который получается после исключения из схемы всех источников напряжения и тока. При этом идеальные источники напряжения закорачиваются, а тока — размыкаются; реальные же источники заменяются своими внутренними сопротивлениями или проводимостями.

Параметры U_{xx} , $I_{кз}$, R_{Γ} , G_{Γ} можно найти как экспериментальным, так и расчетным путем. После нахождения параметров эквивалентного генератора напряжения или тока, ток I и напряжение U в нагрузке можно найти для схемы, изображенной на рис. 2.9, б, по формуле

$$I = \frac{U_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + R_H} = \frac{U_{xx}}{R_{\Gamma} + R_H} \quad (2.34)$$

и для схемы (рис. 2.9, в) по формуле

$$I = J_{\Gamma} \frac{R_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + R_H} = I_{кз} \frac{G_H}{G_{\Gamma} + G_H}. \quad (2.35)$$

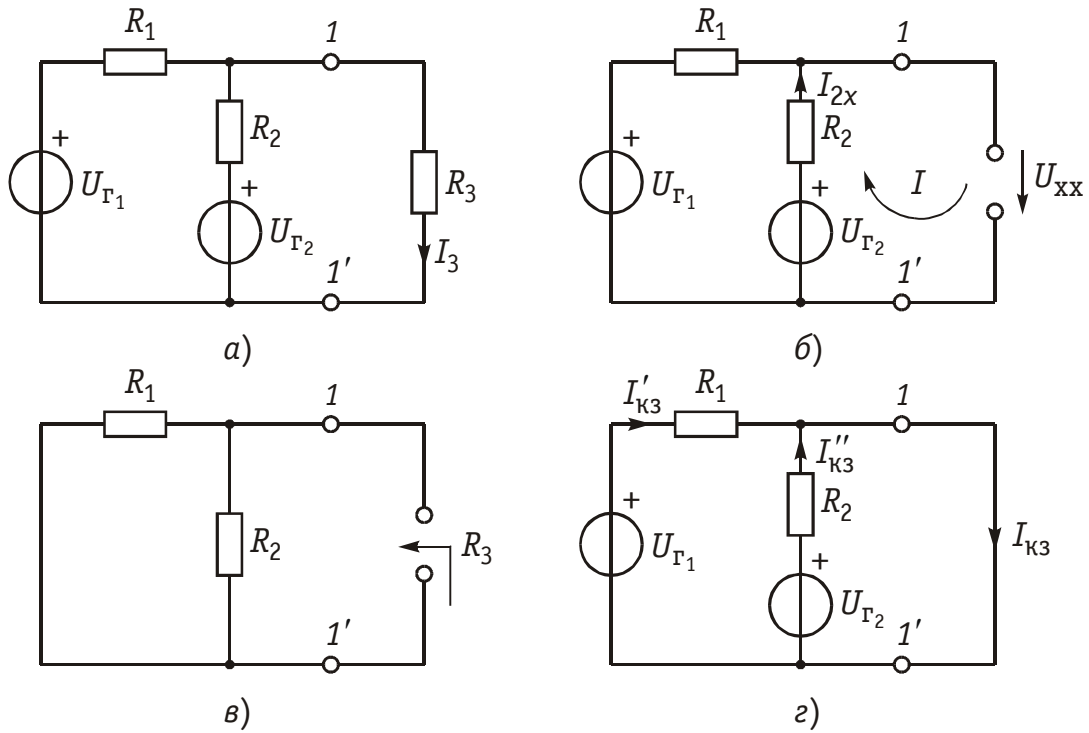


Рис. 2.12

Пример. Найти ток в сопротивлении R_3 (рис. 2.12, а) методом эквивалентного источника напряжения.

Разомкнем ветвь с R_3 и определим U_{xx} (рис. 2.12, б) по ЗНК для I контура:

$$U_{xx} + R_2 I_{2x} - U_{r2} = 0.$$

Отсюда

$$U_{xx} = U_{r2} - R_2 I_{2x},$$

где

$$I_{2x} = (U_{r2} - U_{r1}) / (R_1 + R_2).$$

Эквивалентное сопротивление $R_{\text{э}} = R_{\Gamma}$ пассивного двухполюсника определяется из схемы на рис. 2.12, в;

$$R_{\Gamma} = R_{\text{э}} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2).$$

Подставив U_{xx} и R_{Γ} в уравнение (2.34), найдем:

$$I_3 = U_{xx} / (R_3 + R_{\Gamma}).$$

Решим эту же задачу методом эквивалентного источника тока. Замкнем ветвь с R_3 (рис. 2.12, г) и найдем ток $I_{3кз}$ методом наложения:

$$I_{3кз} = I'_{3кз} + I''_{3кз} = U_{r1} / R_1 + U_{r2} / R_2.$$

Эквивалентную проводимость определим согласно схеме на рис. 2.12, в:

$$G_{\text{э}} = G_{\Gamma} = 1/R_1 + 1/R_2 = (R_1 + R_2) / R_1 R_2 = 1/R_{\Gamma}.$$

Подставив значения G_{Γ} и $I_{3кз}$ в (2.35), получим искомое значение тока I_3 .

Очевидно, методы эквивалентного источника как напряжения так и тока дают один и тот же результат. Применение того или

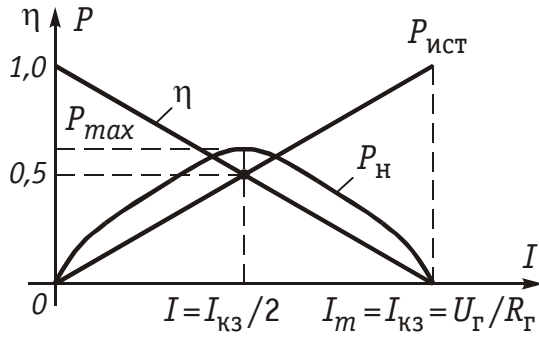


Рис. 2.13

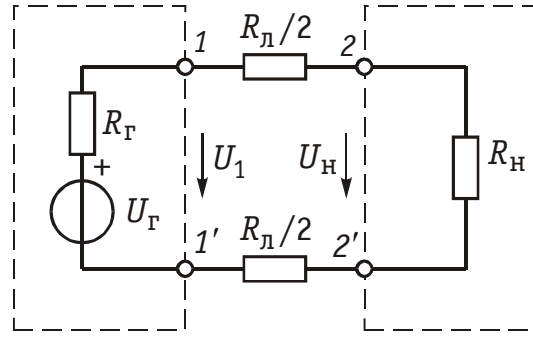


Рис. 2.14

инного метода определяется удобством и простотой нахождения $U_{\text{хх}}$ или $I_{\text{кз}}$.

Одной из важнейших практических задач является оптимальная передача электрической энергии от активного к пассивному двухполюснику. Оптимум обычно понимается в смысле получения максимальной мощности в нагрузке $P_{\text{н}}$. Мощность $P_{\text{н}}$ определим как

$$P_{\text{н}} = I^2 R_{\text{н}} = \frac{U_{\Gamma}^2}{(R_{\Gamma} + R_{\text{н}})^2} R_{\text{н}}, \quad (2.36)$$

а напряжение на нагрузке $U_{\text{н}} = U_{\Gamma} - IR_{\Gamma}$. Из формулы (2.36) нетрудно видеть, что максимум мощности будет достигаться при $R_{\text{н}} = R_{\Gamma}$. В этом случае ток в цепи $I_0 = U_{\Gamma}/(2R_{\Gamma})$, а мощность — $P_{\text{нmax}} = U_{\Gamma}^2/(4R_{\Gamma})$.

Коэффициент полезного действия системы передачи

$$\eta = P_{\text{н}}/P_{\text{ист}} = (U_{\Gamma}I - I^2R_{\Gamma})/(U_{\Gamma}I) = 1 - IR_{\Gamma}/U_{\Gamma}.$$

При $I = I_0$, $P_{\text{н}} = P_{\text{нmax}}$ имеем $\eta = 0,5$ (50%). На рис. 2.13 представлены зависимости $P_{\text{н}}$, $P_{\text{ист}}$, η от тока I .

Таким образом, в точке максимальной мощности только 50% энергии источника отдается в нагрузку.

Если линия передачи имеет конечное сопротивление $R_{\text{л}}$ (рис. 2.14), то условие максимальной передачи мощности в нагрузку принимает вид

$$R_{\text{н}} = R_{\Gamma} + R_{\text{л}}; \quad P_{\text{нmax}} = U_{\Gamma}^2/[4(R_{\text{л}} + R_{\Gamma})]. \quad (2.37)$$

Из (2.37) видно, что сопротивление линии существенно снижает мощность, отдаваемую в нагрузку, за счет потерь в линии.

2.7. Примеры применения резистивных цепей

Аттенюатор. В технике связи широкое применение находят высокоточные делители напряжения (*аттенюаторы*), реализуемые с помощью T -образных резистивных перекрытых схем (рис. 2.15).

Характерной особенностью этой схемы является то, что если выбрать сопротивление R_1 и R_2 из условия

$$R_1 R_2 = R_0^2, \quad (2.38)$$

то при включении к точкам 2–2' или 1–1' резистивного элемента с сопротивлением R_0 , входное сопротивление цепи со стороны входа 1–1' и выхода 2–2' будет одинаково и равно R_0 . В этом можно легко убедиться, если свернуть схему к точкам 1–1' или 2–2' соответственно. Отношение выходного напряжения ко входному такого аттенюатора

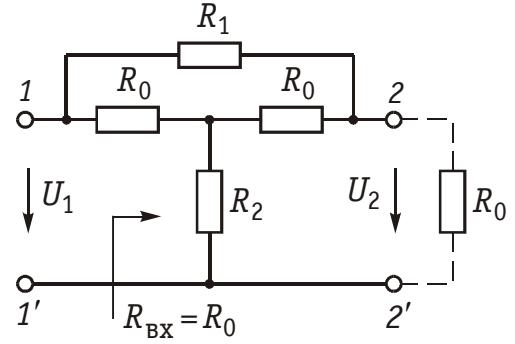


Рис. 2.15

$$K = U_2/U_1 = R_0/(R_0 + R_1), \quad (2.39)$$

т. е. полностью определится отношением сопротивления делителя R_0 и R_1 .

Для получения высокоточного деления аттенюатор обычно выполняют в виде нескольких звеньев, включенных каскадно друг за другом (рис. 2.16).

При этом коэффициент деления

$$K = U_2/U_1 = R_0^n/(R_0 + R_1)^n, \quad (2.40)$$

т. е. много меньше единицы.

Масштабный усилитель. В тех случаях, когда надо получить $K \geq 1$, применяют обычно масштабные усилители, представляющие собой резистивную цепь, содержащую активный элемент. На рис. 2.17, а показана схема масштабного усилителя на операционном усилителе (ОУ), включенном по инвертирующей схеме. Заменим ОУ эквивалентной моделью ИНУН с определенными входным $R_{\text{вх}}$ и выходным $R_{\text{вых}}$ сопротивлениями (рис. 2.17, б). Составим для нее уравнение равновесия по методу узловых потенциалов, приняв потенциал $V_3 = 0$:

$$V_1(G_1 + G_2 + G_{\text{вх}}) - V_2G_2 = U_1G_1,$$

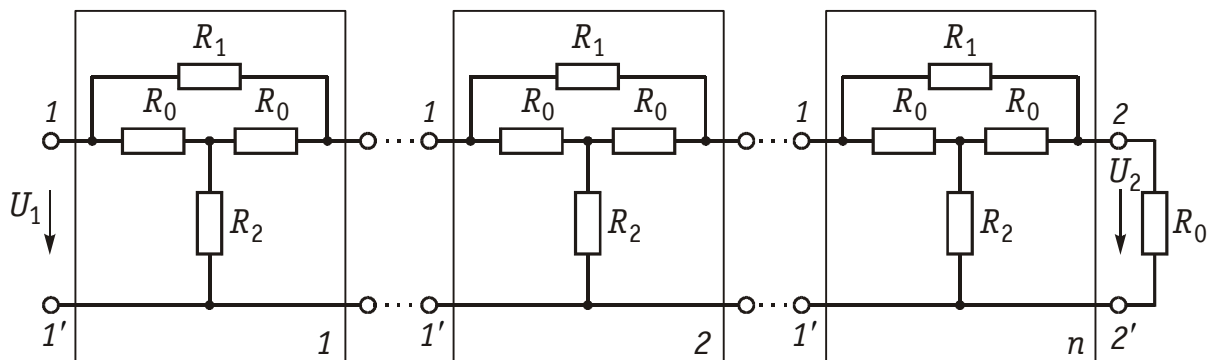


Рис. 2.16

$$-V_1 G_2 + V_2 (G_2 + G_{\text{ВЫХ}} + G_0) = -H_u V_1 G_{\text{ВЫХ}},$$

где

$$G_1 = 1/R_1; \quad G_2 = 1/R_2; \quad G_0 = 1/R_0; \\ G_{\text{ВХ}} = 1/R_{\text{ВХ}}; \quad G_{\text{ВЫХ}} = 1/R_{\text{ВЫХ}}.$$

Отсюда получаем

$$U_2 = (V_2 - V_3) = V_2 = \frac{-U_1 G_1 (H_u G_{\text{ВЫХ}} - G_2)}{(G_1 + G_2 + G_{\text{ВХ}})(G_2 + G_0 + G_{\text{ВЫХ}}) + G_2 (H_u G_{\text{ВЫХ}} - G_2)}.$$

Принимая во внимание, что коэффициент усиления ОУ $H_u \rightarrow \infty$ (см. § 1.2), получаем

$$U_2 = -U_1 \frac{G_1}{G_2} = -U_1 \frac{R_2}{R_1}.$$

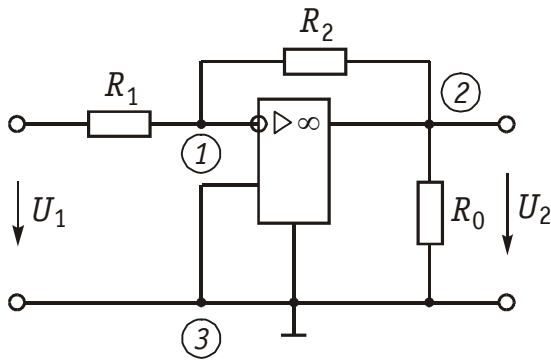
Или окончательно

$$K = U_2/U_1 = -R_2/R_1, \quad (2.41)$$

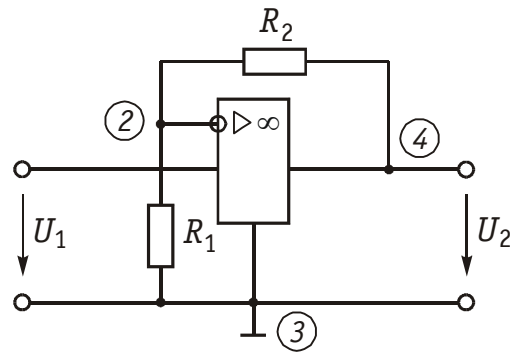
т. е. коэффициент усиления масштабного усилителя полностью определяется соотношением сопротивлений R_2 и R_1 . Знак «—» в равенстве (2.41) свидетельствует об инвертировании полярности U_2 по отношению к U_1 .

Входное сопротивление масштабного усилителя

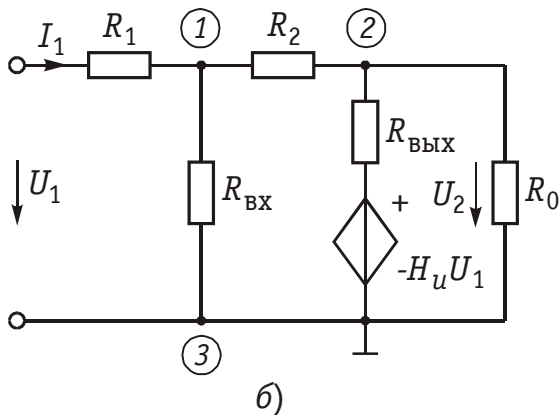
$$R_{\text{ВХ}} = U_1/I_1 \approx R_1. \quad (2.42)$$



а)

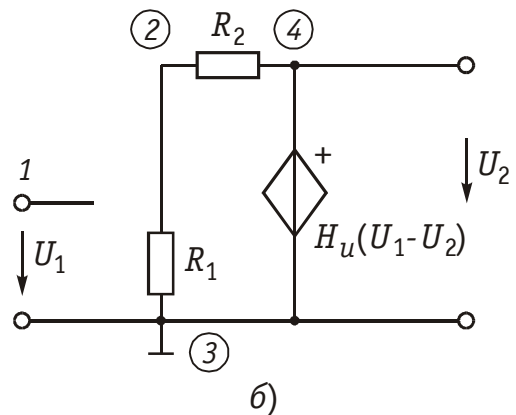


а)



б)

Рис. 2.17



б)

Рис. 2.18

Усилитель, включенный по неинвертирующей схеме (рис. 2.18, а), Используем идеальную модель ОУ, изображенного на рис. 2.18, б. Приняв потенциал $V_3 = 0$, запишем уравнение равновесия по методу узловых потенциалов:

$$V_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - V_4 \frac{1}{R_2} = 0.$$

Учитывая, что

$$V_4 = H_u (V_1 - V_2),$$

получаем потенциал V_2 :

$$V_2 = H_u \frac{V_1}{1 + H_u + R_1/R_2}.$$

Откуда, учитывая, что $H_u \gg (1 + R_2/R_1)$, из уравнения равновесия получаем выражение для потенциала V_4 :

$$V_4 = V_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right).$$

Тогда коэффициент усиления

$$K = \frac{V_4}{V_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad (2.43)$$

также не зависит от параметров ОУ.

Усилитель с неинвертирующим входом может использоваться как повторитель напряжения, если положить $R_2 = 0$ $R_1 = \infty$ (рис 2.19). Коэффициент усиления такой схемы равен $K = 1$, входное сопротивление очень велико, а выходное очень мало (см. § 1.2), что используется для согласования входных сопротивлений различных устройств.

Сумматор. Это устройство используется для выполнения арифметической операции взвешенного суммирования различных напряжений. На рис. 2.20 изображена схема активного сумматора двух напряжений U_1 и U_2 , выполненного на базе ОУ, включенного по инвертирующей схеме.

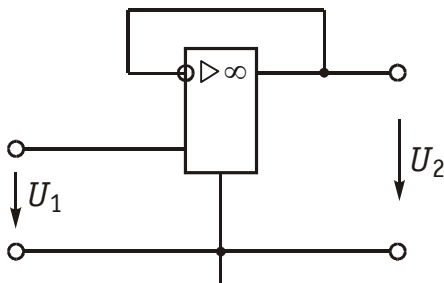


Рис. 2.19

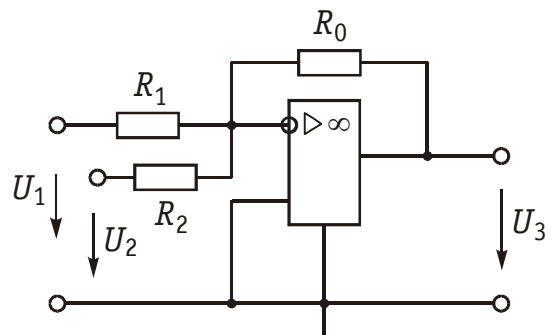


Рис. 2.20

В соответствии с (2.41) для коэффициентов усиления K_1 и K_2 имеем

$$K_1 = -\frac{R_0}{R_1}; \quad K_2 = -\frac{R_0}{R_2}.$$

Напряжение на выходе ОУ в соответствии с принципом наложения

$$U_3 = U'_3 + U''_3 = K_1 U_1 + K_2 U_2 = -\frac{R_0}{R_1} U_1 - \frac{R_0}{R_2} U_2,$$

т. е. равно взвешенной с коэффициентами K_1 и K_2 арифметической сумме входных напряжений. Аналогичным образом можно построить активный сумматор на произвольное число n входных напряжений:

$$U = -\sum_{k=1}^n \frac{R_0}{R_k} U_k. \quad (2.44)$$

Отличительной чертой сумматора этого типа является хорошая «развязка» входных цепей, что обусловило его широкое применение в технике связи.

Конвертор отрицательного сопротивления (КОС). Конверторами отрицательного сопротивления называют активную резистивную цепь, входное сопротивление которой равно сопротивлению нагрузки с отрицательным знаком. Одна из возможных схем КОС изображена на рис. 2.21, а.

Составим для эквивалентной схемы КОС (рис. 2.21, б) уравнение по методу узловых потенциалов для узла 1, приняв $V_3 = 0$ (базисный узел) и учтя, что $U_1 = V_1$, $U_2 = V_2$, получим

$$V_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - H_u (V_2 - V_1) \frac{1}{R_2} = 0.$$

Отсюда находим потенциал V_1 :

$$V_1 = H_u \frac{V_2 R_1}{R_2 + (1 + H_u) R_1}.$$

Ток в сопротивлении нагрузки R_H определим согласно закона Ома:

$$I_1 = \frac{V_2 - V_4}{R_H} = \frac{[R_1(H_u - 1)R_2]V_2}{[R_2 + (H_u + 1)R_1]R_H}.$$

Тогда входное сопротивление КОС

$$R_{\text{вх}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{R_2 + (H_u + 1)R_1}{R_1 - (H_u - 1)R_2} \cdot R_H.$$

Учтя, что $H_u \gg 1$, окончательно запишем:

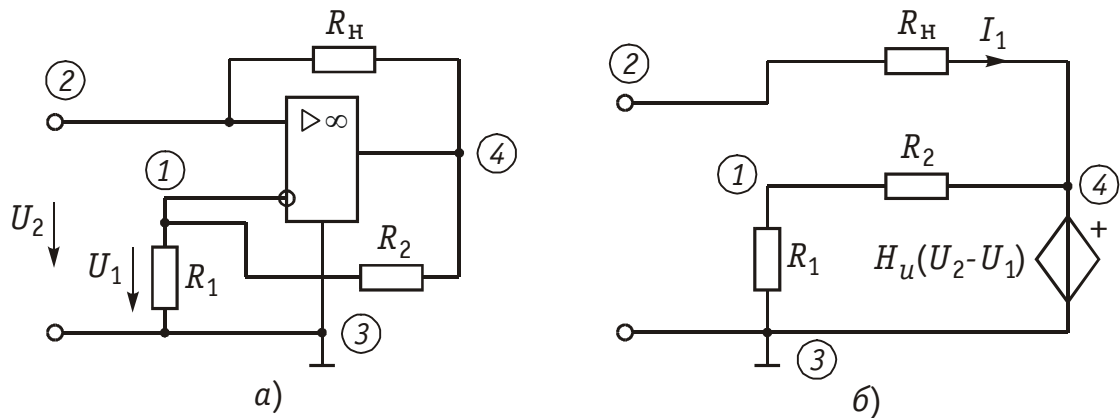


Рис. 2.21

$$R_{\text{вх}} \approx -\frac{R_1}{R_2} R_{\text{н}}.$$

Если сопротивление $R_1 = R_2$, то получаем $R_{\text{вх}} = -R_{\text{н}}$, т. е. КОС позволяет получать отрицательное сопротивление, что широко используется на практике для компенсации потерь в различных цепях.

2.8. Алгоритмы анализа линейных резистивных цепей на ЭВМ

В основе машинных методов анализа электрических цепей лежат математические модели, задаваемые с помощью системы уравнений, которые описывают связь между токами и напряжениями на ее отдельных элементах (компонентах). Эти уравнения имеют название *компонентных* уравнений электрической цепи.

К числу подобных компонентных уравнений относятся уравнения (1.6), (1.9) и (1.12), связывающие токи и напряжения на резистивных, индуктивных и емкостных элементах. Сложные многополюсные элементы (электронные лампы, транзисторы, операционные усилители и др.) описываются моделями из нескольких компонентных уравнений.

Кроме компонентных уравнений математические модели цепей включают в себя *топологические уравнения*, которые вытекают из топологии цепи и записываются на основании законов Кирхгофа (1.18) и (1.20).

Для формирования математической модели могут использоваться различные базисы, наиболее распространенным из которых для резистивных цепей является метод узловых потенциалов. При использовании метода узловых потенциалов исходным является составление уравнения равновесия цепи в форме (2.33):

$$\mathbf{G}_y \mathbf{V}_y = \mathbf{I}_y. \quad (2.45)$$

Последовательность формирования уравнения (2.45) на основании ЗТК (1.18), уравнения связи (2.30) и компонентных уравнений на базе закона Ома (2.17) рассмотрены в §§ 2.4, 2.5.

После формирования уравнения узловых потенциалов в форме (2.45) осуществляется его решение тем или иным способом. Таким образом, суть машинных методов анализа линейных резистивных цепей заключается в формировании и решении матричного уравнения состояния цепи в форме узловых потенциалов (2.45). Рассмотрим последовательность реализации обоих этих этапов на ЭВМ.

Формирование уравнения узловых потенциалов. В качестве первого шага осуществляется ввод в ЭВМ данных о топологии и параметрах цепи. Для этого выбираете базисный узел, потенциал которого принимается равным нулю. Затем осуществляется нумерация остальных узлов от 1 до $(n_y - 1)$, а также нумерация ветвей от 1 до n_b . После этого на основании правила, изложенного в § 1.3, формируется структурная матрица цепи A_0 .

Учитывая, что в матрице A_0 обычно содержится много нулевых элементов (разряженная матрица), ее удобно вводить в память ЭВМ не в виде двумерного массива, а с помощью одномерного массива тройки целых чисел (l, k, m) , характеризующих номер ветви — l , номер узла — k , из которого ветвь выходит, и номер узла — m , в который она входит.

После формирования таким образом ненулевых элементов матрицы A_0 осуществляется ввод в ЭВМ параметров ветвей. При этом каждая одноэлементная ветвь характеризуется номером ветви; номерами узлов, из которых она выходит и в который входит; типом элемента (резистор, независимые источники напряжения и тока); параметром элемента (сопротивлением резистора, задающим напряжением U_T источника напряжения, задающим током I_T источника тока).

Далее в соответствии с алгоритмом, изложенным в § 2.5, формируется матрица узловых проводимостей G_y и матрица узловых токов I_y . При этом используются стандартные подпрограммы перемножения матриц $A_0 G_b$, A_0^T .

Методы решения уравнений узловых потенциалов. Уравнение (2.45) относится к классу линейных уравнений типа

$$Ax = B, \quad (2.46)$$

где $A = G_y$, $X = V_y$, $B = J_y$.

Решение уравнения типа (2.46) является самостоятельной задачей в методе узловых потенциалов. Кроме того, решение таких уравнений составляет одну из наиболее распространенных процедур при решении других задач, например, при анализе нелинейных цепей (см. гл. 11). Численными методами решения системы (2.46) посвящена обширная литература; все их можно разделить на две

большие группы: прямые и итерационные. В большинстве машинных программ используются прямые методы, обеспечивающие получение решения за конечное число шагов.

Основные проблемы, с которыми приходится сталкиваться при использовании прямых методов — это большая разреженность матрицы \mathbf{G}_y , приводящая к большим затратам машинного времени и быстрое возрастание ошибок округления промежуточных результатов, приводящих к большим погрешностям.

Для решения этих проблем используют различные модификации прямых методов, которые можно разбить на три группы: обращения матрицы \mathbf{G}_y , разложения матрицы \mathbf{G}_y на сомножители и методы для матриц \mathbf{G}_y специального вида. Основным методом первой группы является *метод Гаусса* и его разновидности.

Число арифметических операций по методу Гаусса

$$N \approx 2(n^3/3 + 2n^2), \quad \text{где } n - \text{порядок матрицы } \mathbf{G}_y.$$

Таким образом, для сложной схемы число операций может оказаться очень большим. Для повышения эффективности метода Гаусса используют метод разреженных матриц.

Методы обращения матрицы \mathbf{G}_y применяются, как правило, для сравнительно простых схем, так как для вычисления параметра \mathbf{G}_y^{-1} требуется больше операций, чем для решения системы (2.46) методами первой группы. Кроме того, при прямом обращении матрицы быстро возрастает ее разреженность, что существенно снижает эффективность этого метода.

Методы третьей группы применяются для матриц узловой проводимости специального вида: ленточного, блочно-диагонального и др. Матрицу \mathbf{G}_y ленточного типа имеют, например, электронные схемы каскадной структуры без обратных связей (см. гл. 12).

Метод Гаусса. Алгоритм Гаусса состоит из прямого и обратного ходов. Прямой ход включает последовательное исключение неизвестных x из системы уравнений (2.46). При этом на первом шаге получаем явное выражение для x_1 :

$$x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + b_1. \quad (2.47)$$

Подставив x_1 во все оставшиеся уравнения, исключаем из них переменную x_1 , что приводит к изменению коэффициента a_{ij} в этих уравнениях.

На втором шаге определяется в явной форме x_2 , после чего оно исключается из третьего и последующих уравнений и т. д. Причем, исключение переменной приводит к пересчету коэффициентов по формуле

$$\hat{a}_{ij} = a_{ij} - a_{ik}a_{kj}/a_{kk}, \quad i = \overline{(k+1), n}. \quad (2.48)$$

Процедура исключения производится для всех токов i . В результате прямого хода матрица \mathbf{A} преобразуется к треугольному виду.

Обратный ход позволяет вычислить составляющие искомого вектора \mathbf{x} , начиная с последнего элемента. Действительно, в результате прямого хода в последнем n -м уравнении осталась единственная переменная $x_n = \hat{b}_n / \hat{a}_{nn}$. После нахождения x_n определяется из $(n - 1)$ уравнения x_{n-1} и т. д. На рис. 2.22 изображена схема алгоритма расчета по методу Гаусса.

Метод разреженных матриц. Идея этого метода состоит в том, что если при прямом ходе Гаусса, хотя бы один коэффициент (a_{ik} или a_{kj} ,) равен нулю, то коэффициент \hat{a}_{ij} по формуле (2.48) можно не пересчитывать, что при высокой степени разреженности матрицы \mathbf{A} может существенно сократить объем вычислений. При этом также отпадает необходимость хранить в памяти ЭВМ нулевые коэффициенты, что уменьшает затраты машинной памяти.

Для реализации этой идеи используются различные методы упорядочения матриц, обеспечивающие минимальный объем вычислений. Простейшим из них является следующий: строки с меньшим числом ненулевых элементов должны располагаться выше строк с большим числом ненулевых элементов.

Пусть строки и столбцы матрицы узловых проводимостей \mathbf{G}_y располагаются в порядке возрастания номеров соответствующих им узлов. Тогда для минимизации объема вычислений нумерацию узлов необходимо производить в порядке возрастания количества ненулевых элементов в строке. При этом объем вычислений будет равен:

$$N \approx 13n,$$

т. е. является линейной функцией числа узлов $n = n_y$ в эквивалентной схеме цепи.

Методы обращения матрицы узловой проводимости. С помощью этих методов решение системы (2.46) ищется в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}. \quad (2.49)$$

На рис. 2.23 изображена схема алгоритма расчета электрической цепи по методу обращения узловой проводимости.

Кроме моделей индуктивных и емкостных элементов в виде (1.8) и (1.11) в последнее время в программах машинного анализа электрических цепей нашли применение *дискретные модели* L - и C -элементов, основанные на неявных методах численного интегрирования [1]. Так, значения производной x_{n+1} в соответствии с неявной формулой Эйлера можно завязать как

$$x_{n+1} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t},$$

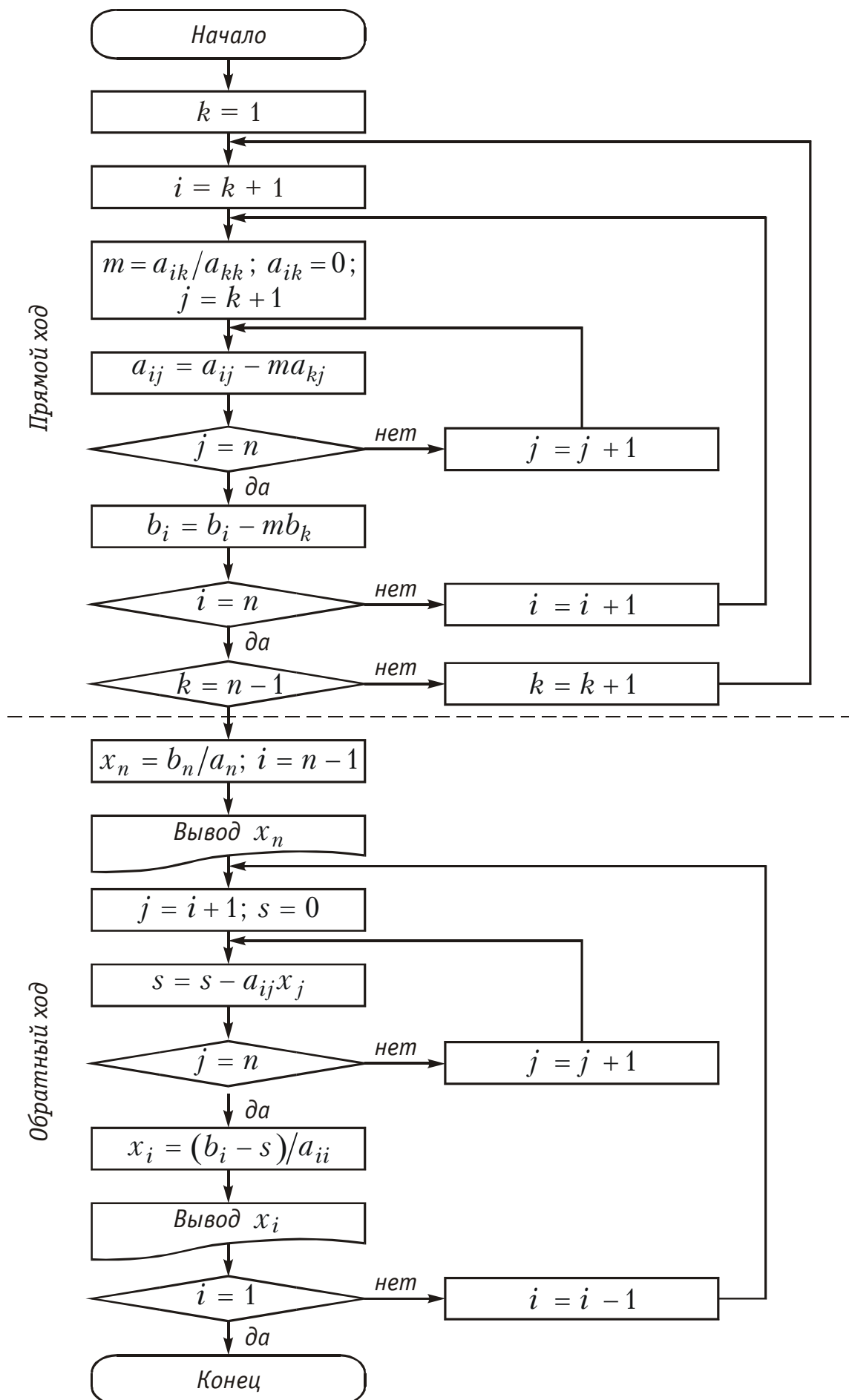


Рис. 2.22

а так как согласно (1.12) $i_C = Cdu_C/dt$, то для тока i_C в момент $t = t_{n+1}$ можно записать:

$$i_{n+1} = \frac{C}{\Delta t} u_{n+1} - \frac{C}{\Delta t} u_n = Gu_{n+1} - Gu_n,$$

где $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, что соответствует резистивной схеме замещения емкостного элемента, изображенной на рис. 2.23, а, где $G=C/\Delta t$; $i_r = Gu_n$.

Аналогично можно получить дискретную модель для элемента индуктивности:

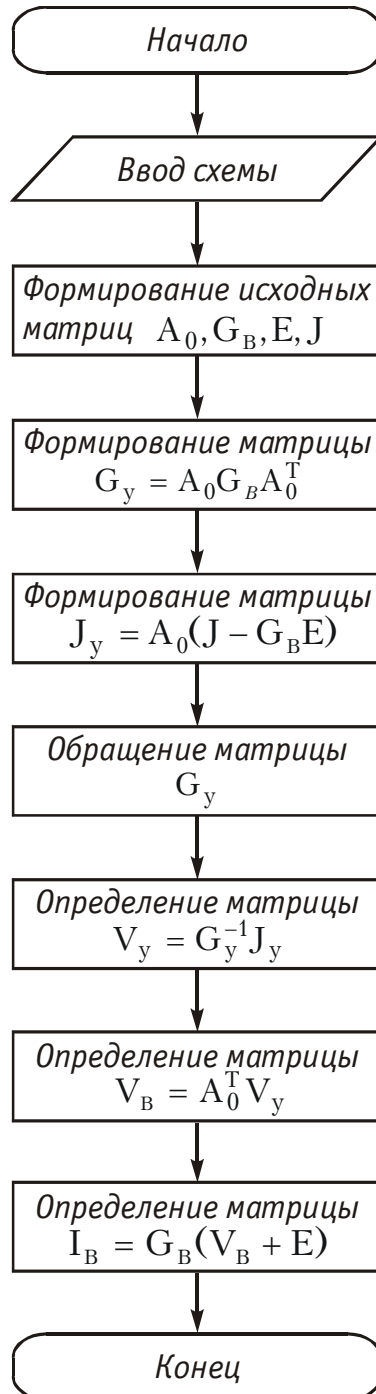


Рис. 2.22

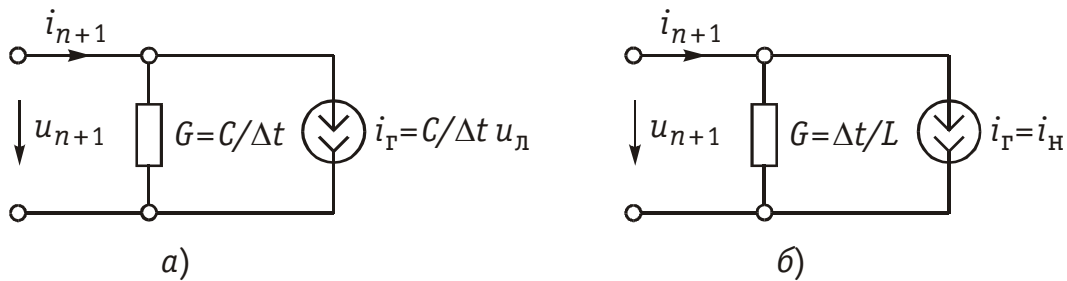


Рис. 2.24

$$i_{n+1} = \frac{\Delta t}{L} u_{n+1} - \frac{\Delta t}{L} u_n = G u_{n+1} - G u_n,$$

где $G = \Delta t/L$.

На рис. 2.24, б показана эквивалентная дискретная схема замещения L -элемента.

Использование дискретных моделей элементов позволяет свести RLC -цепь к соответствующей резистивной цепи, что существенно упростит их машинный анализ.

Вопросы и задания для самопроверки

1. Принцип составления уравнений методом законов Кирхгофа.
2. Какие токи и напряжения остаются неизменными при переходе от соединения «треугольника» в «звезду» и обратно?
3. Чем определяется количество частичных схем при расчете токов в цепи методом наложения?
4. Какие законы Кирхгофа используются при составлении уравнений по методам контурных токов и узловых напряжений?
5. Рассчитать токи ветвей в цепи рис. 2.26 методами наложения законов Кирхгофа, контурных токов, узловых напряжений, если известно, что: $U_{Г1} = 5$ В; $U_{Г3} = 10$ В; $J = 0,5$ А; $R_1 = R_2 = R_3 = 10$ Ом.

Ответ: $I_1 = 0,5$ А; $I_2 = 0$ А; $I_3 = 1$ А.

6. Какие теоремы используются при определении тока в отдельно взятой ветви методом эквивалентного генератора?
7. Методом эквивалентного генератора в цепи рис. 2.24 определить сопротивление R_5 , когда в нем выделяется максимальная мощность, если $U = 3$ В; $J = 0,5$ А; $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2$ Ом.

Ответ: $R_5 = 3,33$ Ом; $P = 216$ мВт.

8. В согласованном или несогласованном режиме работают высокочастотные аттенюаторы и почему?

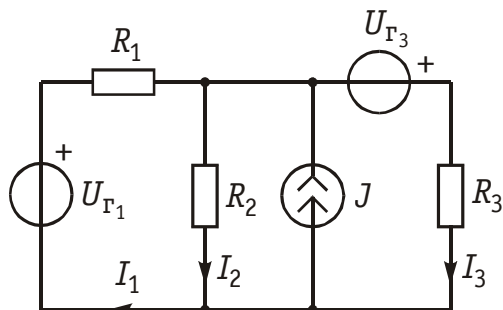


Рис. 2.25

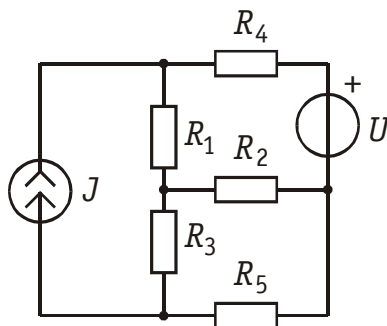


Рис. 2.26

9. Определить в аттенюаторе, изображенном на рис. 2.15, резисторы R_1 и R_2 , если известно что $R_0 = 50 \text{ Ом}$; $K = 0,1$.

Ответ: $R_1 = 450 \text{ Ом}$; $R_2 = 5,55 \text{ Ом}$.

10. Чем определяются коэффициенты передачи масштабных усилителей, включенных по инвертирующей и неинвертирующей схемам?

11. Для конвертора отрицательного сопротивления, изображенного на рис. 2.21, определить R_1 , если $R_{\text{вх}} = 1 \text{ кОм}$; $R_{\text{н}} = 50 \text{ Ом}$; $R_2 = 500 \text{ Ом}$.

Ответ: $R_1 = 25 \text{ Ом}$.

12. В чем особенности алгоритмов анализа линейных резистивных цепей на ЭВМ методом узловых потенциалов?

ГЛАВА 3. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ В РЕЖИМЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

3.1. Гармонические колебания. Основные понятия и определения

Электрические цепи могут находиться под воздействием постоянных или переменных напряжений и токов. Среди этих воздействий важнейшую роль играют гармонические колебания. Последние широко используются для передачи сигналов и электрической энергии, а также могут применяться в качестве простейшего испытательного сигнала. Исследование режима гармонических колебаний важно и с методической точки зрения, поскольку анализ электрических цепей при негармонических воздействиях можно свести к анализу цепи от совокупности гармонических воздействий. В этом смысле методику анализа и расчета цепей при гармонических воздействиях можно распространить и на цепи при периодических несинусоидальных, а также непериодических воздействиях (см. гл. 5, 9).

Гармоническое колебание $i(t)$ (рис. 3.1) характеризуется следующими основными параметрами: амплитудой I_m ; угловой частотой ω , начальной фазой φ_i . Амплитудой называют максимальное абсолютное значение тока $i(t)$. Аналитически гармоническое колебание можно записать в виде

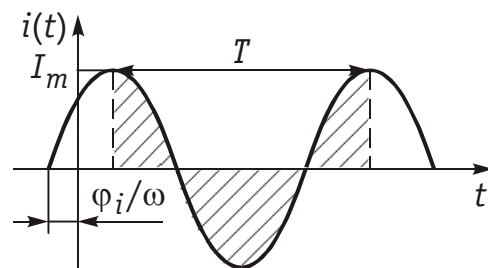


Рис. 3.1

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = I_m \sin \Psi_i(t) \quad (3.1)$$

где $\Psi_i(t) = \omega t + \varphi_i$ — называется *текущей фазой* (или просто фазой) гармонического колебания, так как она растет линейно во времени с угловой скоростью $\omega = d\Psi_i/dt$. Вместо формулы (3.1) гармоническое колебание можно выразить и в косинусоидальной форме:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi'_i), \quad (3.2)$$

где $\varphi'_i = \varphi_i + \pi/2$.

Наименьший промежуток времени, по истечении которого значения функции $i(t)$ повторяются, называется *периодом* T . Между периодом T и угловой частотой ω существует простая связь:

$$T = 2\pi/\omega. \quad (3.3)$$

Величину, обратную периоду, называют *циклической частотой*: $f = 1/T$. Из вышеизложенного следует, что $\omega = 2\pi f$. Единицей измерения частоты f является герц (Гц), угловой частоты ω — радиан в секунду (рад/с). Так как радиан — величина безразмерная, то $[\omega]$ измеряется в $1/\text{с}$ или с^{-1} .

В радиотехнике и электросвязи используют гармонические сигналы от долей герц (инфранизкие частоты) до десятков и сотен гигагерц (сверхвысокие частоты).

Для питания различных электроэнергетических установок в России и ряде других стран принята промышленная частота $f = 50$ Гц. В качестве источников гармонических колебаний промышленной частоты используются электромашинные генераторы различного типа. Принцип работы простейшего электромашинного генератора иллюстрирует рис. 3.2. В состав генератора входят: статор, создающий магнитное поле с магнитной индукцией B , и ротор, вращающийся в этом магнитном поле с угловой частотой ω . При пересечении витками катушки ротора магнитного потока Φ в них согласно закону электромагнитной индукции наводится ЭДС

$$e = -\frac{d\Psi}{dt} = -\omega \frac{d\Phi}{dt}, \quad (3.4)$$

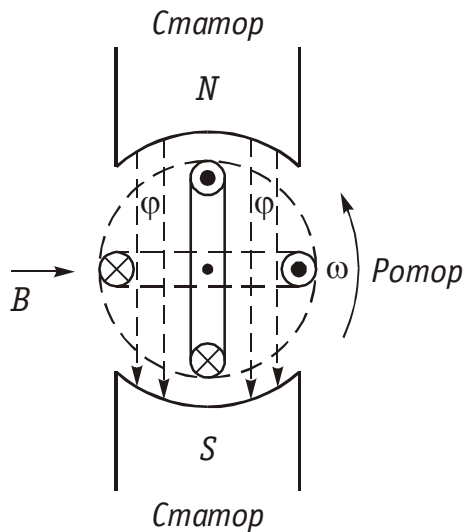


Рис. 3.2

где $\Psi = \omega\Phi$ — потокосцепление катушки с магнитными потоками; ω — число витков катушки. При постоянной скорости вращения ротора для получения ЭДС синусоидальной формы применяются полюса специальной формы. Частота на выходе генератора

$$f = p_n v / 60,$$

где p_n — число пар полюсов ротора; v — частота вращения ротора, об/мин.

Электромашинные генераторы используются для получения гармонических напряжений и токов не выше

5...8 кГц. Для получения гармонических сигналов более высоких частот обычно используются ламповые и полупроводниковые генераторы (см. гл. 15).

Важными параметрами гармонических колебаний являются их действующее и среднее значения. *Действующее значение* гармонического тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (3.5)$$

Здесь $i = i(t)$ — мгновенное значение гармонического тока, которое определяется из выражения

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i). \quad (3.6)$$

Подставив значение i из (3.6) в (3.5), после интегрирования для действующего значения тока получим

$$I = I_m / \sqrt{2} \approx 0,707 I_m. \quad (3.7)$$

Аналогично (3.1)–(3.5) определяется мгновенное и действующее значения напряжения. Так, для действующего значения напряжения можно записать:

$$U \approx 0,707 U_m.$$

Действующие значения токов и напряжений называют еще их *среднеквадратическими значениями*.

Определим тепловую энергию, которая выделяется гармоническим колебанием $i(t)$ за период T в резистивном элементе с сопротивлением R :

$$W_R = \int_0^T p dt = \int_0^T R i^2 dt = T R I^2. \quad (3.8)$$

Таким образом, действующее значение тока численно равно такому постоянному току, который за период T на том же сопротивлении выделяет то же количество тепла, что и гармонический ток.

Среднее значение гармонического тока

$$I_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T i dt. \quad (3.9)$$

Подставив значение i из (3.6) в (3.9), находим, что $I_{\text{cp}} = 0$. Этот результат вполне понятен, если учесть, что уравнение (3.9) определяет площадь, ограниченную кривой $i(t)$ за период T (см. рис. 3.1). Если значение тока определено за полпериода, то можно записать:

$$I_{\text{cp}(1)} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i dt = \frac{2I_m}{\pi} \approx 0,637I_m. \quad (3.10)$$

Аналогично определяем, что $U_{\text{cp}(1)} \approx 0,637U_m$.

3.2. Способы представления гармонических колебаний

Гармонические колебания можно представить различными способами: функциями времени (временные диаграммы) (см. рис. 3.1); вращающимися векторами (векторные диаграммы); комплексными числами; амплитудными и фазовыми спектрами. Тот или иной способ представления применяется в зависимости от характера решаемых задач.

Временное представление гармонических колебаний наглядно, однако его использование в задачах анализа цепей затруднительно, так как требует проведения громоздких тригонометрических преобразований. Более удобно векторное представление гармонических колебаний, при котором каждому колебанию ставится в соответствие вращающийся вектор определенной длины с заданной начальной фазой. В качестве примера на рис. 3.3 показано векторное представление двух колебаний токов i_1 и i_2 :

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= I_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1) \\ i_2 &= I_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2) \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Их сумму i_3 легко можно найти по формулам суммирования векторов:

$$i_3 = i_1 + i_2 = I_{m3} \sin(\omega t + \varphi_3), \quad (3.12)$$

где

$$\begin{aligned} I_{m3} &= \sqrt{I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + 2I_{m1}I_{m2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}; \\ \varphi_3 &= \arctg \frac{I_{m1} \sin \varphi_1 + I_{m2} \sin \varphi_2}{I_{m1} \cos \varphi_1 + I_{m2} \cos \varphi_2}. \end{aligned}$$

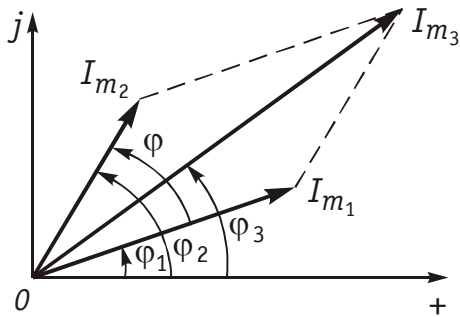


Рис. 3.3

Величина $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ называется фазовым сдвигом между колебаниями i_1 и i_2 . Он определяется только начальными фазами φ_1 и φ_2 и не зависит от начала отсчета времени. Нетрудно видеть, что суммирование (наложение) любого числа гармонических колебаний с частотой ω приводит к гармоническому колебанию той же частоты ω .

Совокупность векторов, изображающих гармонические колебания в электрической цепи, называют *векторной диаграммой*. Векторные диаграммы можно строить как для амплитудных, так и для действующих значений токов и напряжений.

Наиболее распространенными являются представления гармонических колебаний с помощью комплексных чисел. Эти представления лежат в основе символического метода расчета электрических цепей — *метода комплексных амплитуд*. Представим ток i , определяемый формулой (3.6), на комплексной плоскости. Для этого изобразим вектор I_m на комплексной плоскости с учетом начальной фазы φ_i , (рис. 3.4, а). Знаком «+» обозначено положительное направление вещественной оси, а $j = \sqrt{-1}$ — положительное направление мнимой оси. Будем вращать этот вектор в положительном направлении (против часовой стрелки) с угловой частотой ω . Тогда в любой момент времени положение вращающегося вектора определится комплексной величиной (комплексным гармоническим колебанием):

$$\underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) + j I_m \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (3.13)$$

Первая часть слагаемого (3.13) отражает проекцию вращающегося вектора на вещественную ось, а вторая часть — на мнимую ось. Сравнив второе слагаемое в (3.13) с (3.6), приходим к выводу: синусоидальный ток i на комплексной плоскости представ-

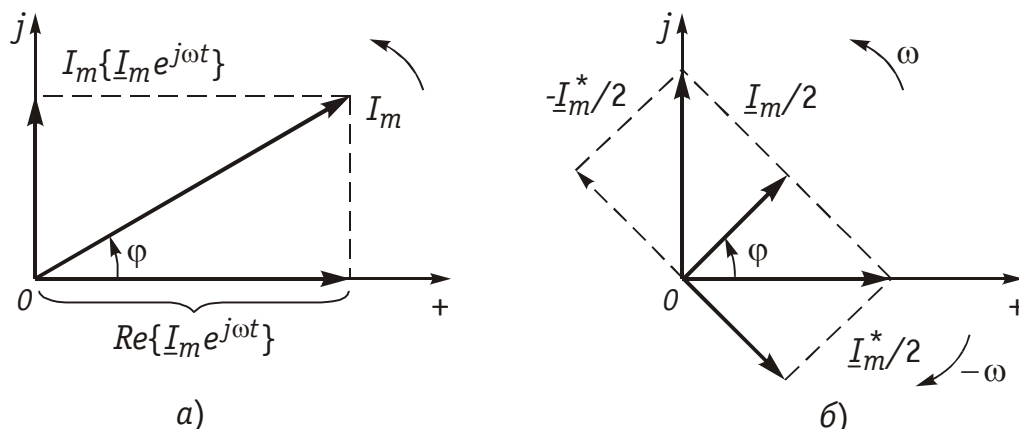


Рис. 3.4

ляется в форме проекции на мнимую ось вращающегося вектора (3.13)

$$i = \text{Im} \left[I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} \right] = \text{Im} \left[\underline{I}_m e^{j\omega t} \right], \quad (3.14)$$

где Im — сокращенное обозначение слова Imaginarius (мнимый);

$$\underline{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}. \quad (3.15)$$

Величина \underline{I}_m носит название *комплексной амплитуды тока*.

Важным свойством комплексной амплитуды является то, что она полностью определяет гармоническое колебание заданной частоты ω , так как содержит информацию об его амплитуде и начальной фазе.

Если гармоническое колебание задается в форме косинусоиды, например

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i), \quad (3.16)$$

то на комплексной плоскости этому току соответствует проекция вектора (3.13) на вещественную ось:

$$i = \text{Re} \left[I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} \right] = \text{Re} \left[\underline{I}_m e^{j\omega t} \right], \quad (3.17)$$

где Re — сокращенное обозначение слова Realis (действительный, вещественный).

Возможна и другая форма представления гармонических колебаний на комплексной плоскости. Учтем, что согласно формулам Эйлера

$$\cos \varphi_i = (e^{j\varphi_i} + e^{-j\varphi_i})/2; \quad \sin \varphi_i = (e^{j\varphi_i} - e^{-j\varphi_i})/2j. \quad (3.18)$$

Тогда уравнение для тока i из (3.6) можно записать в виде

$$i = \frac{I_m}{2j} \left[e^{j(\omega t + \varphi_i)} - e^{-j(\omega t + \varphi_i)} \right] = \frac{1}{j} \left[\frac{\underline{I}_m}{2} e^{j\omega t} - \frac{\underline{I}_m^*}{2} e^{-j\omega t} \right]. \quad (3.19)$$

Аналогично для тока i из уравнения (3.16):

$$i = \frac{I_m}{2} \left[e^{j(\omega t + \varphi_i)} + e^{-j(\omega t + \varphi_i)} \right] = \left[\frac{\underline{I}_m}{2} e^{j\omega t} + \frac{\underline{I}_m^*}{2} e^{-j\omega t} \right], \quad (3.20)$$

где $\underline{I}_m^* = I_m e^{-j\varphi_i}$ — сопряженная комплексная амплитуда тока.

Таким образом, ток i из (3.6) согласно (3.19) можно представить как геометрическую разность векторов $\underline{I}_m/2$ и $\underline{I}_m^*/2$, вращающихся в противоположных направлениях с угловой частотой ω , а ток из (3.16) — как геометрическую сумму этих векторов (рис. 3.4, б). В первом случае i располагается на мнимой, а во втором случае — на действительной осях. Комплексную амплитуду синусоидальной функции заданной частоты можно рассматривать как преобразование временной функции в частотную область.

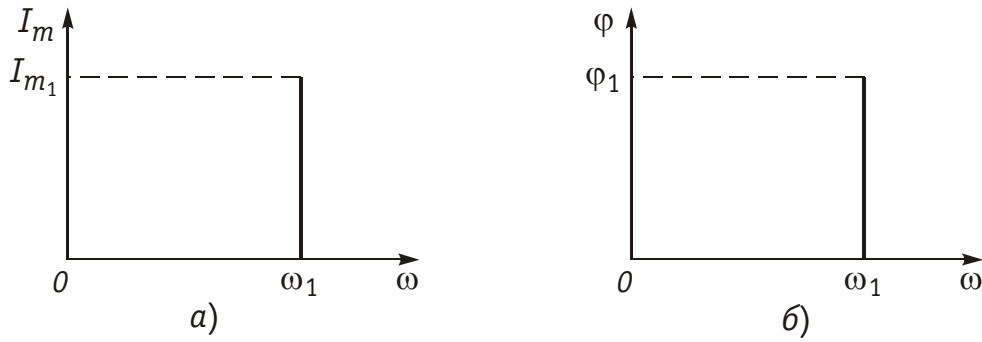


Рис. 3.5

Спектральное (частотное) представление гармонических колебаний состоит в задании амплитудного и фазового спектров колебания (рис. 3.5). Более подробно спектральное представление и методы анализа цепей, основанные на этом представлении, рассмотрены в гл. 5, 9.

3.3. Гармонические колебания в резистивных, индуктивных и емкостных элементах

Резистивные цепи. Пусть к резистивному элементу R приложено гармоническое напряжение

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u). \quad (3.21)$$

Согласно закону Ома через элемент R будет протекать ток

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \varphi_u) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i), \quad (3.22)$$

где $I_m = U_m/R$ — амплитуда; $\varphi_i = \varphi_u$ — начальная фаза тока. Таким образом, ток i и напряжение u в резистивном элементе совпадают по фазе друг с другом (рис. 3.6, а). Средняя за период T мощность, выделяемая в резисторе R ,

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = UI = I^2 R = U^2 G. \quad (3.23)$$

При последовательном или параллельном соединениях нескольких резистивных элементов ток в цепи определяется уравнением, аналогичным (3.22), где R определяется согласно (1.22) для последовательного и (1.27) для параллельного соединений элементов. При этом фазовый сдвиг между током и приложенным напряжением остается равным нулю.

Индуктивные цепи. Под действием напряжения (3.21) в индуктивном элементе будет протекать ток согласно (1.9):

$$i = \frac{1}{L} \int u dt = \frac{1}{\omega L} U_m \sin\left(\omega t + \varphi_u - \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i), \quad (3.24)$$

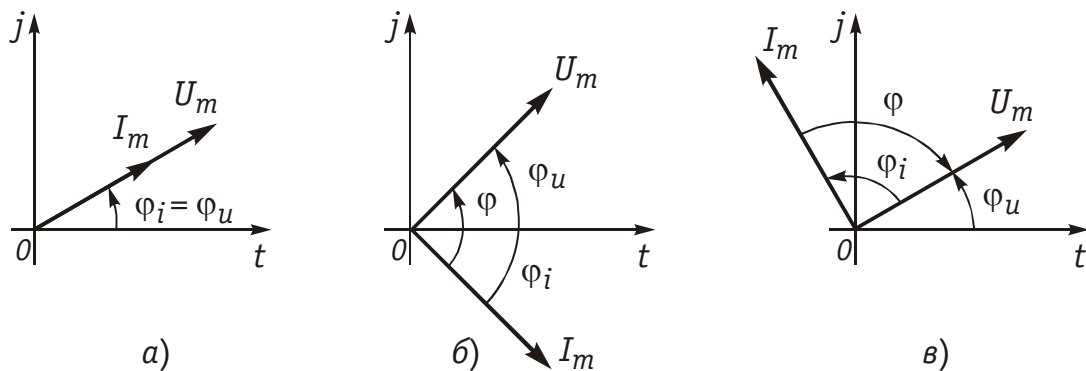


Рис.3.6

где $I_m = U_m/(\omega L) = U_m/X_L$; $X_L = \omega L$ — индуктивное сопротивление; $\varphi_i = \varphi_u - \pi/2$ — начальная фаза тока.

Величину, обратную X_L , называют индуктивной проводимостью $B_L = 1/(\omega L)$. Как следует из полученных выражений, ток в индуктивности отстает от приложенного напряжения на $\pi/2$, т. е. фазовый сдвиг между током i и напряжением u (рис. 3.6, б)

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \pi/2. \quad (3.25)$$

На векторной диаграмме фазовый сдвиг φ откладывается от вектора тока к вектору напряжения. Нетрудно видеть, что средняя за период мощность в индуктивном элементе равна нулю.

При последовательном и параллельном соединениях индуктивных элементов ток в цепи определяется уравнением, аналогичным (3.24), где L находится согласно (1.23) для последовательного и (1.29) для параллельного соединений.

Емкостные цепи. Для емкостного элемента согласно уравнению (1.12) имеем:

$$i = C \frac{du}{dt} = \omega C U_m \sin\left(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i), \quad (3.26)$$

где $I_m = \omega C U_m = B_C U_m$; $B_C = \omega C$ — емкостная проводимость; $\varphi_i = \varphi_u + \pi/2$ — начальная фаза тока. Величину, обратную B_C , называют емкостным сопротивлением $X_C = 1/(\omega C)$. Фазовый сдвиг между током и напряжением на емкостном элементе

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\pi/2. \quad (3.27)$$

Из приведенных уравнений следует, что ток в емкости опережает приложенное напряжение на угол $\pi/2$ (рис. 3.6, в), причем знак «—» свидетельствует об отставании напряжения u от тока i . Средняя за период мощность в емкостной цепи также равна нулю.

При последовательном и параллельном соединениях емкостных элементов ток в цепи определяется согласно (3.26), где C находится из (1.24) для последовательного и (1.28) для параллельного соединений.

3.4. Гармонические колебания в цепи при последовательном соединении R , L , C -элементов

Допустим, что в цепи, содержащей последовательно соединенные элементы R , L , C (рис. 3.7), протекает ток

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i). \quad (3.28)$$

Согласно ЗНК напряжение на отдельных участках цепи определяется уравнением

$$u = u_R + u_L + u_C = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt. \quad (3.29)$$

Подставив в (3.29) значение тока из (3.28), получим

$$u = RI_m \sin(\omega t + \varphi_i) + \omega LI_m \sin(\omega t + \varphi_i - \pi/2) + \\ + \frac{1}{\omega C} I_m \sin(\omega t + \varphi_i + \pi/2),$$

или

$$u = U_{mR} \sin(\omega t + \varphi_R) + U_{mL} \sin(\omega t + \varphi_L) + \\ + U_{mC} \sin(\omega t + \varphi_C), \quad (3.30)$$

где

$$\left. \begin{aligned} U_{mR} &= RI_m; \quad U_{mL} = X_L I_m; \quad U_{mC} = X_C I_m; \\ \varphi_R &= \varphi_i; \quad \varphi_L = \varphi_i - \pi/2; \quad \varphi_C = \varphi_i + \pi/2. \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

На рис. 3.8 изображена векторная диаграмма напряжений, описываемых уравнений (3.30).

Напряжение U_{mR} на резистивном сопротивлении R называется *активной составляющей приложенного напряжения* и обозначается $U_{ma} = U_{mR}$, разность напряжений $U_{mp} = U_{mL} - U_{mC}$ называется *реактивной составляющей*. Согласно этому определению и формулам (3.31) имеем:

$$U_{ma} = RI_m; \quad U_{mp} = (X_L - X_C) I_m = XI_m. \quad (3.32)$$

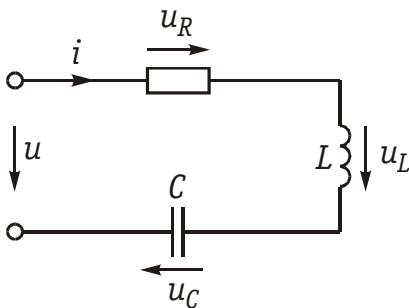


Рис. 3.7

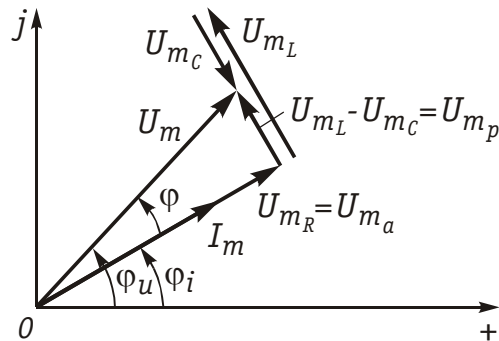


Рис. 3.8

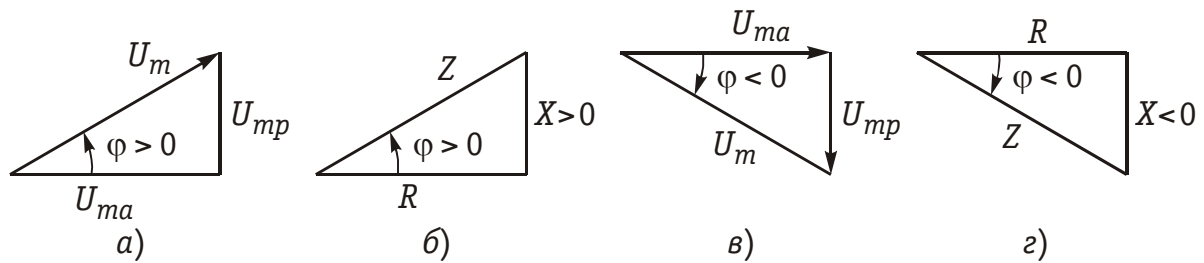


Рис. 3.9

Величина $X = X_L - X_C = \omega L - 1/(\omega C)$ называется *реактивным сопротивлением*, а величина

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (3.33)$$

— *полным сопротивлением цепи*.

Треугольник на векторной диаграмме, образованный напряжениями U_{ma} , U_{mp} , U_m называют *треугольником напряжений*. Если $U_{mL} > U_{mC}$ ($X_L > X_C$), то цепь носит индуктивный характер (приложенное напряжение опережает ток) и треугольник напряжений имеет вид, изображенный на рис. 3.9, а; если $U_{mL} < U_{mC}$ ($X_L < X_C$), то цепь носит емкостный характер (приложенное напряжение отстает от тока) и треугольник напряжений принимает вид, изображенный на рис. 3.9, в. Треугольник со сторонами R , X , Z подобный треугольнику напряжений, называется *треугольником сопротивлений* (рис. 3.9, б, г). Из треугольников сопротивлений и напряжений следует:

$$U_m = \sqrt{U_{ma}^2 + U_{mp}^2} = ZI_m, \quad (3.34)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \arctg(U_{mp}/U_{ma}) = \arctg(X/R), \\ R &= Z \cos \varphi; \quad X = Z \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

Треугольники напряжений и сопротивлений позволяют упростить анализ электрической цепи.

3.5. Гармонические колебания в цепи при параллельном соединении R , L , C -элементов

Приложим к цепи, содержащей параллельно соединенные элементы R , L , C (рис. 3.10), напряжение

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u). \quad (3.36)$$

Согласно ЗТК ток в неразветвленной части цепи

$$i = i_R + i_L + i_C = Gu + \frac{1}{L} \int u dt + C \frac{du}{dt}. \quad (3.37)$$

Подставив значение напряжения u из (3.36) в (3.37), получим

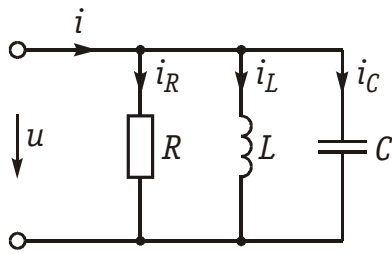


Рис. 3.10

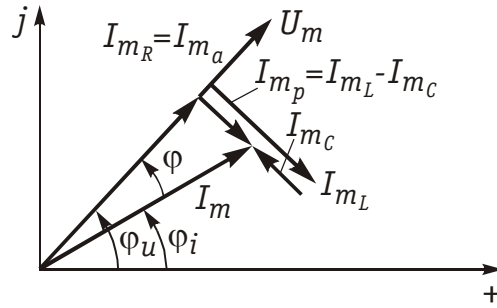


Рис. 3.11

$$i = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \varphi_u) + \frac{1}{\omega L} U_m \sin(\omega t + \varphi_u - \pi/2) + \omega C U_m \sin(\omega t + \varphi_u + \pi/2). \quad (3.38)$$

Перепишем уравнение (3.38) в виде

$$i = I_{mR} \sin(\omega t + \varphi_R) + I_{mL} \sin(\omega t + \varphi_L) + I_{mC} \sin(\omega t + \varphi_C), \quad (3.39)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_{mR} &= U_m/R = GU_m; \quad I_{mL} = B_L U_m; \quad I_{mC} = B_C U_m; \\ \varphi_R &= \varphi_u; \quad \varphi_L = \varphi_u - \pi/2; \quad \varphi_C = \varphi_u + \pi/2. \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

На рис. 3.11 изображена векторная диаграмма токов, описываемых уравнением (3.39).

Ток в резистивном сопротивлении I_{mR} называют *активной составляющей* тока I_{ma} , а разность тока $I_{mp} = I_{mL} - I_{mC}$ — *реактивной составляющей* тока. Для I_{ma} и I_{mp} справедливы соотношения

$$I_{ma} = GU_m; \quad I_{mp} = (B_L - B_C)U_m = BU_m. \quad (3.41)$$

Величина $B = B_L - B_C = 1/(\omega L) - \omega C$ называется *реактивной проводимостью* цепи, а величина

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} \quad (3.42)$$

— *полной проводимостью* цепи.

По аналогии с треугольником напряжений и сопротивлений при параллельном соединении элементов можно ввести *треугольники токов и проводимостей* (рис. 3.12, а, б). Как следует из этих ри-

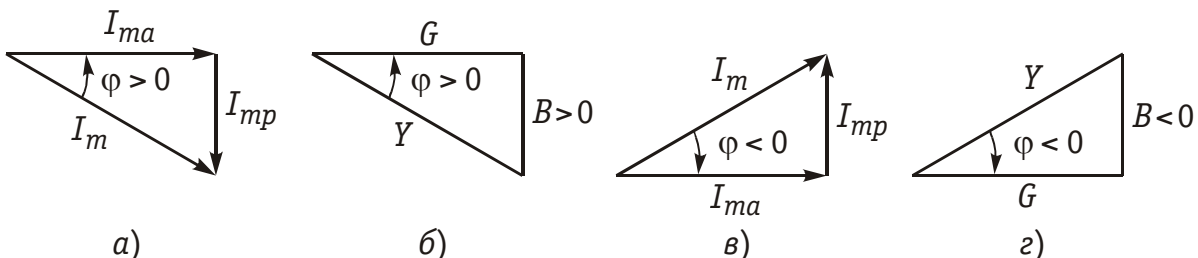


Рис. 3.12

сунков, при $I_{mL} > I_{mC}$ ($B_L > B_C$) цепь носит индуктивный характер (общий ток отстает от приложенного напряжения) и при $I_{mL} < I_{mC}$ ($B_L < B_C$) — емкостный характер (ток опережает приложенное напряжение). Из треугольников токов и проводимостей следует:

$$\left. \begin{aligned} I_m &= \sqrt{I_{ma}^2 + I_{mp}^2} = Y U_m, \\ \varphi &= \arctg(I_{mp}/I_{ma}) = \arctg(B/G), \\ G &= Y \cos \varphi, \quad B = Y \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

Сравнение треугольников токов и проводимостей с треугольниками напряжений и сопротивлений показывает их дуальный характер. Дуальны также и все соотношения, описывающие цепи при последовательном и параллельном соединении элементов, дуальны и сами цепи.

3.6. Символический метод расчета разветвленных цепей

Расчет разветвленных цепей при смешанном соединении элементов в режиме гармонических колебаний обычно осуществляется символическим методом. Это объясняется тем, что классический метод расчета приводит к громоздким интегрально-дифференциальным уравнениям и требует большого объема тригонометрических преобразований. *Символический метод* позволяет тригонометрические операции над гармоническими колебаниями и геометрические операции над векторами свести к алгебраическим операциям над комплексными числами, что существенно упрощает расчет. При этом могут быть использованы все методы преобразований и анализа, изложенные в гл. 1, 2. Допустимость использования символического метода объясняется тем, что в линейных цепях в режиме гармонических воздействий в цепи устанавливаются гармонические колебания той же частоты. Таким образом, неизвестными параметрами токов и напряжений будут лишь амплитуды и фазы, определяемые однозначно их комплексными амплитудами. Запишем основные законы электрических цепей в символической форме.

Для резистивного элемента R связь между комплексными амплитудами тока \underline{I}_m и напряжения \underline{U}_m можно определить согласно закону Ома (1.6) путем замены мгновенных значений токов i и напряжений u их комплексными амплитудами:

$$\underline{U}_m = R \underline{I}_m. \quad (3.44)$$

Для индуктивного элемента L связь между \underline{I}_m и \underline{U}_m определяется согласно (1.9) с учетом (3.24):

$$\underline{I}_m = \underline{U}_m / (j\omega L); \quad \underline{U}_m = j\omega L \underline{I}_m = jX_L \underline{I}_m, \quad (3.45)$$

где $j = e^{j\pi/2}$ — множитель, характеризующий фазовый сдвиг между векторами тока \underline{I}_m и напряжения \underline{U}_m (см. рис. 3.6). Уравнение

(3.45) отражает закон Ома для индуктивных элементов. Сравнение (3.45) с (1.9) показывает, что операция дифференцирования d/dt соответствует в комплексной форме умножению на $j\omega$.

Для емкостного элемента C на основании (1.12) можно записать:

$$\underline{I}_m = j\omega C \underline{U}_m \quad \text{или} \quad \underline{U}_m = -j \frac{1}{\omega C} \underline{I}_m = -jX_C \underline{I}_m, \quad (3.46)$$

т. е. операция интегрирования соответствует в комплексной форме делению на $j\omega$. Полученные уравнения (3.44)–(3.46) справедливы и для комплексных действующих значений токов и напряжений:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для } R : \underline{I} = \underline{U}/R = G\underline{U}, \\ \text{для } L : \underline{I} = \underline{U}/jX_L = -jB_L\underline{U}, \\ \text{для } C : \underline{I} = \underline{U}/(-jX_C) = jB_C\underline{U}, \end{array} \right\} \quad (3.47)$$

где $\underline{I} = \underline{I}_m/\sqrt{2}$; $\underline{U} = \underline{U}_m/\sqrt{2}$.

Аналогично можно получить уравнения законов Кирхгофа в комплексной форме. Так, для ЗТК (1.16) заменив мгновенные значения токов i_k их комплексными амплитудами \underline{I}_{mk} , получим

$$\sum_{k=1}^m \underline{I}_{mk} = 0, \quad (3.48)$$

а для ЗНК (1.17)

$$\sum_{k=1}^n \underline{U}_{mk} = 0. \quad (3.49)$$

Полученные уравнения законов Ома и Кирхгофа в комплексной форме лежат в основе символического метода расчета линейных цепей при гармонических воздействиях. Причем, как показывает анализ уравнений (3.24), (3.26), (3.45) и (3.46), при переходе к комплексной записи операции дифференцирования заменяются умножением на $j\omega$, операции интегрирования — делением на $j\omega$. В результате вместо системы интегрально-дифференциальных уравнений получаем систему алгебраических уравнений, решение которой определяет амплитуды и начальные фазы искомых токов и напряжений.

Применим символический метод к анализу гармонических колебаний в цепи при последовательном (см. § 3.4) и параллельном (см. § 3.5) соединениях элементов R , L , C . Для последовательного соединения R , L , C согласно ЗНК (3.49) имеем $\underline{U}_m = \underline{U}_{mR} + \underline{U}_{mL} + \underline{U}_{mC}$ или с учетом (3.44), (3.45), (3.46):

$$\underline{U}_m = [R + j(\omega L - 1/\omega C)] \underline{I}_m = (R + jX) \underline{I}_m = \underline{Z} \underline{I}_m. \quad (3.50)$$

Величина \underline{Z} в уравнении (3.50) есть *комплексное сопротивление* цепи:

$$\underline{Z} = R + jX. \quad (3.51)$$

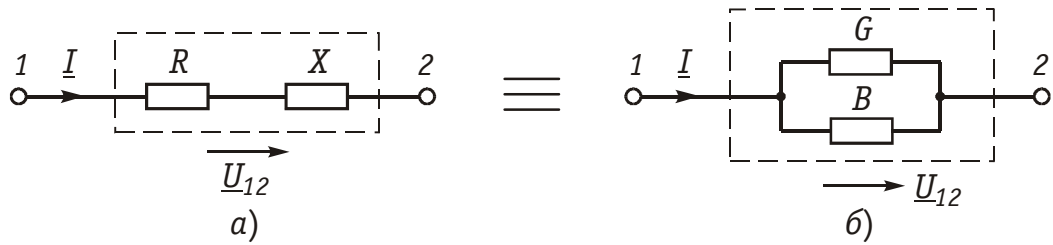


Рис. 3.13

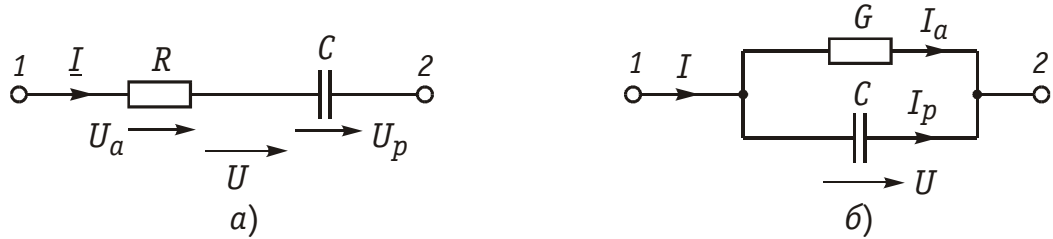


Рис. 3.14

Комплексное сопротивление \underline{Z} можно выразить в показательной или тригонометрической форме:

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi} = Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi. \quad (3.52)$$

Таким образом, рассмотренное ранее полное сопротивление цепи (3.33) представляет собой модуль комплексного сопротивления:

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2},$$

а фазовый сдвиг φ — аргумент (\arg) комплексного сопротивления:

$$\varphi = \arg \underline{Z} = \arctg(X/R).$$

Аналогичным образом можно получить уравнения токов и напряжений в комплексной форме для параллельного соединения элементов R , L , C (см. § 3.5). Так уравнение (3.39) в комплексной форме примет вид

$$\underline{I}_m = [G - j(B_L - B_C)]\underline{U}_m = (G - jB)\underline{U}_m = \underline{Y}\underline{U}_m. \quad (3.53)$$

Величина \underline{Y} в (3.53) есть *комплексная проводимость* цепи:

$$\underline{Y} = G - jB \text{ или } \underline{Y} = Y e^{-j\varphi} = Y \cos \varphi - jY \sin \varphi. \quad (3.54)$$

Следовательно, полная проводимость цепи Y равна модулю комплексной проводимости $Y = |\underline{Y}|$, а фазовый сдвиг φ — аргументу комплексной проводимости $\varphi = \arg \underline{Y} = \arctg(B/G)$.

При анализе различных электрических цепей часто возникает необходимость преобразования схемы последовательно соединенных элементов в эквивалентное параллельное соединение и наоборот (рис. 3.13). В основе подобных преобразований лежит принцип эквивалентности (см. § 1.5). Согласно этому принципу ток \underline{I} и напряжение \underline{U}_{12} в исходной (рис. 3.13, а) и преобразованной (рис. 3.13, б) схемах должны остаться неизменными. Для первой

схемы $\underline{I} = \underline{U}_{12}/\underline{Z}$, для второй $\underline{I} = \underline{U}_{12}\underline{Y}$. Из равенства токов \underline{I} и напряжений \underline{U}_{12} для обеих схем имеем:

$$\underline{Z} = R + jX = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{G - jB} = \frac{G + jB}{G^2 + B^2} = \frac{G}{Y^2} + j \frac{B}{Y^2}. \quad (3.55)$$

Из равенства (3.55) следуют формулы преобразования параллельного участка (рис. 3.13, б) в эквивалентный последовательный (рис. 3.13, а):

$$R = G/Y^2; \quad X = B/Y^2. \quad (3.56)$$

Аналогично из равенства $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ можно получить формулы преобразования последовательного участка (рис. 3.13, а) в эквивалентный параллельный (рис. 3.13, б):

$$G = R/Z^2; \quad B = X/Z^2. \quad (3.57)$$

Преобразование (3.56) и (3.57) можно положить в основу разложения тока в последовательном участке и напряжения в параллельном на активную и реактивную составляющие.

Пример. Преобразовать последовательный RC -участок (рис. 3.14, а) в эквивалентный параллельный (рис. 3.14, б). Определить активные и реактивные составляющие токов и напряжений на обоих участках.

В соответствии с уравнением (3.57) получаем

$$G = \frac{R}{R^2 + (1/\omega C)^2} = \frac{R^2 \omega^2 C^2}{1 + (\omega RC)^2}, \quad B = \frac{1/\omega C}{R^2 + (1/\omega C)^2} = \frac{\omega C}{R^2 + (1/\omega C)^2}.$$

Из рис. 3.14 находим уравнения для активной и реактивной составляющих напряжения и тока:

$$U_a = RI, \quad U_p = I/(\omega C); \quad I_a = GU, \quad I_p = BU.$$

Символический метод особенно эффективен при анализе сложных разветвленных цепей. Причем поскольку все методы расчета подобных цепей (метод контурных токов, узловых потенциалов, наложения и др.) базируются на законах Ома и Кирхгофа, то эти методы могут использоваться и при комплексной форме с заменой соответствующих величин (токов, напряжений, сопротивлений, проводимостей) их комплексными значениями.

Пример. Проиллюстрируем это на примере расчета цепи, изображенной на рис. 3.15 различными методами в комплексной форме. Заменим элементы ветвей в исходной схеме их комплексными сопротивлениями, а источники напряжения и токи их комплексными значениями (рис. 3.16):

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1; \quad \underline{Z}_2 = R_2 - j(1/\omega C_2); \quad \underline{Z}_3 = R_3 + j(\omega L_3 - 1/\omega C_3).$$

Рассчитаем теперь эту цепь различными методами в символической форме, используя комплексы действующих значений токов и напряжений.

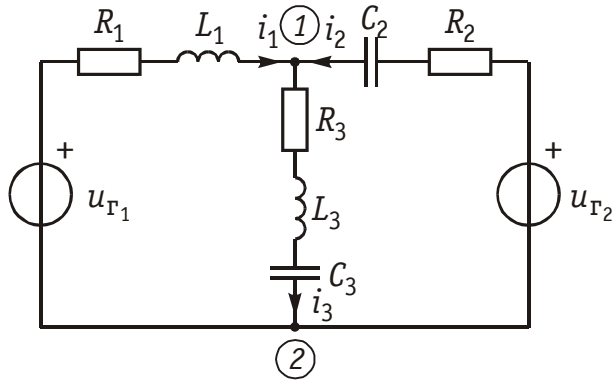


Рис. 3.15

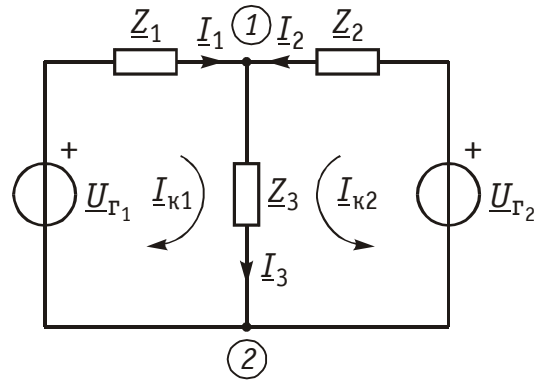


Рис. 3.16

1. **Метод наложения.** Сравнение схем, изображенных на рис. 3.16 и рис. 2.5. *а* показывает их одинаковую топологию. Таким образом, путем перехода от R к Z , от $U_{Г}$ к $\underline{U}_{Г}$ и от I к \underline{I} можно сразу получить соответствующие уравнения для токов \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_3 (см. § 2.3).

2. **Метод контурных токов.** В соответствии с § 2.4 составляем систему из двух уравнений для контуров I и II:

$$\begin{cases} \underline{Z}_{11}\underline{I}_{к1} + \underline{Z}_{12}\underline{I}_{к2} = \underline{U}_{к1}, \\ \underline{Z}_{21}\underline{I}_{к1} + \underline{Z}_{22}\underline{I}_{к2} = \underline{U}_{к2}, \end{cases} \quad (3.58)$$

где

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z} + \underline{Z}_3; \quad \underline{Z}_{22} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3; \quad \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_3; \quad \underline{U}_{к1} = \underline{U}_{Г1}; \quad \underline{U}_{к2} = \underline{U}_{Г2}.$$

Решая систему (3.58) согласно (2.14), (2.15), получаем

$$\underline{I}_{к1} = \underline{U}_{к1} \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z} + \underline{U}_{к2} \frac{\Delta_{21}}{\Delta_Z}; \quad \underline{I}_{к2} = \underline{U}_{к1} \frac{\Delta_{12}}{\Delta_Z} + \underline{U}_{к2} \frac{\Delta_{22}}{\Delta_Z},$$

где $\Delta_Z = \begin{vmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{vmatrix}$, Δ_{11} , Δ_{12} , Δ_{21} , Δ_{22} — алгебраические дополнения определителя Δ_Z .

Токи ветвей найдутся из равенств: $\underline{I}_1 = \underline{I}_{к1}$; $\underline{I}_2 = \underline{I}_{к2}$; $\underline{I}_3 = \underline{I}_{к1} + \underline{I}_{к2}$.

3. **Метод узловых потенциалов.** В соответствии с этим методом (§ 2.5) для заданной схемы, согласно (2.27) необходимо составить только одно уравнение для узла 1:

$$\underline{Y}_{11}\underline{V}_1 - \underline{Y}_{12}\underline{V}_2 = \underline{I}_{y1},$$

где

$$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 = 1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_2 + 1/\underline{Z}_3; \quad \underline{I}_{y1} = \underline{U}_{Г1}\underline{Y}_1 + \underline{U}_{Г2}\underline{Y}_2.$$

Тогда $\underline{U}_{12} = \underline{V}_1 - \underline{V}_2 = (\underline{U}_{Г1}\underline{Y}_1 + \underline{U}_{Г2}\underline{Y}_2)/(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)$. Токи \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_3 найдем по закону Ома для участка цепи в комплексной форме:

$$\underline{I}_1 = (\underline{U}_{Г1} - \underline{U}_{12})/\underline{Z}_1; \quad \underline{I}_2 = (\underline{U}_{Г2} - \underline{U}_{12})/\underline{Z}_2; \quad \underline{I}_3 = \underline{U}_{12}/\underline{Z}_3.$$

При этом должен выполняться ЗТК: $-\underline{I}_1 - \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$.

4. **Метод эквивалентного генератора.** Определим ток \underline{I}_3 методом эквивалентного генератора напряжения. Разомкнув ветвь с \underline{Z}_3 по аналогии с рис. 2.12, б, получим уравнения $\underline{U}_{xx} = \underline{U}_{Г2} - \underline{I}_2\underline{Z}_2$ и $\underline{Z}_{Г} = \underline{Z}_1\underline{Z}_2/(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$.

Ток \underline{I}_3 найдем из (2.34) записанного в комплексной форме: $\underline{I}_3 = \underline{U}_{xx}/(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_{Г})$. После определения комплексных значений токов \underline{I} и напряжений \underline{U} можно за-

писать уравнения для мгновенных значений i и u . Так, если угловая частота задающих источников синусоидальных колебаний u_{r1} и u_{r2} равна ω , то мгновенное значение тока $i_3 = I_{m3} \sin(\omega t + \varphi_3)$, где $I_{m3} = \underline{I}_3 \sqrt{2}$; $\varphi_3 = \arg \underline{I}_3$; $\underline{I}_3 = I_3 e^{j\varphi_3}$.

Аналогичным образом осуществляется преобразование электрических цепей, содержащих комплексные сопротивления. Комплексные сопротивления, соединенные звездой преобразуются в треугольник путем замены в формулах (2.6)–(2.9) параметров R и G на соответствующие комплексы \underline{Z} и \underline{Y} . Точно также осуществляется обратное преобразование треугольник–звезда.

Например, с учетом уравнений (1.9) и (1.12) можно получить формулы преобразования «звезда–треугольник» индуктивных и емкостных элементов. Так, для емкостных элементов при преобразовании «треугольник–звезда» имеем:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= C_{12} + C_{31} + C_{12}C_{31}/C_{23}, \\ C_2 &= C_{23} + C_{12} + C_{23}C_{12}/C_{31}, \\ C_3 &= C_{31} + C_{23} + C_{31}C_{23}/C_{12}, \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

а при обратном преобразовании «звезда–треугольник»

$$\left. \begin{aligned} C_{12} &= C_1 C_2 / (C_1 + C_2 + C_3), \\ C_{23} &= C_2 C_3 / (C_1 + C_2 + C_3), \\ C_{31} &= C_3 C_1 / (C_1 + C_2 + C_3). \end{aligned} \right\} \quad (3.60)$$

Преобразование «треугольник–звезда» и обратно для индуктивных элементов осуществляется по формулам, аналогичным (2.6)–(2.8).

Подобным же образом преобразуются матрично-топологические уравнения цепей в комплексную форму. Например, матричные уравнения (1.18), (1.20), (2.17) в комплексной форме принимают следующий вид:

$$\text{ЗТК: } \underline{A}_0 \underline{I}_B = 0, \quad (3.61)$$

$$\text{ЗНК: } \underline{B} \underline{U}_B = 0. \quad (3.62)$$

Закон Ома: (при наличии ветвей с источниками тока $\underline{J}_{ГВ}$):

$$\underline{I}_B + \underline{I}_{ГВ} = \underline{Y}_B (\underline{U}_{ГВ} + \underline{U}_B). \quad (3.63)$$

Уравнение равновесия узлов потенциалов (2.33) с учетом $\underline{J}_{ГВ}$:

$$\underline{Y}_Y \underline{V}_Y = (\underline{A}_0 \underline{Y}_B \underline{A}_0^T) \underline{V}_Y = \underline{A}_0 (\underline{J}_{ГВ} - \underline{Y}_B \underline{U}_{ГВ}) = \underline{I}_Y. \quad (3.64)$$

Уравнение равновесия контурных токов (2.23)

$$\underline{Z}_K \underline{I}_K = \underline{U}_K, \quad (3.65)$$

где $\underline{Y}_B, \underline{Y}_Y$ — матрицы комплексной проводимости ветвей и комплексной узловой проводимости.

$\underline{Z}_B, \underline{Z}_K$ — матрица комплексного сопротивления ветви и матрица комплексного контурного сопротивления.

$\underline{U}_{ГВ}, \underline{I}_{ГВ}, \underline{U}_B$ — матрицы-столбцы комплексных задающих напряжений и токов ветви и напряжений ветвей.

3.7. Электрические цепи с индуктивными связями

В предыдущих параграфах этой главы рассматривались цепи без учета явления взаимной индукции. В то же время, при протекании тока i_1 в катушке индуктивности с параметром L_1 в окружающем пространстве согласно закону электромагнитной индукции создается магнитный поток Φ_{11} (рис. 3.17, а). Если какая-либо часть этого потока Φ_{12} пронизывает витки другой катушки с L_2 , то в последней наводится ЭДС взаимной индукции, определяемая *законом Максвелла—Фарадея*:

$$e_{M_2} = -M_{12} \frac{di_1}{dt}, \quad (3.66)$$

где коэффициент M_{12} носит название *взаимной индуктивности* катушек L_1 и L_2 . Единица измерения взаимной индуктивности — M генри (Гн).

Знак « $-$ » в уравнении (3.66) определяется согласно *правилу Ленца* направлением индукционного тока, который имеет такую ориентацию, чтобы создаваемый им магнитный поток препятствовал тому изменению магнитного потока Φ_{12} , которое этот ток вызывает. Напряжение взаимоиндукции на зажимах катушки индуктивности L_2 :

$$u_{M_2} = -e_{M_2} = M_{12} \frac{di_1}{dt}. \quad (3.67)$$

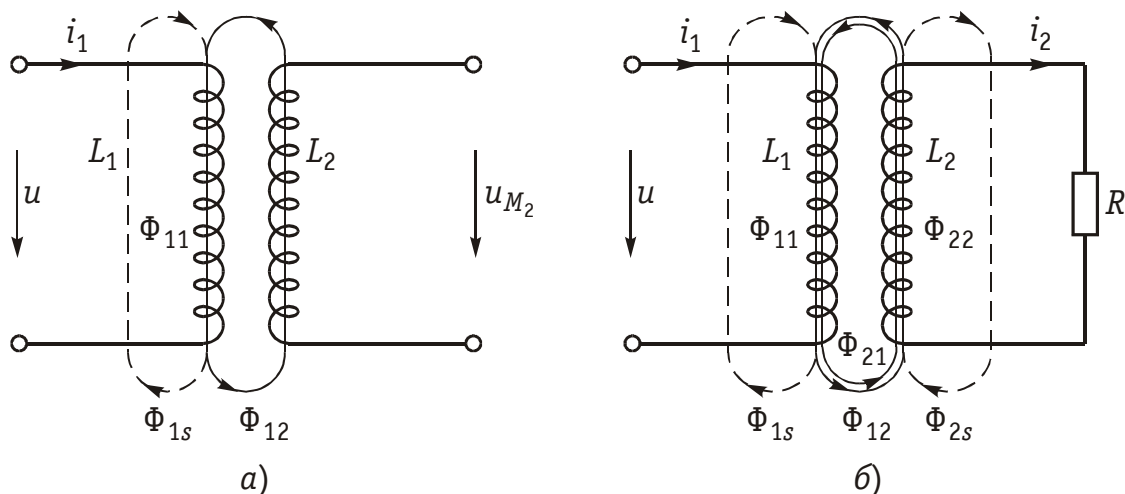


Рис. 3.17

Если напряжение u приложено к катушке индуктивности L_2 , то под действием тока i_2 в катушке L_1 также будет наведена ЭДС взаимной индукции:

$$e_{M_1} = -M_{21} \frac{di_2}{dt}. \quad (3.68)$$

В соответствии с принципом взаимности (см. § 1.7) для линейных цепей $M_{12} = M_{21}$.

Рассмотренная ниже индуктивная связь носит односторонний характер: ток i_1 вызывает ЭДС взаимоиндукции e_{M_2} , или ток i_2 — ЭДС e_{M_1} . В случае замыкания катушки L_2 на конечное сопротивление R (рис. 3.17, б) в последней под воздействием u_{M_2} , потечет индукционный ток i_2 , который в свою очередь, вызовет в первой катушке L_1 ЭДС взаимоиндукции e_{M_1} (3.68). Таким образом, установится двухсторонняя индуктивная связь катушек L_1 и L_2 . При этом каждая из катушек L_1 и L_2 будет пронизываться двумя магнитными потоками: самоиндукции, вызванным собственным током, и взаимоиндукции, вызванным током другой катушки. Следовательно, в катушке L_1 индуцируется ЭДС

$$e_1 = e_{L_1} + e_{M_1} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{21} \frac{di_2}{dt}, \quad (3.69)$$

а в катушке L_2 ЭДС

$$e_2 = e_{L_2} + e_{M_2} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M_{12} \frac{di_1}{dt}. \quad (3.70)$$

Взаимное направление потоков само- и взаимоиндукции зависит как от направления токов в катушках, так и от их взаимного расположения.

Если катушки включаются таким образом, что потоки само- и взаимоиндукции складываются, то такое включение называется *согласным*. Если же потоки само- и взаимоиндукции вычитаются, то такое включение принято называть *встречным*. На рис. 3.17, б показан случай согласного включения.

Степень связи между L_1 и L_2 оценивается *коэффициентом связи*

$$k = \sqrt{k_{12}k_{21}}. \quad (3.71)$$

где коэффициенты

$$k_{12} = \Phi_{12}/\Phi_{11} \text{ и } k_{21} = \Phi_{21}/\Phi_{22} \quad (3.72)$$

характеризуют одностороннюю связь между катушками L_1 и L_2 . Магнитные потоки Φ_{12} , Φ_{21} , Φ_{11} и Φ_{22} можно выразить через параметры катушек L_1 , L_2 , M_{12} , M_{21} и токи i_1 , i_2 с помощью формул

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= L_1 i_1 / \omega_1; & \Phi_{12} &= M_{12} i_1 / \omega_2; \\ \Phi_{21} &= M_{21} i_2 / \omega_1; & \Phi_{22} &= L_2 i_2 / \omega_2, \end{aligned} \quad (3.73)$$

где ω_1 , ω_2 — число витков катушек L_1 и L_2 соответственно.

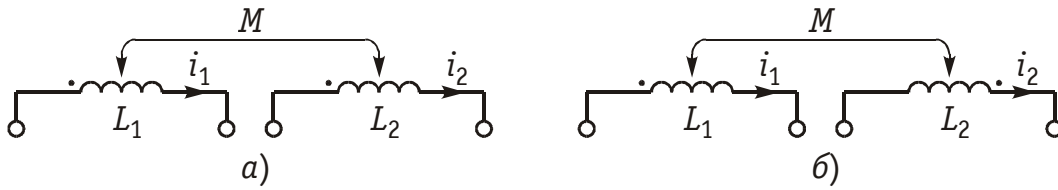


Рис. 3.18

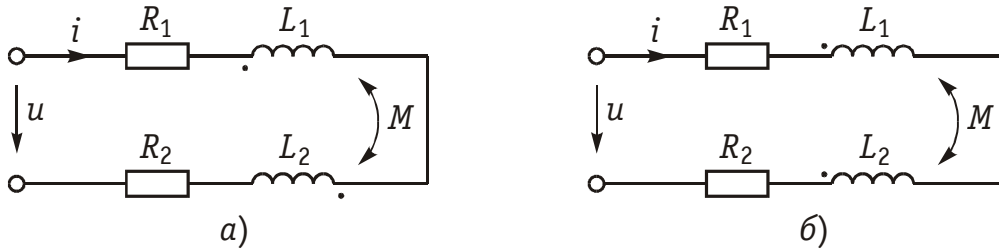


Рис. 3.19

После подстановки (3.73) в (3.71) с учетом (3.72) получим для коэффициента связи

$$k = M / \sqrt{L_1 L_2}, \quad (3.74)$$

где $M_{12} = M_{21} = M$.

Значение k изменяется в пределах от 0 (отсутствие связи) до 1 (*жесткая* или *полная* связь). Индуктивная связь существенным образом зависит от *потокос рассеяния* Φ_{1s} и Φ_{2s} , поэтому степень связи иногда характеризуют *коэффициентом рассеяния* $\sigma^2 = 1 - k^2$. Для компактности и удобства изображения схем электрических цепей с взаимной индуктивностью вводят понятие *одноименных зажимов*. Последними принято называть узлы, относительно которых одинаково ориентированные токи создают складывающиеся потоки само- и взаимоиндукции. На рис. 3.18 схематично изображены одноименные зажимы для случая согласного и встречного включений катушек L_1 и L_2 . Следовательно, для определения вида включения L_1 и L_2 на схеме достаточно определить, как ориентированы токи i_1 и i_2 относительно одноименных зажимов (на рис. 3.18 обозначены точкой): при одинаковой ориентации имеем согласное (рис. 3.18, а), а при разной — встречное включение (рис. 3.18, б).

Учет взаимной индуктивности существенно влияет на результаты анализа электрических цепей. Рассмотрим последовательное и параллельное соединение индуктивно-связанных катушек с индуктивностями L_1 и L_2 и потерями R_1 и R_2 , находящихся под действием гармонического напряжения:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (3.75)$$

Последовательное соединение. Для согласного включения катушек (см. рис. 3.19, а) в соответствии с ЗНК и уравнениями (3.66) и (3.67) можно записать:

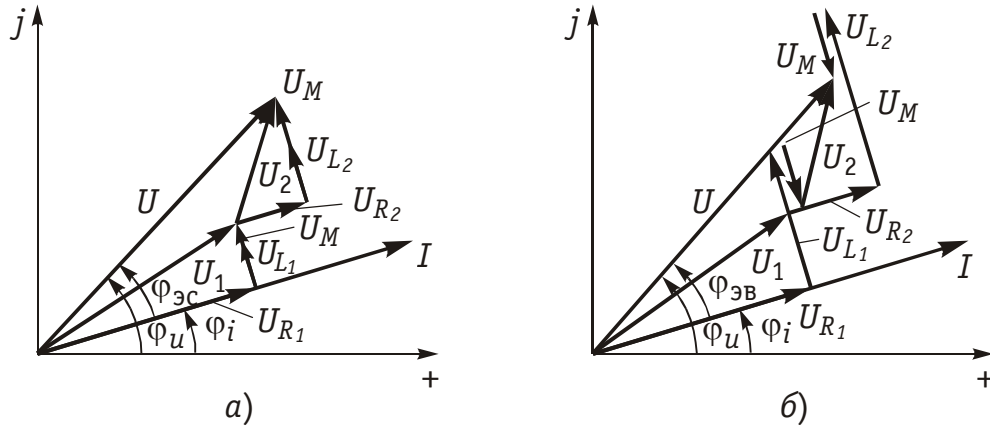


Рис. 3.20

$$\begin{aligned} u &= u_{R_1} + u_{L_1} + u_M + u_{L_2} + u_M + u_{R_2} = \\ &= (R_1 + R_2)i + (L_1 + L_2 + 2M)di/dt. \end{aligned} \quad (3.76)$$

В комплексной форме уравнение (3.76) согласно § 3.6 запишется в виде

$$\underline{U} = (R_1 + R_2)\underline{I} + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)\underline{I}. \quad (3.77)$$

Обозначим через Z комплексное эквивалентное сопротивление всей цепи при согласном включении катушек

$$\underline{Z}_{эс} = R_{э} + j\omega L_{эс}, \quad (3.78)$$

где

$$R_{э} = R_1 + R_2; \quad L_{эс} = L_1 + L_2 + 2M. \quad (3.79)$$

Тогда уравнение (3.77) можно записать в виде

$$\underline{U} = \underline{Z}_{эс}\underline{I}, \quad (3.80)$$

отражающем закон Ома для рассматриваемой цепи.

Фазовый сдвиг между током i и приложенным напряжением u

$$\varphi_{эс} = \varphi_u - \varphi_i = \arctg(\omega L_{эс}/R_{э}). \quad (3.81)$$

На рис. 3.20, а изображена векторно-топографическая диаграмма напряжений на отдельных элементах цепи при согласном включении L_1 и L_2 .

Комплексное напряжение на катушке L_1 с потерями R_1 равно

$$\underline{U}_1 = [R_1 + j\omega(L_1 + M)]\underline{I}. \quad (3.82)$$

Аналогично определяется комплексное напряжение на второй катушке L_2 с потерями R_2 :

$$\underline{U}_2 = [R_2 + j\omega(L_2 + M)]\underline{I}. \quad (3.83)$$

При встречном включении катушек (см. рис. 3.19, б) уравнения (3.76) и (3.77) принимают вид

$$\begin{aligned} u &= u_{R_1} + u_{L_1} - u_M + u_{L_2} + u_{R_2} - u_M = \\ &= (R_1 + R_2)i + (L_1 + L_2 - 2M); \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\underline{U} = (R_1 + R_2)\underline{I} + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)\underline{I}. \quad (3.85)$$

Комплексное эквивалентное сопротивление цепи при встречном включении

$$\underline{Z}_{\text{эв}} = R_{\text{э}} + j\omega L_{\text{эв}}, \quad (3.86)$$

где

$$L_{\text{эв}} = L_1 + L_2 - 2M \quad (3.87)$$

— эквивалентная индуктивность цепи при встречном включении катушек индуктивности.

Как следует из (3.78) и (3.87) эквивалентная индуктивность при согласном включении больше на $2M$, а при встречном меньше на $2M$ суммарной индуктивности $L_1 + L_2$.

Уравнения для тока \underline{I} , фазового сдвига $\varphi_{\text{эв}}$ и напряжений U_1 , U_2 аналогичны (3.80)–(3.83):

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{Z}_{\text{эв}}\underline{I}; \quad \varphi_{\text{эв}} = \varphi_u - \varphi_i = \arctg(\omega L_{\text{эв}}/R_{\text{э}}), \\ \underline{U}_1 &= [R_1 + j\omega(L_1 - M)]\underline{I}; \quad \underline{U}_2 = [R_2 + j\omega(L_2 - M)]\underline{I}. \end{aligned} \right\} \quad (3.88)$$

На рис. 3.20, б изображена векторно-топографическая диаграмма напряжений для случая встречного включения. При встречном включении катушек может наблюдаться «емкостный эффект», когда фазовый сдвиг между током и напряжением одной из катушек будет отрицательный. Это может иметь место при выполнении условия $L_2 < M$. В этом случае $U_{L_2} < U_M$ и

$$\varphi_{2\text{эв}} = \arctg[\omega(L_2 - M)/R_2] < 0 \quad (3.89)$$

и напряжение \underline{U}_2 будет отставать от тока \underline{I} . Однако вся цепь всегда будет носить индуктивный характер, так как при любых значениях параметров L_1 , L_2 и M справедливо условие

$$\varphi_{\text{эв}} = \arctg[\omega(L_1 + L_2 - 2M)/R_{\text{э}}] > 0. \quad (3.90)$$

Это непосредственно следует из условия, что при $k = M/\sqrt{L_1 L_2} > 0$, $L_1 + L_2 - 2M > 0$. Действительно, поскольку $(\sqrt{L_1} - \sqrt{L_2})^2 > 0$, то $L_1 + L_2 > 2\sqrt{L_1 L_2}$. Но из (3.74) находим, что $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$ (так как $k \leq 1$), следовательно, $L_1 + L_2 > 2M$ — отсюда и следует условие (3.90).

Уравнения (3.79) и (3.87) можно положить в основу экспериментального определения взаимной индуктивности M . Для этого достаточно определить ток I , напряжение U , мощность P в цепи при согласном и встречном включениях катушек и найти

$$R_{\text{э}} = P_{\text{с}}/I_{\text{с}}^2 = P_{\text{в}}/I_{\text{в}}^2; \quad Z_{\text{эс}} = U/I_{\text{с}}; \quad Z_{\text{эв}} = U/I_{\text{в}},$$

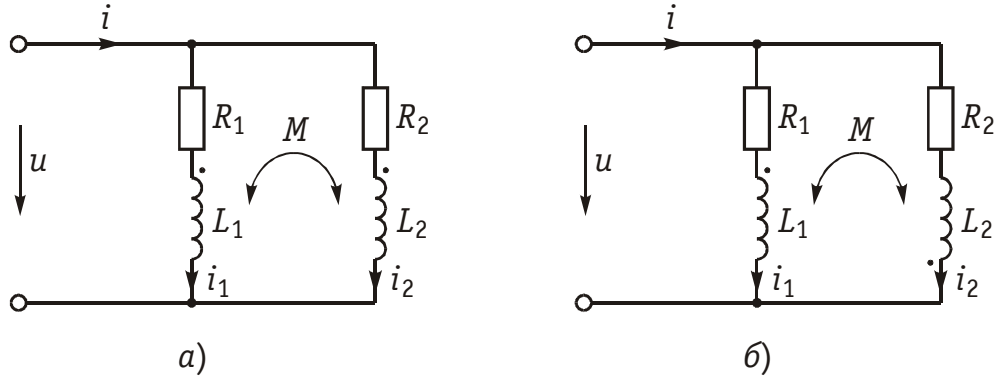


Рис. 3.21

где индексы «с» и «в» относятся к согласному и встречному включениям.

Реактивные составляющие комплексных сопротивлений при согласном и встречном включениях можно определить как

$$X_{\text{эс}} = \sqrt{Z_{\text{эс}}^2 - R_{\text{э}}^2}; \quad X_{\text{эв}} = \sqrt{Z_{\text{эв}}^2 - R_{\text{э}}^2}.$$

Отсюда, учитывая, что $X_{\text{эс}} = \omega(L_1 + L_2 + 2M)$ и $X_{\text{эв}} = \omega(L_1 + L_2 - 2M)$, находим взаимную индуктивность:

$$M = (X_{\text{эс}} - X_{\text{эв}})/4\omega. \quad (3.91)$$

Параллельное соединение. Для случая согласного включения катушек (рис. 3.21, а) в соответствии с ЗТК и ЗНК можно записать:

$$\left. \begin{aligned} \underline{I} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2, \\ \underline{U} &= \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_{12}, \\ \underline{U} &= \underline{I}_1 \underline{Z}_{21} + \underline{I}_2 \underline{Z}_{22}, \end{aligned} \right\} \quad (3.92)$$

где $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$; $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$; $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = j\omega M$.

Решая систему (3.92) относительно \underline{I}_1 и \underline{I}_2 , получаем

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{U} / (\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{12}^2) / (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_{12}); \\ \underline{I}_2 &= \underline{U} / (\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{12}^2) / (\underline{Z}_1 - \underline{Z}_{12}). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Выражения, стоящие в знаменателях (3.93), имеют смысл эквивалентных комплексных сопротивлений индуктивно связанных ветвей $\underline{Z}_{1\text{эс}}$ и $\underline{Z}_{2\text{эс}}$:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{1\text{эс}} &= (\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{12}^2) / (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_{12}); \\ \underline{Z}_{2\text{эс}} &= (\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{12}^2) / (\underline{Z}_1 - \underline{Z}_{12}). \end{aligned} \quad (3.94)$$

Эти сопротивления складываются из двух составляющих: собственных сопротивлений ветвей \underline{Z}_1 и \underline{Z}_2 и сопротивлений, вносимых за счет индуктивных связей $\underline{Z}_{1\text{внс}}$ и $\underline{Z}_{2\text{внс}}$:

$$\underline{Z}_{1\text{эс}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{1\text{внс}}; \quad \underline{Z}_{2\text{эс}} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2\text{внс}}. \quad (3.95)$$

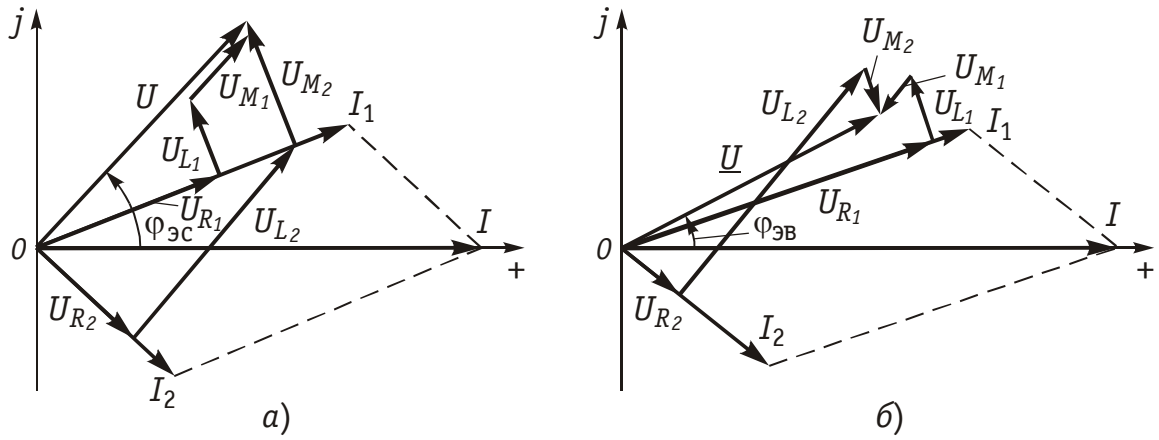


Рис. 3.22

Комплексные вносимые сопротивления $\underline{Z}_{1\text{вн с}}$ и $\underline{Z}_{2\text{вн с}}$ можно определить, решив совместно (3.94) и (3.95):

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_{1\text{вн с}} &= (\underline{Z}_1 \underline{Z}_{12} - \underline{Z}_{12}^2) / (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_{12}), \\ \underline{Z}_{2\text{вн с}} &= (\underline{Z}_2 \underline{Z}_{12} - \underline{Z}_{12}^2) / (\underline{Z}_1 - \underline{Z}_{12}). \end{aligned} \right\} \quad (3.96)$$

Ток в неразветвленной части цепи \underline{I} с учетом (3.93)

$$\underline{I} = \underline{U} / \underline{Z}_{\text{эс}},$$

где

$$\underline{Z}_{\text{эс}} = (\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{12}^2) / (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_{12}). \quad (3.97)$$

Нетрудно видеть, что в случае отсутствия индуктивной связи ($\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = 0$) эквивалентное комплексное сопротивление цепи $\underline{Z}_{\text{эс}} = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$, что соответствует известной формуле параллельного соединения \underline{Z}_1 и \underline{Z}_2 .

На рис. 3.22, а изображена векторно-топографическая диаграмма для случая согласного включения L_1 и L_2 . Аналогичным образом можно получить соответствующие уравнения для встречного включения катушек (см. рис. 3.21, б). При этом необходимо учесть, что в уравнениях перед слагаемыми с \underline{Z}_{12} и \underline{Z}_{21} необходимо заменить знак на противоположный. Так, уравнения (3.94), (3.96), (3.97) принимают вид

$$\underline{Z}_{1\text{эв}} = (\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{12}^2) / (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{12}); \quad (3.98)$$

$$\underline{Z}_{2\text{эв}} = (\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{12}^2) / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{12});$$

$$\underline{Z}_{1\text{вн в}} = -(\underline{Z}_1 \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{12}^2) / (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{12}); \quad (3.99)$$

$$\underline{Z}_{2\text{вн в}} = -(\underline{Z}_2 \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{12}^2) / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{12});$$

$$\underline{Z}_{\text{эв}} = (\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{12}^2) / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_{12}). \quad (3.100)$$

На рис. 3.22, б изображена векторно-топографическая диаграмма для случая встречного включения.

Из уравнений (3.94), (3.98) нетрудно найти эквивалентные индуктивности ветвей:

$$\begin{aligned} L_{1э} &= (L_1 L_2 - M^2)/(L_2 \mp M); \\ L_{2э} &= (L_1 L_2 - M^2)/(L_1 \mp M), \end{aligned} \quad (3.101)$$

где знак « $-$ » относится к согласному, а « $+$ » — к встречному включению индуктивно связанных элементов.

3.8. Особенности анализа индуктивно связанных цепей

При расчете индуктивно связанных цепей обычно используют законы Кирхгофа и метод контурных токов. Другие методы либо нецелесообразно использовать из-за громоздкости решения, либо нельзя применять вследствие наличия индуктивной связи (методы узловых потенциалов, эквивалентного генератора). Для того чтобы можно было использовать все рассмотренные ранее методы расчета, применяют «развязку» индуктивных связей. Рассмотрим сущность этих методов на примере цепи, схема которой изображена на рис. 3.23.

Расчет по законам Кирхгофа. Составим уравнения по ЗТК и ЗНК, в комплексной форме:

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_2 + \underline{I}_3, \\ (R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 + j\omega M_{13}\underline{I}_3 - j\omega M_{12}\underline{I}_2 + \\ &+ (R_2 + j\omega L_2)\underline{I}_2 - \underline{I}_1 j\omega M_{12} = U_{r1} - U_{r2}, \\ -(R_2 + j\omega L_2)\underline{I}_2 + j\omega M_{12}\underline{I}_1 + (R_3 + j\omega L_3 + \\ &+ 1/j\omega C_3)\underline{I}_3 + j\omega M_{13}\underline{I}_1 = U_{r2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.102)$$

При составлении уравнений по ЗНК необходимо пользоваться следующим правилом знаков: напряжение взаимной индукции, создаваемое в k -й ветви от тока, протекающего в l -й ветви, берется со знаком « $+$ », если направление обхода k -й ветви и положительное направление тока в l -й ветви одинаково ориентировано относительно одноименных зажимов. В противном случае берется знак « $-$ ».

Решая систему (3.102), получаем искомые токи \underline{I}_1 , \underline{I}_2 и \underline{I}_3 .

Метод контурных токов. В соответствии с этим методом (см. § 2.4) и правилом знаков уравнения для контурных токов $\underline{I}_{к1}$ и $\underline{I}_{к2}$ (см. рис. 3.23) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} (\underline{Z}_{11} - 2\underline{Z}_{12})\underline{I}_{к1} + (\underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{12} - \underline{Z}_2)\underline{I}_{к2} &= \underline{U}_{к1}, \\ (\underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{12} - \underline{Z}_2)\underline{I}_{к1} + \underline{Z}_{22}\underline{I}_{к2} &= \underline{U}_{к2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.103)$$

где $\underline{Z}_{11} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2)$; $\underline{Z}_{22} = R_2 + R_3 + j\omega(L_2 + L_3) + 1/j\omega C_3$;
 $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$; $\underline{Z}_{12} = j\omega M_{12}$; $\underline{Z}_{13} = j\omega M_{13}$; $\underline{U}_{к1} = U_{r1} - U_{r2}$;
 $\underline{U}_{к2} = U_{r2}$.

Решая систему (3.103), находим контурные токи $\underline{I}_{к1}$ и $\underline{I}_{к2}$, а затем токи ветвей $\underline{I}_1 = \underline{I}_{к1}$; $\underline{I}_2 = \underline{I}_{к1} - \underline{I}_{к2}$; $\underline{I}_3 = \underline{I}_{к2}$.

Рассмотренные методы можно обобщить на схемы произвольной конфигурации.

Развязка индуктивных связей.

Расчет индуктивно связанных цепей существенно упрощается, если использовать эквивалентные схемы, не содержащие в явном виде индуктивные связи. Составление подобных эквивалентных схем и составляет сущность метода «развязки» индуктивных связей. При этом эквивалентные связи учитываются в эквивалентных индуктивностях развязанных схем. Примером подобной развязки могут служить эквивалентные индуктивности, определяемые уравнениями (3.79), (3.87), (3.101).

В общем случае развязку любых двух индуктивно связанных элементов L_1 и L_2 , соединенных в одном узле (рис. 3.24, а) можно осуществить с помощью схемы, изображенной на рис. 3.24, б для случая, когда элементы L_1 и L_2 соединены в узле $0'$ одноименными зажимами (\cdot) и с помощью схемы на рис. 3.24, в для соединения L_1 и L_2 в узле $0'$ разноименными зажимами (Δ). Для доказательства эквивалентности этих схем достаточно составить уравнения по законам Кирхгофа для каждой из них и доказать их идентичность. Действительно, для случая включения одноименными зажимами для схемы на рис. 3.24, а имеем:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{a0} &= j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2, \\ \underline{U}_{60} &= j\omega M \underline{I}_1 + j\omega L_2 \underline{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.104)$$

Для развязной схемы на рис. 3.24, б имеем:

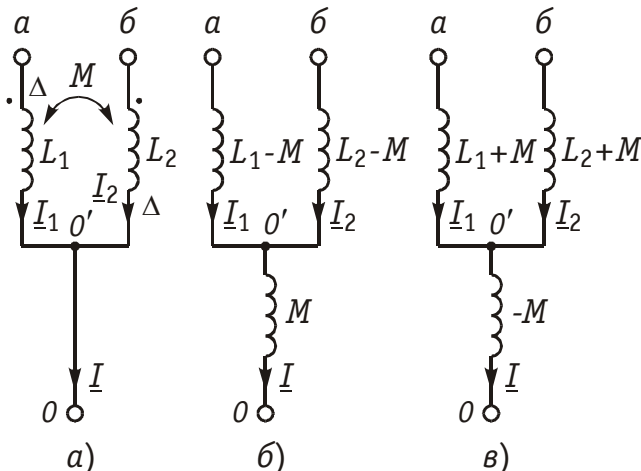


Рис. 3.24

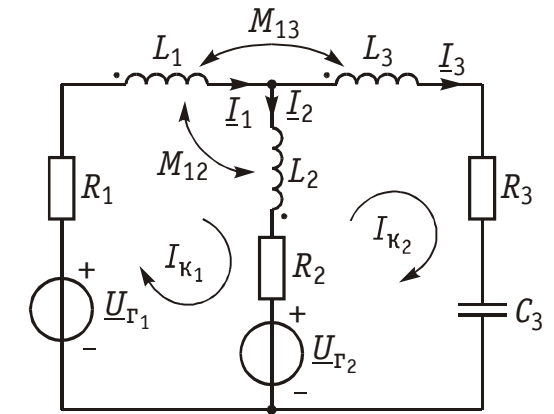


Рис. 3.23

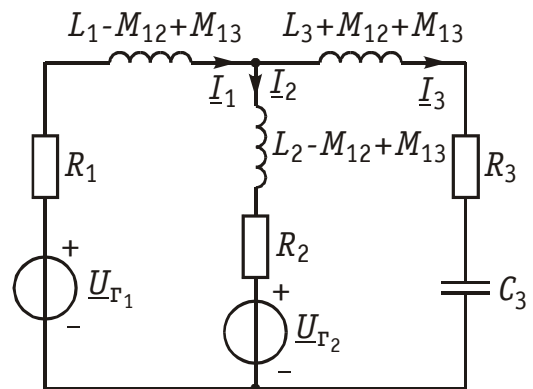


Рис. 3.25

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{a0} &= j\omega(L_1 - M)\underline{I}_1 + j\omega M\underline{I}_2 \\ \underline{U}_{60} &= j\omega(L_2 - M)\underline{I}_2 + j\omega M\underline{I}_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.105)$$

Учитывая, что $\underline{I}_1 = \underline{I} - \underline{I}_2$ и $\underline{I}_2 = \underline{I} - \underline{I}_1$ после подстановки \underline{I}_1 и \underline{I}_2 в (3.104) получаем уравнения, аналогичные (3.105). Подобным же образом доказывается эквивалентность и второй схемы при включении L_1 и L_2 разноименными зажимами.

В качестве примера на рис. 3.25 изображена схема с развязанными индуктивными связями, эквивалентная изображенной на рис. 3.23. После развязки индуктивных связей расчет полученной эквивалентной схемы может быть осуществлен любым из известных методов.

Наличие индуктивных связей приводит к изменению матрицы сопротивления \underline{Z}_B и проводимости \underline{Y}_B . Из диагональных матриц они превращены в квадратные матрицы, по диагонали которых записываются собственные комплексные сопротивления или проводимости ветвей, а на пересечении k -й строки и l -го столбца записываются сопротивления или проводимости взаимной связи между k -й и l -й ветвями со знаком «+» при согласном включении и со знаком «-» при встречном.

Если цепь удовлетворяет условию взаимности (см. § 2.4), то $\underline{Z}_{kl} = \underline{Z}_{lk}$, $\underline{Y}_{kl} = \underline{Y}_{lk}$ и матрица будет симметрична относительно главной диагонали.

Например, матрица сопротивлений цепи, изображенной на рис. 3.23, имеет вид

$$\underline{Z}_B = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & -\underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{13} \\ -\underline{Z}_{21} & \underline{Z}_2 & 0 \\ \underline{Z}_{31} & 0 & \underline{Z}_3 \end{bmatrix},$$

где $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$; $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$; $\underline{Z}_3 = R_3 + j(\omega L_3 - 1/\omega C_3)$;
 $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = j\omega M_{12}$; $\underline{Z}_{13} = \underline{Z}_{31} = j\omega M_{13}$.

3.9. Трансформатор

Трансформатором называется статическое устройство, предназначенное для преобразования значений переменных напряжений и токов. Простейший трансформатор состоит из двух индуктивно связанных катушек с индуктивностями L_1 и L_2 , расположенных на общем сердечнике. Катушка, к которой подключается источник, называют *первичной*, а к которой подключают нагрузку — *вторичной*. Сердечник может быть выполнен из ферромагнитного или неферромагнитного материала. Примером трансформатора последнего типа является воздушный трансформатор, находящий широкое применение в технике связи, измерительных приборах, различных радиотехнических устройствах.

Воздушный трансформатор.

На рис. 3.26 изображена схема простейшего воздушного трансформатора с потерями в первичной R_1 и вторичной R_2 катушках (обмотках), нагруженного на комплексное сопротивление $\underline{Z}_H = R_H + jX_H$.

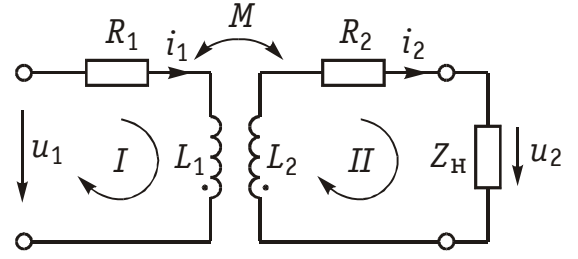


Рис. 3.26

Составим уравнение трансформатора по ЗНК для I и II контуров:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 - \underline{Z}_{12}\underline{I}_2, \\ 0 = -\underline{Z}_{12}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2, \end{cases} \quad (3.106)$$

где

$$\begin{cases} \underline{Z}_{11} = R_{11} + jX_{11} = R_1 + j\omega L_1; \quad \underline{Z}_{12} = jX_{12} = j\omega M, \\ \underline{Z}_{22} = R_{22} + jX_{22} = (R_2 + R_H) + j(\omega L_2 + X_H). \end{cases} \quad (3.107)$$

Из системы уравнений (3.106) следуют уравнения для токов \underline{I}_1 и \underline{I}_2 :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12}^2/\underline{Z}_{22}}; \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1 \underline{Z}_{12}/\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}^2/\underline{Z}_{11}}. \quad (3.108)$$

По аналогии с (3.93) введем понятие вносимых сопротивлений:

$$\underline{Z}_{1BH} = -\underline{Z}_{12}^2/\underline{Z}_{22}; \quad \underline{Z}_{2BH} = -\underline{Z}_{12}^2/\underline{Z}_{11}. \quad (3.109)$$

Тогда уравнения (3.108) можно переписать следующим образом:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{1BH}}; \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1 \underline{Z}_{12}/\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{2BH}}. \quad (3.110)$$

Уравнениям (3.110) соответствуют одноконтурные схемы замещения воздушного трансформатора, изображенные на рис. 3.27. Значения величин R_{1BH} и X_{1BH} , R_{2BH} и X_{2BH} определяются из (3.109) с учетом (3.107):

$$R_{1BH} = \frac{X_{12}^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2} R_{22}; \quad R_{2BH} = \frac{X_{12}^2}{R_{11}^2 + X_{11}^2} R_{11}; \quad (3.111)$$

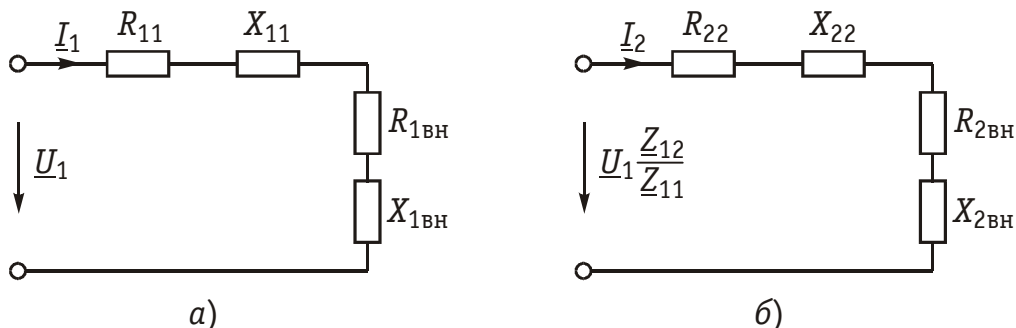


Рис. 3.27

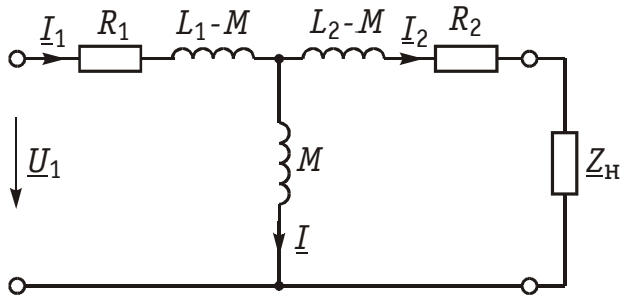


Рис. 3.28

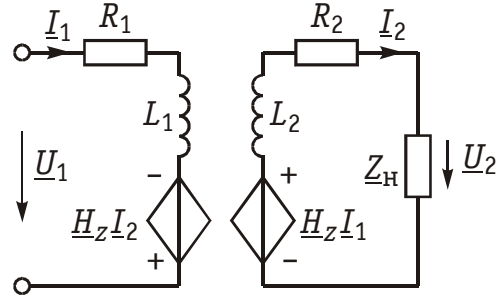


Рис. 3.29

$$X_{1\text{вн}} = -\frac{X_{12}^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2} X_{22}; \quad X_{2\text{вн}} = -\frac{X_{12}^2}{R_{11}^2 + X_{11}^2} X_{11}. \quad (3.112)$$

Знак « $-$ » в уравнениях (3.112) свидетельствует о размагничивающем действии вторичной обмотки на первичную.

С физической точки зрения $R_{1\text{вн}}$ и $R_{2\text{вн}}$ представляют собой эквивалентные резистивные сопротивления, вносимые за счет взаимной индуктивности соответственно в контуры I и II.

При этом на $R_{1\text{вн}}$ при протекании тока I_1 рассеивается та же мощность, что и на R_2 при протекании тока I_2 и соответственно на $R_{2\text{вн}}$ при протекании I_2 рассеивается та же мощность, что и на R_1 при протекании I_1 .

Воздушный трансформатор может быть представлен двухконтурной схемой замещения, изображенной на рис. 3.28. Эта схема получается непосредственно из схемы, изображенной на рис. 3.26 после объединения в один узел одноименных зажимов и развязки индуктивных связей согласно рис. 3.24. Таким, образом, для определения токов в воздушном трансформаторе могут быть использованы одно- либо двухконтурные эквивалентные схемы замещения.

Если в уравнениях (3.107) обозначить $Z_{12} = j\omega M = H_Z$, то воздушный трансформатор можно представить схемой замещения с зависимыми источниками (рис. 3.29).

Из общих уравнений для комплексных токов I_1 и I_2 с учетом (3.106), (3.107) можно найти отношение комплексных токов и напряжений в воздушном трансформаторе:

$$\begin{aligned} I_1/I_2 &= (Z_2 + Z_H)/Z_{12}; \\ U_1/U_2 &= [(Z_2 + Z_H)Z_{11} - Z_{12}^2]/(Z_H Z_{12}), \end{aligned} \quad (3.113)$$

где $U_2 = Z_H I_2$.

Из уравнения (3.113) следует, что отношение как комплексных токов, так и напряжений в воздушном трансформаторе с потерями зависит от сопротивления нагрузки Z_H .

В случае отсутствия потерь ($R_1 = R_2 = 0$) имеем:

$$I_1/I_2 = Z_H/Z_{12} + 1/k_{\text{тр}}; \quad U_1/U_2 = k_{\text{тр}}, \quad (3.114)$$

где $k_{\text{тр}} = L_1/M$ — коэффициент трансформации. Как видно, в данном случае отношение напряжений не зависит от нагрузки, а отношение токов зависит от $Z_{\text{н}}$. Такой трансформатор называют *совершенным*. Для него коэффициент связи $k = 1$, а коэффициент рассеяния $\sigma = 0$.

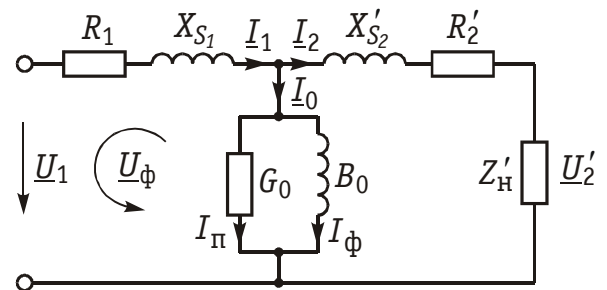


Рис. 3.30

Существует еще понятие *идеального трансформатора*, у которого потери равны нулю, индуктивности катушек бесконечно велики, а их отношение равно коэффициенту трансформации $k_{\text{тр}} = L_1/L_2 = \omega_1/\omega_2$, где ω_1, ω_2 — число витков первичной и вторичной катушек. В идеальном трансформаторе отношение как токов, так и напряжений не зависит от нагрузки и определяются только коэффициентом трансформации $k_{\text{тр}}$.

Трансформатор с ферромагнитным сердечником. Ферромагнитный сердечник применяется для увеличения магнитного потока и связи между катушками, что приводит к росту мощности, отдаваемой во вторичную цепь трансформатора. При этом по своим свойствам он приближается к идеальному трансформатору, но становится в общем случае нелинейным устройством вследствие появления дополнительных потерь на гистерезис и вихревые токи. Однако на практике *трансформатор с ферромагнитным сердечником* стараются конструировать таким образом, чтобы нелинейность была мала и ею можно было пренебречь. Тогда расчет подобного трансформатора можно осуществить на основе двухконтурной схемы замещения, изображенной на рис. 3.30 с параметрами, приведенными к параметрам первичной обмотки. Данная схема может быть получена по аналогии со схемой рис. 3.28 с учетом потерь в стали G_0 и намагничивания B_0 . Приведенные значения X'_{s2}, I'_2 определяются согласно равенствам:

$$\begin{aligned} X'_{s2} &= k_{\text{тр}}^2 X_{s2}; \quad R'_2 = k_{\text{тр}}^2 R_2; \quad I'_2 = I_2/k_{\text{тр}}; \quad U'_2 = k_{\text{тр}} U_2; \\ Z'_{\text{н}} &= k_{\text{тр}}^2 Z_{\text{н}}. \end{aligned} \quad (3.115)$$

где X_{s1}, X_{s2} — индуктивные сопротивления первичной и вторичной катушек (индуктивности рассеяния). Величины тока потерь в стали $I_{\text{п}} = G_0 U_{\text{ф}}$ и намагничивающего тока $I_{\text{ф}} = B_0 U_{\text{ф}}$ определяют суммарный ток потерь:

$$I_0 = I_{\text{ф}} + jI_{\text{п}} = I_0 e^{j\delta}, \quad (3.116)$$

где аргумент δ называется *углом потерь*.

3.10. Баланс мощности

Представим пассивную электрическую цепь, находящуюся под воздействием источника гармонического напряжения, в форме двухполюсника (см. рис. 1.1). Под воздействием напряжения $u_{ab} = U_m \sin \omega t$ в цепи протекает ток $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$. Отдаваемая источником в цепь за период T средняя мощность

$$P = P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = UI \cos \varphi. \quad (3.117)$$

Согласно закону Ома $U = ZI$ или с учетом (3.35) $U = RI / \cos \varphi$. Тогда уравнение (3.117) принимает вид

$$P = I^2 R = U^2 G. \quad (3.118)$$

Таким образом, средняя за период мощность P равна мощности, рассеиваемой на резистивном сопротивлении (проводимости) цепи. В этой связи мощность P носит название *активной* и измеряется в ваттах (Вт).

Кроме активной мощности P в цепях **гармонического тока** используют понятие *реактивной мощности*

$$Q = UI \sin \varphi = I^2 X = U^2 B \quad (3.119)$$

и *комплексной мощности*

$$\underline{S} = P + jQ. \quad (3.120)$$

Модуль комплексной мощности называется *полной мощностью*:

$$S = |\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (3.121)$$

Единица измерения реактивной мощности — ВАр, а полной — вольт-ампер (В·А).

Мощности P , Q , S можно выразить и в другой форме. Представим \underline{S} с учетом (3.117) и (3.119) в виде

$$\underline{S} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = UI e^{j\varphi} = \underline{U} \underline{I}^*. \quad (3.122)$$

Тогда нетрудно видеть, что

$$P = \operatorname{Re}[\underline{U} \underline{I}^*] = \operatorname{Re}[\underline{S}]; \quad Q = \operatorname{Im}[\underline{U} \underline{I}^*] = \operatorname{Im}[\underline{S}]; \quad S = UI = |\underline{S}| \quad (3.123)$$

т. е. активная мощность равна реальной части, а реактивная — мнимой части комплексной мощности \underline{S} . Как следует из формул (3.117) и (3.123):

$$\cos \varphi = P/S. \quad (3.124)$$

Это отношение в энергетике называется *коэффициентом мощности* (косинусом φ) и является важной характеристикой электрических машин и линий электропередачи. Чем выше $\cos \varphi$, тем

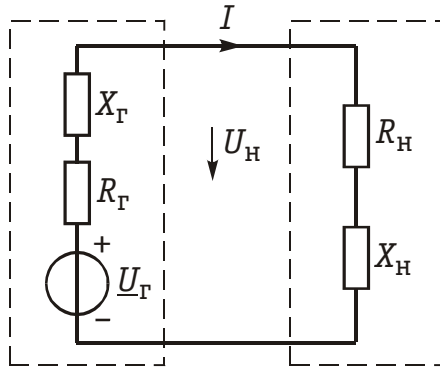


Рис. 3.31

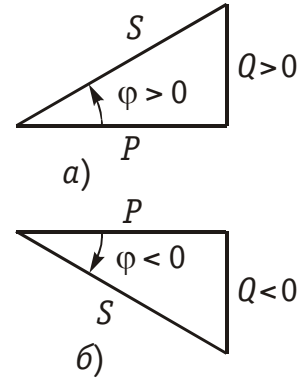


Рис. 3.32

меньше потери энергии в линии и выше степень использования электрических машин и аппаратов. Максимальное значение $\cos \varphi = 1$, при этом $P = S$, $Q = 0$, т. е. цепь носит чисто активный характер и сдвиг фаз между током i и напряжением u равен нулю.

Условие передачи максимальной мощности от генератора в нагрузку можно найти из условия

$$\underline{Z}_Г = \underline{Z}_Н^*, \quad (3.125)$$

где $\underline{Z}_Г$ — комплексное внутреннее сопротивление источника; $\underline{Z}_Н^*$ — комплексно-сопряженное сопротивление нагрузки. Это условие следует непосредственно из рассмотрения эквивалентной схемы, приведенной на рис. 3.31. Ток в данной цепи достигает максимума при $X_Г = -X_Н$ и выполнении условия $R_Г = R_Н$ (см. § 2.6), что и доказывает равенство (3.125). При этом мощность в нагрузке будет определяться уравнением

$$P_Н = U_Г^2 / 4R_Г. \quad (3.126)$$

По аналогии с треугольниками токов и напряжений, сопротивлений и проводимостей (§§ 3.4 и 3.5) можно ввести *треугольники мощностей*. Так согласно (3.121) и (3.122) треугольник мощностей для цепи, носящий индуктивный характер будет иметь вид, изображенный на рис. 3.32, а, а для цепи с емкостным характером — на рис. 3.32, б.

Рассмотрим условие баланса мощности в цепях при гармоническом воздействии. В силу справедливости первого и второго законов Кирхгофа для комплексных действующих значений тока \underline{I} и напряжений \underline{U} в каждой из ветвей рассматриваемой цепи можно записать теорему Телледжена (1.35) в комплексной форме:

$$\sum_{k=1}^{n_B} \underline{U}_k \underline{I}_k = 0. \quad (3.127)$$

Однако поскольку ЗТК справедлив и по отношению к сопряженным токам \underline{I}_k^* , то уравнение (3.127) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{n_B} \underline{U}_k \underline{I}_k^* = \sum_{k=1}^{n_B} \underline{S}_k = 0. \quad (3.128)$$

Уравнение (3.128) отражает баланс комплексной мощности, согласно которому сумма комплексных мощностей, потребляемых всеми ветвями цепи, равна нулю. Баланс комплексной мощности можно сформулировать и в другой форме: сумма комплексных мощностей, отдаваемых независимыми источниками, равна сумме комплексных мощностей, потребляемых остальными ветвями электрической цепи:

$$\sum_{k=1}^{n_B} \underline{S}_{k \text{ ист}} = \sum_{k=1}^{n_B} \underline{S}_{k \text{ пот}}. \quad (3.129)$$

Из условия баланса комплексной мощности следуют условия баланса активных и реактивных мощностей:

$$\sum_{k=1}^{n_B} P_{k \text{ ист}} = \sum_{k=1}^{n_B} P_{k \text{ пот}}; \quad (3.130)$$

$$\sum_{k=1}^{n_B} Q_{k \text{ ист}} = \sum_{k=1}^{n_B} Q_{k \text{ пот}}. \quad (3.131)$$

Условие баланса активных мощностей непосредственно вытекает из закона сохранения энергии.

3.11. Модели электрических цепей с зависимыми источниками

Интегрирующие и дифференцирующие цепи. *Интегрирующие и дифференцирующие цепи* находят широкое применение в различных устройствах импульсной и вычислительной техники для формирования линейно изменяющихся напряжений и токов, селекции сигналов, линейного преобразования различных импульсов и т. д. Интегрирующая цепь описывается уравнением

$$f_2(t) = k_1 \int_0^t f_1(t) dt, \quad (3.132)$$

а дифференцирующая — уравнением

$$f_2(t) = k_2 \frac{df_1(t)}{dt}, \quad (3.133)$$

где k_1, k_2 — коэффициенты пропорциональности.

Простейшая интегрирующая и дифференцирующая цепи могут быть реализованы на базе RC -цепочки (рис. 3.33, 3.34). Действительно, если параметры интегрирующей цепочки (рис. 3.33) тако-

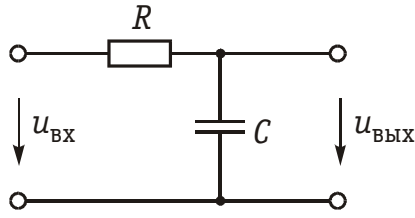


Рис. 3.33

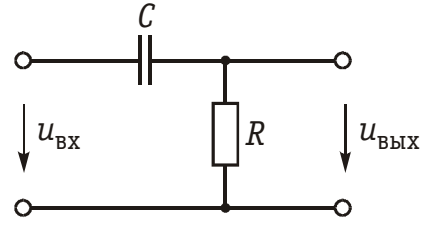


Рис. 3.34

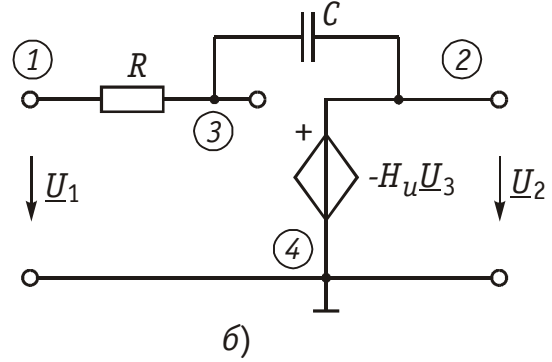
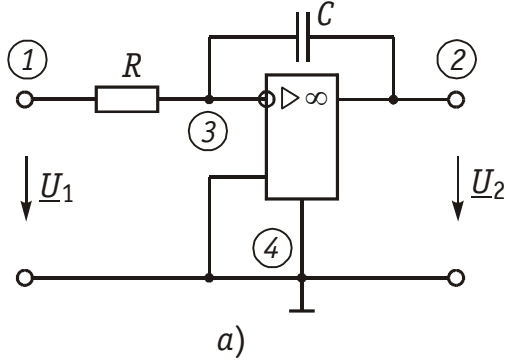


Рис. 3.35

вы, что $\tau = RC \gg t_{\text{и}}$, где $t_{\text{и}}$ длительность входного сигнала, то на выходе такой цепи имеем

$$u_2(t) \approx \frac{1}{RC} \int_0^t u_1(t) dt.$$

Аналогично, если для дифференцирующей цепочки (рис. 3.34) выполнено условие $\tau = RC \ll t_{\text{и}}$, то

$$u_2(t) \approx RC \frac{du_1(t)}{dt}. \quad (3.134)$$

Однако точность интегрирования и дифференцирования такой пассивной цепи невысока. Поэтому на практике операции (3.132) и (3.133) реализуют с помощью активных цепей с зависимыми источниками, например на базе ОУ.

На рис. 3.35, а изображена схема интегратора, а на рис. 3.36, а — дифференциатора на ОУ. Определим комплексное действующее напряжение на выходе интегратора. Для этого воспользуемся эквивалентной схемой замещения ОУ в виде ИНУНа (рис. 3.35, б).

Приняв потенциал базисного узла $\underline{V}_4 = 0$ составим уравнение равновесия узловых потенциалов:

$$\begin{aligned} \underline{V}_3 (G + j\omega C) - \underline{V}_2 j\omega C - \underline{V}_1 G &= 0; \\ \underline{V}_2 &= -H_u \underline{V}_3, \text{ где } G = 1/R. \end{aligned}$$

Откуда, после несложных преобразований получим

$$\underline{V}_2 = -\frac{H_u G}{G + j\omega C H_u (1 + 1/H_u)} \underline{V}_1.$$

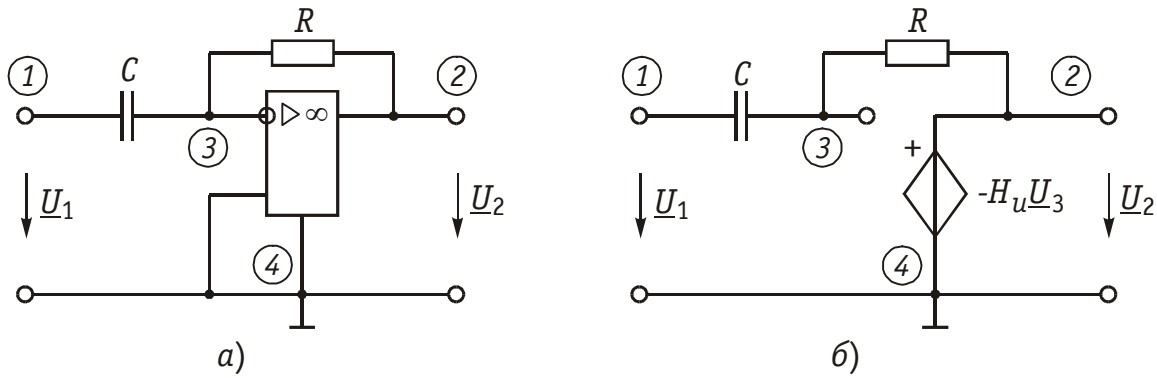


Рис. 3.36

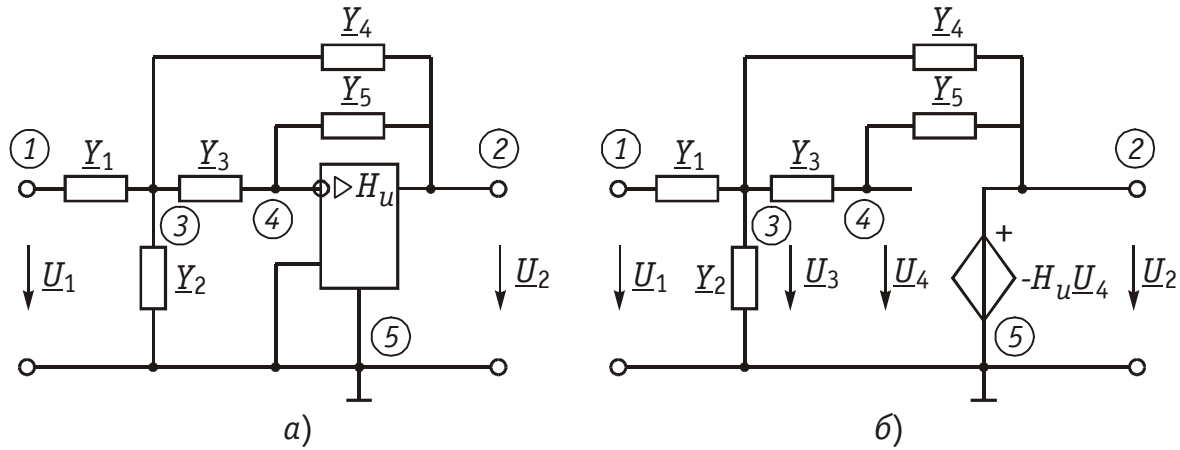


Рис. 3.37

Учитывая, что $\underline{U}_1 = \underline{V}_1 - \underline{V}_4 = \underline{V}_1$; $\underline{U}_2 - \underline{U}_4 = \underline{V}_2$ и для идеального ОУ $H_u = \infty$, окончательно находим

$$\underline{U}_2 = (-1/j\omega) \underline{U}_1 / RC. \quad (3.135)$$

А так как деление \underline{U}_1 на $j\omega$ соответствует операции интегрирования входного сигнала $u_1(t)$ (см. § 3.6), то схема, изображенная на рис. 3.34 является моделью идеального интегратора.

Аналогично можно получить для идеального дифференциатора (см. рис. 3.36):

$$\underline{U}_2 = -j\omega RC \underline{U}_1, \quad (3.136)$$

т. е. $\underline{u}_1(t)$ и $\underline{u}_2(t)$ связаны между собой зависимостью, аналогичной (3.134). Знак « $-$ » в уравнении (3.135) и (3.136) обусловлен поворотом на угол π фазы входного сигнала поданного на инвертирующий вход ОУ.

АРС-цепь второго порядка. На рис. 3.37 изображена активная RC-цепь (АРС-цепь) второго порядка, которая находит широкое применение в качестве типового звена различных устройств: фильтров, корректоров и др. (см. гл. 14, 17, 18).

Приняв потенциал узла $\underline{V}_5 = 0$ (базисный узел) составим для узлов 3 и 4 уравнения по методу узловых потенциалов (рис. 3.37, б):

$$\left. \begin{aligned} \underline{V}_3(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) - \underline{V}_1 \underline{Y}_1 - \underline{V}_2 \underline{Y}_4 - \underline{V}_4 \underline{Y}_3 &= 0, \\ \underline{V}_4(\underline{Y}_3 + \underline{Y}_5) - \underline{V}_3 \underline{Y}_3 - \underline{V}_2 \underline{Y}_5 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.137)$$

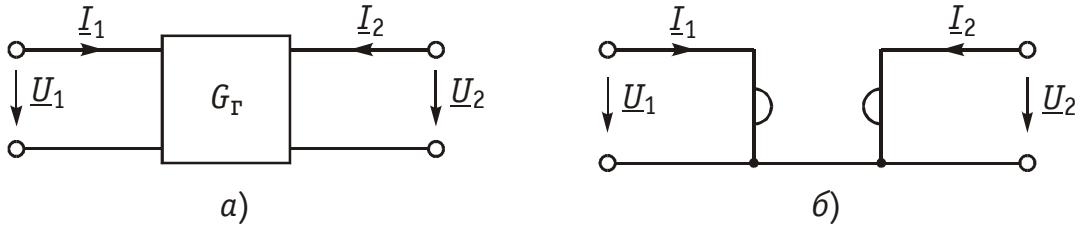


Рис. 3.38

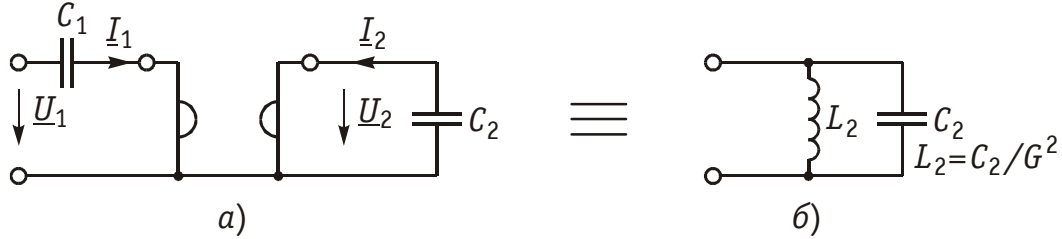


Рис. 3.39

Учитывая, что $\underline{V}_2 = -H_u \underline{V}_4$ и $H_u = \infty$ (идеальный ОУ) после решения системы уравнений (3.137), получим напряжение на выходе:

$$\underline{U}_2 = \underline{V}_2 = \frac{-\underline{Y}_1 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_5 (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) + \underline{Y}_3 \underline{Y}_4} \underline{U}_1. \quad (3.138)$$

Гиратор. Гиратором называют необратимый четырехполюсник (рис. 3.38, а), описываемый уравнениями $\underline{I}_2 = \underline{U}_1 G_T$ и $\underline{I}_1 = -\underline{U}_2 G_T$, где G_T проводимость гиратора.

Условное изображение гиратора показано на рис. 3.38, б. Нагрузим гиратор сопротивлением нагрузки \underline{Z}_2 . Входное сопротивление гиратора

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{-\underline{I}_2}{G_T^2 \underline{U}_2} = \frac{1}{G_T^2 \underline{Z}_2}, \quad (3.139)$$

т. е. обратно сопротивлению нагрузки, поэтому гиратор часто называют *инвертором положительного сопротивления*. Свойство (3.139) является очень важным, поскольку позволяет имитировать индуктивность с помощью емкости. Действительно, если $\underline{Z}_2 = 1/j\omega C$, то $\underline{Z}_1 = j\omega L_\varepsilon$, где $L_\varepsilon = C/G_T^2$ — эквивалентная индуктивность. Это свойство гираторов является очень ценным для микроэлектроники, поскольку изготовление индуктивностей по интегральной технологии представляет сложную задачу. Использование же гираторов с малым значением G_T позволяет из небольших емкостей C моделировать большие значения индуктивности L .

Существуют и другие многочисленные применения гиратора: преобразование напряжения и тока, моделирование Т- и П-образных звеньев с катушками индуктивности, трансформаторов, резонансных контуров. В качестве примера на рис. 3.39 изображена модель параллельного колебательного контура (рис. 3.39, б) на базе гиратора (3.39, а).

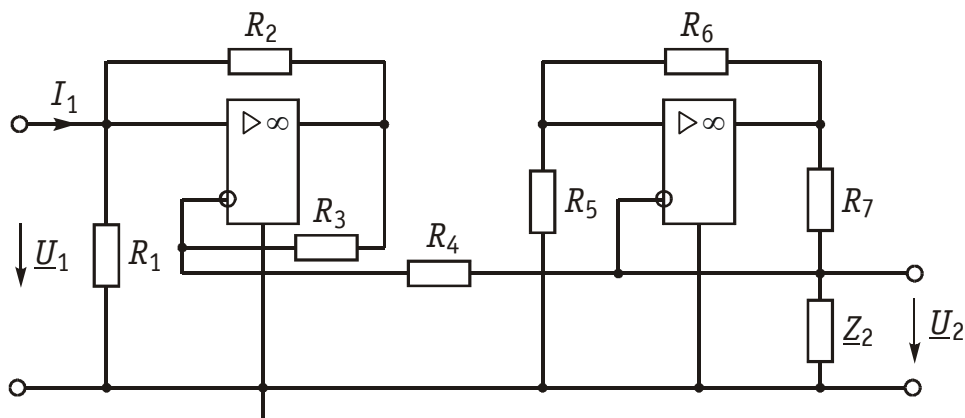


Рис. 3.40

Важным свойством гиратора является то, что он не вносит энергии в цепь и не потребляет ее из цепи, т. е. ведет себя как пассивный элемент без потерь. Это следует непосредственно из уравнений гиратора.

Реализация гиратора осуществляется с использованием активных элементов. Например, ОУ (на базе двух источников ИТУН: на базе ИТУН и ООС; на основе двух ПОС и др.). На рис. 3.40 изображена схема гиратора с двумя ИТУН, выполненными на базе ОУ.

Вопросы и задания для самопроверки

1. В чем различие между мгновенным значением синусоидального тока и его действующим значением?
2. Какой формулой связаны между собой активная, реактивная составляющие и комплексное напряжение?
3. Как ориентированы между собой векторы тока и напряжения на индуктивности (емкости)?
4. Может ли напряжение на индуктивности (емкости) в цепочке из последовательно соединенных RLC превышать уровень приложенного напряжения?
5. Две индуктивности $L_1 = 5$ мГн и $L_2 = 15$ мГн включены последовательно. Определить их эквивалентное сопротивление на частоте $f = 1000$ Гц.

Ответ: $X_L = 125,6$ Ом.

6. В схеме, изображенной на рис. 3.7, $U = 10$ В, падение напряжения на индуктивности $u_L = 5$ В, на емкости $u_C = 11$ В. Определить падение напряжения на резисторе u_R .

Ответ: $u_R = 8$ В.

7. Вычислить эквивалентное сопротивление двух конденсаторов $C_1 = 5$ мкФ и $C_2 = 15$ мкФ, включенных параллельно на частоте $f = 5$ кГц.

Ответ: $X_C = 1,59$ Ом.

8. Амперметр, включенный в ветвь с резистором R на рис. 3.10, показывает $i_R = 3$ А, включенный в цепь с индуктивностью — $i_L = 3$ А, а включенный последовательно с емкостью — $i_C = 7$ А. Какую величину тока покажет амперметр, включенный на входе схемы?

Ответ: $i = 5$ А.

9. Вычислить входные сопротивления схемы рис. 3.10 на частоте $f = 10$ кГц, если $R = 100$ Ом, $L = 1$ мГн, $C = 1$ мкФ.

Ответ $\underline{Z} = 4,4 - j20,5$ Ом.

10. Чему равны максимальное и минимальное значения коэффициента связи между катушками?
11. В каких единицах измеряется взаимная индуктивность?
12. Может ли суммарная индуктивность двух индуктивно связанных катушек быть равной 0?
13. К схеме рис. 3.19 приложено напряжение $U = 10$ В. Сопротивление резисторов $R_1 = R_2 = 40$ Ом. Индуктивные сопротивления катушек $X_{L1} = 100$ Ом, $X_{L2} = 50$ Ом. Коэффициент связи между ними $K = 0,6$. Определить разность потенциалов между одноименными зажимами этих катушек.

Ответ $\underline{U} = 4 + j4,88$ В.

14. В схеме на рисунке 3.21 (б) сопротивление резисторов $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 0$ Ом, сопротивление индуктивностей $X_{L1} = X_{L2} = 30$ Ом, коэффициент связи между катушками $K = 0,5$. Определить эквивалентное входное сопротивление цепи.

Ответ: $\underline{Z}_{вх} = 4,76 + j7,56$ Ом.

15. Каковы особенности расчета цепей с индуктивными связями?
16. Какое устройство называется трансформатором? Какие виды трансформаторов известны?
17. Составить уравнения баланса мощности для схемы, изображенной на рис. 3.15.
18. В схеме, изображенной на рис. 3.7, $U = 10$ В, $u_L = 5$ В, $u_C = 11$ В, сопротивление резистора $R = 40$ Ом. Определить комплексную мощность, потребленную цепью.

Ответ: $\underline{S}_{потр} = 1,6 - j1,2$.

19. Каким образом можно уменьшить реактивную составляющую мощности потребляемую предприятием из сети?
20. Каковы схемы интегрирующих и дифференцирующих цепей на операционном усилителе?

ГЛАВА 4. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

4.1. Комплексные передаточные функции линейных электрических цепей

Важнейшей характеристикой линейной электрической цепи является *комплексная передаточная функция* $H(j\omega)$. При этом электрическую цепь удобно изображать в виде четырехполюсника (рис. 4.1), на входные зажимы (1 — 1') которого подается сигнал в виде напряжения с комплексной амплитудой \underline{U}_{m1} , или тока с комплексной амплитудой \underline{I}_{m1} , а реакция снимается с выходных зажимов (2 — 2') также в виде напряжения или тока с комплексными амплитудами \underline{U}_{m2} , \underline{I}_{m2} . Комплексная передаточная функция (КПФ) определяется как отношение комплексной амплитуды реакции цепи к комплексной амплитуде входного воздействия.

В зависимости от типов входного воздействия и реакции цепи различают следующие виды КПФ:

1. Комплексная передаточная функция по напряжению

$$H_u(j\omega) = \underline{U}_{m2}/\underline{U}_{m1} = \underline{U}_2/\underline{U}_1, \quad (4.1)$$

где \underline{U}_{m1} , \underline{U}_{m2} , \underline{U}_1 , \underline{U}_2 — комплексные амплитуды и комплексные действующие значения напряжения воздействия на входе и напряжения реакции на выходе.

2. Комплексная передаточная функция по току

$$H_i(j\omega) = \underline{I}_{m2}/\underline{I}_{m1} = \underline{I}_2/\underline{I}_1, \quad (4.2)$$

где \underline{I}_{m1} , \underline{I}_{m2} , \underline{I}_1 , \underline{I}_2 — комплексные амплитуды и действующие значения тока воздействия и тока реакции.

3. Комплексное передаточное сопротивление

$$H_Z(j\omega) = \underline{U}_{m2}/\underline{I}_{m1} = \underline{U}_2/\underline{I}_1. \quad (4.3)$$

4. Комплексная передаточная проводимость

$$H_Y(j\omega) = \underline{I}_{m2}/\underline{U}_{m1} = \underline{I}_2/\underline{U}_1 \quad (4.4)$$

Из данных определений следует, что $H_u(j\omega)$ и $H_i(j\omega)$ являются безразмерными величинами, а $H_Z(j\omega)$ и $H_Y(j\omega)$ — имеют соответственно размерности сопротивления и проводимости.

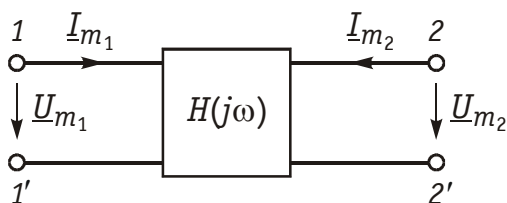


Рис. 4.1

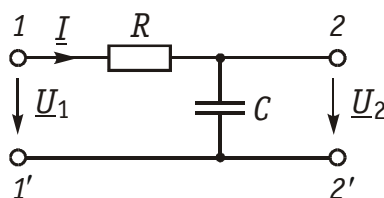


Рис. 4.2

Комплексные передаточные функции определяются на частоте ω сигнала воздействия и зависят только от параметров цепи.

Как всякую комплексную величину $H(j\omega)$ можно представить в показательной, тригонометрической и алгебраической форме:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = H(\omega) e^{j\varphi(\omega)}; \quad (4.5)$$

$$H(j\omega) = H(\omega) \cos \varphi(\omega) + jH(\omega) \sin \varphi(\omega); \quad (4.6)$$

$$H(j\omega) = H_1(\omega) + jH_2(\omega), \quad (4.7)$$

где $H(\omega) = |H(j\omega)|$ — модуль комплексной передаточной функции называется *амплитудно-частотной характеристикой цепи* (АЧХ), а $\varphi(\omega) = \arg H(j\omega)$ — аргумент комплексной передаточной функции называют *фазо-частотной характеристикой цепи* (ФЧХ). Величины

$$\left. \begin{aligned} H_1(\omega) &= H(\omega) \cos \varphi(\omega) \quad \text{и} \\ H_2(\omega) &= H(\omega) \sin \varphi(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

есть вещественная и мнимая части комплексной передаточной функции цепи.

Из (4.5)–(4.8) нетрудно получить соотношения, связывающие АЧХ и ФЧХ с вещественными и мнимыми частями комплексной передаточной функции $H_1(\omega)$ и $H_2(\omega)$

$$H(\omega) = \sqrt{H_1^2(\omega) + H_2^2(\omega)}; \quad (4.9)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{H_2(\omega)}{H_1(\omega)}. \quad (4.10)$$

АЧХ и ФЧХ являются наиболее фундаментальными понятиями теории цепей и широко используются на практике. Важность этих характеристик для систем электрической связи, радиовещания и телевидения объясняется самой природой передачи сигналов определенного спектрального состава по каналам связи. Требования к АЧХ и ФЧХ различных устройств являются определяющими при проектировании любой аппаратуры связи, так как от степени их выполнения во многом зависит качество передачи информации.

Пример. Определить КПФ по напряжению $H_u(j\omega)$, АЧХ и ФЧХ цепи, изображенной на рис. 4.2.

Согласно (4.1) запишем:

$$H_u(j\omega) = \underline{U}_2 / \underline{U}_1.$$

Найдем комплексное действующее значение напряжения на выходе цепи:

$$\underline{U}_2 = I \frac{1}{(j\omega C)} = \frac{\underline{U}_1}{(R + 1/j\omega C)} \cdot \frac{1}{j\omega C} = \frac{\underline{U}_1}{1 + j\omega RC}.$$

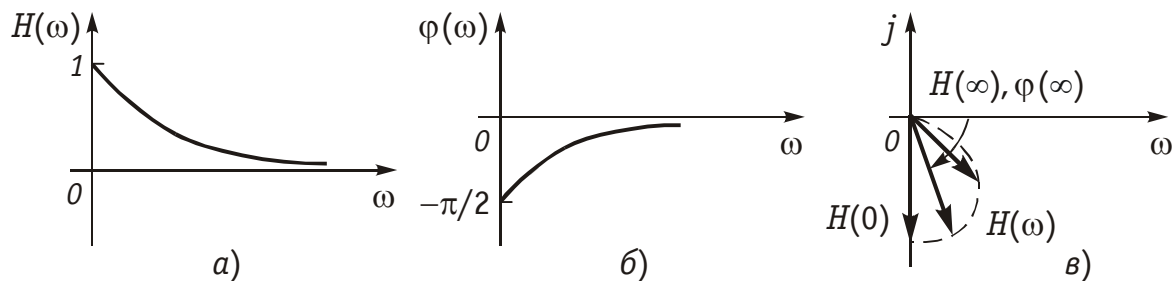


Рис. 4.3

Подставив \underline{U}_2 в формулы для $H_u(j\omega)$, получим КПФ:

$$H_u(j\omega) = 1/(1 + j\omega RC); \quad (4.11)$$

АЧХ цепи

$$H_u(\omega) = 1/\sqrt{1 + (\omega RC)^2}; \quad (4.12)$$

ФЧХ цепи

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega RC \quad (4.13)$$

(АЧХ и ФЧХ цепи изображены на рис. 4.3, а, б).

АЧХ и ФЧХ цепи можно представить единым графиком, если построить зависимость КПФ $H(j\omega)$ от частоты ω на комплексной плоскости. При этом конец вектора $H(j\omega)$ опишет некоторую кривую, которая называется *годографом* комплексной передаточной функции (рис. 4.3, в).

В ряде случаев частотные характеристики цепи могут изменяться в очень широких пределах, поэтому более удобно их оценивать в логарифмическом масштабе. С этой целью для оценки АЧХ вводят понятие *логарифмической амплитудно-частотной характеристики* (ЛАХ):

$$K = 20 \lg H(\omega) \quad (4.14)$$

Оценивается ЛАХ согласно (4.14) в децибелах (дБ). В активных цепях K называют еще *логарифмическим усилением*. Для пассивных цепей вместо коэффициента усиления оперируют *ослаблением цепи*:

$$A = 20 \lg [1/H(\omega)], \quad (4.15)$$

которое также оценивается в децибелах.

Наряду с передаточными функциями (4.1) – (4.4) в ряде случаев (см. гл. 16, 17, 18) находят применение комплексные функции, определяющиеся отношением комплексной реакции к комплексному воздействию на входных зажимах электрической цепи (рис. 4.4)

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = \underline{U}_1/\underline{I}_1; \quad Y_{\text{вх}}(j\omega) = \underline{I}_1/\underline{U}_1. \quad (4.16)$$

Функции вида (4.16) носят название *комплексных входных функций цепей*.

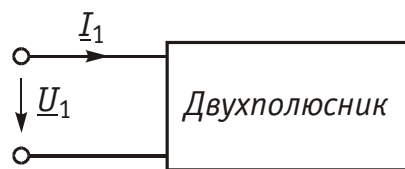


Рис. 4.4

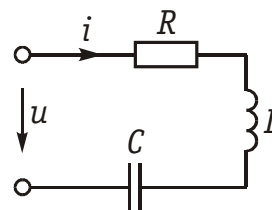


Рис. 4.5

4.2. Частотные характеристики последовательного колебательного контура

В радиотехнике и электросвязи большое значение имеет явление резонанса. *Резонансом* называют такое состояние электрической цепи, состоящей из разнохарактерных реактивных элементов, при котором фазовый сдвиг между входным током и приложенным напряжением равен нулю. Цепи, в которых возникает явление резонанса, называют *колебательными контурами*, или *резонансными цепями*.

Колебательные контуры и явления резонанса находят широкое применение в радиотехнике и электросвязи. Резонансные цепи являются составной частью многих радиотехнических устройств: избирательные цепи в радиоприемниках и усилителях, частотно-зависимые элементы автогенераторов, фильтров, корректоров, других устройств. Для получения высоких технико-экономических показателей (избирательности, полосы пропускания, коэффициента прямоугольности, равномерности и т. д.) резонансные цепи должны иметь достаточно сложную структуру (многоконтурные связанные цепи, активные резонансные системы и др.). Некоторые из этих систем будут рассмотрены в гл. 15, 17. В настоящей главе изучим основные особенности работы цепей в режиме резонанса на примере простейших колебательных контуров.

Простейший колебательный контур содержит индуктивный и емкостный элементы, соединенные последовательно (*последовательный контур*) или параллельно (*параллельный контур*). В последнее время широкое распространение получили резонансные цепи на базе операционных усилителей (ОУ). Различают два типа резонансов: напряжений и токов. В последовательном контуре возникает *резонанс напряжений*, а в параллельном — *резонанс токов*.

Частоту, на которой наблюдается явление резонанса, называют *резонансной*.

На рис. 4.5 изображена схема последовательного контура с реактивными элементами L и C и резистивным сопротивлением R , характеризующим потери в контуре. Приложим к контуру гармоническое напряжение с частотой ω . Комплексное входное сопро-

тивление контура на данной частоте определяется согласно уравнению

$$\underline{Z} = R + jX = R + j(\omega L - 1/\omega C), \quad (4.17)$$

а ток в контуре уравнением

$$\underline{I} = \underline{U}/\underline{Z} = \underline{U}/(R + jX). \quad (4.18)$$

Фазовый сдвиг между током и приложенным напряжением

$$\varphi = \arctg[(\omega L - 1/\omega C)/R] = \arctg(X/R). \quad (4.19)$$

При резонансе $\varphi = 0$, что возможно, если

$$X = \omega L - 1/\omega C = 0. \quad (4.20)$$

Отсюда получаем уравнение резонансной частоты ω_0 :

$$\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (4.21)$$

На резонансной частоте комплексное сопротивление носит чисто активный характер, т. е. $\underline{Z} = R$, ток совпадает по фазе с приложенным напряжением и достигает максимального значения $I_0 = \underline{U}/R$. Реактивные сопротивления контура на резонансной частоте ω_0 равны друг другу:

$$X_{L0} = X_{C0} = \omega_0 L = 1/\omega_0 C = \sqrt{L/C} = \rho. \quad (4.22)$$

Величина ρ носит название *характеристического сопротивления* контура.

Резонансные свойства контура характеризуются *добротностью контура*, которая в общем случае определяется величиной

$$Q = 2\pi \frac{W_p}{W_{aT}}, \quad (4.23)$$

где W_p — максимальные значения реактивной энергии, запасенной в контуре при резонансе; W_{aT} — активная энергия, поглощаемая в контуре за период T . Величина, обратная добротности, называется *затуханием контура* и обозначается d :

$$d = 1/Q. \quad (4.24)$$

Величина Q безразмерна и обычно колеблется для реальных контуров от 10 до 100 и выше. Для выяснения физического смысла параметра Q исследуем энергетические соотношения в контуре при резонансе. Положим, например, что при резонансе ток в цепи $i = I_{m0} \sin \omega_0 t$. Определим согласно (1.10) и (1.13) сумму энергий электрического и магнитного полей:

$$W_p = W_C + W_L = \frac{Cu^2}{2} + \frac{Li^2}{2} = \frac{CU_{mC0}^2}{2} \cos^2 \omega_0 t + \frac{LI_{m0}^2}{2} \sin^2 \omega_0 t.$$

Если учесть, что при резонансе $U_{mC0} = I_{m0}\rho = I_{m0}\sqrt{L/C}$, т. е. $CU_{mC0}^2 = LI_{m0}^2$, то получим, что сумма энергий электрического и магнитного полей при резонансе остается постоянной

$$W_p = CU_{mC0}^2/2 = LI_{m0}^2/2 = \text{const},$$

так как уменьшение W_L сопровождается увеличением W_C и наоборот. Таким образом, происходит периодический обмен энергией между элементами L и C без участия источника. Энергия источника расходуется только на покрытие тепловых потерь в элементе активного сопротивления R ; реактивная мощность при резонансе не потребляется.

Активная энергия, рассеиваемая в контуре за период T , равна

$$W_{aT} = I^2RT = \frac{I_{m0}^2RT}{2}.$$

Откуда принимая во внимание, что $T = 2\pi\sqrt{LC}$, с учетом (4.23), получаем

$$Q = \sqrt{L/C}/R = \rho/R. \quad (4.25)$$

Найдем отношение действующих значений напряжений на реактивных элементах (L и C) к действующему значению приложенного напряжения при резонансе:

$$\frac{U_{L0}}{U} = \frac{U_{C0}}{U} = \frac{I_0\omega_0 L}{U} = \frac{I_0}{\omega_0 CU} = \frac{\rho}{R} = Q \quad (4.26)$$

Таким образом, добротность Q показывает, во сколько раз резонансные напряжения на реактивных элементах превышают приложенное напряжение. Отсюда следует и термин «резонанс напряжений». Это свойство контура «усиливать» приложенное напряжение резонансной частоты широко используется на практике.

Величины ρ , ω_0 , Q , d являются *вторичными параметрами* контура в отличие от величин R , L , C называемых *первичными*.

Анализируя характер уравнений напряжений и токов в RLC -цепи, фазовых сдвигов между ними при гармоническом воздействии нетрудно видеть, что они являются частотно-зависимыми. Эта зависимость вытекает непосредственно из зависимости реактивных элементов X_L и X_C от

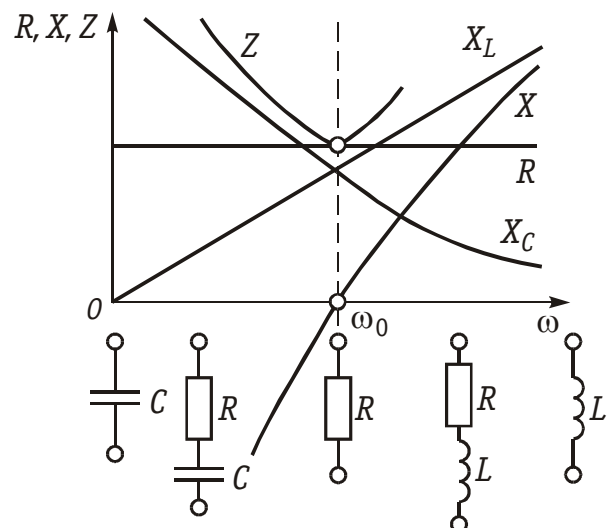


Рис. 4.6

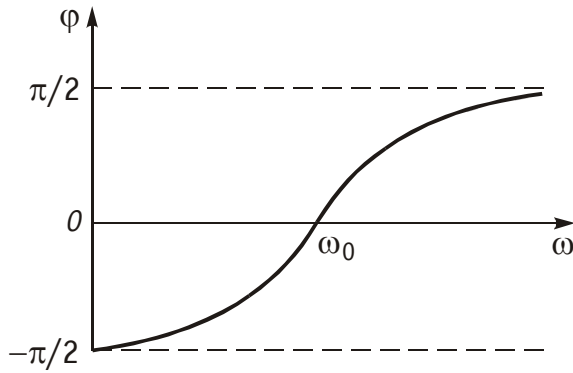


Рис. 4.7

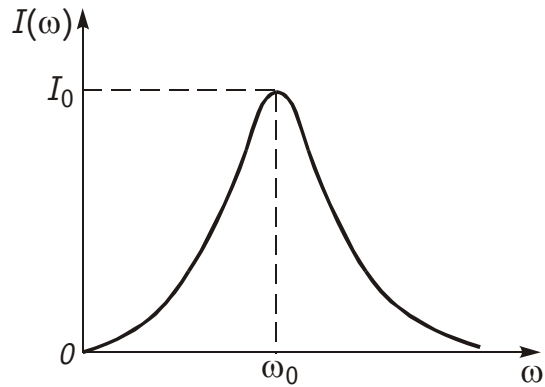


Рис. 4.8

частоты ω . На рис. 4.6 и 4.7 изображены зависимости $X_L(\omega)$, $X_C(\omega)$, $Z(\omega)$, $\varphi(\omega)$, определяемые формулами:

$$\left. \begin{aligned} X_L(\omega) &= \omega L, \quad X_C(\omega) = 1/\omega C, \quad X(\omega) = \omega L - 1/(\omega C), \\ Z(\omega) &= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}; \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\{(\omega L - 1/(\omega C))/R\}. \quad (4.28)$$

Из представленных характеристик следует, что при $\omega < \omega_0$ цепь имеет емкостный характер ($X < 0$; $\varphi < 0$) и ток опережает по фазе приложенное напряжение при $\omega > \omega_0$ характер цепи индуктивный ($X > 0$; $\varphi > 0$) и ток отстает по фазе от приложенного напряжения; при $\omega = \omega_0$ наступает резонанс напряжений ($X = 0$; $\varphi = 0$) и ток совпадает по фазе с приложенным напряжением. Полное сопротивление цепи принимает при этом минимальное значение $Z = R$.

Зависимость действующего значения тока от частоты можно найти из уравнения (4.18)*:

$$I(\omega) = U / \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}. \quad (4.29)$$

Действующие значения напряжений на реактивных элементах можно найти согласно закону Ома:

$$U_L(\omega) = I(\omega) X_L(\omega) = \frac{U \omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}, \quad (4.30)$$

$$U_C(\omega) = I(\omega) X_C(\omega) = \frac{U}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \quad (4.31)$$

Зависимости $I(\omega)$, $U_L(\omega)$, $U_C(\omega)$ называются *резонансными характеристиками тока и напряжений*. Анализ зависимости $I(\omega)$ показывает, что она достигает максимума при резонансе $\omega = \omega_0$

* Зависимость (4.29) носит название резонансной кривой тока (рис. 4.8).

$$I_0 = U/R. \quad (4.32)$$

Выходное напряжение обычно снимается с емкостного или индуктивного элемента контура. В соответствии с этим представляет наибольший практический интерес КПФ по напряжению относительно элементов C и L :

$$H_C(j\omega) = \underline{U}_C/\underline{U} = \frac{1}{j\omega C[R + j(\omega L - 1/\omega C)]}, \quad (4.33)$$

$$H_L(j\omega) = \underline{U}_L/\underline{U} = \frac{j\omega L}{R + j(\omega L - 1/\omega C)}. \quad (4.34)$$

Из уравнений (4.33) и (4.34) нетрудно получить уравнения АЧХ и ФЧХ последовательного контура

$$H_C(\omega) = |H_C(j\omega)| = \frac{1}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}; \quad (4.35)$$

$$H_L(\omega) = |H_L(j\omega)| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}; \quad (4.36)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_C(\omega) &= -\pi/2 - \arctg[(\omega L - 1/\omega C)/R], \\ \varphi_L(\omega) &= \pi/2 - \arctg[(\omega L - 1/\omega C)/R]. \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

На рис. 4.9 изображены АЧХ и ФЧХ последовательного контура, определяемые формулами (4.35)–(4.37).

Как следует из представленных зависимостей, АЧХ $H_C(\omega)$, $H_L(\omega)$ носят экстремальный характер, причем при $\omega = \infty$, $H_L(\infty) = 1$; $H_C(\infty) = 0$; при $\omega = \omega_0$ согласно (4.25) имеем

$$H_L(\omega_0) = H_{L_0} = H_C(\omega_0) = H_{C_0} = Q. \quad (4.38)$$

Максимальные значения $H_C(\omega)$ и $H_L(\omega)$ достигаются на частотах ω_C и ω_L , которые могут быть определены из условий

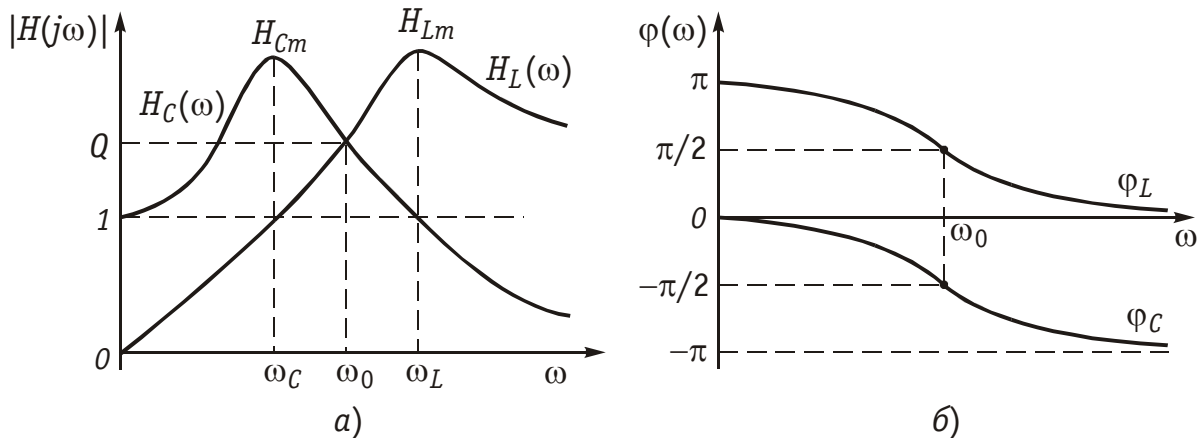


Рис. 4.9

$$\frac{\partial H_C(\omega)}{\partial \omega} = 0; \quad \frac{\partial H_L(\omega)}{\partial \omega} = 0. \quad (4.39)$$

Подставив значения $H_C(\omega)$ и $H_L(\omega)$ из (4.35) и (4.36) в (4.39) и решив полученные уравнения, получим

$$\omega_C = \omega_0 \sqrt{(2Q^2 - 1)/(2Q^2)}; \quad \omega_L = \omega_0 \sqrt{(2Q^2)/(2Q^2 - 1)}. \quad (4.40)$$

При этом АЧХ $H_C(\omega)$ и $H_L(\omega)$ примут максимальные значения:

$$H_{Cm} = H_{Lm} = 2Q^2 / \sqrt{4Q^2 - 1} = 2 / (d\sqrt{4 - d^2}). \quad (4.41)$$

Анализ полученных зависимостей показывает, что с увеличением добротности Q (уменьшением затухания d) частоты ω_C и ω_L сближаются с резонансной частотой ω_0 . При этом H_{Cm} и H_{Lm} возрастают.

Степень отклонения режима колебательного контура от резонанса принято оценивать *абсолютной, относительной и обобщенной расстройками*. Отклонение от резонансного режима может происходить в результате изменения частоты задающего генератора или вариации параметров контура.

Расстройки определяются следующим образом:

абсолютная

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 \quad \text{или} \quad \Delta f = f - f_0; \quad (4.42)$$

относительная

$$\delta = \Delta\omega / \omega_0 = \Delta f / f_0; \quad (4.43)$$

обобщенная

$$\xi = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right). \quad (4.44)$$

Наиболее широко в теоретических исследованиях применяется обобщенная расстройка ξ , так как ее использование существенно упрощает расчет. Например, модуль входной проводимости можно записать через обобщенную расстройку ξ в форме

$$Y = Y(\xi) = 1/R\sqrt{1 + \xi^2}, \quad (4.45)$$

а аргумент в форме

$$\varphi = -\arctg \xi. \quad (4.46)$$

Важной характеристикой колебательного контура является полоса пропускания. В общем случае *абсолютной полосой пропускания* называют диапазон частот в пределах которого коэффициент передачи уменьшается в $\sqrt{2}$ раз по сравнению с максимальным*. Абсолютная полоса пропускания равна

* Существуют и другие определения полосы пропускания, соответствующие другому значению ослабления тока или напряжения (см. гл. 17).

$$\Delta f_A = f_2 - f_1, \quad (4.47)$$

а относительная

$$\delta f_0 = \frac{\Delta f_A}{f_0}, \quad (4.48)$$

где f_1 и f_2 — нижняя и верхняя граничные частоты.

Для нахождения граничных частот f_1 и f_2 полосы пропускания решим уравнение $Y/G = I/I_0 = 1/\sqrt{1+\xi^2} = 1/\sqrt{2} = 0,707$ (рис. 4.10). В результате с учетом (4.47) получим $\xi_{1,2} = Q(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega) = \pm 1$, откуда

$$f_{1,2} = \frac{\omega_{1,2}}{2\pi} = \frac{f_0}{2Q} (\sqrt{1+4Q^2} \mp 1). \quad (4.49)$$

Из вышеизложенного следует, что на границе полосы пропускания $\xi_{1,2} = \pm 1$ и $\varphi = \pm 45^\circ$.

Абсолютную и относительную полосу пропускания Δf_A можно выразить через добротность Q

$$\left. \begin{aligned} \Delta f_A &= f_2 - f_1 = f_0/Q, \\ \delta f_0 &= \Delta f_A/f_0 = 1/Q = d. \end{aligned} \right\} \quad (4.50)$$

Уравнения (4.50) могут быть положены в основу экспериментального определения добротности по резонансной кривой тока $I(\omega)$. Формула (4.50) показывает, что чем выше добротность Q , тем меньше полоса пропускания и наоборот. Причем, поскольку с увеличением потерь R добротность контура падает, то подключение к контуру сопротивления нагрузки или источника с внутренним сопротивлением приводит к расширению полосы пропускания.

Пример. Определить полосу пропускания контура, нагруженного на резистивное сопротивление R_H (рис. 4.11, а).

Преобразуем параллельный участок C и R_H в эквивалентный последовательный с помощью формул (3.56):

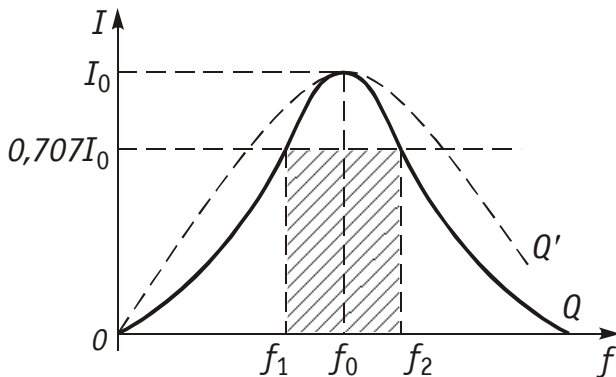


Рис. 4.10

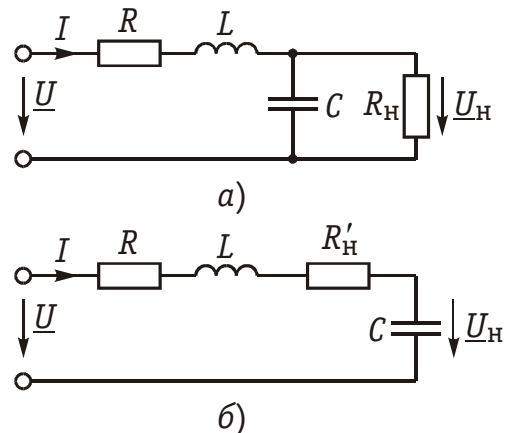


Рис. 4.11

$$R'_H = \frac{1/R_H}{1/R'_H + 1/X_C^2}; \quad X'_C = \frac{1/X_C}{1/R'_H + 1/X_C^2}.$$

Важным для практики является случай, когда $R_H \gg X_C = 1/\omega C$, при этом для R'_H и X'_C можно записать

$$R'_H \approx X_C^2/R_H; \quad X'_C \approx X_C.$$

т. е. при подключении высокоомной нагрузки к контуру его резонансная частота не изменяется, но увеличиваются потери в контуре (рис. 4.11, б). При этом уменьшается добротность $Q' = \rho/(R + R'_H)$ и увеличивается полоса пропускания контура (4.10).

В заключение следует отметить, что на практике обычно используются высокодобротные контуры, причем низкоомные нагрузки подключаются к контурам через различные согласующие устройства (трансформаторы, повторители и др.). Для получения высоких качественных характеристик (большого входного и низкого выходного сопротивлений, высокой добротности, малой чувствительности резонансной частоты и выходного сигнала от нагрузки) применяют электронные аналоги колебательных контуров, реализуемых на базе зависимых источников. На рис. 4.12 изображена схема колебательного контура, реализованного на базе ARC -звена, второго порядка (рис. 3.37, а), где принято $\underline{Y}_1 = G_1$; $\underline{Y}_2 = j\omega C_2$; $\underline{Y}_3 = G_3$; $\underline{Y}_4 = G_4$; $\underline{Y}_5 = j\omega C_5$. При этом комплексная передаточная функция цепи с учетом (3.138)

$$H(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = -\frac{G_1 G_3}{(j\omega)^2 C_2 C_5 + j\omega C_5 (G_1 + G_3 + G_4) + G_3 G_4} =$$

$$= a_0 / [b_2 (j\omega)^2 + b_1 (j\omega) + b_0],$$

где

$$a_0 = -G_1 G_3; \quad b_2 = C_2 C_5; \quad b_1 = C_5 (G_1 + G_3 + G_4); \quad b_0 = G_3 G_4.$$

Комплексная передаточная функция (4.33) пассивного RLC -контура можно также представить в следующем виде:

$$H(j\omega) = a'_0 / [b'_2 (j\omega)^2 + b'_1 (j\omega) + b'_0]. \quad (4.52)$$

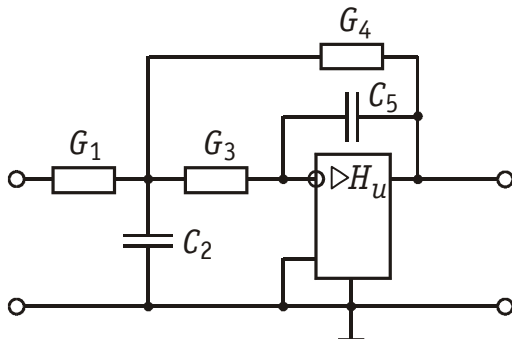


Рис. 4.12

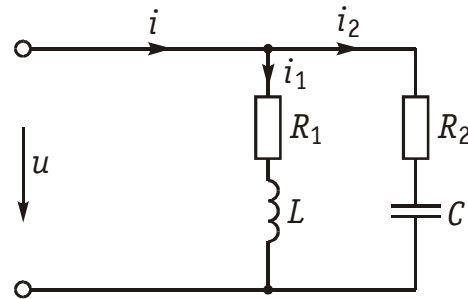


Рис. 4.13

где $a'_0 = b'_0 = 1$; $b'_2 = LC$; $b'_1 = RC$, т. е. (4.52) совпадает с (4.51) с точностью до постоянных множителей.

Таким образом, с помощью рассмотренной активной цепи можно получить электронный аналог колебательного контура. На базе активных элементов можно реализовать и другие схемы электронных аналогов колебательных контуров, важным преимуществом которых является отсутствие индуктивностей, высокое значение добротности, слабо зависящей от нагрузки, легкость перестройки.

4.3. Частотные характеристики параллельного колебательного контура

Простейший параллельный колебательный контур с потерями в ветвях R_1 и R_2 имеет вид, изображенный на рис. 4.13. Комплексная входная проводимость такого контура

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = G_1 + G_2 - j(B_1 - B_2) = G - jB, \quad (4.53)$$

где $\underline{Y}_1 = G_1 - jB_1$; $\underline{Y}_2 = G_2 - jB_2$ — комплексные проводимости ветвей с индуктивностью и емкостью соответственно. Проводимости G_1, G_2, B_1, B_2 можно найти из формул преобразования (3.57):

$$G_1 = R_1/Z_1^2; \quad G_2 = R_2/Z_2^2; \quad B_1 = \omega L/Z_1^2; \quad B_2 = 1/\omega C/Z_1^2, \quad (4.54)$$

где $Z_1 = \sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}$; $Z_2 = \sqrt{R_2^2 + (1/\omega C)^2}$.

Из условия резонанса токов имеем: $\varphi = \arctg(B/G) = 0$. Отсюда следует:

$$B = B_1 - B_2 = \frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} - \frac{1/\omega C}{R_2^2 + (1/\omega C)^2} = 0. \quad (4.55)$$

Решив (4.55) относительно ω , получим уравнение резонансной частоты:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}. \quad (4.56)$$

Из уравнения (4.56) следует, что резонанс в параллельном контуре возможен лишь в случае неотрицательности подкоренного выражения (т. е. при $R_1 < \rho$ и $R_2 < \rho$, или $R_1 > \rho$ и $R_2 > \rho$).

Реактивные составляющие токов в ветвях при резонансе равны друг другу:

$$I_{p1} = UB_1 = I_{p2} = UB_2. \quad (4.57)$$

При этом ток в неразветвленной части цепи определяется из уравнения

$$I_0 = UG_{0\partial} = U/R_{0\partial}, \quad (4.58)$$

где активное сопротивление $R_{0э}$, называют *эквивалентным резонансным сопротивлением* параллельного контура. Как следует из уравнения (4.58), входной ток контура совпадает по фазе с приложенным напряжением. Величину $R_{0э}$ можно найти из условия резонанса токов. Так как при резонансе токов $B = 0$, то согласно (4.53) и (4.54) полная эквивалентная проводимость контура

$$G_{0э} = G_1 + G_2 = \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega_p L)^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + (1/\omega_p C)^2}. \quad (4.59)$$

Подставив значение ω_p из (4.56) в (4.59) получим:

$$G_{0э} = (R_1 + R_2)/(\rho^2 + R_1 R_2), \quad (4.60)$$

откуда

$$R_{0э} = (\rho^2 + R_1 R_2)/(R_1 + R_2). \quad (4.61)$$

Наибольший теоретический и практический интерес представляют резонанс токов в контурах без потерь и с малыми потерями.

Контур без потерь. Для контура без потерь ($R_1 = R_2 = 0$) уравнение резонансной частоты (4.56) принимает вид

$$\omega_p = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad (4.62)$$

т. е. совпадает с выражением (4.21) для последовательного контура. Эквивалентное сопротивление контура без потерь $R_{0э} = \infty$ и входной ток равен нулю, а добротность обращается в бесконечность. Комплексы действующих значений токов в ветвях

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{j\omega_0 L} = \frac{\underline{U}}{\rho} e^{-j\pi/2}; \quad \underline{I}_2 = \underline{U} j\omega_0 C = \frac{\underline{U}}{\rho} e^{j\pi/2}, \quad (4.63)$$

т. е. ток в индуктивности отстает от приложенного напряжения на $\pi/2$, а в емкости опережает на $\pi/2$. На рис. 4.14, а изображена векторная диаграмма токов для этого случая при $\underline{U} = U e^{j0} = U$.

Сумма энергий электрического и магнитного полей для параллельного контура без потерь, как и для последовательного контура

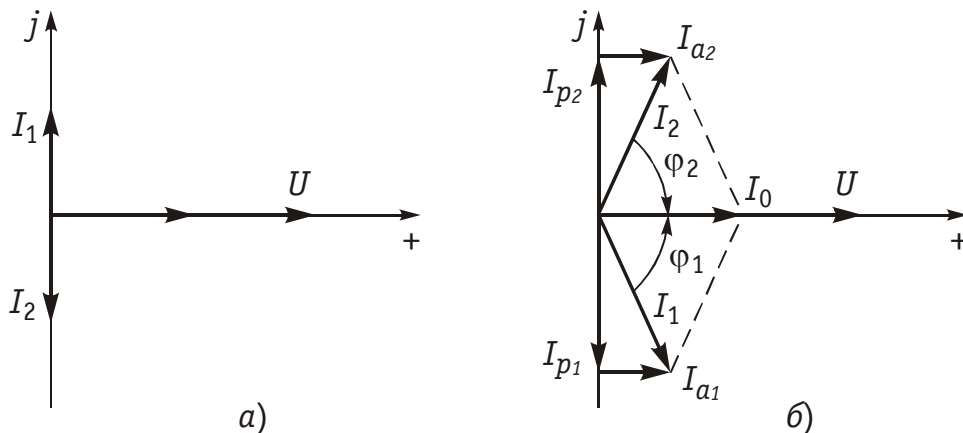


Рис. 4.14

остается неизменной, т. е. энергетические процессы протекают аналогично процессам в последовательном контуре.

Частотные зависимости характеристик параллельного контура от частоты имеют вид

$$\begin{aligned} B_L(\omega) &= 1/(\omega L); & B_C(\omega) &= \omega C; \\ B(\omega) &= 1/(\omega L) - \omega C; & X(\omega) &= 1/B(\omega). \end{aligned} \quad (4.64)$$

На рис. 4.15 изображены графики зависимостей (4.64). Как следует из рисунка, при $\omega < \omega_0$ входное сопротивление контура носит индуктивный, а при $\omega > \omega_0$ емкостный характер, причем вследствие отсутствия потерь при переходе через $\omega = \omega_0$ ФЧХ контура изменяется скачком от $-\pi/2$ до $\pi/2$, а входное реактивное сопротивление контура претерпевает разрыв ($|X| = \infty$). Частотная зависимость входного тока определяется уравнением

$$I(\omega) = U |B(\omega)|, \quad (4.65)$$

т. е. является зеркальным отображением модуля реактивной проводимости $|B(\omega)|$ (на рис. 4.15 показано штриховой линией).

Контур с малыми потерями ($R_1 \ll \rho$; $R_2 \ll \rho$). Резонансная частота для этого случая будет приближенно совпадать с частотой ω_0 . Для контура с малыми потерями можно принять, что $\rho^2 \gg R_1 R_2$, тогда

$$R_{0э} \approx \rho^2 / (R_1 + R_2) = \rho^2 / R = Q^2 R = Q\rho = L/RC, \quad (4.66)$$

где $R = R_1 + R_2$. Ток в неразветвленной части цепи

$$I_0 = U/R_{0э} = U/(Q^2 R), \quad (4.67)$$

а комплексные значения токов в ветвях

$$\underline{I}_1 = \frac{U}{\rho} e^{-j\varphi_1}; \quad \underline{I}_2 \approx \frac{U}{\rho} e^{j\varphi_2}, \quad (4.68)$$

где

$$\varphi_1 = \arctg(\rho/R_1); \quad \varphi_2 = \arctg(\rho/R_2),$$

т. е. действующие значения токов в ветвях

$$I_1 = I_2 = U/\rho = U/(QR). \quad (4.69)$$

Из уравнений (4.67) и (4.69) следует, что отношение токов в ветвях к току в неразветвленной части цепи равно добротности контура:

$$I_1/I_0 = I_2/I_0 = Q, \quad (4.70)$$

т. е. ток в реактивных элементах L и C при резонансе в Q раз больше тока на входе контура (отсюда термин «резонанс токов»). На рис. 4.14, б изображена векторная диаграмма токов для этого

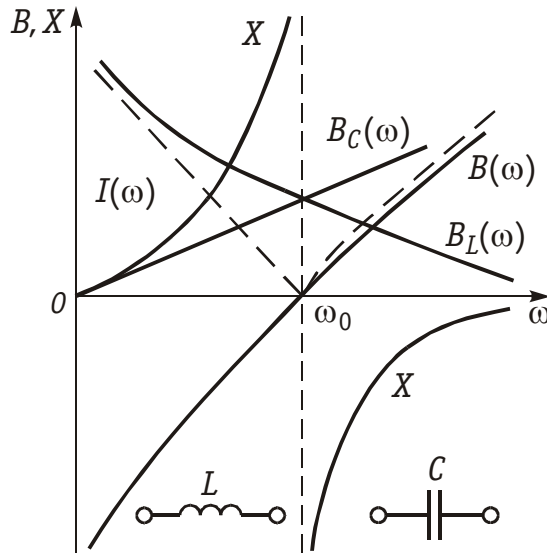


Рис. 4.15

случая. В контуре с потерями сумма энергий электрического и магнитного полей не остается постоянной с течением времени.

Интересен случай $R_1 = R_2 = \rho$. Как следует из уравнения (4.56), для ω_p получаем неопределенность, при этом входное сопротивление контура имеет чисто резистивный характер на любой частоте (случай *безразличного резонанса*).

Рассмотрим частотные характеристики контура с малыми потерями. Комплексное эквивалентное сопротивление контура можно определить уравнением

$$\underline{Z}_\varepsilon = Z_\varepsilon(j\omega) = \frac{(R_1 + j\omega L)[R_2 + 1/(j\omega C)]}{R_1 + R_2 + j[\omega L - 1/(\omega C)]}. \quad (4.71)$$

В режиме малых расстройек в цепи с незначительными потерями с учетом малости потерь ($R_1 \ll \omega L$ и $R_2 \ll 1/\omega C$) уравнение (4.71) можно переписать в такой форме:

$$\underline{Z}_\varepsilon \approx \frac{L/C}{R + jX} = \frac{\rho^2}{R(1 + j\xi)} = \frac{R_{0\varepsilon}}{1 + j\xi}. \quad (4.72)$$

Выделяя в (4.72) активную R_ε и реактивную X_ε составляющие, получаем уравнения частотных характеристик:

$$R_\varepsilon = \frac{R_{0\varepsilon}}{1 + \xi^2}; \quad X_\varepsilon = \frac{-R_{0\varepsilon}\xi}{1 + \xi^2}; \quad Z_\varepsilon = \frac{R_{0\varepsilon}}{\sqrt{1 + \xi^2}}. \quad (4.73)$$

На рис. 4.16, а изображены нормированные относительно $R_{0\varepsilon}$ частотные характеристики $R_\varepsilon/R_{0\varepsilon}$, $X_\varepsilon/R_{0\varepsilon}$, и $Z_\varepsilon/R_{0\varepsilon}$ как функции обобщенной расстройки ξ . Фазочастотная характеристика цепи определится уравнением (рис. 4.16, б):

$$\varphi = \arctg(X_\varepsilon/R_\varepsilon) = -\arctg \xi. \quad (4.74)$$

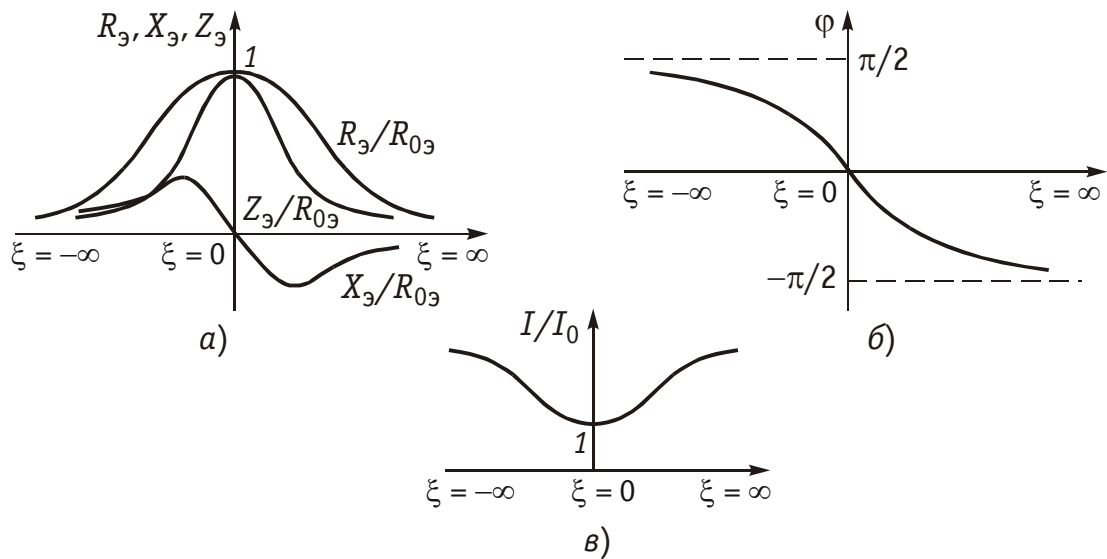


Рис. 4.16

Анализ полученных зависимостей показывает, что по своему виду частотные характеристики контура с потерями существенно отличаются от характеристик контура без потерь. Это отличие касается прежде всего зависимости реактивного сопротивления контура от частоты: для контура с потерями при резонансе оно оказывается равным нулю (см. рис. 4.16, а), а в контуре без потерь терпит разрыв (см. рис. 4.15).

Зависимость комплексного входного тока от частоты определяется из уравнения

$$\underline{I} = \frac{U}{\underline{Z}_3} = \frac{U}{R_{03}}(1 + j\xi) = I_0(1 + j\xi), \quad (4.75)$$

т. е. при резонансе ($\xi = 0$) ток принимает минимальное значение, определяемое формулой (4.58) (рис. 4.16, в).

Частотная зависимость токов $I_1(\omega)$ и $I_2(\omega)$ в ветвях определяется согласно закону Ома:

$$I_1(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}}; \quad I_2(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + (1/\omega C)^2}},$$

т. е. ток I_1 с увеличением частоты ω уменьшается, а I_2 растет, причем в пределе $I_1(\infty) = 0$; $I_2(\infty) = U/R_2$.

Комплексная передаточная функция по току в ветвях с L и C параллельного колебательного контура определяется в соответствии с (4.2):

$$H_L(j\omega) = \frac{I_1}{\underline{I}} = \frac{R_2 + 1/(j\omega C)}{R + j[\omega L - 1/(\omega C)]}; \quad (4.76)$$

$$H_C(j\omega) = \frac{I_2}{\underline{I}} = \frac{R_1 + j\omega L}{R + j[\omega L - 1/(\omega C)]}. \quad (4.77)$$

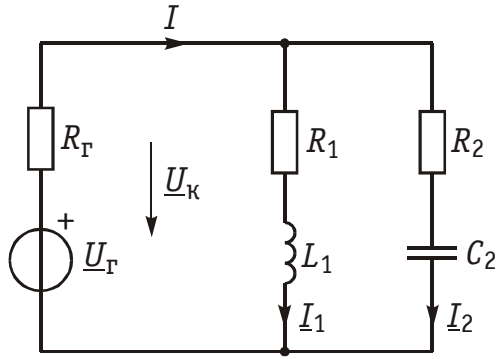


Рис. 4.17

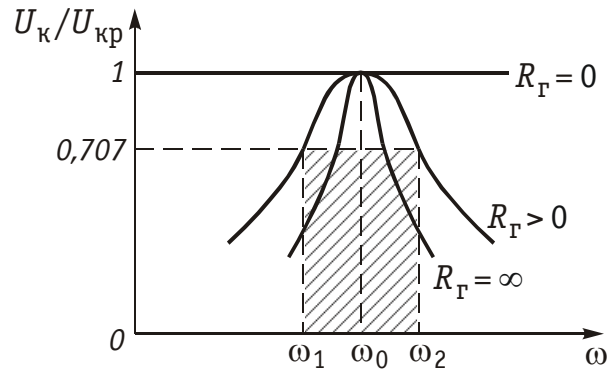


Рис. 4.18

Отсюда получаем АЧХ и ФЧХ КПФ по току для контура с малыми потерями:

$$H_L(\omega) = \frac{\sqrt{R_2^2 + 1/(\omega C)^2}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \approx \frac{1}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}; \quad (4.78)$$

$$H_C(\omega) = \frac{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \approx \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}; \quad (4.79)$$

$$\varphi_L(\omega) = -\pi/2 - \arctg[(\omega L - 1/\omega C)/R]; \quad (4.80)$$

$$\varphi_C(\omega_0) = \pi/2 - \arctg[(\omega L - 1/\omega C)/R]. \quad (4.81)$$

В контуре с малыми потерями при резонансе АЧХ принимает значения:

$$H_L(\omega_0) = H_C(\omega_0) = 1/\omega_0 C/R = \omega_0 L/R = \rho/R = Q. \quad (4.82)$$

Сравнение формул (4.32)–(4.38) с формулами (4.78)–(4.81) показывает, что КПФ по току параллельного контура дуально соответствует КПФ по напряжению для последовательного контура.

Рассмотрим, как влияет на резонансные свойства параллельного контура подключение его к источнику с задающим напряжением $\underline{U}_Г$ и внутренним сопротивлением $R_Г$. При этом выходное напряжение снимается с контура (рис. 4.17). Нетрудно видеть, что комплексное напряжение на контуре

$$\underline{U}_к = \underline{I} \underline{Z}_э = \underline{U}_Г \underline{Z}_э / (R_Г + \underline{Z}_э), \quad (4.83)$$

где $\underline{Z}_э$ определяется формулой (4.71). При резонансе токов

$$\underline{U}_к = \underline{U}_кр = \underline{U}_Г R_{0э} / (R_Г + R_{0э}). \quad (4.84)$$

Определим отношение $\underline{U}_к / \underline{U}_кр$ с учетом (4.72), (4.83), (4.84);

$$\frac{\underline{U}_к}{\underline{U}_кр} = \frac{R_Г + R_{0э}}{(1 + j\xi)[R_Г + R_{0э}/(1 + j\xi)]}. \quad (4.85)$$

Введем понятие эквивалентной добротности контура

$$Q_{\text{э}} = Q / (1 + R_{0\text{э}} / R_{\text{Г}}). \quad (4.86)$$

Тогда после несложных преобразований формулы (4.85) с учетом (4.44) и (4.86) получаем

$$\underline{U}_{\text{к}} / \underline{U}_{\text{кр}} = 1 / (1 + jQ_{\text{э}} (\omega / \omega_0 - \omega_0 / \omega)). \quad (4.87)$$

Из (4.87) нетрудно получить АЧХ и ФЧХ относительно напряжения на контуре, нормированного к напряжению $U_{\text{кр}}$,

$$U_{\text{к}} / U_{\text{кр}} = 1 / \sqrt{1 + Q_{\text{э}}^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}; \quad (4.88)$$

$$\varphi = \text{arctg} \left[Q_{\text{э}} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]. \quad (4.89)$$

На рис. 4.18 показан характер этих зависимостей при различных сопротивлениях $R_{\text{Г}}$ источника.

Полоса пропускания параллельного контура определяется как полоса частот, на границе которой напряжение на контуре уменьшается в $\sqrt{2}$ раз относительно $U_{\text{кр}}$ (см. рис. 4.18):

$$\frac{U_{\text{к}}}{U_{\text{кр}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_{\text{э}}^2 (\omega / \omega_0 - \omega_0 / \omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707.$$

Отсюда получаем уравнение граничных частот полосы пропускания:

$$f_{1,2} = \frac{f_0}{2Q_{\text{э}}} (\sqrt{1 + 4Q_{\text{э}}^2} \mp 1). \quad (4.90)$$

При этом абсолютная $\Delta f_{\text{а}}$ и относительная δf_0 полосы пропускания будут равны:

$$\Delta f_{\text{а}} = \frac{f_0}{Q_{\text{э}}} = \frac{f_0}{Q} \left(1 + \frac{R_{0\text{э}}}{R_{\text{Г}}} \right), \quad (4.91)$$

$$\delta f_0 = \frac{\Delta f_{\text{а}}}{f_0} = d \left(1 + \frac{R_{0\text{э}}}{R_{\text{Г}}} \right). \quad (4.92)$$

Сравнение уравнений (4.50) с уравнениями (4.91) и (4.92) показывает, что параллельный контур в общем случае имеет более широкую полосу пропускания, чем последовательный с такой же добротностью. И только при $R_{\text{Г}} = \infty$ (см. рис. 4.18) их полосы пропускания равны.

Таким образом, для улучшения избирательных свойств параллельного контура его необходимо возбуждать источником тока. Из уравнения (4.84) также следует, что параллельный контур нельзя использовать для усиления напряжения, если использовать независимый источник, так как при этом $U_{\text{кр}} < U_{\text{Г}}$.

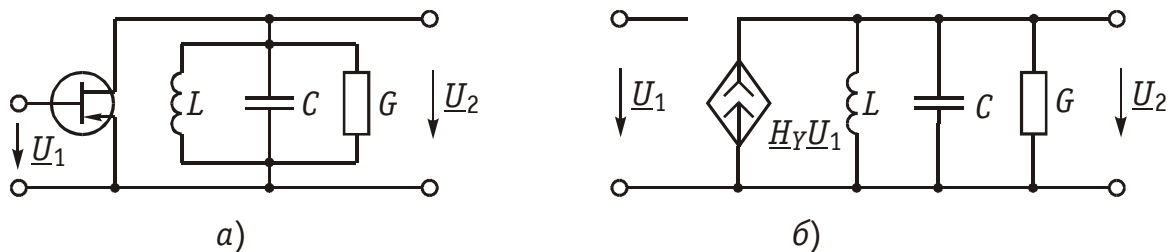


Рис. 4.19

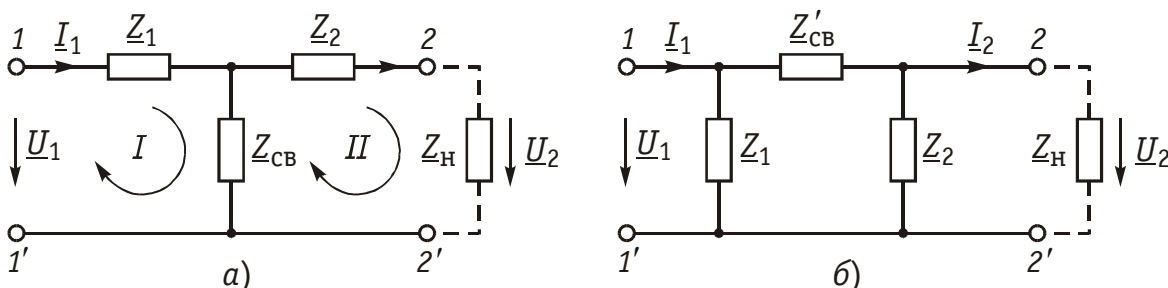


Рис. 4.20

Поэтому для усиления напряжения и получения высокой добротности параллельного контура используют активные цепи с зависимыми источниками тока. На рис. 4.19 приведен пример подобной схемы на базе полевого транзистора и его эквивалентная схема замещения.

4.4. Частотные характеристики связанных колебательных контуров

В ряде радиотехнических устройств (входные цепи радиоприемников, усилители, фильтры сосредоточенной селекции, выходные каскады радиопередатчиков и др.) применяются системы *связанных колебательных контуров*. Отличительной особенностью связанных контуров является лучшая *избирательность** АЧХ по сравнению с одиночными контурами. Это позволяет лучше отфильтровать частоты за границами полосы пропускания, обеспечить большую равномерность, а, следовательно, меньшие частотные искажения сигнала в полосе пропускания. На рис. 4.20 приведена обобщенная схема двух связанных колебательных контуров: с внутренней связью (рис. 4.20, а) и внешней связью (рис. 4.20, б), где \underline{Z}_1 , \underline{Z}_2 — комплексное сопротивление первого и второго контуров, $\underline{Z}_{св}$ — комплексное сопротивление связи между контурами, $\underline{Z}_н$ — сопротивление нагрузки.

Переход от схемы, изображенной на рис. 4.20, а к схеме рис. 4.20, б можно осуществить с помощью формул преобразования «звезда—треугольник» (см. § 2.2).

* Под избирательностью понимают способность контура усиливать сигналы (напряжения, токи) различных частот в неодинаковое число раз.

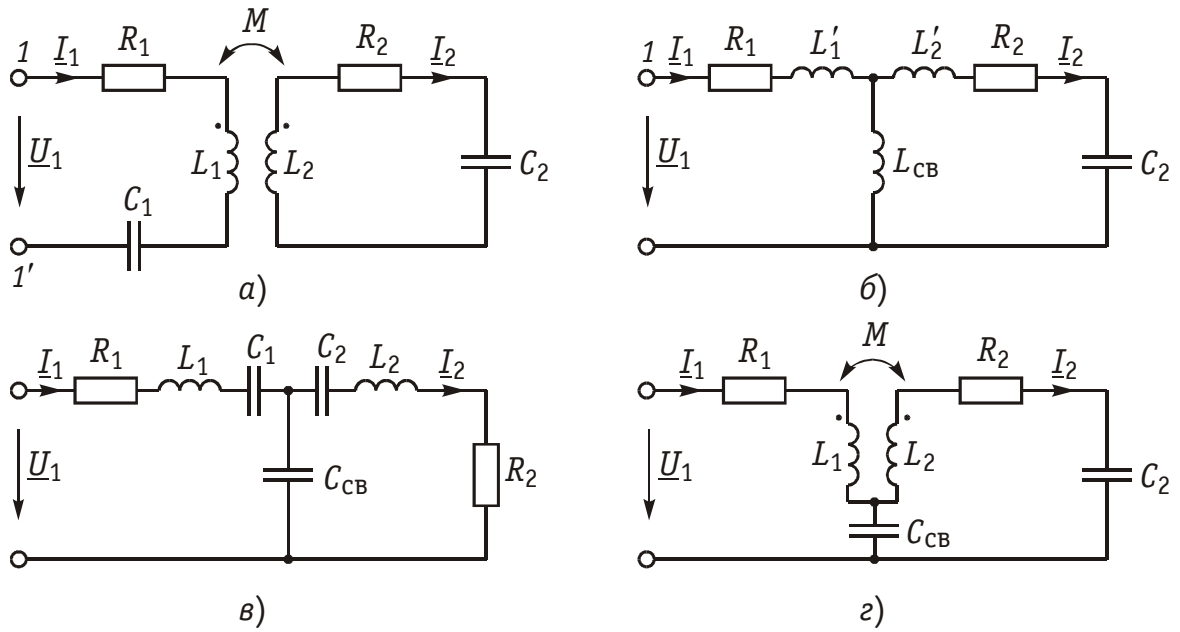


Рис. 4.21

В зависимости от вида связи различают контуры с трансформаторной связью (рис. 4.21, а), автотрансформаторной связью (рис. 4.21, б), емкостной связью (внутренней) (рис. 4.21, в), комбинированной связью (рис. 4.21, г) и др. Важнейшей характеристикой связанных контуров является коэффициент связи. Для контура с трансформаторной связью коэффициент связи определяется известной формулой (3.74). Для других видов связи коэффициент k можно найти с помощью формулы

$$k = X_{св} / \sqrt{X_1 X_2}, \quad (4.93)$$

где $X_{св}$ — реактивная составляющая комплексного сопротивления связи $\underline{Z}_{св}$; X_1 , X_2 — реактивные сопротивления первого и второго контуров того же знака, что и реактивное сопротивление связи $X_{св}$. Например, для контура с индуктивной автотрансформаторной связью (рис. 4.21, б) коэффициент связи

$$k = \frac{\omega L_{св}}{\sqrt{(\omega L_1 + \omega L_{св})(\omega L_2 + \omega L_{св})}} = \frac{L_{св}}{\sqrt{L_{11} L_{22}}}, \quad (4.94)$$

где

$$L_{11} = L_1 + L_{св}; \quad L_{22} = L_2 + L_{св}.$$

Для контура с емкостной связью (рис. 4.21, в) аналогично получаем:

$$k = \frac{1/\omega C_{св}}{\sqrt{[1/(\omega C_1) + 1/(\omega C_{св})][1/(\omega C_2) + 1/(\omega C_{св})]}} = \frac{\sqrt{C_{11} C_{22}}}{C_{св}}, \quad (4.95)$$

где $C_{11} = C_1 C_{св} / (C_1 + C_{св})$; $C_{22} = C_2 C_{св} / (C_2 + C_{св})$,

и для контура с комбинированной связью

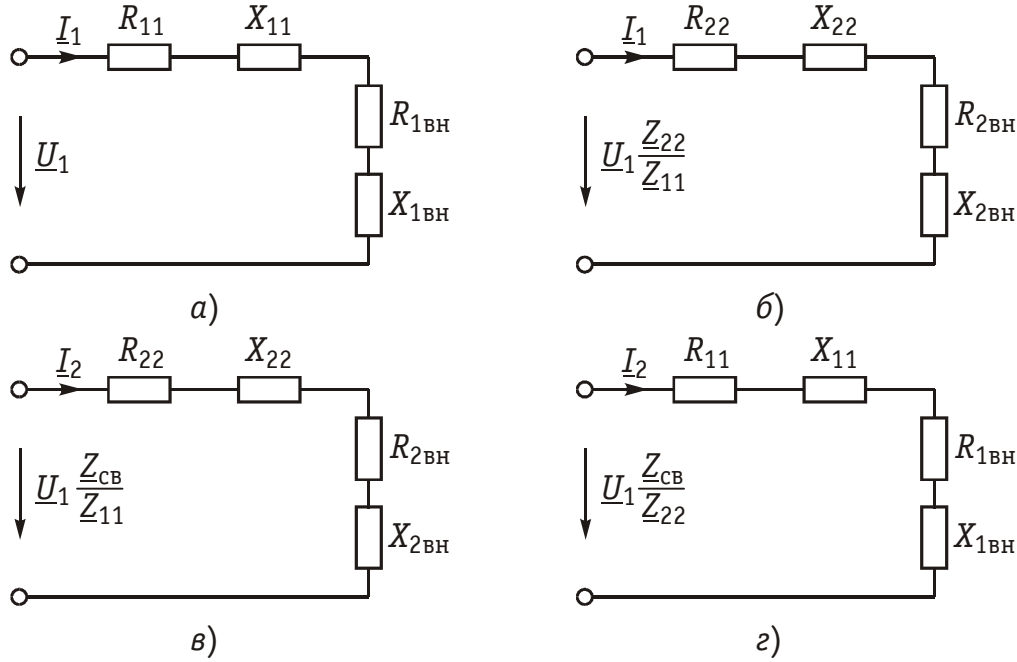


Рис. 4.22

$$k = \frac{\omega M - 1/\omega C_{св}}{\sqrt{\omega L_1 \omega L_2}} = \frac{M - 1/\omega^2 C_{св}}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (4.96)$$

Исследование частотных характеристик связанных колебательных контуров удобно вести с помощью одноконтурных схем замещения (рис. 4.22), которые могут быть получены для обобщенной схемы (рис. 4.20, а) аналогично уравнениям трансформатора (3.106):

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 - \underline{Z}_{св} \underline{I}_2; \\ 0 &= -\underline{Z}_{св} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}_2, \end{aligned} \right\} \quad (4.97)$$

где $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{св}$; $\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{св}$.

Решая систему уравнений (4.97) относительно \underline{I}_1 и \underline{I}_2 и учитывая уравнение для вносимых сопротивлений (3.111), (3.112), получаем для схемы (рис. 4.22, а) и (рис. 4.22, б)

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{1вн}} = \frac{\underline{U}_1 \underline{Z}_{22} / \underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{2вн}}. \quad (4.98)$$

Для схемы (рис. 4.22, в) и (рис. 4.22, г)

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1 \underline{Z}_{св} / \underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{2вн}} = \frac{\underline{U}_1 \underline{Z}_{св} / \underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{1вн}}. \quad (4.99)$$

Резонанс в системе связанных контуров достигается соответствующей их настройкой и подбором оптимальной связи между ними. В зависимости от видов настройки различают:

1. *Первый частный резонанс*, который обеспечивает максимум тока $\underline{I}_{1max} = \underline{U}_1 / (R_{11} + R_{1вн})$ и достигается настройкой первого контура до обеспечения условия: $X_{11} = -X_{1вн}$ (см. рис. 4.22, а).

2. *Второй частный резонанс*, обеспечивающий максимум тока $I_{2max} = (U_1 X_{св} / Z_{11}) / (R_{22} + R_{2вн})$ и который достигается настройкой до обеспечения условия $X_{22} = -X_{2вн}$ (см. рис. 4.22, в).

3. *Сложный резонанс* — осуществляется путем настройки каждого контура на частный резонанс и подбором оптимального сопротивления связи

$$X_{св} = \sqrt{Z_{11} Z_{22}}. \quad (4.100)$$

При этом I_2 во втором контуре достигает максимального значения (максимум максимум):

$$I_{2maxmax} = \frac{U_1}{2\sqrt{R_{11}R_{22}}}. \quad (4.101)$$

Нетрудно видеть, что настройка I контура в первый частный резонанс и подбор связи (4.100) эквивалентен условию $\underline{Z} = \underline{Z}_{1вн}^*$; аналогично второй частный резонанс совместно с условием (4.100) эквивалентен условию $\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_{2вн}^*$.

4. *Полный резонанс* — достигается настройкой каждого контура в индивидуальный резонанс ($X_{11} = 0$; $X_{22} = 0$) и подбором оптимальной связи:

$$X_{св} = \sqrt{R_{11}R_{22}}. \quad (4.102)$$

При этом ток I_2 определяется также формулой (4.101).

Уравнение сопротивления связи (4.100) может быть получено из уравнения $dI_2/dX_{св} = 0$ при условиях $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{1вн}^*$; $\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_{2вн}^*$, где I_2 определяется из (4.99). Аналогично уравнение (4.102) получаем из решения уравнения $dI_2/dX_{св} = 0$ при $X_{11} = 0$ и $X_{22} = 0$.

Сравнение сложного и полного резонансов показывает, что в последнем случае $I_{2maxmax}$ достигается при меньшем сопротивлении связи.

Связанные контуры обычно используются в режиме передачи максимальной мощности во вторичный контур: $P_2 = I_2^2 R_{22}$, поэтому среди частотных характеристик наибольший интерес представляет зависимость $I_2(\omega)$.

Выразим сопротивление контуров \underline{Z}_{11} и \underline{Z}_{22} (см. рис. 4.20, а) через обобщенную расстройку ξ :

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_{11} &= R_{11} + jX_{11} = R_{11}(1 + j\xi_1), \\ \underline{Z}_{22} &= R_{22} + jX_{21} = R_{22}(1 + j\xi_2), \\ \underline{Z}_{св} &= jX_{св}. \end{aligned} \right\} \quad (4.103)$$

Подставив \underline{Z}_{11} , \underline{Z}_{22} и $\underline{Z}_{св}$ в (4.99), получим для тока I_2 :

$$\underline{I}_2 = \frac{U_1 jX_{св}}{R_{11}R_{22} \left[1 - \xi_1 \xi_2 + X_{св}^2 / (R_{11}R_{22}) + j(\xi_1 + \xi_2) \right]}. \quad (4.104)$$

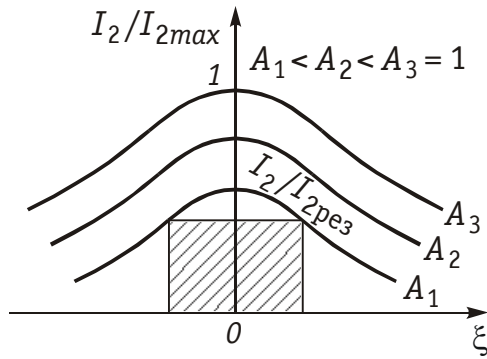


Рис. 4.23

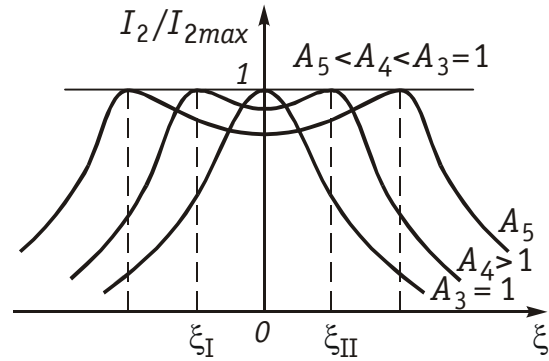


Рис. 4.24

На частотах, близких к резонансу, можно считать, что

$$X_{\text{св}}^2 / (R_{11} R_{22}) \approx k^2 Q_1 Q_2, \quad (4.105)$$

где $Q_1 = \rho_1 / R_{11}$; $Q_2 = \rho_2 / R_{22}$ — добротность контуров; k — коэффициент связи между контурами.

Тогда с учетом (4.105) и (4.101) нормированная относительно $I_{2\text{max max}}$ АЧХ тока I_2 будет равна:

$$\frac{I_2}{I_{2\text{max max}}} = \frac{2k\sqrt{Q_1 Q_2}}{\sqrt{(1 + k^2 Q_1 Q_2 - \xi_1 \xi_2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2}}. \quad (4.106)$$

Величина $A = k\sqrt{Q_1 Q_2}$ носит название *фактора связи*.

Для идентичных контуров $Q_1 = Q_2 = Q$, $\xi_1 = \xi_2 = \xi$, и уравнение АЧХ (4.106) принимает вид

$$\frac{I_2}{I_{2\text{max max}}} = \frac{2A}{\sqrt{(1 + A^2)^2 + 2\xi^2(1 + A^2) + \xi^4}}. \quad (4.107)$$

Анализ формулы (4.107) показывает, что в зависимости от соотношения между коэффициентом связи k и затуханием контура $d = 1/Q$ могут иметь место три основных случая:

- 1) $k < d$ — *слабая связь* ($A < 1$);
- 2) $k > d$ — *сильная связь* ($A > 1$);
- 3) $k = d$ — *критическая связь* ($A = 1$).

В зависимости от характера связи существенно изменяется вид АЧХ. Так, при слабой связи АЧХ имеет вид резонансной кривой (рис. 4.23), аналогичной одиночному колебательному контуру с максимумом при $\xi = 0$, при этом $I_{1\text{max}}$ зависит от величины k : с увеличением k (или фактора связи A) $I_{2\text{max}}$ растет, достигая $I_{2\text{max max}}$ при $k = d$ ($A = 1$) (критический случай).

С увеличением $k > d$ ($A > 1$) характер зависимости тока I_2 от частоты существенно изменяется: АЧХ приобретает двугорбый характер (рис. 4.24). На частоте $\xi = 0$ образуется минимум тока, а на частотах

$$\xi_{\text{I,II}} = \mp \sqrt{A^2 - 1} \quad (4.108)$$

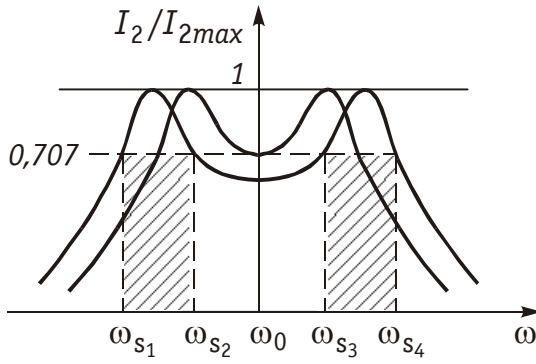


Рис. 4.25

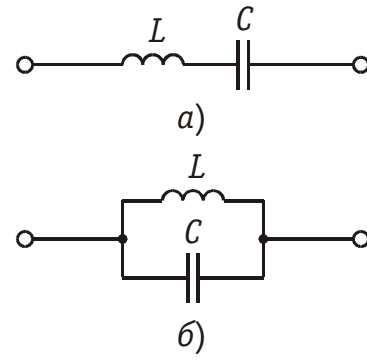


Рис. 4.26

максимум $I_{2max\ max}$.

С учетом (4.47) из (4.108) можно найти уравнение частот ω_I и ω_{II} , на которых достигается максимум тока:

$$\omega_I = \omega_0 / \sqrt{1 + \sqrt{k^2 - d^2}}; \quad \omega_{II} = \omega_0 / \sqrt{1 - \sqrt{k^2 - d^2}}, \quad (4.109)$$

т. е. с увеличением связи частота ω_I — уменьшается, а ω_{II} увеличивается (максимумы $I_{2max\ max}$ раздвигаются). При сильной связи ($k \gg d$ ($A \gg 1$)))

$$\omega_I \approx \omega_0 / \sqrt{1 + k}; \quad \omega_{II} \approx \omega_0 / \sqrt{1 - k}. \quad (4.110)$$

Полоса пропускания связанных контуров определяется из условия $I_2 / I_{2max\ max} = 1 / \sqrt{2}$, откуда с учетом (4.107) получаем уравнение обобщенной расстройки, соответствующей полосе пропускания:

$$\xi_s = \mp \sqrt{A^2 - 1 \pm 2A}. \quad (4.111)$$

Из этого выражения видно, что при $A > 1$ полоса пропускания распадается на две (рис. 4.25) с граничными частотами ω_{s1} , ω_{s2} , ω_{s3} , ω_{s4} . Чтобы полоса пропускания не распадалась на две, необходимо выполнить условие

$$I_{2рез} / I_{2max\ max} = 2A / (1 + A^2) = 1 / \sqrt{2}, \quad (4.112)$$

где $I_{2рез}$ — значение тока I_2 на резонансной частоте ($\xi = 0$). Отсюда следует необходимое значение фактора связи $A = 2,41$. При этом максимальная относительная полоса пропускания связанных контуров $\delta f_{0max} = 3,1d$, т. е. в 3 раза больше, чем одиночного контура при той же добротности цепи (сравните с (4.50)).

При критической связи $k = d$, $\delta f_0 = 1,41d$, т. е. относительная полоса шире, чем для одиночного контура.

Для случая слабой связи необходимо нормировать величину I_2 относительно $I_{2рез}$:

$$\frac{I_2}{I_{2рез}} = \frac{1 + A^2}{\sqrt{(1 + A^2)^2 + 2\xi^2(1 - A^2) + \xi^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.113)$$

Далее находим обобщенную расстройку, соответствующую полосе пропускания $\xi_s = \pm \sqrt{A^2 - 1 + \sqrt{2(1 + A^4)}}$ и относительную полосу пропускания связанных контуров:

$$\delta f_0 = \xi_s d = d \sqrt{A^2 - 1 + \sqrt{2(1 + A^4)}}. \quad (4.114)$$

Если связь очень слабая ($A \rightarrow 0$), то из (4.114) нетрудно видеть, что $\delta f_0 \approx 0,64d$, т. е. существенно ниже полосы пропускания одиночного контура. Поэтому на практике связанные контуры при слабой связи обычно не используются. Фазочастотная характеристика связанных контуров может быть получена обычным способом из уравнения (4.104).

4.5. Частотные характеристики реактивных двухполосников

Общие свойства реактивных двухполосников. Наряду с комплексными передаточными функциями цепей, АЧХ и ФЧХ в задачах анализа и синтеза важно знать частотные зависимости входных функций цепи: входного сопротивления $Z(j\omega)$ и входной проводимости $Y(j\omega)$. При этом электрическая цепь рассматривается в виде двухполосника с двумя парами зажимов, через которые они обмениваются энергией с внешними цепями (см. рис. 4.4). Существуют различные типы двухполосников: активные и пассивные, линейные и нелинейные, реактивные (L, C) и двухполосники общего вида (R, L, C). Из всего многообразия двухполосников наибольший интерес представляют *пассивные реактивные двухполосники*, состоящие только из индуктивностей и емкостей. Важность этих двухполосников объясняется тем, что они широко применяются в различных радиотехнических устройствах (LC -фильтры, корректоры, автогенераторы и др.). Кроме того свойства реактивных двухполосников лежат в основе синтеза линейных электрических цепей (см. гл. 16, 17).

Простейшим реактивным двухполосником является элемент индуктивности и емкости (одноэлементный двухполосник). К двухэлементному двухполоснику относятся последовательный (4.26, а) и параллельный контуры без потерь (рис. 4.26, б). Функции входного сопротивления и проводимости этих двухполосников равны:

$$\left. \begin{aligned} Z_a(j\omega) &= jX_a = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = \frac{L(\omega_1^2 - \omega^2)}{j\omega}, \\ Y_o(j\omega) &= jB_a = j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = \frac{C(\omega_1^2 - \omega^2)}{j\omega}, \end{aligned} \right\} \quad (4.115)$$

где $\omega_1 = 1/\sqrt{LC}$.

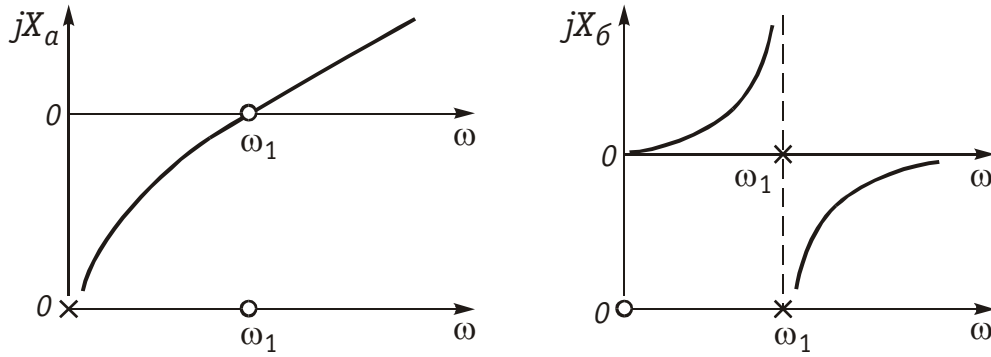


Рис. 4.27

На рис. 4.27 изображена зависимость функций входных сопротивлений двухполюсника (4.115) от частоты:

$$Z_a(j\omega) = jX_a \quad \text{и} \quad Z_b(j\omega) = 1/Y_b(j\omega) = jX_b.$$

Двухполюсники называются эквивалентными, если они обладают одинаковыми входными функциями.

Двухполюсники называют обратными*, если они удовлетворяют условию:

$$Z_a(j\omega)Z_b(j\omega) = R^2, \quad (4.116)$$

где R — некоторое постоянное сопротивление.

Рассматриваемые двухполюсники $Z_a(j\omega)$ и $Z_b(j\omega)$ являются потенциально обратными, так как условие (4.116) для них выполняется при

$$Z_a(j\omega)Z_b(j\omega) = L/C = \rho^2. \quad (4.117)$$

Из трех реактивных элементов можно составить уже четыре схемы двухполюсников. На рис. 4.28 приведены две возможные схемы. Их функции входных сопротивлений будут:

$$Z_a(j\omega) = j\omega L_2 \frac{\omega_2^2 - \omega^2}{\omega_1^2 - \omega^2}, \quad (4.118)$$

где

$$\omega_1 = 1/\sqrt{L_1 C_1}; \quad \omega_2 = 1/\sqrt{L C_1}; \quad L = L_1 L_2 / (L_1 + L_2);$$

$$Z_b(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2}, \quad (4.119)$$

где

$$\omega_1 = 1/\sqrt{L_2 (C_1 + C_2)}; \quad \omega_2 = 1/\sqrt{L_2 C_2}; \quad C = C_1 C_2 / (C_1 + C_2).$$

* Правило получения обратных двухполюсников базируется на принципе дуальности: последовательные соединения в исходном двухполюснике заменяются параллельными соединениями дуальных элементов.

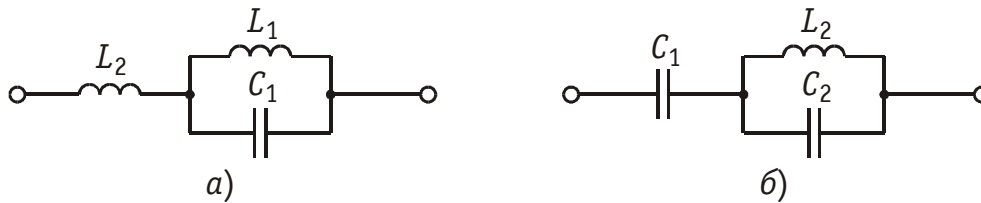


Рис. 4.28

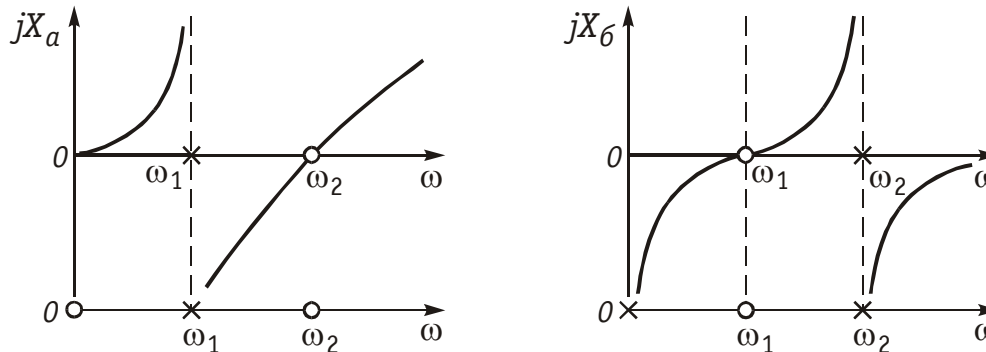


Рис. 4.29

На рис. 4.29 изображены частотные характеристики (4.118) и (4.119).

Анализируя приведенные схемы и графики, можно сформулировать основные свойства реактивных двухполюсников:

1. Входное сопротивление растет с ростом частоты ($dZ(j\omega)/d\omega > 0$).

2. Количество резонансных частот на единицу меньше числа элементов.

3. Резонансы токов (полюса $Z(j\omega)$) и напряжений (нули $Z(j\omega)$) чередуются, причем, если входное сопротивление двухполюсника на нулевой частоте равна нулю, то первым наступает резонанс токов.

4. В числителе функции входного сопротивления стоит множитель с частотами резонанса напряжения, а в знаменателе — резонанс токов.

5. Множитель $j\omega$ в уравнении $Z(j\omega)$ стоит либо в числителе, если первым наступает резонанс токов, либо в знаменателе, если первый резонанс напряжений.

В зависимости от характера зависимой функции входного сопротивления на частоте $\omega = 0$ и частоте $\omega = \infty$ различают четыре класса реактивных двухполюсников: $(0; \infty)$, $(0; 0)$, $(\infty; 0)$, $(\infty; \infty)$. В табл. 4.1 приведены частотные характеристики двухполюсников различных классов и их функции входных сопротивлений. Внизу частотных характеристик показана *полюсно-нулевая диаграмма*, показывающая расположение полюсов — X и нулей — 0 по оси частот.

Канонические схемы реактивных двухполюсников. Наиболее распространенными в теории цепей являются канонические схемы, построенные по правилу (канону) Фостера и Кауэра.

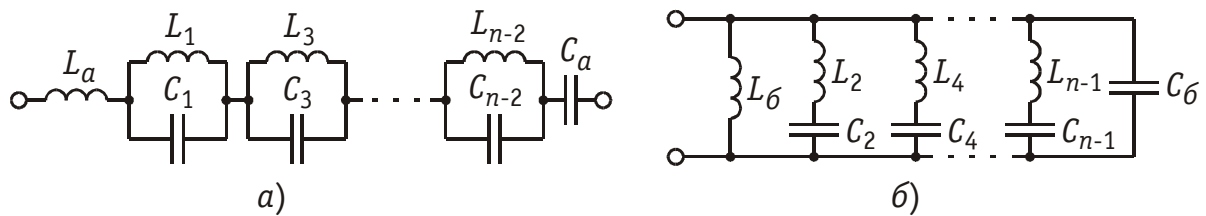


Рис. 4.30

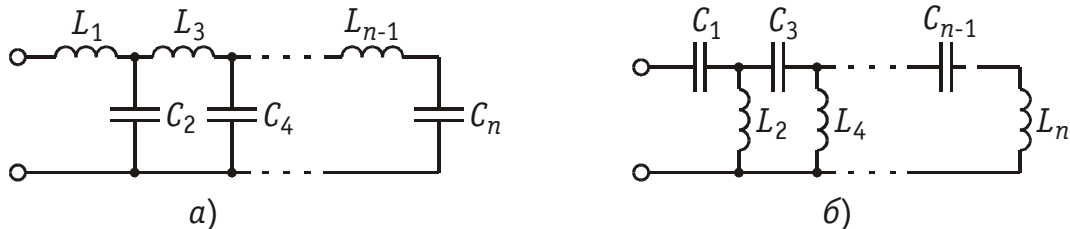


Рис. 4.31

В схемах Фостера двухполюсник представляется либо в виде последовательного соединения параллельных колебательных контуров (*первая схема Фостера*) (рис. 4.30, а), либо в виде параллельно соединенных последовательных контуров (*вторая схема Фостера*) (рис. 4.30, б).

Коэффициент H в формулах (см. табл. 4.1) определяется как $H = \lim_{\omega \rightarrow \infty} Z(j\omega)$. Например, для первой схемы Фостера класса (∞, ∞) $H = L_a$, для второй схемы Фостера класса $(0, 0)$ $H = 1/C_b$ и т. д.

В схемах Кауэра двухполюсники представлены в виде цепочечных (лестничных) схем, в продольных ветвях которых находятся индуктивности, а в поперечных емкости (*первая схема Кауэра*, рис. 4.31, а), либо наоборот — в продольных емкости, а в поперечных — индуктивности (*вторая схема Кауэра*, рис. 4.31, б).

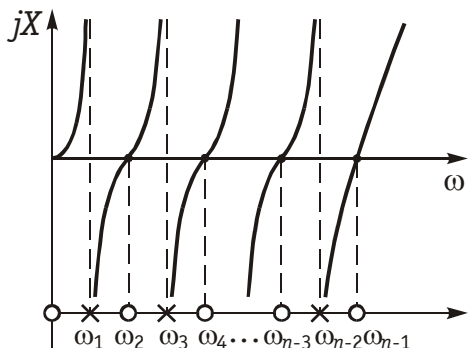
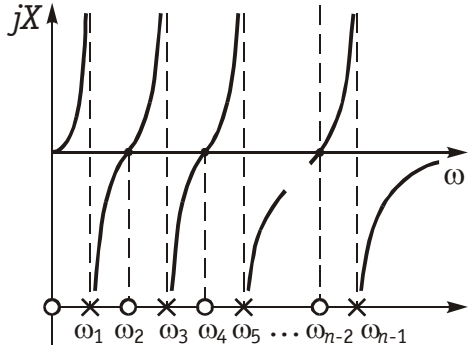
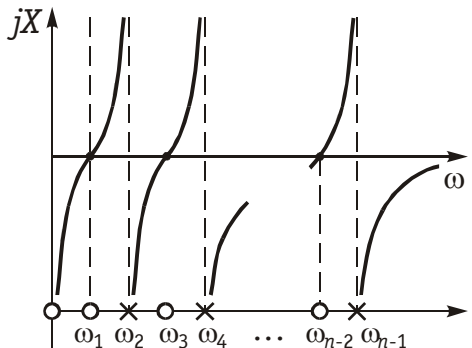
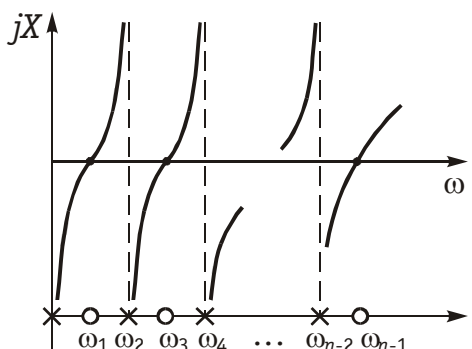
В зависимости от класса канонические схемы Фостера и Кауэра имеют частотные характеристики входных функций, изображенные в табл. 4.1.

Положительной особенностью канонических схем Фостера и Кауэра является то, что из всех эквивалентных двухполюсников с заданной частотной характеристикой, они имеют минимальное число элементов. При решении задач синтеза обычно входные функции в схемах Фостера представляются в виде разложения на простые дроби, а в схемах Кауэра — на цепные дроби (см. гл. 16).

4.6. Машинные методы анализа частотных характеристик электрических цепей

При расчете частотных характеристик цепи машинными методами представляют КПФ в виде отношений двух полиномов:

Таблица 4.1

Класс	Частотная характеристика	Функция входного сопротивления
$(0, \infty)$		$Z = j\omega H \frac{(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2) \dots}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2) \dots} \rightarrow$ $\dots \frac{(\omega^2 - \omega_{n-1}^2)}{(\omega^2 - \omega_{n-2}^2)}$ <p>n — нечетное</p>
$(0, 0)$		$Z = j\omega H \frac{(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2) \dots}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2) \dots} \rightarrow$ $\dots \frac{(\omega^2 - \omega_{n-2}^2)}{(\omega^2 - \omega_{n-1}^2)}$ <p>n — четное</p>
$(\infty, 0)$		$Z = \frac{H}{j\omega} \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2) \dots}{(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2) \dots} \rightarrow$ $\dots \frac{(\omega^2 - \omega_{n-2}^2)}{(\omega^2 - \omega_{n-1}^2)}$ <p>n — нечетное</p>
(∞, ∞)		$Z = \frac{H}{j\omega} \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2) \dots}{(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2) \dots} \rightarrow$ $\dots \frac{(\omega^2 - \omega_{n-1}^2)}{(\omega^2 - \omega_{n-2}^2)}$ <p>n — четное</p>

$$\begin{aligned}
 H(j\omega) &= \frac{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0}{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0} = \\
 &= \frac{P_1(\omega) + jP_2(\omega)}{Q_1(\omega) + jQ_2(\omega)},
 \end{aligned} \quad (4.120)$$

где

$$\left. \begin{aligned} P_1(\omega) &= a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots, \\ P_2(\omega) &= a_1 - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots, \\ Q_1(\omega) &= b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \dots, \\ Q_2(\omega) &= b_1 - b_3\omega^3 + b_5\omega^5 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.121)$$

Из уравнения (4.120) находим АЧХ цепи:

$$H(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{\frac{P_1^2(\omega) + P_2^2(\omega)}{Q_1^2(\omega) + Q_2^2(\omega)}} \quad (4.122)$$

и ФЧХ цепи

$$\varphi(\omega) = \arctg[P_2(\omega)/P_1(\omega)] - \arctg[Q_2(\omega)/Q_1(\omega)] \quad (4.123)$$

Для построения АЧХ и ФЧХ задаются равномерной либо логарифмической шкалой частот от f_{min} до f_{max} . Очередное значение частоты определяется из соотношения $f_{k+1} = c_2 f_k + c_1$, где c_2 , c_1 — коэффициенты, определяющие шаг по логарифмической и линейной шкале частот соответственно.

Затем на каждой из частот вычисляется АЧХ и ФЧХ цепи согласно формул (4.122) и (4.123). На рис. 4.32 приведена схема алгоритма расчета АЧХ и ФЧХ.

Если диапазон частот f_{min} и f_{max} , где расположены частотные характеристики цепи, заранее неизвестен, то положив $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$, можно в логарифмическом масштабе с большим шагом рас-

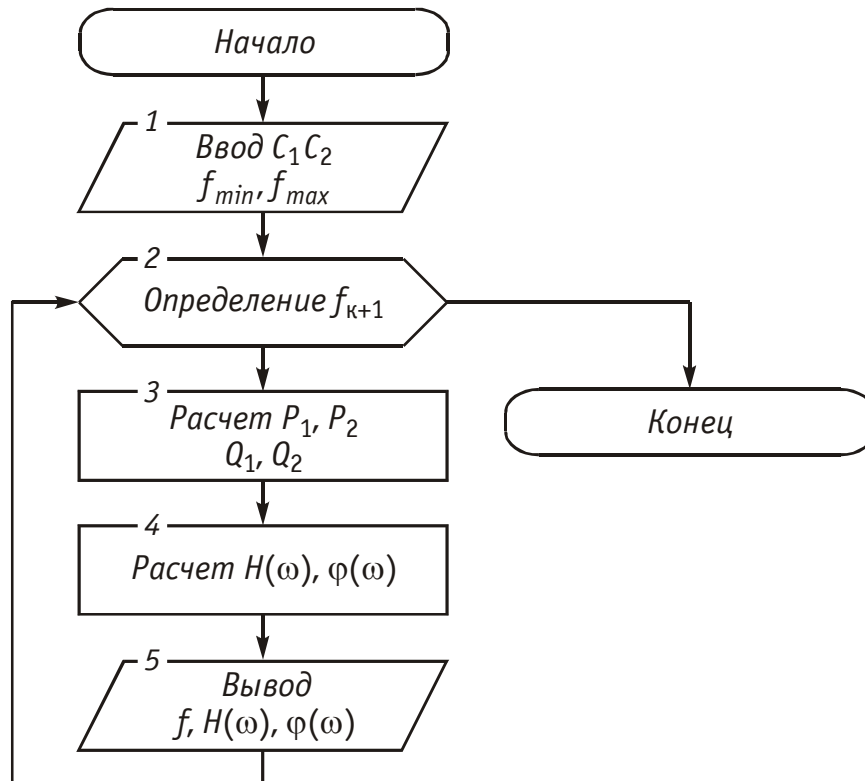


Рис. 4.32

считать значение АЧХ в широком частотном диапазоне. После этого произвести более подробный расчет частотных характеристик цепи в выбранном диапазоне уже с равномерной шкалой частот с более мелким шагом.

Расчет частотных характеристик можно произвести и в базисе узловых потенциалов. Для этого уравнение равновесия (3.64) записывается в частотной области:

$$\mathbf{Y}_y(j\omega) \mathbf{V}_y(j\omega) = \mathbf{I}_y(j\omega). \quad (4.124)$$

При этом компонентные уравнения для \underline{I}_C и \underline{I}_L принимают вид

$$\underline{I}_C = j\omega C(\underline{V}_1 - \underline{V}_2); \quad \underline{I}_L = -j\frac{1}{\omega L}(\underline{V}_1 - \underline{V}_2), \quad (4.125)$$

где $\underline{V}_1 - \underline{V}_2$ — разность потенциалов на реактивном элементе.

Для решения (4.124) может использоваться как и для (3.64) либо стандартная программа обращения матрицы $\mathbf{Y}_y(j\omega)$, либо решение системы линейных уравнений с комплексными коэффициентами по методу Гаусса. Полагая спектр входного сигнала, равный единице, с помощью решения для каждой из частот ω уравнения (4.124) можно получить АЧХ и ФЧХ соответствующего узлового напряжения. Так, если, например, принять, что выходное напряжение снимается с k -го узла \underline{V}_k , то после определения $\mathbf{V}_y(j\omega)$ из решения системы (4.124) из вектора

$$\mathbf{V}_y(j\omega) = [V_1(j\omega) V_2(j\omega) \dots V_k(j\omega) \dots V_n(j\omega)]^T$$

выбирается комплексное значение потенциала

$$\underline{V}_k = V_k(j\omega) = A_k(\omega) + jB_k(\omega)$$

и находится АЧХ

$$|\underline{V}_k| = \sqrt{A_k^2(\omega) + B_k^2(\omega)} \quad (4.126)$$

и ФЧХ

$$\varphi_k(\omega) = \arg \underline{V}_k = \arctg B_k(\omega)/A_k(\omega). \quad (4.127)$$

Пример. Рассчитать передаточную функцию, АЧХ и ФЧХ цепи, изображенной на рис. 4.33

1. Задание схемы в ЭВМ. Для расчета на ЭВМ характеристик цепи необходимо схему цепи ввести в ЭВМ.

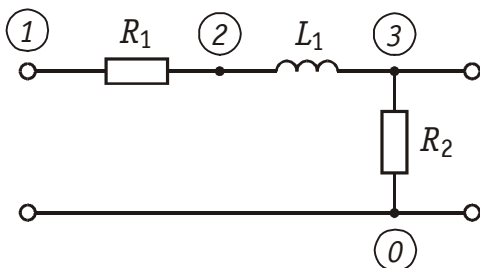


Рис. 4.33

Одним из наиболее простых и удобных способов задания схемы в ЭВМ является табличный способ ее описания в виде соединения узел — ветвь. Для задания схемы в программах анализа все ее ветви и узлы нумеруются (используются простые узлы). Каждый элемент цепи характеризуется типом (R , L , C); узлами, между которыми он включен и численным значением.

$$R_1 = 100 \text{ Ом}; \quad L_1 = 0,1 \text{ мГн}; \quad R_2 = 200 \text{ Ом}.$$

Схема, изображенная на рис. 4.33 полностью описывается следующей таблицей соединений:

R_1 ;	1, 2;	100
L_1 ;	2, 3;	0.0001
R_2 ;	3, 0;	200

Первый символ указывает тип (R , L , C) и порядковый номер элемента ветви. Вторая и третья цифры в спецификации указывают номера узлов, между которыми включен элемент. Последняя цифра характеризует значение параметра.

2. Расчет передаточной функции цепи. Приведем последовательность расчета передаточной функции цепи с использованием метода узловых напряжений:

- По введенной в ЭВМ схеме определяется структурная матрица \bar{A}_0 .
 - Формируются матрицы эдс источников напряжения \bar{E}_B и проводимостей ветвей \bar{Y}_B .
 - Формируется матрица узловых проводимостей \bar{Y}_y .
 - Формируется матрица узловых токов \bar{I}_y .
 - Определяется матрица узловых напряжений: $\bar{V}_y = \bar{Y}_y^{-1} \cdot \bar{I}_y$.
 - Положив $\underline{U}_{BX} = 1$ В, определяется матрица комплексной передаточной функции $\bar{H}_y = \bar{V}_y$.
 - Рассчитываются и строятся графики АЧХ ($H(f)$) и ФЧХ ($\phi_H(f)$).
- Структурная матрица

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица эдс источников напряжения

$$\bar{E}_B = \begin{bmatrix} \underline{U}_{BX} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица проводимостей ветвей.

$$\bar{Y}_B = \begin{bmatrix} 1/R & 0 & 0 \\ 0 & 1/(j\omega L) & 0 \\ 0 & 0 & 1/R \end{bmatrix}.$$

Матрица узловых токов

$$\bar{I}_y = \bar{A}_0 (-\bar{Y}_B \bar{E}_B) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(- \begin{bmatrix} 1/R & 0 & 0 \\ 0 & 1/(j\omega L) & 0 \\ 0 & 0 & 1/R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{BX} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right);$$

$$\bar{I}_y = \begin{bmatrix} \underline{U}_{BX}/R \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица узловых проводимостей

$$\bar{Y}_y = \bar{A}_0 \bar{Y}_B \bar{A}_0^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/R & 0 & 0 \\ 0 & 1/(j\omega L) & 0 \\ 0 & 0 & 1/R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{Y}_y = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} & -\frac{1}{j\omega L} \\ -\frac{1}{j\omega L} & \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица $\bar{\mathbf{Y}}_y^{-1}$

$$\bar{\mathbf{Y}}_y^{-1} = \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{\Delta},$$

где $\tilde{\mathbf{A}}$ – присоединенная матрица,
 Δ – определитель $\bar{\mathbf{Y}}_y$.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{21} \\ \underline{A}_{12} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} & \frac{1}{j\omega L} \\ \frac{1}{j\omega L} & \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} \end{bmatrix},$$

где \underline{A}_{11} , \underline{A}_{12} , \underline{A}_{21} , \underline{A}_{22} – алгебраические дополнения.

$$\Delta = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} \right)^2 - \left(\frac{1}{j\omega L} \right)^2 = \frac{1}{R^2} + \frac{2}{j\omega LR}. \quad \Delta = \frac{2R + j\omega L}{j\omega LR^2}.$$

$$\bar{\mathbf{Y}}_y^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{R(R + j\omega L)}{2R + j\omega L} & \frac{R^2}{2R + j\omega L} \\ \frac{R^2}{2R + j\omega L} & \frac{R(R + j\omega L)}{2R + j\omega L} \end{bmatrix}.$$

Матрица узловых напряжений

$$\bar{\mathbf{V}}_y = \bar{\mathbf{Y}}_y^{-1} \bar{\mathbf{I}}_y = \begin{bmatrix} \underline{U}_{\text{BX}} \frac{R + j\omega L}{2R + j\omega L} \\ \underline{U}_{\text{BX}} \frac{R}{2R + j\omega L} \end{bmatrix}.$$

Принимаем $\underline{U}_{\text{BX}} = 1$ В и находим передаточную функцию по напряжению:

$$\bar{\mathbf{H}}_u = \frac{\bar{\mathbf{V}}_y}{\underline{U}_{\text{BX}}}.$$

$$\bar{\mathbf{H}}_u = \begin{bmatrix} \frac{R + j\omega L}{2R + j\omega L} \\ \frac{R}{2R + j\omega L} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Узлы} \\ (2) \\ (3) \end{matrix}.$$

На рис. 4.33 $\underline{U}_{\text{ВЫХ}} = \underline{V}_3$, следовательно,

$$\underline{H}_u = \frac{R}{2R + j\omega L}; \quad H_u(\omega) = \frac{R}{\sqrt{4R^2 + (\omega L)^2}}; \quad \varphi_u(\omega) = -\arctg \frac{\omega L}{2R}.$$

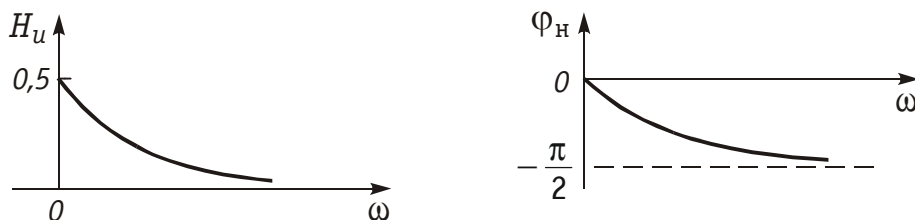


Рис. 4.34

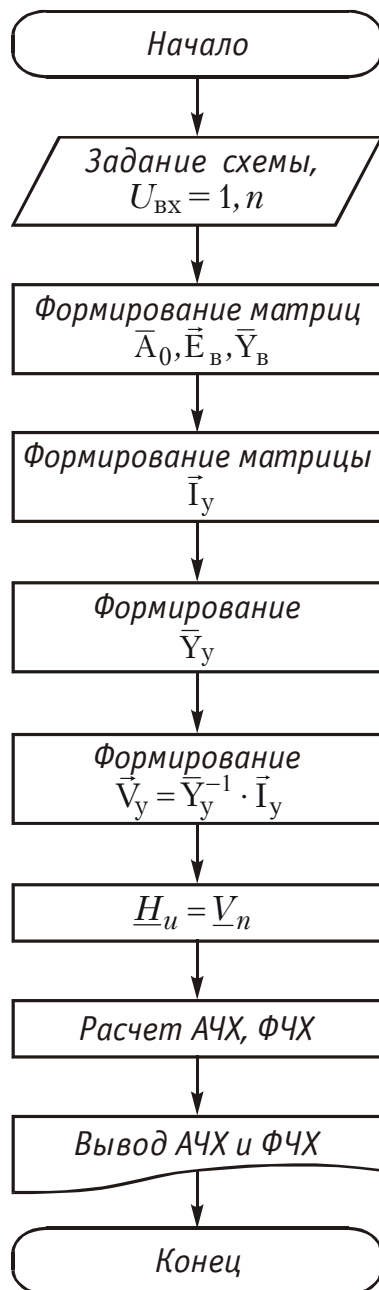


Рис. 4.35

На рис. 4.34 приведены графики АЧХ – $H_u(\omega)$ и ФЧХ – $\varphi_u(\omega)$.

3. Алгоритм расчета АЧХ и ФЧХ. На рис. 4.35 приведен алгоритм расчета АЧХ и ФЧХ цепи на основе метода узловых напряжений.

Вопросы и задания для самопроверки

1. Что такое АЧХ и ФЧХ цепи, если рассматривается ее комплексная передаточная функция по напряжению?
2. Почему резонанс в последовательном колебательном контуре называется резонансом напряжений?
3. Что такое добротность колебательного контура?
4. Что такое полоса пропускания колебательного контура?

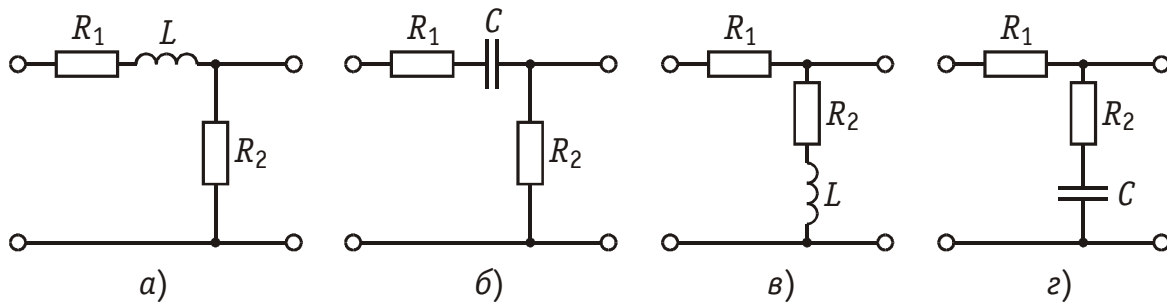


Рис. 4.36

5. Почему резонанс в параллельном колебательном контуре называется резонансом токов?
6. Каковы эквивалентные схемы последовательного и параллельного контуров на резонансной частоте?
7. Почему последовательный контур должен работать с источником сигнала, имеющим малое внутреннее сопротивление, а параллельный контур — с источником, имеющим большое внутреннее сопротивление?
8. В чем заключается достоинство связанных колебательных контуров по сравнению с одиночным?
9. Каковы основные свойства реактивных двухполюсников?
10. Качественно построить АЧХ цепей, получаемых на рисунке 4.36.
11. Последовательный колебательный контур, имеющий $L = 100 \text{ мкГн}$, $C = 2,5 \text{ нФ}$, $R = 6 \text{ Ом}$, работает с источником сигнала, у которого $R_{\Gamma} = 2 \text{ Ом}$. Какова будет полоса пропускания системы до и после подключения нагрузки к емкостному элементу с сопротивлением $R_{\text{н}} = 10 \text{ кОм}$?

Ответ: $\Delta f_{\text{а}} = 12,7 \text{ кГц}$ — ненагруженного и

$\Delta f_{\text{а.н}} = 19,1 \text{ кГц}$ — нагруженного контуров.

ГЛАВА 5. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ В РЕЖИМЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

5.1. Негармонические периодические сигналы.

Разложение в ряд Фурье

При передаче информации по каналам связи в процессе преобразования сигналов в различных устройствах, как правило, используют негармонические колебания, поскольку чисто гармонические колебания не могут являться носителями информации. Для передачи сообщений осуществляют модуляцию гармонического колебания по амплитуде — амплитудная модуляция (АМ), частоте —

частотная модуляция (ЧМ) или фазе — фазовая модуляция (ФМ), либо используют импульсные сигналы, модулируемые по амплитуде — амплитудно-импульсная модуляция (АИМ), ширине — широтно-импульсная модуляция (ШИМ), временному положению — время-импульсная модуляция (ВИМ). Существуют и другие, более сложные сигналы, формируемые по специальным законам. Отличительной чертой указанных сигналов является сложный негармонический характер. Несинусоидальный вид имеют токи и напряжения, формируемые в различных импульсных и цифровых устройствах (гл. 19), несинусоидальный характер приобретают гармонические сигналы, проходящие через различные нелинейные устройства (гл. 11) и т. д. Все это приводит к необходимости разработки специальных методов анализа и синтеза электрических цепей, находящихся под воздействием периодических несинусоидальных и непериодических токов и напряжений. В основе этих методов лежат спектральные представления несинусоидальных воздействий, базирующиеся на разложении в ряд или интеграл Фурье.

Из математического анализа известно, что периодическая негармоническая функция $f(t)$ удовлетворяющая условиям Дирихле*, может быть разложена в ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t); \quad \omega_1 = 2\pi/T, \quad (5.1)$$

где a_k, b_k — коэффициенты разложения, определяемые уравнениями

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega_1 t dt; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega_1 t dt. \quad (5.2)$$

Величина $a_0/2 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$ представляет среднее за период значение функции $f(t)$ ** и называется постоянной составляющей.

В теоретических исследованиях обычно вместо формулы (5.1) используют другую, основанную на замене независимой переменной $\alpha = \omega_1 t$:

$$f(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\alpha + b_k \sin k\alpha), \quad (5.3)$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos k\alpha d\alpha; \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin k\alpha d\alpha. \quad (5.4)$$

* Эти условия требуют, чтобы на периоде T функция $f(t)$ имела конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов, что для реальных электрических сигналов обычно выполняется.

** Функция $f(t)$ может иметь смысл как тока, так и напряжения.

Уравнение (5.3) есть тригонометрическая форма ряда Фурье. При анализе цепей часто удобнее пользоваться комплексной формой ряда Фурье, которая может быть получена из (5.3) с помощью формул Эйлера:

$$\cos k\alpha = (e^{jk\alpha} + e^{-jk\alpha})/2; \quad \sin k\alpha = (e^{jk\alpha} - e^{-jk\alpha})/(2j). \quad (5.5)$$

Подставив (5.5) в уравнение (5.3), после несложных преобразований получим комплексную форму ряда Фурье:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{A}_k e^{jk\alpha}, \quad (5.6)$$

где \underline{A}_k — комплексная амплитуда k -й гармоники:

$$\underline{A}_k = a_k - jb_k = A_k e^{-j\varphi_k}, \quad (5.7)$$

где $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ — амплитуда; $\varphi_k = \arctg(b_k/a_k)$ — начальная фаза k -й гармоники. Подставив значения a_k и b_k из (5.4) в (5.7), получим:

$$\underline{A}_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) e^{-jk\alpha} d\alpha, \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots). \quad (5.8)$$

Совокупность амплитуд $0,5A_k = 0,5A_{-k}$ в разложении (5.6), отложенных против соответствующих положительных и отрицательных частот*, образует симметричный относительно оси координат (вследствие четности коэффициентов a_k) линейчатый амплитудный спектр.

Совокупность ординат $\varphi_k = -\varphi_{-k}$ из (5.7), входящих в разложение (5.6) и отложенных против соответствующих положительных и отрицательных частот, образует симметричный относительно начала оси координат (вследствие нечетности коэффициентов b_k) *линейчатый фазовый спектр*.

Разложение (5.3) можно представить и в другой форме. Если учесть, что $a_k = A_k \cos \varphi_k$ и $b_k = A_k \sin \varphi_k$, то после подстановки в (5.3) получим:

$$f(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\alpha - \varphi_k). \quad (5.9)$$

Если рассматривать постоянную составляющую $a_0/2$ как нулевую гармонику с начальной фазой $\varphi_0 = 0$, то разложение (5.9) примет вид

$$f(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\alpha - \varphi_k). \quad (5.10)$$

В частном случае, когда функция $f(\alpha)$ симметрична относительно оси ординат (рис. 5.1, а), в разложении (5.3) окажутся только четные (косинусоидальные) гармоники:

* Понятие отрицательной частоты не имеет физического смысла, однако оно удобно в теоретических исследованиях, поэтому широко используется в специальной литературе.

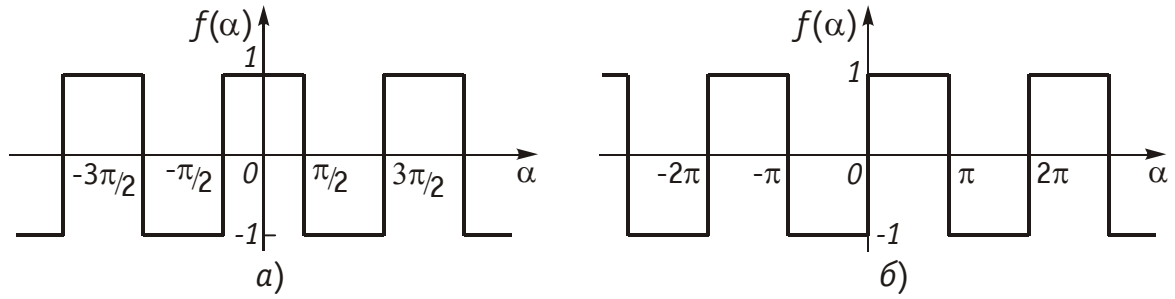


Рис. 5.1

$$f(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\alpha, \quad (5.11)$$

а при симметричности $f(\alpha)$ относительно начала координат (рис. 5.1, б) нечетные гармоники

$$f(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\alpha. \quad (5.12)$$

При сдвиге начала отсчета функции $f(\alpha)$ ее амплитудный спектр не изменяется, а меняется только фазовый спектр. Действительно, сдвинем функцию $f(\alpha)$ по оси времени влево на t_0 и обозначим $\alpha_1 = \omega_1(t + t_0)$.

Тогда разложение (5.9) примет вид

$$f(\alpha_1) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\alpha_1 - \varphi_k) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\alpha - \varphi'_k) \quad (5.13)$$

где $\varphi'_k = \varphi_k + \omega t_0$.

Пример. Разложить в ряд Фурье прямоугольные колебания (рис. 5.1, б). Учитывая, что $f(\alpha)$ симметрична относительно начала координат в разложении (5.3) останутся только синусоидальные гармоники (5.12), где b_k определится согласно (5.4):

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\alpha) \sin k\alpha d\alpha = \frac{4}{k\pi}, \quad \text{где } k = 1, 3, 5, \dots$$

Подставив b_k в (5.12), получим разложение в ряд Фурье:

$$f(\alpha) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin \alpha}{1} + \frac{\sin 3\alpha}{3} + \frac{\sin 5\alpha}{5} + \dots \right). \quad (5.14)$$

Далее сдвинем $f(\alpha)$ на $\pi/2$ влево (см. рис. 5.1, а). Тогда согласно (5.13) получим

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin(\alpha + \pi/2)}{1} + \frac{\sin 3(\alpha + \pi/2)}{3} + \frac{\sin 5(\alpha + \pi/2)}{5} + \dots \right] = \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos \alpha}{1} - \frac{\cos 3\alpha}{3} + \frac{\cos 5\alpha}{5} - \dots \right), \end{aligned} \quad (5.15)$$

т. е. получили разложение по косинусоидальным составляющим как и должно быть для симметричного относительно оси ординат сигнала.

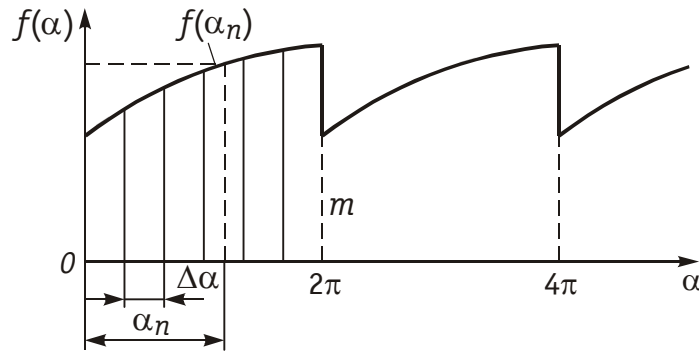


Рис. 5.2

В ряде случаев, когда периодическая функция $f(\alpha)$ задана графически и имеет сложную форму, ее разложение в ряд Фурье можно осуществить графо-аналитическим способом. Его суть заключается в том, что период сигнала T (рис. 5.2) разбивают на m интервалов, равных $\Delta\alpha = 2\pi/m$, причем точки разрыва $f(\alpha)$ не должны попадать на середину участков разбиения; определяют значение сигнала $f(\alpha_n)$ в середине каждого участка разбиения.

Находят коэффициенты разложения a_k и b_k путем замены интеграла в (5.2) конечной суммой

$$\left. \begin{aligned} a_k &\approx \frac{2}{m} \sum_{n=1}^m f(\alpha_n) \cos k(n-1/2) \frac{2\pi}{m}, \\ b_k &\approx \frac{2}{m} \sum_{n=1}^m f(\alpha_n) \sin k(n-1/2) \frac{2\pi}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Уравнение (5.16) легко программируется и при вычислении a_k и b_k , может использоваться ЭВМ.

5.2. Действующее, среднее значение и мощность периодического негармонического сигнала

Для определенности положим, что $f(t)$ имеет смысл тока $i(t)$. Тогда действующее значение периодического негармонического тока определяется согласно (3.5), где $i(t)$ определяется уравнением (5.10):

$$i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} I_{mk} \cos(k\alpha - \varphi_k) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \cos(k\omega_1 t - \varphi_k). \quad (5.17)$$

Подставив это значение тока в (3.5), после интегрирования получим

$$I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{mk}^2}{2}} = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}, \quad (5.18)$$

т. е. действующее значение периодического негармонического тока I полностью определяется действующими значениями его гармоник I_k и не зависит от их начальных фаз φ_k .

Аналогичным образом находим действующее значение периодического несинусоидального напряжения:

$$U = \sqrt{U_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{mk}^2}{2}} = \sqrt{U_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}, \quad (5.19)$$

Среднее значение тока определяется согласно общему выражению (3.9). Причем обычно берут среднее значение $i(t)$ по абсолютной величине

$$I_{cp(2)} = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt. \quad (5.20)$$

Аналогично определяется $U_{cp(2)}$.

С точки зрения теории цепей, большой интерес представляет средняя активная мощность негармонического сигнала и распределение ее между отдельными гармониками.

Средняя активная мощность периодического несинусоидального сигнала

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt, \quad (5.21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} i(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} I_{mk} \cos(k\omega_1 t - \varphi_k), \\ u(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} U_{mk} \cos(k\omega_1 t - \varphi_k + \psi_k), \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

ψ_k — фазовый сдвиг между током и напряжением k -й гармоники. Подставляя значения $i(t)$ и $u(t)$ из (5.22) в уравнение (5.21), после интегрирования получаем:

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \cos \psi_k = \sum_{k=0}^{\infty} P_k, \quad (5.23)$$

т. е. средняя за период активная мощность периодического негармонического сигнала равна сумме мощностей отдельных гармоник. Формула (5.23) является одной из форм широко известного *равенства Парсеваля*.

Аналогично находим реактивную мощность

$$Q = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \sin \psi_k = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k \quad (5.24)$$

и полную мощность

$$S = UI = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2 \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}. \quad (5.25)$$

Следует подчеркнуть, что в отличие от гармонических сигналов (см. (3.121)) для негармонических сигналов

$$S \neq \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (5.26)$$

Величина $P_{\text{иск}} = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)}$ носит название *мощности искажений* и характеризует степень различия в формах тока $i(t)$ и напряжения $u(t)$.

Кроме мощности искажений периодические негармонические сигналы характеризуются еще рядом *коэффициентов*: *мощности*, $k_M = P/S$; *формы* $K_F = U/U_{\text{ср}(2)}$; *амплитуды* $K_A = U_m/U$; *искажений* $k_{\text{и}} = U_1/U$; *гармоник* $k_{\text{г}} = \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} U_k^2/U_1^2}$ и др. Для синусоидального сигнала $k_F = \pi/2\sqrt{2} \approx 1,11$; $k_A = \sqrt{2} \approx 1,41$; $k_{\text{и}} = 1$; $k_{\text{г}} = 0$.

5.3. Спектры периодических негармонических сигналов

Рассмотрим последовательность прямоугольных импульсов, изображенную на рис. 5.3, а. Сигналы подобной формы находят очень широкое применение в радиотехнике и электросвязи: телеграфия, цифровые системы передачи, системы многоканальной связи с временным разделением каналов, различные импульсные и цифровые устройства и др. (см. гл. 19). Импульсная последовательность характеризуется следующими основными параметрами: амплитудой импульса $A_{\text{и}}^*$, его длительностью $t_{\text{и}}$ и периодом следования T . Отношение периода T к длительности $t_{\text{и}}$ называется *скважностью импульсов* и обозначается через $q = T/t_{\text{и}}$. Обычно значения скважности импульсов лежат в пределах от нескольких единиц (в измерительной технике, устройствах дискретной передачи и обработки информации), до нескольких сотен или тысяч (в радиолокации).

Для нахождения спектра последовательности прямоугольных импульсов воспользуемся рядом Фурье в комплексной форме (5.6).

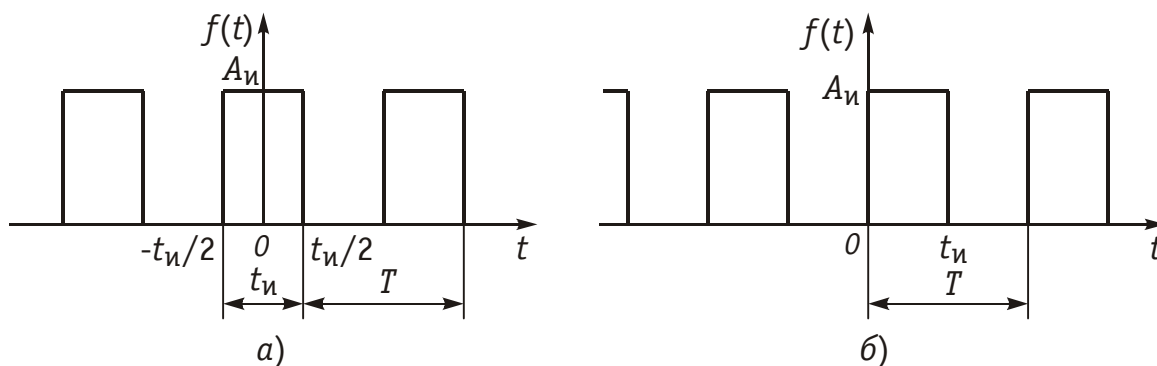


Рис. 5.3

* Величина $A_{\text{и}}$ может иметь смысл как напряжения, так и тока.

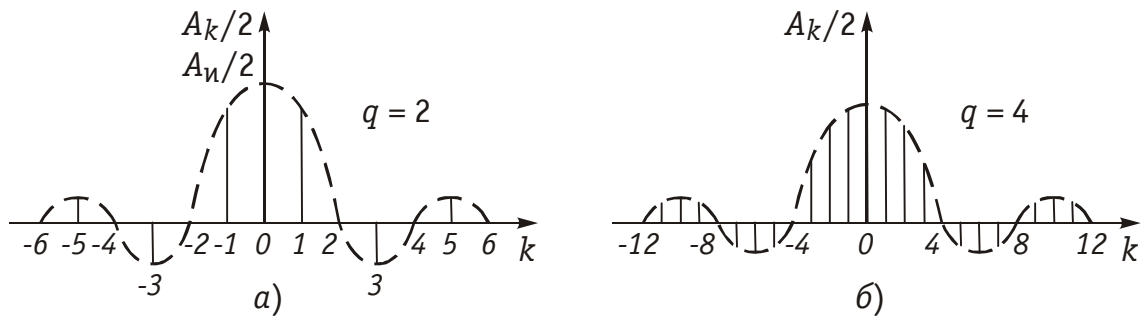


Рис. 5.4

Комплексная амплитуда k -й гармоники равна согласно (5.8) после возвращения к исходной переменной t .

$$\begin{aligned} \underline{A}_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{2}{T} \int_{-t_n/2}^{t_n/2} A_n e^{jk\omega_1 t} dt = \\ &= \frac{2A_n}{q} \frac{\sin(k\omega_1 t_n/2)}{k\omega_1 t_n/2}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Подставив значение \underline{A}_k в уравнение (5.6), получим разложение в ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{A}_k e^{jk\omega_1 t} = \frac{A_n}{q} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\omega_1 t_n/2)}{k\omega_1 t_n/2} e^{jk\omega_1 t}. \quad (5.28)$$

На рис. 5.4 изображен спектр комплексных амплитуд для $q = 2$ и $q = 4$. Как видно из рисунка, спектр последовательности прямоугольных импульсов представляет собой дискретный спектр с огибающей (штриховая линия на рис. 5.4), которая описывается функцией

$$f(x) = \sin(x)/x, \quad \text{где } x = k\pi/q, \quad (5.29)$$

носящей название функции отсчетов (см. гл. 19). Число спектральных линий между началом отсчета по оси частот и первым нулем огибающей равно $q - 1$. Постоянная составляющая сигнала (среднее значение) $a_0/2 = A_n/q$, а действующее значение $A = A_n/\sqrt{q}$, т. е. чем больше скважность, тем меньше уровень постоянной составляющей и действующее значение сигнала. С увеличением скважности q число дискретных составляющих увеличивается — спектр становится гуще (см. рис. 5.4, б), и амплитуда гармоник убывает медленнее. Следует подчеркнуть, что в соответствии с (5.27) спектр рассматриваемой последовательности прямоугольных импульсов вещественный.

Из спектра комплексных амплитуд (5.27) можно выделить амплитудный $A_k = |\underline{A}_k|$ и фазовый спектр $\phi_k = \arg \underline{A}_k$, изображенный на рис. 5.5 для случая $q = 4$. Из рисунков видно, что амплитудный спектр является четной, а фазовый — нечетной функцией частоты. Причем, фазы отдельных гармоник принимают либо нулевое зна-

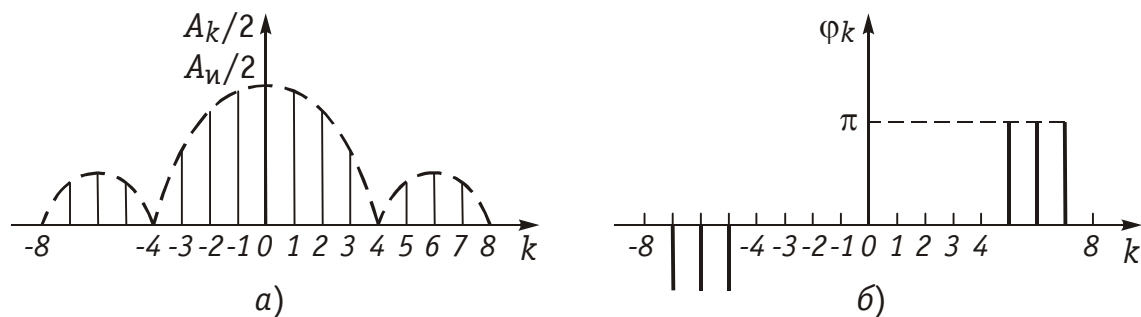


Рис. 5.5

чение между узлами, где синус положительный, либо $\pm\pi$, где синус отрицательный (рис. 5.5, б)

На основании формулы (5.28) получим тригонометрическую форму разложения в ряд Фурье по четным гармоникам (сравни с (5.15)):

$$f(t) = \frac{A_n}{q} + \frac{4A_n}{\pi} \left(\frac{\cos \omega_1 t}{1} - \frac{\cos 3\omega_1 t}{3} + \frac{\cos 5\omega_1 t}{5} - \dots \right). \quad (5.30)$$

При сдвиге импульсной последовательности по оси времени (рис. 5.2, б) в соответствии с (5.13) ее амплитудный спектр останется прежним, а фазовый спектр изменится:

$$f(t) = \frac{A_n}{q} + \frac{4A_n}{\pi} \left(\frac{\sin \omega_1 t}{1} + \frac{\sin 3\omega_1 t}{3} + \frac{\sin 5\omega_1 t}{5} + \dots \right). \quad (5.31)$$

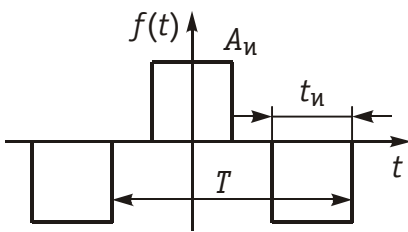
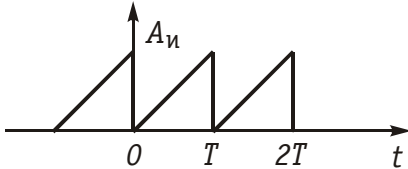
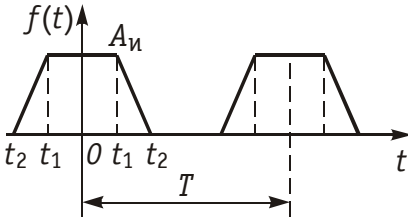
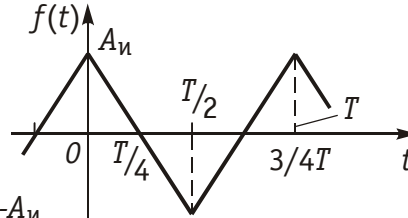
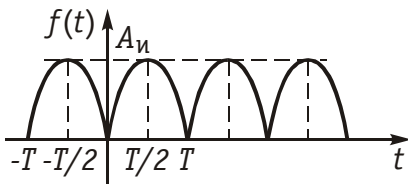
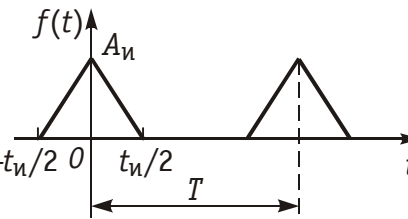
В случае, когда периодическая последовательность имеет разнополярную форму (см. рис. 5.1), в спектре будет отсутствовать постоянная составляющая (сравните (5.30) и (5.31) с (5.14) и (5.15)).

Аналогичным образом можно исследовать спектральный состав периодических негармонических сигналов другой формы. В табл. 5.1 приведено разложение в ряд Фурье некоторых наиболее распространенных сигналов.

5.4. Расчет цепей при периодических негармонических воздействиях

В основе расчета линейных электрических цепей, находящихся под воздействием периодических негармонических сигналов, лежит принцип наложения (см. § 1.6). Его суть применительно к негармоническим воздействиям заключается в разложении негармонического периодического сигнала в одну из форм ряда Фурье (см. § 5.1) и определении реакции цепи от каждой гармоники в отдельности. Результирующая реакция находится путем суперпозиции (наложения) полученных частичных реакций. Таким образом, расчет цепей при периодических негармонических воздействиях включает в себя задачу анализа спектрального состава сигнала (разложение его в ряд Фурье), расчет цепи от каждой гар-

Таблица 5.1

	Типы сигнала	Разложение в ряд Фурье
1		$f(t) = \frac{4A_n}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\omega_1 t}{2} \cos k\omega_1 t$
2		$f(t) = A_n \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin k\omega_1 t \right]$
3		$f(t) = A_n \left[\frac{(t_1 + t_2)}{T} + \frac{2T}{\pi^2 (t_2 - t_1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \times \right. \\ \left. \times \sin k \frac{\pi(t_1 + t_2)}{T} \sin k \frac{\pi(t_2 - t_1)}{T} \cos k\omega_1 t \right]$
4		$f(t) = \frac{8A_n}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k \frac{\pi}{2}}{k^2} \cos k\omega_1 t$
5		$f(t) = \frac{2A_n}{\pi} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\omega_1 t + \pi)}{4k^2 - 1} \right]$
6		$f(t) = A_n \left[\frac{t_n}{2T} + \frac{4T}{\pi^2 t_n} \sum_{k=1}^{\infty} \times \right. \\ \left. \times \frac{\sin^2 k \frac{\pi t_n}{2T}}{k^2} \cos k\omega_1 t \right]$

монической составляющей и задачу синтеза, в результате которого определяется результирующий выходной сигнал как функция времени (частоты) или его действующее (амплитудное значение).

При решении задачи анализа обычно пользуются тригонометрической (5.3) или комплексной (5.6) формой ряда Фурье с ограниченным числом членов разложения, что приводит к некоторой погрешности аппроксимации истинного сигнала. Коэффициенты разложения a_k и b_k в (5.3) или A_k и φ_k в (5.6) определяются с по-

мощью уравнений (5.4), (5.7) и (5.8). При этом входной сигнал $f(\alpha)$ должен быть задан аналитически. В случае, если сигнал задается графически, например в виде осциллограммы, то для нахождения коэффициентов разложения a_k и b_k можно использовать графоаналитический метод (см. (5.16)).

Расчет цепи от отдельных гармоник ведется обычно символическим методом (см. гл. 3). При этом необходимо иметь в виду, что на k -й гармонике индуктивное сопротивление $X_L(k) = k\omega L$, а емкостное сопротивление $X_C(k) = 1/(k\omega C)$, т. е. на k -й гармонике индуктивное сопротивление в k раз больше, а емкостное в k раз меньше, чем на первой гармонике. Этим в частности объясняется то обстоятельство, что высокие гармоники в емкостях выражены сильнее, а в индуктивности слабее, чем в приложенном к ним напряжении. Активное сопротивление R на низких и средних частотах можно считать не зависящим от частоты.

После определения искомых токов и напряжений от отдельных гармоник методом наложения находят результирующую реакцию цепи на негармоническое периодическое воздействие. При этом либо определяют мгновенное значение результирующего сигнала на основании расчета амплитуд и фаз отдельных гармоник, либо его амплитудные или действующие значения согласно уравнениям (5.18), (5.19). При определении результирующей реакции необходимо помнить, что в соответствии с представлением периодических негармонических колебаний на комплексной плоскости (см. § 3.2) векторы различных гармоник вращаются с различной угловой частотой.

Пример. К цепи, изображенной на рис. 5.6, приложено напряжение $u(t)$ в форме прямоугольных импульсов с периодом повторения $T = 2t_n$ и амплитудой $A_n = 1\text{В}$ (см. рис. 5.3, б). Определить мгновенное и действующее значения напряжения на емкости.

Разложение данного напряжения в ряд Фурье определяется по формуле (5.31). Ограничимся первыми тремя членами разложения (5.31):

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{4 \sin \omega_1 t}{\pi} + \frac{4 \sin 3\omega_1 t}{3\pi}.$$

Таким образом, приложенное напряжение содержит постоянную составляющую $U_0 = 1/2$, первую $U_1 = 4/\pi$ и третью $U_3 = 4/(3\pi)$ гармоники с нулевыми начальными фазами. Найдем напряжение на емкости от постоянной составляющей приложенного напряжения U_0 :

$$U_{C(0)} = I_{2(0)} R_2 = \frac{U_0}{R_1 + R_2} R_2.$$

Комплексное действующее напряжение от первой гармоники

$$\underline{U}_{C(1)} = \underline{I}_{3(1)} \frac{1}{j\omega_1 C} = \underline{I}_{2(1)} (R_2 + j\omega_1 L).$$

Токи $\underline{I}_{2(1)}$ или $\underline{I}_{3(1)}$ можно найти по формуле разброса (см. § 2.2). Например, для $\underline{I}_{3(1)}$ имеем:

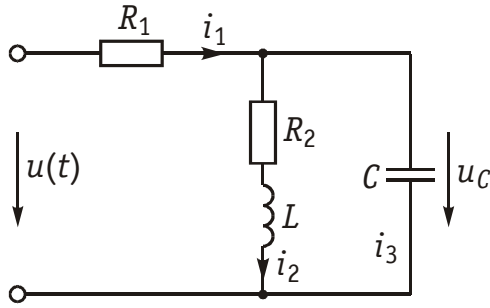


Рис. 5.6

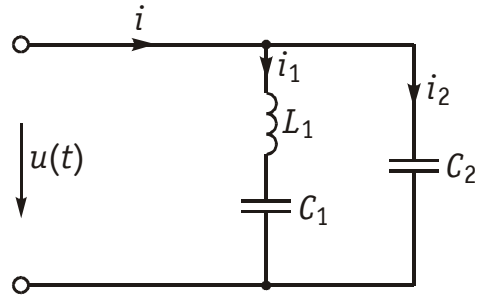


Рис. 5.7

$$\underline{I}_{3(1)} = \underline{I}_{1(1)} \frac{R_2 + j\omega_1 L}{R_2 + j(\omega_1 L - 1/\omega_1 C)},$$

где

$$\underline{I}_{1(1)} = \frac{\underline{U}_{(1)}}{R_1 + \frac{(R_2 + j\omega_1 L)/(j\omega_1 C)}{R_2 + j(\omega_1 L - 1/\omega_1 C)}}.$$

Аналогичным образом находится напряжение на емкости от 3-й гармоники;

$$U_{C(3)} = \underline{I}_{3(3)} / (j3\omega_1 C),$$

где

$$\underline{I}_{3(3)} = \underline{I}_{1(3)} \frac{R_2 + j3\omega_1 L}{R_2 + j(3\omega_1 L - 1/3\omega_1 C)};$$

$$\underline{I}_{1(3)} = \frac{\underline{U}_{(3)}}{R_1 + \frac{(R_2 + j3\omega_1 L)/(j3\omega_1 C)}{R_2 + j(3\omega_1 L - 1/3\omega_1 C)}}.$$

После нахождения комплексных действующих значений напряжений на емкости отдельных гармоник и выделения в них модулей $U_{C(1)}$, $U_{C(3)}$ и фаз $\varphi_{C1} = \arg \underline{U}_{C(1)}$, $\varphi_{C3} = \arg \underline{U}_{C(3)}$ записывает мгновенное значение напряжения на емкости в форме суммы (ряда):

$$u_C(t) = U_{C(0)} + U_{C(1)} \sin(\omega_1 t + \varphi_{C1}) + U_{C(3)} \sin(3\omega_1 t + \varphi_{C3}).$$

Действующее значение напряжения определяем согласно (5.19)

$$U_C = \sqrt{U_{C(0)}^2 + U_{C(1)}^2 + U_{C(3)}^2}.$$

При анализе резонансных явлений в электрических цепях при периодических несинусоидальных воздействиях следует иметь в виду, что резонанс напряжений и токов может достигаться на разных гармониках. При этом, как и ранее, резонансом на k -й гармонике называется такое состояние электрической цепи, состоящей из разнохарактерных реактивных элементов, при котором фазовый сдвиг между входным током и приложенным напряжением k -х гармоник равен нулю. Явление резонанса может быть использовано для выделения отдельных гармоник из периодического несинусои-

дального сигнала. Следует подчеркнуть, что в цепи может одновременно быть достигнут резонанс токов на одной частоте и резонанс напряжений на другой.

Пример. Для цепи, изображенной на рис. 5.7, при заданной ω_1 , L_1 найти значение C_1 и C_2 , при которых одновременно возникает резонанс напряжений на 1-й и резонанс токов на 5-й гармонике. Из условия резонанса напряжений находим, что входное реактивное сопротивление цепи на первой гармонике должно равняться нулю:

$$X(j\omega_1) = \frac{(\omega_1 L_1 - 1/\omega_1 C_1) \cdot 1/\omega_1 C_2}{j(\omega_1 L_1 - 1/\omega_1 C_1 - 1/\omega_1 C_2)} = 0, \quad (5.32)$$

а на пятой — бесконечности (входная реактивная проводимость на пятой гармонике должна быть равна нулю):

$$X(j5\omega_1) = \frac{(5\omega_1 L_1 - 1/5\omega_1 C_1) \cdot 1/5\omega_1 C_2}{j(5\omega_1 L_1 - 1/5\omega_1 C_1 - 1/5\omega_1 C_2)} = \infty. \quad (5.33)$$

Из условий (5.32) и (5.33) находим искомое значение емкостей:

$$C_1 = 1/(\omega_1^2 L_1); \quad C_2 = 1/(24\omega_1^2 L_1).$$

Вопросы и задания для самопроверки

1. Какова математическая модель спектра периодического несинусоидального сигнала?
2. Какой вид имеет спектр периодического негармонического сигнала?
3. Как изменяется спектр периодического негармонического сигнала при сдвиге начала отсчета заданной функции?
4. Как определить спектр периодической функции, заданной графически?
5. Как определяется средняя за период активная мощность периодического негармонического сигнала?
6. Как определяется и что характеризует мощность искажений?
7. Как рассчитывается спектр комплексных амплитуд последовательности прямоугольных импульсов?
8. Как влияет скважность импульсов на спектр сигнала?
9. Рассчитать и построить спектр амплитуд последовательности прямоугольных импульсов с параметрами: $U_m = 3\text{В}$, $f = 0,5\text{ кГц}$ для двух случаев ($q = 2$, $q = 5$).

Ответ: 1) $q = 2$;

$$U_0 = 3\text{ В}; U_{m1} = 1,9\text{ В}; U_{m2} = 0; U_{m3} = 0,64\text{ В}; \\ U_{m4} = 0; U_{m5} = 0,38\text{ В}; U_{m6} = 0.$$

2) $q = 5$;

$$U_0 = 1,2 \text{ В}; U_{m1} = 1,1 \text{ В}; U_{m2} = 0,91 \text{ В};$$

$$U_{m3} = 0,6 \text{ В}; U_{m4} = 0,28 \text{ В}; U_{m5} = 0;$$

$$U_{m6} = 0,19 \text{ В}; U_{m7} = 0,25 \text{ В}; U_{m8} = 0,23 \text{ В};$$

$$U_{m9} = 0,12 \text{ В}; U_{m10} = 0.$$

10. Каков алгоритм расчета линейных электрических цепей, находящихся под воздействием периодических негармонических сигналов?

11. На вход цепи, изображенной на рис. 5.8, поступает периодический негармонический сигнал $u(t) = U_0 + U_{m1} \sin \omega_1 t + U_{m3} \sin(3\omega_1 t + \varphi_3)$; $U_0 = 30 \text{ В}$; $U_{m1} = 100 \text{ В}$; $U_{m3} = 40 \text{ В}$; $\varphi_3 = 20^\circ$. Параметры элементов цепи на основной частоте известны: $\omega_1 L = 12 \text{ Ом}$; $1/(\omega_1 C) = 30 \text{ Ом}$; $R_1 = 6 \text{ Ом}$; $R_2 = 5 \text{ Ом}$; $R_3 = 20 \text{ Ом}$. Рассчитать:

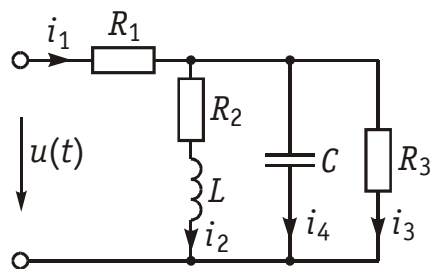


Рис. 5.8

1) ток в неразветвленной части схемы и записать его мгновенное значение; 2) действующие значения всех токов; 3) активную мощность, потребляемую цепью.

Ответ: 1) $i_1(t) = 3 + 5,88 \sin(\omega_1 t - 16^\circ 30') + 2,6 \sin(3\omega_1 t + 55^\circ), \text{ А.}$

2) $I_1 = 5,45 \text{ А}; I_2 = 4,4 \text{ А}; I_3 = 2,64 \text{ А}; I_4 = 2,57 \text{ А.}$

3) $P = 415 \text{ Вт.}$

12. Резонансные явления в линейных электрических цепях при негармонических периодических воздействиях.

13. Для цепи изображенной на рис. 5.7, найти значения C_1 и C_2 , при которых одновременно возникает резонанс напряжений на 1-ой гармонике и резонанс токов на 5-ой гармонике, если заданы $L_1 = 10 \text{ мГн}$; $\omega_1 = 5 \cdot 10^3 \text{ рад/с}$.

Ответ: $C_1 = 4 \text{ мкФ}; C_2 = 0,167 \text{ мкФ.}$

ГЛАВА 6. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ. КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД АНАЛИЗА

6.1. Переходный режим электрических цепей. Законы коммутации

В предыдущих главах рассматривались процессы в электрических цепях и методы их расчета в установившемся режиме, т. е. в режиме, при котором напряжения и токи в цепях либо не зависят

от времени, либо являются периодическими функциями времени в зависимости от вида приложенного воздействия. Установившийся режим в цепи достигается обычно через определенный промежуток времени после начала воздействия, поэтому рассмотренные ранее методы анализа не охватывают так называемый переходный режим от начала воздействия до установившегося состояния цепи. Переходной режим работы цепи обусловлен наличием в ней реактивных элементов (индуктивности, емкости), в которых накапливается энергия магнитного и электрического полей. При различного рода воздействиях (подключении к цепи или исключении источников электрической энергии, изменении параметров цепи) изменяется энергетический режим работы цепи, причем эти изменения не могут осуществляться мгновенно в силу непрерывности изменения энергии электрического и магнитного полей (*принцип непрерывности*), что и приводит к возникновению переходных процессов. Следует подчеркнуть, что переходные процессы во многих устройствах и системах связи являются составной «нормальной» частью режима их работы. В то же время в ряде случаев переходные процессы могут приводить к таким нежелательным явлениям, как возникновение сверхтоков и перенапряжений. Все это определяет важность рассмотрения методов анализа переходных процессов в электрических цепях.

В основе методов расчета переходных процессов лежат законы коммутации. *Коммутацией* принято называть любое изменение параметров цепи, ее конфигурации, подключение или отключение источников, приводящее к возникновению переходных процессов. Коммутацию будем считать мгновенной, однако переходный процесс, как было отмечено выше, будет протекать определенное время. Теоретически для завершения переходного процесса требуется бесконечно большое время, но на практике его принимают конечным, зависящим от параметров цепи. Будем считать, что коммутация осуществляется с помощью идеального ключа K (рис. 6.1), сопротивление которого в разомкнутом состоянии бесконечно велико, а в замкнутом равно нулю. Направление замыкания или размыкания ключа будем показывать стрелкой. Будем также считать, если не оговорено иное, что коммутация осуществляется в момент $t = 0$.

Различают первый и второй законы коммутации. *Первый закон коммутации* связан с непрерывностью изменения магнитного поля катушки индуктивности $W_L = Li^2/2$ и гласит: *в начальный момент $t = 0_+$ непосредственно после коммутации ток в индуктивности имеет то же значение, что и в момент $t = 0_-$ до коммутации и с этого момента плавно изменяется**

* Здесь и далее под $f(0_-)$ понимается левосторонний предел функции $f(t)$ при $t \rightarrow 0_-$, а под $f(0_+)$ — правосторонний предел $f(t)$ при $t \rightarrow 0_+$.

$$i_L(0_-) = i_L(0_+). \quad (6.1)$$

Второй закон коммутации связан с непрерывностью изменения электрического поля емкости $W_C = Cu^2/2$; в начальный момент $t = 0_+$ непосредственно после коммутации напряжение на емкости имеет то же значение, что и в момент: $t = 0_-$ до коммутации и с этого момента плавно изменяется:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+). \quad (6.2)$$

В отличие от тока в индуктивности i_L и напряжения на емкости u_C напряжение на индуктивности u_L и ток в емкости i_C могут изменяться скачком, так как согласно (1.9) и (1.12) они являются производными от i_L и u_C и с ними непосредственно не связана энергия магнитного и электрического полей. Значения токов в индуктивности $i_L(0_+)$ и напряжений на емкостях $u_C(0_+)$ образуют *начальные условия задачи*. В зависимости от начального энергетического состояния цепи различают два типа задач расчета переходных процессов: *задачи с нулевыми начальными условиями*, когда непосредственно после коммутации (при $t = 0_+$) $i_L(0_+) = 0$; $u_C(0_+) = 0$ (т. е. $W_L(0_+) + W_C(0_+) = 0$) и *задачи с ненулевыми начальными условиями*, когда $i_L(0_+) \neq 0$ и (или) $u_C(0_+) \neq 0$ (т. е. $W_L(0_+) + W_C(0_+) \neq 0$). Нулевые и ненулевые значения начальных условий для i_L и u_C называются *независимыми*, а начальные условия остальных токов и напряжений *зависимыми*. Независимые начальные условия определяются с помощью законов коммутации (6.1) и (6.2).

6.2. Классический метод расчета переходных процессов

В основе классического метода расчета переходных процессов в электрических цепях лежит составление интегрально-дифференциальных уравнений для мгновенных значений токов и напряжений. Эти уравнения составляются на основе законов Кирхгофа, методов контурных токов, узловых напряжений и могут содержать как независимые, так и зависимые переменные. Для удобства решения обычно принято составлять дифференциальные уравнения относительно независимой переменной, в качестве которой может служить i_L или u_C . Решение полученных дифференциальных уравнений относительно выбранной переменной и составляет сущность классического метода.

Учитывая, что в ряде случаев решение дифференциальных уравнений проще интегрально-дифференциальных, полученную систему сводят к одному дифференциальному уравнению соответствующего порядка относительно выбранной независимой переменной i_L или u_C . Порядок дифференциального уравнения определя-

ется числом независимых накопителей энергии электрического и магнитного полей.

Обозначим независимую переменную (i_L или u_C) через $x = x(t)$.

Дифференциальное уравнение m -го порядка, описывающее переходный процесс в электрической цепи, находящейся под воздействием источника $w(t)$, описывается уравнением:

$$b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x = w(t), \quad (6.3)$$

где $b_0, b_1, \dots, b_{m-1}, b_m$ — коэффициенты параметров цепи; $w(t)$ — функция, описывающая характер воздействия на цепь.

Цепь, параметры которой $b_0, b_1, \dots, b_{m-1}, b_m$ — неизменны, называют *цепью с постоянными параметрами*. Если же какой-либо из коэффициентов $b_0, b_1, \dots, b_{m-1}, b_m$ — переменен, то цепь называют *параметрической*. В дальнейшем будем рассматривать цепи с постоянными параметрами.

Дифференциальное уравнение (6.3) относится к линейным неоднородным уравнениям m -го порядка. Как известно, его решение находится как сумма общего решения $x_{\text{св}}$ однородного дифференциального уравнения m -го порядка:

$$b_m \frac{d^m x_{\text{св}}}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x_{\text{св}}}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx_{\text{св}}}{dt} + b_0 x_{\text{св}} = 0 \quad (6.4)$$

и частного решения $x_{\text{пр}}$ уравнения (6.3):

$$x = x_{\text{пр}} + x_{\text{св}}, \quad (6.5)$$

где $x_{\text{св}}$ и $x_{\text{пр}}$ — общее и частное решения. Общее решение $x_{\text{св}}$ определяет свободные процессы, которые протекают в цепи без участия источника $w(t)$ (отсюда индекс «св»). Частное решение $x_{\text{пр}}$ определяет принудительный процесс (отсюда индекс «пр»), который протекает в цепи под влиянием $w(t)$. В теории цепей $x_{\text{пр}}$ обычно находят одним из ранее рассмотренных методов расчета цепей в установившемся режиме.

Свободная составляющая переходного процесса $x_{\text{св}}$ будет зависеть от характера корней характеристического уравнения:

$$b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0 = 0. \quad (6.6)$$

В случае, когда корни p_1, p_2, \dots, p_m характеристического уравнения (6.6) вещественные и различные, решение (6.4) имеет вид

$$x_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_m e^{p_m t}. \quad (6.7)$$

где A_1, A_2, \dots, A_m — постоянные интегрирования, которые находятся из начальных условий.

В случае, когда корни уравнения (6.6) вещественные и равные, т. е. $p_1 = p_2 = \dots = p_m = p$, свободная составляющая определяется уравнением

$$x_{\text{св}} = (A_1 + A_2 t + A_3 t^2 + \dots + A_m t^{m-1}) e^{pt}. \quad (6.8)$$

Представляет практический интерес и случай, когда корни попарно комплексно-сопряженные $p_{k,k-1} = -\alpha \pm j\omega_c$. При этом в формуле (6.7) соответствующая пара корней $p_{k,k-1}$ заменяется следующими видами

$$Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_c t + \theta), \quad (6.9)$$

где A, θ — постоянные интегрирования, определяемые также из начальных условий.

6.3. Переходные процессы в цепях первого порядка

Рассмотрим применение классического метода к расчету переходных процессов в цепях первого порядка. Это цепи, содержащие только однотипные реактивные элементы (емкости или индуктивности), процессы, в которых описываются дифференциальными уравнениями первого порядка

$$b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x = w(t). \quad (6.10)$$

Примером цепей первого порядка являются простейшие RL и RC цепи.

Переходные процессы в RL -цепях. Рассмотрим включение RL -цепи к источнику напряжения $u(t)$ (рис. 6.1). Из рис. 6.1 следует, что до коммутации ключ K разомкнут, поэтому ток $i_L(0_-) = 0$ и цепь находится при нулевых начальных условиях. В момент $t = 0$ ключом K замыкаем (осуществим коммутацию) цепь, подключив ее к источнику напряжения $u(t)$. После замыкания ключа K в цепи начнется переходный процесс. Для его математического описания выберем в качестве независимой переменной $i_L = i$ и составим относительно нее дифференциальное уравнение по ЗНК:

$$Ri + u_L = Ri + L \frac{di}{dt} = u(t). \quad (6.11)$$

Уравнение (6.11) относится к линейным неоднородным дифференциальным уравнениям первого порядка типа (6.3), решение которого можно записать согласно (6.5) в форме

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}, \quad (6.12)$$

где $i_{\text{св}}$ — свободная составляющая тока, обусловленная свободными процессами, протекающими в цепи без участия источника $u(t)$; $i_{\text{пр}}$ — принужденная составляющая тока, обусловленная действием источника напряжения $u(t)$.

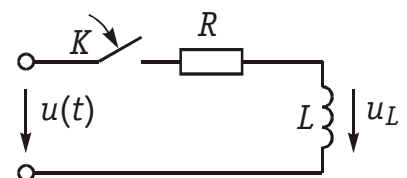


Рис. 6.1

Свободная составляющая тока $i_{\text{св}}$ есть общее решение однородного дифференциального уравнения

$$Ri_{\text{св}} + L \frac{di_{\text{св}}}{dt} = 0 \quad (6.13)$$

и согласно (6.7)

$$i_{\text{св}} = A e^{pt}, \quad (6.14)$$

где A — постоянная интегрирования; p — корень характеристического уравнения типа (6.6);

$$pL + R = 0. \quad (6.15)$$

Отсюда $p = -R/L$. Величина $1/|p|$ носит название постоянной времени цепи. В неразветвленной RL -цепи $\tau = L/R$.

Принужденная составляющая $i_{\text{пр}}$ может быть определена как частное решение уравнения (6.11). Однако, как было указано выше, $i_{\text{пр}}$ можно найти более просто методами расчета установившегося режима цепи. Рассмотрим два частных случая:

$$1) u(t) = U = \text{const}; \quad 2) u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u).$$

В первом случае принужденная составляющая может быть определена из установившегося режима: $i_{\text{пр}} = U/R$. Для нахождения постоянной интегрирования A перепишем (6.12) в форме $i = A e^{-t/\tau} + U/R$ и учтем начальные условия для i , а также первый закон коммутации (6.1):

$$i(0_-) = i(0_+) = 0 = A + U/R.$$

Отсюда $A = -U/R$. Таким образом, закон изменения тока в RL -цепи определяется уравнением

$$i = \frac{U}{R} (1 - e^{-t/\tau}). \quad (6.16)$$

Напряжение на индуктивности согласно (1.9)

$$u_L = L \frac{di}{dt} = U e^{-t/\tau}. \quad (6.17)$$

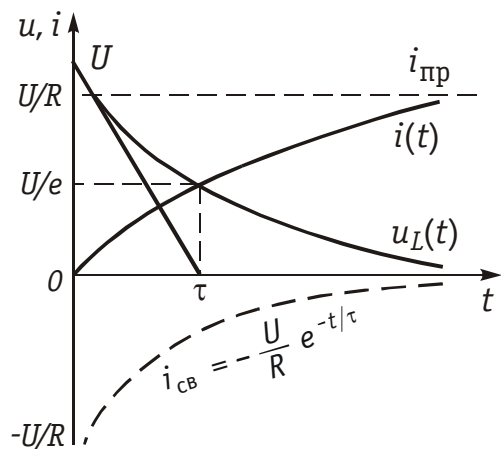


Рис. 6.2

На рис. 6.2 изображены графики зависимости $i(t)$ и $u_L(t)$. Анализ полученных уравнений (6.16) и (6.17) показывает, что чем больше постоянная времени цепи τ , тем медленнее затухает переходный процесс. На практике принято считать переходный процесс законченным при $t = (3 \dots 5)\tau$, при $t = 3\tau$ ток достигает 95% своего установившегося зна-

чения, а при $t = 5\tau$ — более 99%. Графически постоянная времени τ может определиться как интервал времени на оси t от $t = 0$ до точки пересечения касательной к u_L (рис. 6.2), в указанный момент напряжение на u_L уменьшается в e раз по сравнению с начальным.

Анализ полученных результатов показывает, что при нулевых начальных условиях в момент $t = 0_+$ индуктивность ведет себя как бесконечно большое сопротивление (разрыв цепи), а при $t = \infty$ как бесконечно малое сопротивление (короткое замыкание цепи).

Для второго случая принужденная составляющая тока согласно § 3.6 $i_{пр} = I_m \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi)$, где $I_m = U_m / \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$, $\varphi = \arctg(\omega L/R)$. Постоянная интегрирования определяется из уравнения

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = 0 = A + I_m \sin(\varphi_u - \varphi),$$

откуда $A = -I_m \sin(\varphi_u - \varphi)$. Следовательно, закон изменения тока в цепи в этом случае будет

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi) - I_m \sin(\varphi_u - \varphi) e^{-t/\tau}. \quad (6.18)$$

На рис. 6.3 изображена временная зависимость тока (6.18). Напряжение на индуктивности

$$\begin{aligned} u_L = L \frac{di}{dt} = U_{mL} \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi + \pi/2) + \\ + U_{mL} \frac{R}{\omega L} \sin(\varphi_u - \varphi) e^{-t/\tau}, \end{aligned} \quad (6.19)$$

где $U_{mL} = \omega L I_m$.

Анализ уравнения (6.18) показывает, что в случае подключения цепи к источнику $u(t)$ в момент, когда $\varphi_u = \varphi \pm \pi/2$ в последней могут возникать сверхтоки. Если постоянная времени цепи τ достаточно велика, то скачок тока в начальный период может достигать $i_{max} \approx 2I_m$. Напротив, при включении цепи в момент, когда $\varphi_u = \varphi$, в ней сразу наступает установившийся режим. Аналогичная картина наблюдается и с напряжением на индуктивности (6.19).

В качестве второго примера расчета рассмотрим случай ненулевых начальных условий в RL -цепи (рис. 6.4). К моменту коммутации в данной цепи была запасена энергия магнитного поля, равная $W_L = Li^2(0_-)/2$, где $i(0_-) = U/(R_0 + R)$. После коммутации в RL -цепи возникает переходный процесс, описываемый уравнением:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0, \quad (6.20)$$

т. е. $i_{пр} = 0$. Решая уравнение (6.20), находим с учетом (6.13) — (6.15):

$$i = i_{св} = Ae^{pt} = Ae^{-t/\tau}.$$

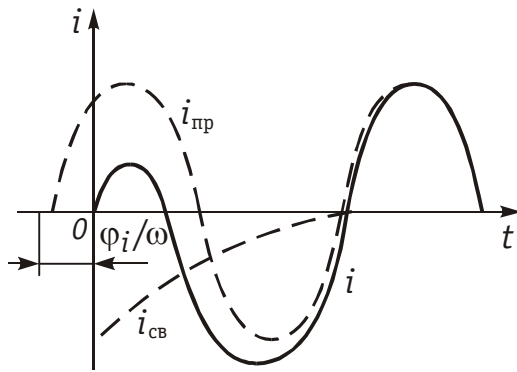


Рис. 6.3

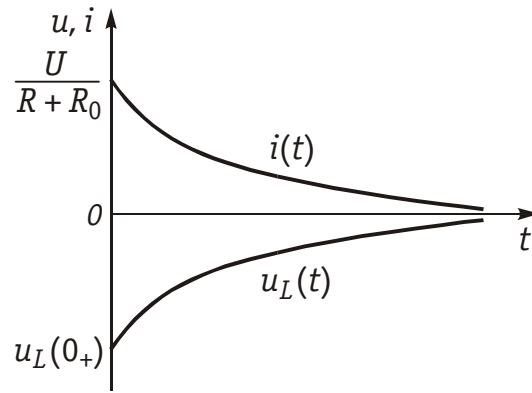


Рис. 6.5

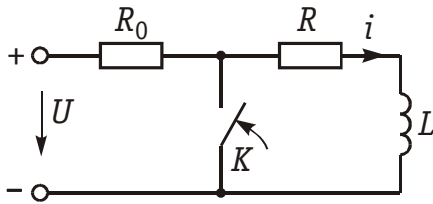


Рис. 6.4

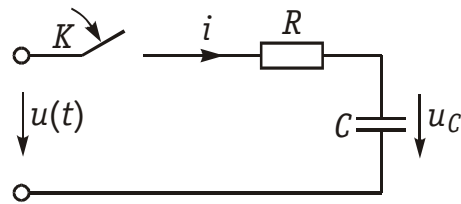


Рис. 6.6

Постоянную A находим из начального условия $i(0_-)$ и закона коммутации (6.1):

$$i(0_-) = i(0_+) = U/(R + R_0) = A.$$

Окончательно закон изменения тока в переходном режиме описывается уравнением

$$i = \frac{U}{R + R_0} e^{-t/\tau}. \quad (6.21)$$

Напряжение u_L определяется как

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -\frac{U}{R + R_0} \text{Re}^{-t/\tau}. \quad (6.22)$$

На рис. 6.5 изображены графики i и u_L . Следует отметить, что вся энергия W_L , запасенная в индуктивности с течением времени, расходуется на тепловые потери в R . При ненулевых начальных условиях L ведет себя как источник тока.

Переходные процессы в RC -цепях. При расчете переходных процессов в RC -цепях в качестве независимой переменной выбирают u_C . Затем также составляют дифференциальное уравнение для заданной RC -цепи, решение которого с учетом начальных условий для $u_C(0)$ и определяет закон изменения напряжения на емкости.

Рассмотрим вначале RC -цепь при нулевых начальных условиях (рис. 6.6), которая подключается в момент $t = 0$ к источнику постоянного $u(t) = U$ или синусоидального $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ напряжения. Переходный процесс в данной цепи описывается дифференциальным уравнением

$$u_C + Ri = RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u, \quad (6.23)$$

решение которого ищем также в форме суммы общего и частного решений, определяющих свободную и принужденную составляющие:

$$u_C = u_{C\text{св}} + u_{C\text{пр}}. \quad (6.24)$$

Свободная составляющая является решением однородного дифференциального уравнения

$$RC \frac{du_{C\text{св}}}{dt} + u_{C\text{св}} = 0; \quad (6.25)$$

$$u_{C\text{св}} = Ae^{pt}, \quad (6.26)$$

где p определяется из характеристического уравнения

$$RCp + 1 = 0; \quad p = -1/RC.$$

Величина RC носит название постоянной времени RC -цепи и обозначается через τ .

Определим принужденную составляющую $u_{C\text{пр}}$ для случая, когда $u(t) = U = \text{const}$. Из рис. 6.6 следует, что в установившемся режиме $u_{C\text{пр}} = U$. Следовательно, с учетом (6.24) и (6.26) уравнение для u_C примет вид $u_C = Ae^{-t/\tau} + U$. Для нахождения постоянной интегрирования A учтем нулевые начальные условия для $u_C(0_-)$ и второй закон коммутации (6.2): $u_C(0_-) = u_C(0_+) = 0 = A + U$, откуда $A = -U$. Таким образом, получаем окончательно:

$$u_C = U(1 - e^{-t/\tau}). \quad (6.27)$$

Ток в цепи определяется согласно (1.12):

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U}{R} e^{-t/\tau}. \quad (6.28)$$

На рис. 6.7 изображены графические зависимости $u_C(t)$ и $i(t)$.

Анализ полученных результатов показывает, что в момент $t = 0_+$ емкость C (при нулевых начальных условиях) ведет себя

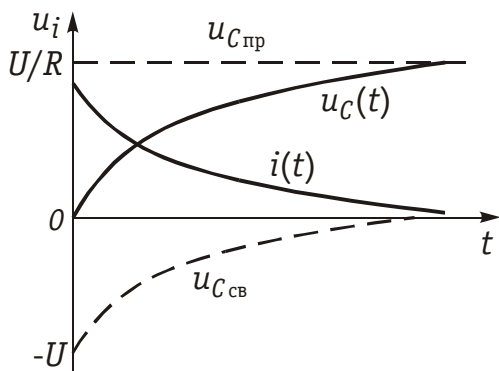


Рис. 6.7

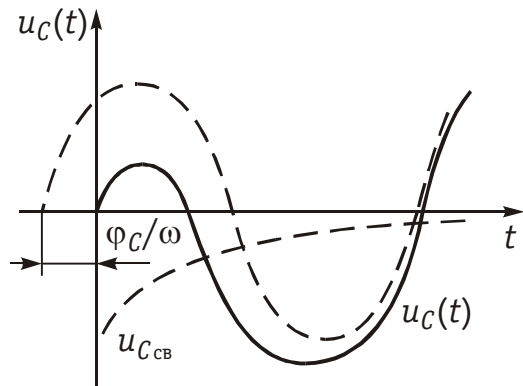


Рис. 6.8

как короткозамкнутый участок. Напротив, при $t = \infty$ емкость представляет собой бесконечно большое сопротивление (разрыв цепи для постоянного тока).

Рассмотрим случай гармонического воздействия. Нетрудно видеть что при этом

$$u_{C\text{пр}} = U_{mC} \sin(\omega t + \varphi_u + \varphi - \pi/2), \quad (6.29)$$

где

$$\left. \begin{aligned} U_{mC} &= X_C I_{mC} = \frac{1}{\omega C} \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}, \\ \varphi &= \text{arctg}[1/(\omega RC)], \end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

а напряжение

$$u_C = Ae^{-t/\tau} + U_{mC} \sin(\omega t + \varphi_u + \varphi - \pi/2).$$

Постоянная A находится из начальных условий для $u_C(0_+)$ при $t = 0_+$:

$$A = -U_{mC} \sin(\varphi_u + \varphi - \pi/2).$$

Окончательно закон изменения напряжения

$$\begin{aligned} u_C &= U_{mC} \sin(\omega t + \varphi_u + \varphi - \pi/2) - \\ &- U_{mC} \sin(\varphi_u + \varphi - \pi/2) e^{-t/\tau}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

На рис. 6.8 изображен график зависимости $u_C(t)$. Анализ уравнения (6.31) показывает, что в случае неудачного включения при $\varphi_u = \pi - \varphi$ и большой τ в цепи могут возникать перенапряжения, достигающие на емкости величины $u_{C\text{max}} \approx 2U_{mC}$. В случае удачного включения, когда $\varphi_u = \pi/2 - \varphi$, в цепи сразу наступает установившийся режим.

Ток в цепи

$$\begin{aligned} i &= C \frac{du_C}{dt} = I_{mC} \sin(\omega t + \varphi_u + \varphi) + \\ &+ I_{mC} \frac{1}{\omega RC} \sin(\varphi_u + \varphi - \pi/2) e^{-t/\tau}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Рассмотрим теперь случай ненулевых начальных условий, когда емкость C , заряженная до напряжения U , разряжается на сопротивление R (рис. 6.9). К моменту коммутации в емкости была запасена энергия $W_C = CU^2/2$. После коммутации возникает переходный процесс, определяемый уравнением

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0, \quad (6.33)$$

т. е. имеет место свободный режим разряда (емкости):

$$u_C = u_{C\text{св}} = Ae^{pt} = Ae^{-t/\tau}. \quad (6.34)$$

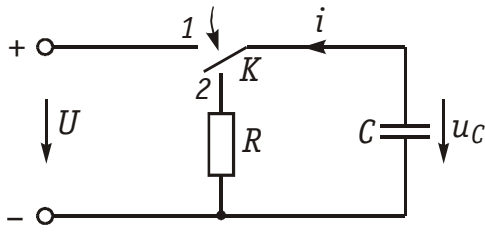


Рис. 6.9

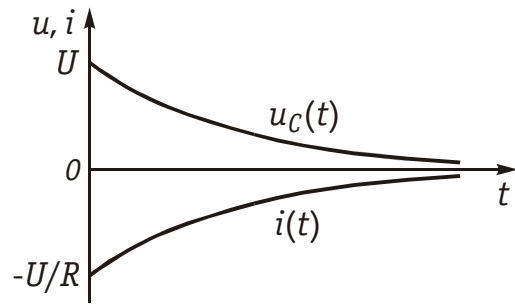


Рис. 6.10

Постоянную интегрирования A находим из начального условия для $u_C(0_+) = U$ и закона коммутации (6.2):

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = U = A.$$

Таким образом, получаем закон изменения напряжения на емкости

$$u_C = Ue^{-t/\tau} \quad (6.35)$$

и тока в цепи

$$i = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{U}{R} e^{-t/\tau}. \quad (6.36)$$

Знак « $-$ » в уравнении (6.36) для тока свидетельствует о том, что ток разряда направлен противоположно опорному направлению напряжения u_C в емкости (см. § 1.2). На рис. 6.10 приведены графики изменения напряжения $u_C(t)$ и тока $i(t)$ данной RC -цепи. Следует подчеркнуть, что вся запасенная энергия W_C емкости с течением времени преобразуется в элементе R в тепло. При ненулевых начальных условиях C ведет себя как источник напряжения.

6.4. Переходные процессы в цепях второго порядка

Ранее рассматривались переходные процессы в RL - и RC -цепях, которые относятся к цепям первого порядка, так как описываются дифференциальными уравнениями первого порядка (6.11), (6.23). При наличии в цепи двух независимых накопителей энергии переходные процессы в них описываются уравнением второго порядка. Простейшим примером такой цепи является последовательный колебательный контур (рис. 6.11). Для этого контура можно по аналогии с RL - и RC -цепью составить дифференциальное уравнение второго порядка, выбрав в качестве независимой переменной напряжение на емкости

$$u_L + u_R + u_C = L \frac{di}{dt} + Ri + u_C = u.$$

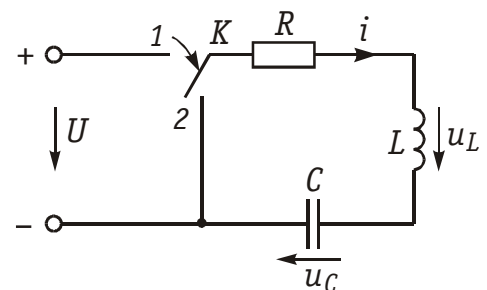


Рис. 6.11

Учитывая, что $i = C du_C/dt$ окончательно получаем

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u. \quad (6.37)$$

Решение дифференциального уравнения (6.37) ищется согласно (6.5) в форме суммы свободной $u_{C\text{св}}$ и принужденной $u_{C\text{пр}}$ составляющих:

$$u_C = u_{C\text{св}} + u_{C\text{пр}}. \quad (6.38)$$

Вид $u_{C\text{пр}}$ зависит от характера приложенного напряжения, а $u_{C\text{св}}$ определится решением однородного дифференциального уравнения второго порядка:

$$LC \frac{d^2 u_{C\text{св}}}{dt^2} + RC \frac{du_{C\text{св}}}{dt} + u_{C\text{св}} = 0. \quad (6.39)$$

Решение уравнения (6.39) зависит от вида корней характеристического уравнения

$$LCp^2 + RCp + 1 = 0. \quad (6.40)$$

Корни уравнения (6.40) определяются только параметрами цепи независимо от выбранной переменной:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \quad (6.41)$$

Величина $\alpha = R/2L$ носит название *коэффициента затухания контура*, а $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ есть резонансная частота контура (см. § 4.2). Таким образом, уравнение (6.41) можно переписать в виде

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \quad (6.42)$$

Характер переходного процесса существенным образом зависит от вида корней p_1, p_2 , которые могут быть:

- 1) вещественными и различными (при $R > 2\rho$);
- 2) комплексно-сопряженными (при $R < 2\rho$);
- 3) вещественными и равными (при $R = 2\rho$).

Здесь $\rho = \sqrt{L/C}$ — характеристическое сопротивление контура (см. формулу (4.22)).

Разряд емкости на RL -цепь. Для исследования характера переходного процесса во всех этих случаях рассмотрим разряд емкости C на цепь RL (см. рис. 6.11). Так как до коммутации емкость C была заряжена до напряжения U , то имеем ненулевые начальные условия:

$$u_C(0_-) = U; \quad W_C(0_-) = CU^2/2.$$

После коммутации (переключение ключа K из положения 1 в положение 2 емкость начнет разряжаться и в цепи возникнет сво-

бодный переходный процесс. Найдем закон изменения тока и напряжений на отдельных элементах цепи для случая 1)–3).

В первом случае, когда $R > 2\rho$ корни p_1 и p_2 в (6.41) будут вещественными и различными, и решение уравнения определится согласно (6.7):

$$u_C = u_{C\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (6.43)$$

где A_1 и A_2 — постоянные интегрирования. Для определения A_1 и A_2 запишем еще уравнение для тока в цепи:

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C(p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}). \quad (6.44)$$

Постоянные A_1 и A_2 можно найти из начальных условий для $u_C(0_-) = U$ и $i(0_-) = 0$ (при $t = 0_-$) и законов коммутации (6.1), (6.2):

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_2 &= U, \\ p_1 A_1 + p_2 A_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.45)$$

Из решения системы уравнение (6.45)

$$A_1 = -Up_2/(p_1 - p_2); \quad A_2 = Up_1/(p_1 - p_2).$$

В результате получаем уравнения для напряжения u_C и тока i :

$$u_C = \frac{U}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}), \quad (6.46)$$

$$i = \frac{U}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_2 t} - e^{p_1 t}). \quad (6.47)$$

Закон изменения напряжения на индуктивности определяется при этом уравнением

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \frac{U}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_2 t} - p_1 e^{p_1 t}). \quad (6.48)$$

Из уравнений (6.46)–(6.48) следует, что каждая из найденных величин u_C , i , u_L состоит из двух слагаемых, затухающих по экспоненте с коэффициентами $p_1 < 0$ и $p_2 < 0$. На рис. 6.12 показан характер зависимостей (6.46)–(6.48). Момент времени t_1 , соответствующий точке перегиба u_C , максимуму $|i|$ и нулевому значению u_L определяется из решения уравнения $di/dt = 0$, а момент t_2 из решения уравнения $du_L/dt = 0$:

$$t_1 = \frac{1}{p_1 - p_2} \ln \frac{p_2}{p_1}; \quad t_2 = 2t_1. \quad (6.49)$$

Анализ полученных кривых показывает, что в рассматриваемом случае происходит апериодический разряд емкости C , причем в интервале от 0 до t_1 энергия W_C расходуется на покрытие теп-

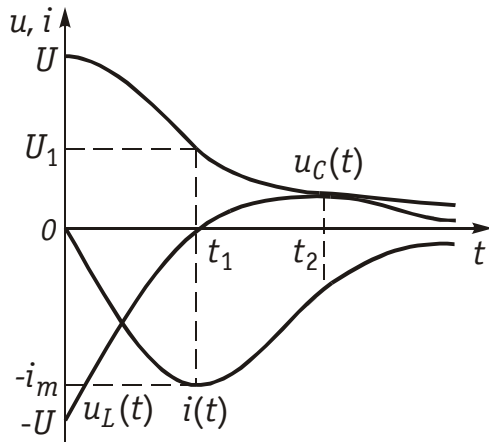


Рис. 6.12

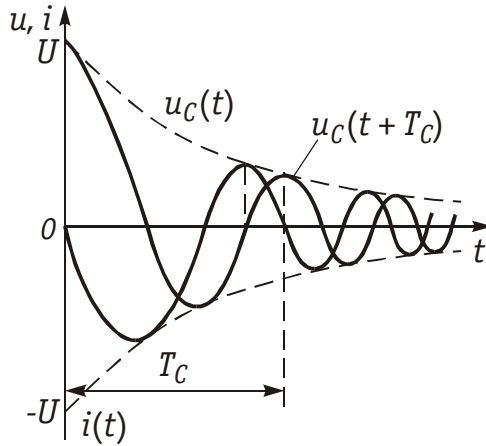


Рис. 6.13

ловых потерь в резистивном сопротивлении R и создание магнитного поля в индуктивности ($p_C = u_C i < 0$; $p_L = u_L i > 0$). В дальнейшем (при $t > t_1$) как энергия электрического поля емкости W_C , так и запасенная к моменту $t = t_1$ магнитная энергия индуктивности W_L расходуется на покрытие тепловых потерь в сопротивлении R . Отрицательное значение тока свидетельствует о противоположном направлении тока разряда относительно опорного направления.

Во втором случае при $R < 2\rho$, когда корни p_1 и p_2 носят комплексно-сопряженный характер,

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_c, \quad (6.50)$$

где $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ называют *частотой собственных затухающих колебаний*. Решение уравнения (6.39) имеет вид (6.9)

$$u_C = u_{C\text{св}} = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_c t + \theta), \quad (6.51)$$

где A и θ — постоянные интегрирования. Закон изменения тока в цепи

$$i = C \frac{du_C}{dt} = -\alpha A e^{-\alpha t} \sin(\omega_c t + \theta) + \omega_c A e^{-\alpha t} \cos(\omega_c t + \theta). \quad (6.52)$$

Постоянные A и θ определяются из начальных условий для u_C и i и законов коммутации (6.1), (6.2):

$$\left. \begin{aligned} u_C(0_-) &= u_C(0_+) = U = A \sin \theta, \\ i(0_-) &= i(0_+) = -\alpha A \sin \theta + \omega_c A \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (6.53)$$

Отсюда

$$A = U \omega_0 / \omega_c; \quad \theta = \arctg(\omega_c / \alpha).$$

Окончательно уравнения для u_C , i и u принимают вид

$$u_C = U \frac{\omega_0}{\omega_c} e^{-\alpha t} \sin(\omega_c t + \theta); \quad (6.54)$$

$$i = -U \frac{1}{\omega_c L} e^{-\alpha t} \sin \omega_c t; \quad (6.55)$$

$$u_L = U \frac{\omega_0}{\omega_c} e^{-\alpha t} \sin(\omega_c t - \theta). \quad (6.56)$$

Полученные уравнения показывают, что в данном случае имеет место колебательный разряд емкости с частотой ω_c , зависящей только от параметров R , L , C цепи. Интервал времени $T_c = 2\pi/\omega_c$ носит название *квазипериода*. На рис. 6.13 изображены графики зависимостей $u_C(t)$ и $i(t)$ определяемых уравнениями (6.54) и (6.55). Скорость затухания периодического процесса принято характеризовать *декрементом затухания*, который определяют как отношение двух соседних амплитуд тока или напряжения одного знака (см. рис. 6.13):

$$\Delta = \frac{u_C(t)}{u_C(t + T_c)} = e^{-\alpha T_c}. \quad (6.57)$$

На практике чаще используется *логарифмический декремент затухания*

$$\delta_\alpha = \ln \Delta = \alpha T_c = \frac{\pi R}{\sqrt{\rho^2 - R^2/4}}. \quad (6.58)$$

Из уравнений (6.57) и (6.58) следует, что затухание тем больше, чем больше R . При $R = 2\rho$ колебания прекращаются и переходной процесс становится аperiodическим. При $R = 0$ оказываются незатухающие гармонические колебания с частотой $\omega_c = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Очевидно, что этот случай представляет чисто теоретический интерес, так как в любом реальном контуре имеются потери. В процессе колебательного разряда емкости (свободных колебаний в RLC -контуре) имеет место попеременное запасание энергии W_C в электрическом поле емкости и магнитном поле индуктивности W_L : в начале энергия W_C расходуется на создание магнитного поля W_L индуктивности и покрытие тепловых потерь сопротивления R , затем запасенная энергия W_L расходуется на перезаряд емкости и покрытие потерь в R и т. д. до полного перехода первоначальной энергии $W_c(0)$ в тепловые потери в резисторе R .

Третий случай $R = 2\rho$ является пограничным между колебательным и аperiodическим и соответствует критическому разряду емкости. Решение уравнения (6.39) при этом имеет вид (6.8)

$$u_C = u_{C_{CB}} = A_1 e^{pt} + A_2 t e^{pt}. \quad (6.59)$$

Ток определяется уравнением

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C(A_1 p + A_2 + A_2 p t) e^{pt}, \quad (6.60)$$

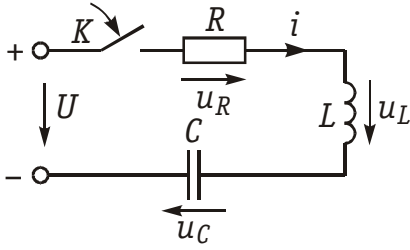


Рис. 6.14

где $p_1 = p_2 = p = -\alpha$ — корни характеристического уравнения (6.40); A_1, A_2 — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий для u_C и i и законов коммутации (6.1), (6.2):

$$\begin{aligned} U &= A_1, \\ 0 &= A_1 p_1 + A_2. \end{aligned}$$

Отсюда $A_2 = \alpha U$. Окончательные выражения для напряжения и тока принимают вид

$$u_C = U(\alpha t + 1)e^{-\alpha t}; \quad (6.61)$$

$$i = -\frac{U}{L}te^{-\alpha t}; \quad (6.62)$$

$$u_L = U(\alpha t - 1)e^{-\alpha t}. \quad (6.63)$$

По своей форме графики зависимостей (6.61)–(6.63) аналогичны кривым, изображенным на рис. 6.12 с той лишь разницей, что их скорость изменения больше, чем при $R > 2\rho$. Значение $R = 2\rho$ носит название *критического сопротивления контура*.

6.5. Включение RLC -контура на постоянное и гармоническое напряжение

Включение RLC -контура на постоянное напряжение. Рассмотрим случай нулевых начальных условий $u_C(0_-) = 0$, $i(0_-) = 0$, когда RLC -контур включается на постоянное напряжение (рис. 6.14). Отличие данного случая от рассмотренного выше заключается в нулевых начальных условиях и наличии принужденной составляющей $u_{Cпр} = U$. Свободная составляющая $u_{Cсв}$ определяется, как и ранее, уравнениями (6.43), (6.51) или (6.59) в зависимости от вида корней p_1 и p_2 . Постоянные интегрирования A_1 и A_2 находятся при этом из начальных условий $i(0_-) = 0$, $u_C(0_-) = 0$ и законов коммутации для i и u_C . Определим, например, закон изменения u_C , i и u_L в случае, когда корни p_1 и p_2 — вещественные и различные. При этом $u_{Cсв}$ определяются уравнением (6.43), а напряжение u_C и ток i имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} u_C &= u_{Cсв} + u_{Cпр} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + U, \\ i &= C \frac{du_C}{dt} = A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}. \end{aligned} \right\} \quad (6.64)$$

Для нахождения коэффициентов A_1 и A_2 используем начальные условия $u_C(0_-) = 0$ и $i(0_-) = 0$, а также законы коммутации, определяемые выражениями (6.1), (6.2):

$$\begin{cases} 0 = A_1 + A_2 + U, \\ 0 = A_1 p_1 + A_2 p_2. \end{cases} \quad (6.65)$$

Тогда

$$A_1 = Up_2/(p_1 - p_2); \quad A_2 = -Up_1/(p_1 - p_2). \quad (6.66)$$

Окончательные уравнения для u_C , i , u_L имеют вид

$$u_C = U - \frac{U}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}); \quad (6.67)$$

$$i = -\frac{U}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_2 t} - e^{p_1 t}); \quad (6.68)$$

$$u_L = \frac{U}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}). \quad (6.69)$$

На рис. 6.15 изображены графики зависимостей (6.67)–(6.69), где моменты времени t_1 и t_2 определяются уравнениями (6.49). Сравнение формул (6.67)–(6.69) с (6.46)–(6.48) показывает, что ток i и напряжение u_L отличаются только знаком, а напряжение u_C — наличием постоянной составляющей U .

Аналогичным можно найти уравнения напряжений и тока для случая $R < 2\rho$:

$$u_C = U \left[1 - \frac{\omega_0}{\omega_c} e^{-\alpha t} \sin(\omega_c t + \theta) \right]; \quad (6.70)$$

$$i = \frac{U}{\omega_c L} e^{-\alpha t} \sin \omega_c t; \quad (6.71)$$

$$u_L = -U \frac{\omega_0}{\omega_c} e^{-\alpha t} \sin(\omega_c t - \theta). \quad (6.72)$$

На рис. 6.15 штриховой линией показана зависимость (6.70), которая свидетельствует о колебательном характере заряда емкости. Таким же образом можно получить уравнения для u_C , i и u_L для случая критического заряда емкости C при $R = 2\rho$.

Включение RLC -контура на гармоническое напряжение. При включении RLC -контура на гармоническое напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ принужденная составляющая напряжения на емкости

$$u_{C\text{пр}} = U_{mC} \sin(\omega t + \varphi_C), \quad (6.73)$$

где $\varphi_C = \varphi_u + \varphi - \pi/2$. Здесь фазовый сдвиг между током в контуре и приложенным напряжением

$$\varphi = \arctg(\omega L - 1/\omega C)/R, \quad (6.74)$$

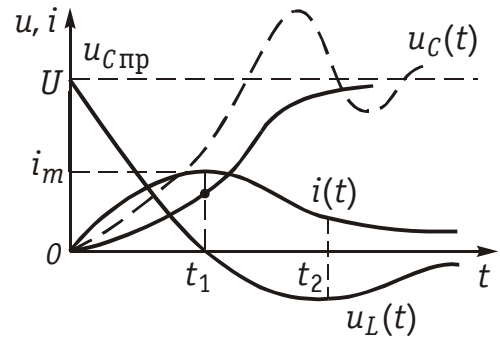


Рис. 6.15

а амплитуда принужденного напряжения на емкости

$$U_{mC} = \frac{1}{\omega C} \cdot \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{1}{\omega C} \cdot I_{mC}. \quad (6.75)$$

Учитывая, что колебательный контур в радиотехнических устройствах, как правило имеет высокую добротность, т. е. выполняется условие $R \ll 2\rho$, то свободная составляющая $u_{C\text{св}}$ определяется уравнением (6.51), и закон изменения напряжения на емкости будет иметь вид

$$u_C = U_{mC} \sin(\omega t + \varphi_C) + Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \theta). \quad (6.76)$$

Взяв производную от выражения (6.76), и учтя, что для заданного контура $\alpha \ll \omega_0 \approx \omega_C$, получим уравнение тока

$$i = C \frac{du_C}{dt} \approx I_{mC} \cos(\omega t + \varphi_C) + \omega_0 CAe^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \theta). \quad (6.77)$$

Постоянные интегрирования A и θ находим из начальных условий и законов коммутации:

$$\left. \begin{aligned} u_C(0_-) = u_C(0_+) = 0 &= U_{mC} \sin \varphi_C + A \sin \theta, \\ i(0_-) = i(0_+) = 0 &= I_{mC} \cos \varphi_C + \omega_0 CA \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (6.78)$$

Откуда

$$A = U_{mC} \sqrt{\sin^2 \varphi_C + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \cos^2 \varphi_C}; \quad (6.79)$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \{ \omega_0 \operatorname{tg} \varphi / \omega \}. \quad (6.80)$$

Подставив значения A и θ из уравнений (6.79), (6.80) в (6.76) и (6.77), получим окончательный закон изменения напряжения на емкости и тока в RLC -контуре:

$$u_C = U_{mC} \sin(\omega t + \varphi_C) + U_{mC} \sqrt{\sin^2 \varphi_C + (\omega/\omega_0)^2 \cos^2 \varphi_C} \cdot e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \theta); \quad (6.81)$$

$$i = I_{mC} \cos(\omega t + \varphi_C) + I_{mC} \sqrt{(\omega_0/\omega)^2 \sin^2 \varphi_C + \cos^2 \varphi_C} \cdot e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \theta). \quad (6.82)$$

Анализ уравнений (6.81), (6.82) показывает, что в случае, когда частота приложенного напряжения ω существенно превышает резонансную частоту контура ω_0 при $\varphi_C \approx 0$ в цепи могут возникнуть сверхнапряжения, а в случае $\omega \ll \omega_0$ и $\varphi_C \approx \pi/2$ — сверхтоки.

Если частота задающего напряжения $\omega = \omega_0$, то при этом в цепи возникают явления *изохронизма*, когда напряжение на емкости и ток в контуре плавно изменяется в соответствии с уравнениями:

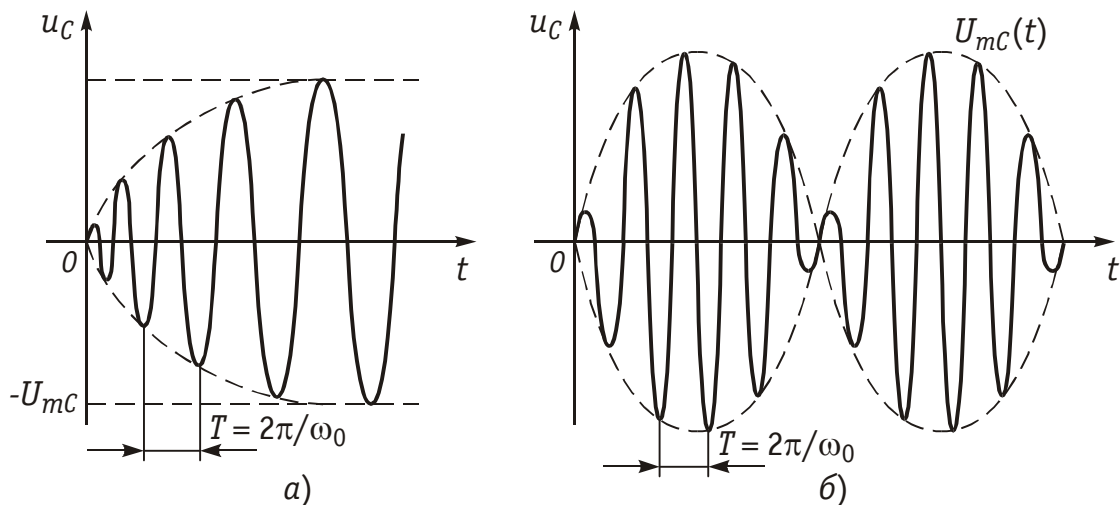


Рис. 6.16

$$u_C = U_{mC} (1 - e^{-\alpha t}) \sin(\omega_0 t + \varphi_C); \quad (6.83)$$

$$i = I_{mC} (1 - e^{-\alpha t}) \cos(\omega_0 t + \varphi_C). \quad (6.84)$$

При этом переходный процесс протекает без перенапряжений и сверхтоков (рис. 6.16, а).

В случае, когда частота заданного напряжения ω и резонансная частота контура ω_0 близки между собой, то в контуре возникают явления биений. Положим, что $\alpha = 0$, тогда

$$\begin{aligned} u_C &= U_{mC} [\sin(\omega t + \varphi_C) + \sin(\omega_0 t + \varphi_C)] = \\ &= U_{mC}(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_C), \end{aligned} \quad (6.85)$$

где $U_{mC}(t) = 2U_{mC} \cos \Omega t$ — амплитуда биений с угловой частотой $\Omega = (\omega - \omega_0)/2$. На рис. 6.16, б, показан график изменения напряжений биений (6.85).

6.6. Переходные процессы в разветвленных цепях

При расчете переходных процессов в разветвленных цепях классическим методом составляется система уравнений для мгновенных значений токов и напряжений по ЗТК и ЗНК. Затем полученная система сводится к дифференциальному уравнению соответствующего порядка относительно выбранной независимой переменной (u_C или i_L). После этого полученное уравнение решается по аналогии с уравнениями, рассмотренными в § 6.2—6.5.

В качестве примера рассмотрим разветвленную цепь второго порядка, изображенную на рис. 6.17. Для данной цепи имеем ненулевые начальные условия:

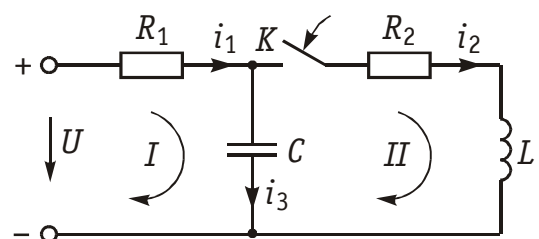


Рис. 6.17

$u_C(0_-) = U$; $i_L(0_-) = 0$. Составим для нее систему уравнений по законам Кирхгофа:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= i_2 + i_3 = i_2 + Cdu_C/dt, \\ U &= R_1 i_1 + u_C, \\ u_C &= R_2 i_2 + Ldi_2/dt. \end{aligned} \right\} \quad (6.86)$$

Выберем в качестве независимой переменной $i_2 = i_L$ и, решая (6.86) относительно i_2 , получаем:

$$LC \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \left(\frac{L}{R_1} + R_2 C \right) \frac{di_2}{dt} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) i_2 = \frac{U}{R_1}, \quad (6.87)$$

т. е. выражение (6.87) есть неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка, аналогичное (6.37). Его решение, как обычно, находим в виде

$$i_2 = i_{2\text{св}} + i_{2\text{пр}}, \quad (6.88)$$

где $i_{2\text{пр}} = U/(R_1 + R_2)$, а $i_{2\text{св}}$ определим из решения однородного дифференциального уравнения

$$LC \frac{d^2 i_{2\text{св}}}{dt^2} + \left(\frac{L}{R_1} + R_2 C \right) \frac{di_{2\text{св}}}{dt} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) i_{2\text{св}} = 0. \quad (6.89)$$

Решение последнего имеет вид, аналогичный (6.43), (6.51) или (6.59) в зависимости от вида корней характеристического уравнения

$$LCp^2 + \left(\frac{L}{R_1} + R_2 C \right) p + \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) = 0. \quad (6.90)$$

Постоянные интегрирования определяются из начальных условий и законов коммутации, причем для нахождения u_C используется система уравнений (6.86). Например, для случая вещественных и различных корней при $R_1 = R_2 = R$ получим

$$\begin{aligned} i_2 &= i_{2\text{пр}} + i_{2\text{св}} = \frac{U}{2R} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}; \\ u_C &= Ri_2 + L \frac{di_2}{dt} = R \left(\frac{U}{2R} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \right) + \\ &\quad + L(p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}), \end{aligned}$$

где A_1 и A_2 определяются из начальных условий и законов коммутации:

$$\begin{aligned} i_2(0_-) &= i_2(0_+) = 0 = \frac{U}{2R} + A_1 + A_2; \\ u_C(0_-) &= u_C(0_+) = U = U/2 + L(p_1 A_1 + p_2 A_2) + R(A_1 + A_2), \end{aligned}$$

откуда

$$A_1 = \frac{U}{2RL} \cdot \frac{Lp_2 + 2R}{p_1 - p_2};$$

$$A_2 = -\frac{U}{2RL} \cdot \frac{Lp_1 + 2R}{p_1 - p_2}.$$

На рис. 6.18 изображены графики $u_C(t)$ и $i_2(t)$.

Как следует из вышеуказанного, для определения характера переходного процесса и записи уравнения свободной составляющей независимой переменной необходимо располагать характеристическим уравнением цепи. Это уравнение может быть получено из соответствующего дифференциального уравнения цепи или из анализа ее операторного сопротивления (см. § 7.3). Последнее может быть получено, если в уравнении для комплексного сопротивления цепи $\underline{Z} = Z(j\omega)$ заменить оператор $j\omega$ на p и приравнять его к нулю:

$$Z(p) = Z(j\omega)|_{j\omega=p} = 0. \quad (6.91)$$

Например для цепи, изображенной на рис. 6.17, имеем:

$$\underline{Z} = Z(j\omega) = R_1 + \frac{(R_2 + j\omega L)/j\omega C}{R_2 + j\omega L + 1/j\omega C}.$$

Отсюда

$$Z(p) = R_1 + \frac{(R_2 + pL)/pC}{R_2 + pL + 1/pC} = 0,$$

или после преобразований

$$LCp^2 + \left(\frac{L}{R_1} + R_2C \right)p + \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) = 0,$$

что полностью совпадает с (6.90).

Таким образом, отпадает необходимость преобразовывать систему уравнений к одному уравнению для выбранной независимой переменной.

В заключение следует отметить, что применение классического метода расчета к цепям более высокого порядка встречает определенные трудности. Главное из них резко возрастающий объем необходимых вычислений, связанных с решением задач уравнений высокого порядка. В этой связи в последнее время все большее применение находят другие методы расчета переходных процессов: метод переменных состояний, операторный и частотные методы, которые будут рассмотрены ниже.

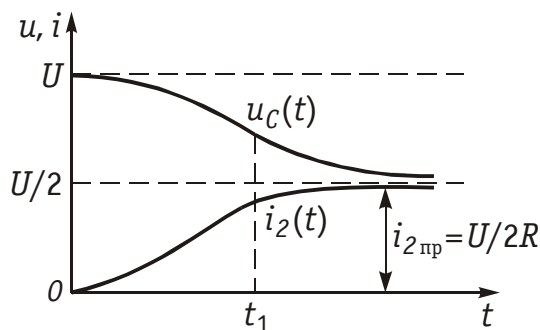


Рис. 6.18

6.7. Метод переменных состояния

В настоящее время для анализа переходных процессов в цепях широкое применение находит метод переменных состояния, позволяющий при расчетах эффективно использовать ЭВМ. Суть метода заключается в том, что переходный процесс в цепи рассматривается как траектория в m -мерном пространстве (где m — порядок цепи) с начальной точкой при $t = 0$ (начальное состояние) и конечной при $t = \infty$. Например, переходный процесс в последовательном RLC -контуре (см. § 6.4, апериодический разряд и рис. 6.12) можно в пространстве состояний представить кривой, изображенной на рис. 6.19, где $i_L(0) = 0$ и $u_C(0) = U$ характеризуют начальное состояние цепи, а $i_L(t)$ и $u_C(t)$ определяют состояние цепи в любой заданный момент времени. Достоинства этого метода — наглядность, простота, удобство программирования на ЭВМ, возможность анализа как линейных, так и нелинейных цепей, а также цепей с переменными параметрами.

Поясним сущность данного метода на примере цепи, находящейся при ненулевых начальных условиях: $i_L(0) = i_0$, $u_C(0) = u_0$ (рис. 6.20). Для этой цепи при $t \geq 0$ можно записать:

$$\begin{aligned} u_L &= L \frac{di_L}{dt} = u_C; \\ i_C &= C \frac{du_C}{dt} = -i_L - \frac{u_C}{R}, \end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_L}{dt} &= \frac{1}{L} u_C, \\ \frac{du_C}{dt} &= -\frac{1}{C} i_L - \frac{1}{RC} u_C. \end{aligned} \right\} \quad (6.92)$$

Уравнения (6.92) называются *уравнениями состояния цепи*, а i_L и u_C — *переменными состояния*. Начальные условия $i_L(0) = i_0$ и $u_C(0) = u_0$ определяют с помощью (6.92) состояния цепи в любой момент $t \geq 0$. Величины i_L и u_C можно считать компонентами вектора состояния \mathbf{x} :

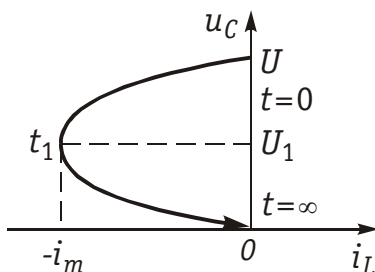


Рис. 6.19

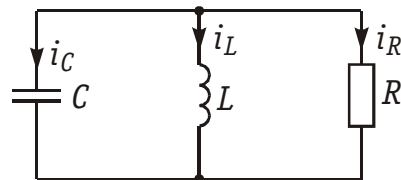


Рис. 6.20

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix}.$$

Тогда (6.92) можно переписать в матричной форме:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t); \quad t \geq 0, \quad (6.93)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & -1/RC \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} i_0 \\ u_0 \end{bmatrix}.$$

В случае, если цепь находится после коммутации под воздействием источников, уравнение состояния принимает вид

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{w}(t), \quad (6.94)$$

где $\mathbf{w}(t)$ — вектор воздействий источников; \mathbf{B} — матрица параметров цепи.

Например, для случая включения RLC -контура на постоянное напряжение уравнение состояния имеет вид (6.94), где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{W}(t) = U = \text{const}.$$

Зная состояние цепи $\mathbf{x}(t)$, реакцию цепи $\mathbf{y}(t)$ (токи и напряжения в любой ветви) можно найти как линейную комбинацию векторов состояния $\mathbf{x}(t)$ и входных воздействий $\mathbf{w}(t)$:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{w}(t), \quad (6.95)$$

где $\mathbf{y}(t)$ — вектор искомых реакций цепи; \mathbf{C} , \mathbf{D} — матрицы, зависящие только от параметров цепи. Уравнение (6.95) называют *уравнением реакции цепи*.

Так, если в качестве компонентов вектора $\mathbf{y}(t)$ в предыдущем примере RLC -контура взять u_R и u_L , то искомые реакции цепи (u_R и u_L) определяются согласно системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} u_R &= Ri_L + 0 \cdot u_C + 0 \cdot U, \\ u_L &= -Ri_L - 1 \cdot u_C + 1 \cdot U, \end{aligned} \right\}$$

которую можно переписать в форме (6.95), где

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} u_R \\ u_L \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ -R & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Следует подчеркнуть, что уравнения (6.93)–(6.95) справедливы для линейных цепей с постоянными параметрами (матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} не зависят от t). Для цепей с переменными параметрами (параметрические цепи) матрицы $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$, $\mathbf{D}(t)$ являются функциями времени.

Уравнения (6.94), (6.95) — основные в методе переменных состояний. Для решения уравнений состояния могут использоваться

как аналитические, так и численные методы. Аналитически уравнение (6.94) может быть решено в области как действительного переменного t , так и комплексного переменного p (см. § 7.3). Рассмотрим некоторые основные методы решения уравнения состояния.

Метод матричных экспонент. Решение этим методом ищут в форме

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{w}(\tau) d\tau, \quad (6.96)$$

где e^{At} — матричная экспонента (матрица перехода). Из (6.96) следует, что решение уравнения состояния содержит два слагаемых: первое — реакция цепи при нулевом входном сигнале; второе — реакция цепи при нулевом начальном состоянии.

Для вычисления e^{At} обычно используют разложение

$$e^{At} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \frac{t^3}{3!} + \dots \quad (6.97)$$

Пример. Найдем матрицу перехода для схемы, изображенной на рис. 6.21. Матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} для данной схемы имеют следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -R_2/L & 1/L \\ -1/C & -1/R_1 C \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/R_1 C \end{bmatrix}.$$

Примем $L = 0,55$ Гн, $C = 0,5$ Ф, $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 3,5$ Ом, $e(t) = 1$ В, $i_L = 0$, $u_C = 1$ В. Тогда

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Согласно (6.97) матрица перехода примет вид

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} t + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}^2 t^2 + \dots = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -7t + 22,5t^2 - \dots \\ 0 & -2t + -9t^2 - \dots \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица перехода представляет собой квадратную матрицу порядка n с элементами в форме рядов от t . Подставив значение e^{At} в уравнение (6.96), можно определить после интегрирования искомое решение $\mathbf{x}(t)$.

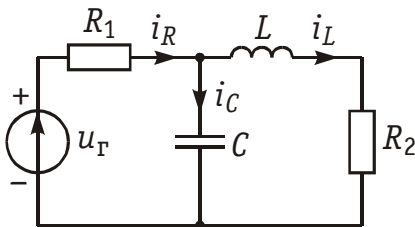


Рис. 6.21

Следует, однако, отметить, что ряд (6.97) сходится медленно и использование уравнения (6.96) требует большого объема вычислений, поэтому вместо (6.96) обычно используют итерационную процедуру для дискретных моментов времени $t_n = n\Delta t = nh$, где $h = \Delta t$ достаточно малый шаг:

$$\mathbf{x}[(n+1)h] = e^{Ah}\mathbf{x}(nh) + \int_{nh}^{(n+1)h} e^{A[(n+1)h-\tau]} \mathbf{B}\mathbf{w}(\tau) d\tau. \quad (6.98)$$

Интеграл в (6.98) вычисляется численными методами (методом прямоугольников, трапеций, Симпсона и др.). Так, при использовании метода прямоугольников алгоритм (6.98) приобретает вид

$$\mathbf{x}[(n+1)h] = e^{Ah}\mathbf{x}(nh) + e^{Ah}h\mathbf{B}\mathbf{w}(nh). \quad (6.99)$$

При нулевом входном сигнале $\mathbf{w} = 0$ (свободные колебания)

$$\mathbf{x}[(n+1)h] = e^{Ah}\mathbf{x}(nh). \quad (6.100)$$

Если ограничиться в разложении (6.97) только первыми двумя членами $e^{Ah} \approx \mathbf{I} + Ah$, то получим

$$\mathbf{x}[(n+1)h] \approx \mathbf{x}(nh) + A\mathbf{x}(nh)h. \quad (6.101)$$

Алгоритм (6.101) легко программируется на ЭВМ и имеет ясный физический смысл. Он определяет положение точки в пространстве состояний на $(n+1)$ -м шаге, исходя из ее состояния на n -м шаге при аппроксимации траектории на участке h прямолинейным отрезком с постоянной скоростью $\dot{\mathbf{x}}(h)$.

Пример. Рассчитать траекторию состояний, изображенную на рис. 6.19, используя аппроксимацию ее на каждом из m участков величины h в форме прямолинейных отрезков. Скорость изменения состояния $\dot{\mathbf{x}}(h)$ на каждом из выделенных участков остается постоянной.

На основании уравнения состояния (6.93) имеем:

для момента $t = 0$; $\dot{\mathbf{x}}(0) = A\mathbf{x}(0)$;

для момента $t = h$

$$\mathbf{x}(h) \approx \mathbf{x}(0) + \dot{\mathbf{x}}(0)h = \mathbf{x}(0) + A\mathbf{x}(0)h;$$

для момента $t = 2h$

$$\mathbf{x}(2h) \approx \mathbf{x}(h) + \dot{\mathbf{x}}(h)h = \mathbf{x}(h) + A\mathbf{x}(h)h;$$

для момента $t = (n+1)h$

$$\mathbf{x}[(n+1)h] \approx \mathbf{x}(nh) + A\mathbf{x}(nh)h,$$

т. е. полученное уравнение полностью совпадает с (6.101).

Метод Рунге—Кутты — метод численного решения уравнения состояния (6.94), при котором интервал $0 \dots t$ разбивается на m малых участков $\Delta t = h$, на каждом из которых значение переменной x определяется с помощью линейной комбинации некоторых вспомогательных функций $k_i(h)$ с постоянными коэффициентами. В зависимости от способа выбора коэффициентов и требуемой точности решения существуют различные модификации алгоритмов Рунге—Кутты.

Проиллюстрируем суть метода Рунге—Кутта на примере скалярного уравнения состояния

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(t, x). \quad (6.102)$$

Наиболее распространенный алгоритм Рунге—Кутта имеет вид

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &\approx x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ \text{где } k_1 &= hf(t_0, x_0); \quad k_2 = hf(t_0 + h/2; x_0 + k_1/2); \\ k_3 &= hf(t_0 + h/2; x_0 + k_2/2); \quad k_4 = hf(t_0 + h; x_0 + k_3). \end{aligned} \right\} \quad (6.103)$$

При этом порядок погрешности составляет h^5 .

Пример. Решить скалярное уравнение состояния (6.102) на интервале $[0; t]$ методом Рунге—Кутта при условии $A = 1; x(0) = 1$.

Решение. Разобьем интервал $[0; t]$ на 10 участков с шагом $h = 0,1$. Тогда в соответствии с алгоритмами (6.103) можем получить для $t = 0$, $x(0) = 1$ (первый шаг):

$$\begin{aligned} k_1 &= hx(0) = 0,1; \quad k_2 = h[x(0) + k_1/2] = 0,105; \\ k_3 &= h[x(0) + k_2/2] = 0,10525; \quad k_4 = h[x(0) + k_3] = 0,110525; \\ x_1 &= x(0) + 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \\ &= 1 + 1/6(0,1 + 0,21 + 0,2105 + 0,110525) = 1,105174. \end{aligned}$$

Аналогично на втором шаге

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \\ &= 1,105174 + 1/6(0,105 + 2 \cdot 0,116 + 2 \cdot 0,1163 + 0,122) = 1,121140 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Как следует из (6.103), для определения x необходимо вычислить $f(t, x)$ в четырех точках.

Аналогично записывается алгоритм Рунге—Кутта для системы уравнений типа (6.102). Например, для случая системы из двух уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t, x_1, x_2) \\ f_2(t, x_1, x_2) \end{Bmatrix}$$

алгоритм (6.103) примет вид

$$\left. \begin{aligned} x_{1(n+1)} &\approx x_{1n} + 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ x_{2(n+1)} &\approx x_{2n} + 1/6(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4), \end{aligned} \right\} \quad (6.104)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= hf_1(t_0, x_{10}, x_{20}); \quad l_1 = hf_2(t_0, x_{10}, x_{20}); \\ k_2 &= hf_1(t_0 + h/2, x_{10} + k_1/2, x_{20} + l_1/2); \\ l_2 &= hf_2(t_0 + h/2, x_{10} + k_1/2, x_{20} + l_1/2); \\ k_3 &= hf_1(t_0 + h/2, x_{10} + k_2/2, x_{20} + l_2/2); \\ l_3 &= hf_2(t_0 + h/2, x_{10} + k_2/2, x_{20} + l_2/2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_4 &= hf_1(t_0 + h, x_{10} + k_3, x_{20} + l_3); \\l_4 &= hf_2(t_0 + h, x_{10} + k_3, x_{20} + l_3).\end{aligned}$$

Частным случаем метода Рунге—Кутта является прямой алгоритм Эйлера (при $k_2 = k_3 = k_4 = 0$). Однако он имеет малую точность и не нашел широкого применения.

Разностные методы. Существенным недостатком метода Рунге—Кутта является то, что для получения каждого значения решения x необходимо вычислять правую часть уравнения (6.94) в нескольких точках (для алгоритма (6.103) — в четырех точках). Это приводит к большому объему вычислений, особенно для сложной правой части. Применение разностных методов позволяет существенно сократить объем вычислений и затраты машинного времени, так как на каждом шаге правая часть вычисляется только один раз.

В основе разностных методов лежит использование различных интерполяционных алгебраических многочленов (многочлены Ньютона, Стирлинга, Эрмита и др.). При этом решение x на $(n + 1)$ шаге определяется алгоритмом

$$x_{n+1} = x_{k-j} + h \sum_{i=0}^n \beta_i f_{k-i}, \quad (6.105)$$

где h — шаг; β_i — постоянные коэффициенты; f_k — значение алгебраического многочлена в точке k . Как следует из (6.105) для определения решения x_{k+j} ; необходимо знать значения x_1, x_2, \dots, x_j — они находятся обычно либо аналитически, либо методом Рунге—Кутта.

Вопросы и задания для самопроверки

1. Каковы причины возникновения переходных процессов?
2. Сформулировать законы коммутации.
3. Дать понятия переходного, установившегося и свободного режимов в электрических цепях.
4. Что такое нулевые и ненулевые начальные условия?
5. Какой вид имеет свободная составляющая переходных колебаний в цепях первого порядка?
6. Что представляет собой принужденная составляющая?
7. Как рассчитываются постоянные интегрирования в цепях первого порядка?
8. Что такое постоянная времени цепи?
9. Для схемы, изображенной на рис. 6.22, определить ток $i(t)$ и напряжение на катушке индуктивности $u_L(t)$, если $U = 90$ В; $L = 0,25$ Гн; $R_1 = 20$ Ом; $R_2 = R_3 = 5$ Ом.

Ответ: $i(t) = 3,6 - 1,6e^{-100t}$, А; $u_L(t) = 40e^{-j100t}$, В.

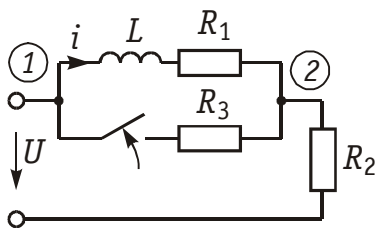


Рис. 6.22

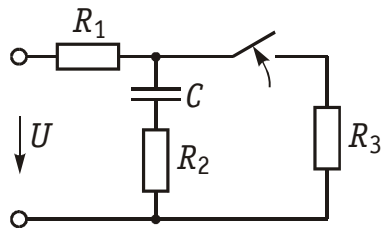


Рис. 6.23

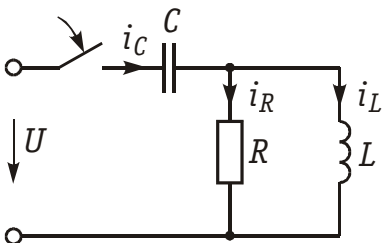


Рис. 6.24

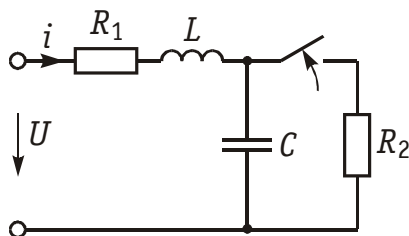


Рис. 6.25

10. Для схемы, изображенной на рис. 6.23, найти $u_C(t)$, если $U = 60$ В; $R_1 = R_2 = R_3 = 5$ кОм; $C = 2,5$ мкФ.

Ответ: $u_C(t) = 60 - 30e^{-40t}$, В.

11. Как зависит характер свободных колебаний в RLC -контуре от расположения на комплексной плоскости корней характеристического уравнения?

12. Как определяются частота и период свободных колебаний?

13. Что такое логарифмический декремент затухания?

14. Какова последовательность анализа переходных процессов в разветвленных цепях второго порядка?

15. Для схемы, приведенной на рис. 6.24, найти $i_L(t)$ и $u_C(t)$, если $U = 100$ В; $L = 50$ мГн; $C = 5$ мкФ; $R = 25$ Ом.

Ответ: $i_L(t) = 0,29e^{-540t} - 0,29e^{-7460t}$, А;
 $u_C(t) = 100 + 8e^{-540t} - 108e^{-7460t}$, В.

16. Для схемы, приведенной на рис. 6.25, найти $i(t)$ и $u_C(t)$, если $U = 60$ В; $R_1 = 250$ Ом; $R_2 = 50$ Ом; $L = 50$ мГн; $C = 0,5$ мкФ.

Ответ: $i(t) = 0,22e^{-2500t} \sin(5800t + 67^\circ)$, А;
 $u_C(t) = 60 + 69e^{-2500t} \sin(5800t - 46,5^\circ)$, В.

17. В чем заключается суть метода переменных состояния? Что понимают под переменными состояния?

18. Что такое уравнения состояния цепи? Какова его матричная форма записи?

19. В чем сущность метода матричных экспонент?

20. Суть метода Рунге-Кутты.

21. Что лежит в основе методов решения уравнения состояния цепи?

ГЛАВА 7. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

7.1. Преобразование Лапласа и его свойства

Операторный метод берет начало со времени анализа бесконечно малых величин, когда были обнаружены определенные аналогии между дифференциально-интегральными и алгебраическими уравнениями. В XIX в. был опубликован ряд работ по операционному исчислению М.Е. Ващенко-Захарченко, О. Хэвисайда, Д. Карсона и др. Однако строгое обоснование операторный метод получил только в XX в. на базе общей теории функциональных преобразований.

В основе операторного метода расчета переходных процессов лежит преобразование Лапласа, которое позволяет перенести решение из области функций действительного переменного t в область комплексного переменного p :

$$p = \alpha + j\omega. \quad (7.1)$$

При этом операции дифференцирования и интегрирования функций времени заменяются соответствующими операциями умножения и деления функций комплексного переменного на оператор p , что существенно упрощает расчет, так как сводит систему дифференциальных уравнений к системе алгебраических. В операторном методе отпадает необходимость определения постоянных интегрирования. Этими обстоятельствами объясняется широкое применение этого метода на практике.

Различают прямое и обратное преобразование Лапласа. *Прямое преобразование Лапласа* определяется уравнением.

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (7.2)$$

где $f(t)$ — функция действительного переменного t , определенная при $t \geq 0$ (при $t < 0$; $f(t) = 0$) и удовлетворяющая условиям ограниченного роста:

$$|f(t)| < M e^{c_0 t}, \quad (7.3)$$

где множитель M и показатель роста c_0 — положительные действительные числа. На рис. 7.1 изображена область определения функции комплексного переменного $F(p)$.

Обратное преобразование Лапласа определяют из решения (7.2):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp. \quad (7.4)$$

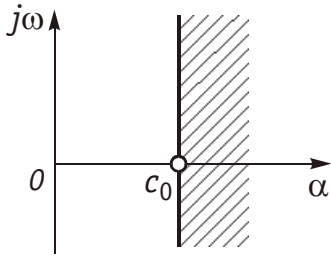


Рис. 7.1

Функция $F(p)$, определяемая уравнением (7.2), носит название *изображения по Лапласу*, а функция $f(t)$ в (7.4) — *оригинала*. Следовательно, оригинал и изображение представляют собой пару функций действительного $f(t)$ и комплексного $F(p)$ переменного, связанных преобразованием Лапласа. Для сокращенной записи преобразований (7.2),

(7.4) используют следующую символику:

$$f(t) \doteq F(p); \quad f(t) \Leftrightarrow F(p); \quad F(p) = L[f(t)]; \quad f(t) = L^{-1}[F(p)],$$

где L — оператор Лапласа. В дальнейшем для определенности будем использовать знак соответствия \doteq .

Рассмотрим основные свойства преобразований Лапласа.

Свойство линейности является следствием линейности преобразования Лапласа, его можно записать в форме

$$\sum_{k=1}^n a_k f_k(t) \doteq \sum_{k=1}^n a_k F_k(p), \quad (7.5)$$

где a_k — постоянные коэффициенты разложения. Свойство (7.5) легко доказать, если применить к левой части соотношения (7.5) прямое преобразование Лапласа (7.2).

Дифференцирование оригинала. При ненулевых начальных условиях: $f(0_-) \neq 0$ дифференцирование оригинала соответствует следующему условию

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0_-). \quad (7.6)$$

Для доказательства (7.6) подставим $f'(t)$ в преобразование (7.2) в виде

$$\int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} df(t).$$

Отсюда после интегрирования по частям получаем:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} df = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = pF(p) - f(0_-).$$

В случае нулевых начальных условий

$$f'(t) \doteq pF(p); \quad f''(t) \doteq p^2 F(p); \quad \dots \quad f^n(t) \doteq p^n F(p). \quad (7.7)$$

Интегрирование оригинала

$$\int_0^t f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p}; \quad \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t f(t) d^n t}_{n \text{ раз}} \doteq \frac{F(p)}{p^n}. \quad (7.8)$$

Доказательство осуществляется путем использования свойства дифференцирования оригинала (7.6), (7.7).

Изменение масштаба независимого переменного (теорема подобия)

$$f(at) \doteq \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), \quad (7.9)$$

где a — постоянный вещественный коэффициент. Свойство (7.9) легко доказывается путем замены независимой переменной $\tau = at$ в прямом преобразовании Лапласа (7.2).

Смещение в области действительного переменного (теорема запаздывания):

$$f(t \pm t_0) \doteq e^{\pm pt_0} F(p). \quad (7.10)$$

Для доказательства (7.10) введем следующие обозначения:

$$\Psi(p) = \int_0^{\infty} f(t \pm t_0) e^{-pt} dt.$$

Осуществим замену переменной $\tau = t \pm t_0$.

$$\begin{aligned} \Psi(p) &= \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p(\tau \mp t_0)} d\tau = e^{\pm pt_0} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau = \\ &= e^{\pm pt_0} F(p), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Из соотношения (7.10) следует, что сдвиг оригинала по оси времени на t_0 соответствует умножению изображения на $e^{\pm pt_0}$.

Смещения в области комплексного переменного (теорема смещения):

$$F(p \mp \lambda) \doteq e^{\pm \lambda t} f(t). \quad (7.11)$$

Теорема (7.11) следует непосредственно из прямого преобразования Лапласа, если в (7.2) вместо $f(t)$ подставить $e^{\pm \lambda t} f(t)$. Причем λ может быть как действительной, так и комплексной величиной.

Дифференцирование и интегрирование оригинала по параметру (свойство коммутативности):

$$\frac{\partial}{\partial x} f(t, x) \doteq \frac{\partial}{\partial x} F(p, x); \quad (7.12)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t, x) dx \doteq \int_{x_1}^{x_2} F(p, x) dx. \quad (7.13)$$

Для доказательства свойств (7.12), (7.13) достаточно продифференцировать или проинтегрировать прямое преобразование Лапласа (7.2) по параметру x .

Произведение изображений:

$$F_1(p)F_2(p) \doteq \int_0^t f_1(t-x)f_2(x)dx = \int_0^t f_1(x)f_2(t-x)dx. \quad (7.14)$$

Интегралы в (7.14) носят название *свертки функций* $f_1(t)$ и $f_2(t)$.

Дифференцирование изображения:

$$\frac{d^n F(p)}{dp^n} \doteq (-t)^n f(t). \quad (7.15)$$

Свойство (7.15) легко доказывается путем дифференцирования прямого преобразования Лапласа (7.2).

Интегрирование изображения:

$$\int_0^\infty F(p)dp \doteq \frac{f(t)}{t}. \quad (7.16)$$

Данное свойство доказывается аналогично (7.15).

В заключение приведем *предельные соотношения* для оригинала и изображения:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p); \quad (7.17)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p). \quad (7.18)$$

Действительно, согласно свойства дифференцирования оригинала можно записать:

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = pF(p) - f(0).$$

Учитывая, что $\lim_{p \rightarrow \infty} e^{-pt} = 0$, получаем:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [pF(p) - f(0)] = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) - \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0.$$

Отсюда непосредственно следует соотношение (7.17). Аналогично доказывается равенство (7.18).

В качестве примера найдем изображение по Лапласу типовых сигналов. Для теоретических и экспериментальных исследований характеристик электрических цепей и передачи сооб-

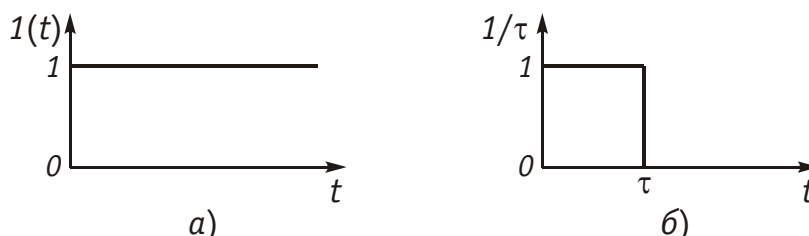


Рис. 7.2

щений по каналам связи используются различные типы сигналов: гармонические колебания, уровни постоянных напряжений, последовательность прямоугольных импульсов и так далее. Особо важную роль в теоретических исследованиях электрических цепей играют испытательные сигналы в форме единичной функции $1(t)$ и единичной импульсной функции $\delta(t)$ (функция Дирака).

Единичная функция. Единичная функция задается уравнением (рис. 7.2, а)

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (7.19)$$

Изображение функции (7.19) будет равно:

$$F(p) \int_0^{\infty} 1e^{-pt} dt = \frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}, \quad \text{т. е., } 1 \doteq \frac{1}{p}. \quad (7.20)$$

Единичная импульсная функция (функция Дирака). Эта функция называется еще δ -функцией; она задается уравнением

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \infty & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (7.21)$$

Функция Дирака является физически нереализуемой математической абстракцией, однако обладает рядом интересных свойств и играет очень важную роль в теоретических исследованиях. Формально она может быть получена, например, предельным переходом (при $\tau \rightarrow 0$) единичного импульса (см. рис. 7.2, б), площадь которого равна единице:

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (7.22)$$

Одним из интересных свойств функции $\delta(t)$ является ее *фильтрующее свойство*, определяемое равенством (рис. 7.3):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0). \quad (7.23)$$

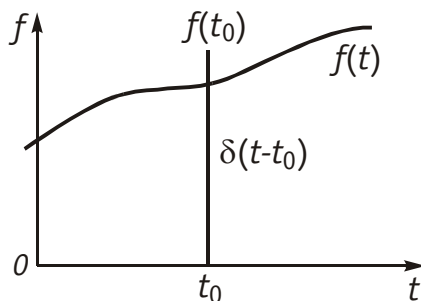


Рис. 7.3

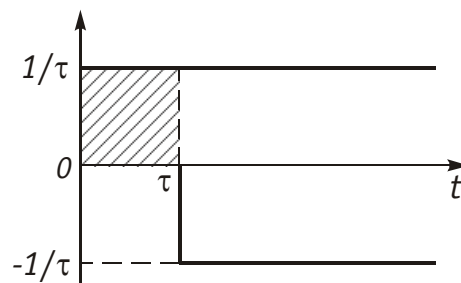


Рис. 7.4

Таблица 7.1

№ п/п	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
1	$A = \text{const}$	$\frac{A}{p}$
2	$e^{p_k t}$	$\frac{1}{p - p_k}$
3	$e^{j(\omega t + \varphi)}$	$\frac{e^{j\varphi}}{p - j\omega}$
4	$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$
5	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
6	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
7	$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{p \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{p^2 + \omega^2}$
8	$\cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{p \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{p^2 + \omega^2}$
9	$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
10	$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
11	At	$\frac{A}{p^2}$
12	$Ate^{-\alpha t}$	$\frac{A}{(p + \alpha)^2}$

Найдем изображение единичной импульсной функции в форме изображения разности двух единичных функций величины $1(t)$, сдвинутых друг относительно друга на τ (рис. 7.4). Для этих функций с учетом теоремы запаздывания имеем:

$$F_1(p) = 1/\tau p;$$

$$F_2(p) = \frac{1}{\tau p} e^{-p\tau}.$$

Для результирующего изображения с учетом свойства линейности получим

$$F(p) = F_1(p) - F_2(p) = \frac{1}{\tau p} (1 - e^{-p\tau}).$$

Устремив $\tau \rightarrow 0$, найдем изображение единичной импульсной функции (δ -функции): $\delta(t) \doteq 1$.

Экспоненциальный сигнал $f(t) = e^{-\alpha t}$ при $t > 0$:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-pt} dt = \frac{1}{\alpha + p},$$

т. е.

$$e^{-\alpha t} \doteq 1/(\alpha + p). \quad (7.24)$$

Подобным же образом можно найти изображение по Лапласу других функций, удовлетворяющих условию (7.3). В литературе имеются специальные справочники, в которых приведены оригиналы и изображения широкого класса функций. В табл. 7.1 приведены оригиналы и их изображения наиболее часто встречающихся в теории электрических цепей функций.

7.2. Теорема разложения

Для нахождения оригинала по изображению можно воспользоваться либо таблицами, либо использовать обратное преобразование Лапласа (7.4). Однако вычисление оригинала с помощью (7.4) обычно оказывается весьма сложным. Поэтому, для упрощения расчетов применяют теорему разложения, которая позволяет при нахождении оригинала заменить операцию интегрирования в (7.4) операцией суммирования, что значительно упрощает вычисления. Наиболее строгий вывод этой теоремы можно осуществить на основании теоремы вычетов. Здесь мы ограничимся выводом формул разложения применительно к изображению, представляющему собой рациональную дробь:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}, \quad (7.25)$$

где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0; b_m, b_{m-1}, \dots, b_1, b_0$ — вещественные коэффициенты, причем $F_1(p)$ и $F_2(p)$ не имеют общих корней.

Для нахождения оригинала $f(t)$ разложим $F(p)$ на простые дроби:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{p - p_k}, \quad (7.26)$$

где p_k — простые корни характеристического уравнения

$$F_2(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0 = 0. \quad (7.27)$$

A_k — коэффициенты разложения.

Для того, чтобы найти коэффициент A_k домножим обе части (7.26) на $(p - p_k)$ и перейдем к пределу:

$$\lim_{p \rightarrow p_k} (p - p_k) \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \lim_{p \rightarrow p_k} (p - p_k) \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{p - p_k}. \quad (7.28)$$

Раскрывая неопределенность в левой части равенства (7.28) по правилу Лопиталя и учитывая, что согласно (7.27) правая часть (7.28) равна A_k , получаем

$$A_k = \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}, \quad \text{где } F_2'(p_k) = \left. \frac{dF_2(p)}{dp} \right|_{p=p_k}. \quad (7.29)$$

Подставив значения A_k в формулу (7.26), найдем:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^m \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \frac{1}{p - p_k}.$$

Если учесть, что изображение $1/(p - p_k) \doteq e^{p_k t}$ (см. табл. 7.1), то на основании свойства линейности преобразования Лапласа окончательно получим:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \doteq f(t) = \sum_{k=1}^m \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (7.30)$$

Формула (7.30) является математической формулировкой теоремы разложения и позволяет найти оригинал по изображению в виде (7.25), в случае простых корней. Если среди корней p_k имеется один нулевой корень, т. е. $F_2(p) = pF_3(p)$, то теорема разложения примет вид

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{pF_3(p)} \doteq f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^m \frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (7.31)$$

Формулу (7.31) можно получить, если подставить в (7.30) вместо $F_2(p)$ значение $pF_3(p)$ и осуществить операцию дифференцирования.

Если среди корней уравнения (7.27) (полюсов функции $F(p)$) имеются комплексно-сопряженные корни p_k и p_{k+1} , то в формуле (7.30) достаточно взять p_k , а для p_{k+1} взять сопряженное значение, при этом сумма соответствующая двум этим корням с учетом действительности $f(t)$ будет равна

$$2\operatorname{Re} \left[\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \right] e^{p_k t}. \quad (7.32)$$

При этом в уравнении для $f(t)$ появятся составляющие типа (6.9): $Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_c t + \theta)$.

Теорему разложения можно обобщить и на более общие случаи. В частности, если среди полюсов (7.25) имеются полюса кратности l , то в оригинале $f(t)$ появятся слагаемые типа (6.8).

Пример. Задано изображение в виде

$$F(p) = \frac{p+2}{p(p^2+5p+4)}.$$

Обозначим $F_1(p) = p+2$; $F_2(p) = p(p^2+5p+4)$. При этом получим $F(p)$ в виде (7.25). Найдем корни характеристического уравнения $F_2(p) = p(p^2+5p+4) = 0$.

$$p_1 = 0; \quad p_2 = -1; \quad p_3 = -4.$$

При этом $F_1(p_1) = 2$; $F_1(p_2) = 1$; $F_1(p_3) = -2$.

Определим производную

$$F_2'(p) = 3p^2 + 10p + 4.$$

Отсюда $F_2'(p_1) = 4$; $F_2'(p_2) = -3$; $F_2'(p_3) = 12$. Воспользовавшись формулой (7.30), окончательно получим:

$$f(t) = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{F_1(p_3)}{F_2'(p_3)} e^{p_3 t} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{1}{6} e^{-4t}.$$

Учитывая, что среди корней характеристического уравнения $F_2(p) = 0$ имеем один нулевой корень, при нахождении $f(t)$ можно было воспользоваться и формулой (7.31). Действительно, если обозначим

$$F_3(p) = p^2 + 5p + 4,$$

то получим

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{pF_3(p)}.$$

Тогда корни уравнения $F_3(p) = 0$ будут равны $p_1 = -1$, $p_2 = -4$. С учетом значений

$$\begin{aligned} F_3'(p) &= 2p + 5; \quad F_3'(p_1) = 3; \quad F_3'(p_2) = -3; \\ F_3(0) &= 4; \quad F_1(0) = 2; \quad F_1(p_1) = 1; \quad F_1(p_2) = -2 \end{aligned}$$

согласно (7.31) окончательно получим

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \frac{F_1(p_1)}{p_1 F_3'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{p_2 F_3'(p_2)} e^{p_2 t} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{1}{6} e^{-4t} \right),$$

что полностью совпадает с ранее полученным решением.

7.3. Расчет переходных процессов операторным методом

Пользуясь основными свойствами преобразования Лапласа, можно получить основные законы теории цепей в операторной форме. Рассмотрим, например, последовательный RLC -контур (см. рис. 6.14), находящийся при ненулевых начальных условиях $u_C(0_-) \neq 0$; $i_L(0_-) \neq 0$. Для этого контура уравнение по ЗНК имеет вид:

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt = Ri + L \frac{di}{dt} + u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_0^t i dt. \quad (7.33)$$

Применив к (7.33) прямое преобразование Лапласа и принимая во внимание свойства линейности, дифференцирования и интегрирования оригинала получим:

$$U(p) = RI(p) + pLI(p) - Li(0) + \frac{u_C(0)}{p} + \frac{1}{pC}I(p).$$

Отсюда получаем закон Ома в операторной форме для данной цепи:

$$I(p) = \frac{U(p) + Li(0) - u_C(0)/p}{R + pL + 1/pC} = \frac{U_0(p)}{Z(p)}, \quad (7.34)$$

где $U_0(p) = U(p) + Li(0) - u_C(0)/p$ носит название *операторного напряжения*; $Z(p) = R + pL + 1/pC$ — *операторного сопротивления цепи*. Если в $Z(p)$ заменить p на $j\omega$, то получим комплексное сопротивление цепи. Величины $Li(0)$ и $u_C(0)/p$ называются *расчетными напряжениями*. Они характеризуют энергию магнитного и электрического полей, запасенную в L и C к моменту коммутации. Величина, обратная $Z(p)$ называется *операторной проводимостью* цепи:

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{1}{R + pL + 1/pC}.$$

Для нулевых начальных условий закон Ома примет вид

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = U(p)Y(p). \quad (7.35)$$

Аналогичным образом можно получить законы Кирхгофа в операторной форме:

первый закон (ЗТК)

$$\sum_{k=1}^m I_k(p) = 0; \quad (7.36)$$

второй закон (ЗНК)

$$\sum_{k=1}^n U_k(p) = 0. \quad (7.37)$$

Таким образом, закон Ома и законы Кирхгофа в операторной форме аналогичным этим же законам в комплексной форме (см. (3.48)–(3.50)) с той лишь разницей, что в (7.37) в каждой из n ветвей при наличии ненулевых начальных условий действуют дополнительные расчетные источники $L_k \dot{i}_k(0)$ и $-u_{Ck}(0)/p$, положительное направление которых совпадает с выбранным положительным направлением тока в этой ветви.

Используя законы Ома и Кирхгофа в операторной форме, можно найти изображения искомых токов и напряжений в цепи. Для определения оригиналов токов и напряжений можно воспользо-

ваться либо таблицами оригиналов и изображений, либо применить теорему разложения.

Для иллюстрации основных теоретических положений найдем операторным методом закон изменения тока в последовательном RLC -контуре при включении его на источник постоянного напряжения (см. § 6.5). Уравнение для изображения тока можно найти по закону Ома для нулевых начальных условий (7.35) с учетом изображения постоянного напряжения $U(p) \doteq U/p$:

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{U/p}{R + pL + 1/pC} = \frac{CU}{LCp^2 + RCp + 1} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Найдем корни характеристического уравнения

$$F_2(p) = LCp^2 + RCp + 1 = 0;$$

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

При $R > 2\rho$ корни будут вещественны и различны. Для нахождения оригинала тока $i(t)$ воспользуемся теоремой разложения (7.30). Для этого найдем производные $F_2'(p_1)$ и $F_2'(p_2)$:

$$F_2'(p_1) = 2LCp_1 + RC;$$

$$F_2'(p_2) = 2LCp_2 + RC.$$

Подставив значения $F_1(p) = F_1(p_2) = CU$ и $F_2'(p_1)$ и $F_2'(p_2)$ в (7.30) получим оригинал тока

$$i(t) = \frac{CU}{2LCp_1 + RC} e^{p_1 t} + \frac{CU}{2LCp_2 + RC} e^{p_2 t}$$

$$= -\frac{U}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_2 t} - e^{p_1 t}),$$

что полностью совпадает с ранее полученным уравнением (6.68).

Из рассмотренного примера хорошо видны преимущества операторного метода: простота, отсутствие громоздких операций по определению постоянных интегрирования. Следует подчеркнуть, что базируясь на законах Ома и Кирхгофа в операторной форме, можно рассчитать переходный процесс любым из ранее рассмотренных методов: контурных токов, узловых напряжений и др. При этом удобно пользоваться *эквивалентными операторными схемами*. При составлении эквивалентных операторных схем источники тока и напряжений $i(t)$ и $u(t)$ заменяются соответствующими изображениями $I(p)$ и $U(p)$, индуктивность L заменяется на pL , а емкость C — на $1/pC$ при нулевых начальных условиях. Если начальные условия ненулевые, то последовательно с pL добавляется источник напряжения $Li(0)$, а с C — источник

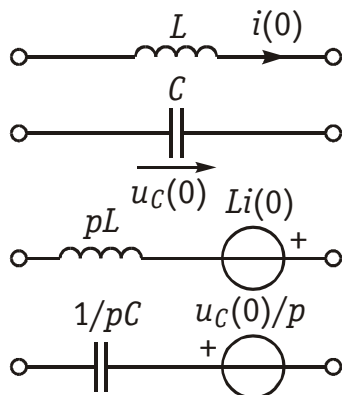


Рис. 7.5

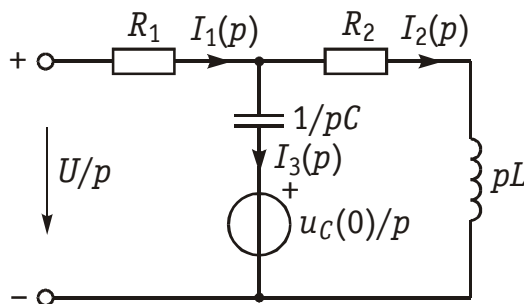


Рис. 7.6

напряжения — $u_C(0)/p$ (рис. 7.5)*. Например, эквивалентная операторная схема для цепи, изображенной на рис. 6.17, будет иметь вид (рис. 7.6). Составив для этой схемы уравнения по законам Кирхгофа в операторной форме, получим систему алгебраических уравнений, решение которых существенно проще системы (6.86).

Операторный метод можно использовать и для решения уравнения состояния цепи (см. § 6.7). При этом уравнение состояния (6.94) с учетом свойств дифференцирования оригинала и линейности преобразования Лапласа примет вид:

$$p\mathbf{X}(p) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(p) + \mathbf{B}\mathbf{W}(p), \quad (7.38)$$

где $\mathbf{X}(p)$, $\mathbf{W}(p)$ — изображения векторов состояния $\mathbf{x}(t)$ и входных воздействий $\mathbf{W}(t)$.

Из (7.38) получаем непосредственно решение

$$\mathbf{X}(p) = (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{W}(p) + (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0), \quad (7.39)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица. Применив к (7.39) теорему разложения, можно получить искомый вектор состояния

$$\mathbf{x}(t) \doteq \mathbf{X}(p).$$

7.4. Операторные передаточные функции

Важную роль в методах анализа и синтеза электрических цепей при нулевых начальных условиях играют *операторные передаточные функции*, которые определяются как отношение изображения выходной реакции цепи к изображению входного воздействия. В соответствии с этим определением различают четыре вида передаточных функций:

* Возможны схемы замещения заряженной емкости $u_C(0)$ и индуктивности с током $i_L(0)$ с помощью источников тока с задающими токами $Cu_C(0)$ и $i_L(0)/p$ соответственно.

$$\left. \begin{aligned} H_u(p) &= \frac{U_2(p)}{U_1(p)}, & H_i(p) &= \frac{I_2(p)}{I_1(p)}, \\ H_Z(p) &= \frac{U_2(p)}{I_1(p)}, & H_Y(p) &= \frac{I_2(p)}{U_1(p)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.40)$$

где $H_u(p)$, $H_i(p)$ имеют смысл операторных передаточных функций по напряжению и току; $H_L(p)$; $H_Y(p)$ — операторные передаточные сопротивление и проводимость соответственно.

Если в (7.40) заменить оператор p на $j\omega$, то получим уравнение комплексных передаточных функций $H(j\omega)$, которые были рассмотрены в § 4.1 и широко используются при частотных методах анализа электрических цепей (см. § 4.2 — 4.4, 9.5).

Зная передаточную функцию цепи $H(p)$, с помощью (7.40) нетрудно найти изображение реакции цепи, а следовательно, и саму реакцию на заданное воздействие.

Операторную передаточную функцию $H(p)$ для пассивной цепи можно представить как дробно-рациональную функцию с вещественными коэффициентами:

$$H(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0} = \frac{w(p)}{v(p)}; \quad (7.41)$$

или в виде

$$H(p) = H \frac{(p - p_{01})(p - p_{02}) \dots (p - p_{0n})}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_m)}, \quad (7.42)$$

где $p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0n}$ — нули; p_1, p_2, \dots, p_m — полюсы передаточной функции; $H = a_n/b_m$.

Степени полиномов числителя n и знаменателя m зависят от числа реактивных элементов пассивной цепи.

Заменяя в (7.41) оператор p на $j\omega$, получим комплексную передаточную функцию цепи

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)},$$

где АЧХ цепи

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\frac{(a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots)^2 + (a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots)^2}{(b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \dots)^2 + (b_1\omega - b_3\omega^3 + b_5\omega^5 - \dots)^2}}; \quad (7.43)$$

ФЧХ цепи

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \operatorname{arctg} \frac{(a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots)}{(a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots)} - \\ &\quad - \operatorname{arctg} \frac{(b_1\omega - b_3\omega^3 + b_5\omega^5 - \dots)}{(b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \dots)}. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Учитывая, что согласно (7.43) $|H(j\omega)|$ является иррациональной, обычно при анализе и синтезе цепей имеют дело с квадратом АЧХ:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{c_0\omega^{2n} + c_1\omega^{2n-2} + \dots + c_{n-1}\omega^2 + c_n}{d_0\omega^{2m} + d_1\omega^{2m-2} + \dots + d_{m-1}\omega^2 + d_m}, \quad (7.45)$$

где коэффициенты c_k и d_k получаются путем объединения коэффициентов при одинаковых степенях переменной ω .

Перечислим основные свойства операторных передаточных функций и квадрата АЧХ пассивных цепей:

1. Передаточная функция является дробно-рациональной функцией с вещественными коэффициентами. Вещественность коэффициентов объясняется тем, что они определяются элементами схемы.

2. Полюсы передаточной функции располагаются в левой полуплоскости комплексной переменной p . На расположение нулей ограничений нет. Докажем это свойство на примере передаточной функции $H_u(p) = U_2(p)/U_1(p)$. Выберем входное воздействие $u_1(t) = \delta(t)$ или в операторной форме $U(p) = 1$. Изображение выходного напряжения $U_2(p) = U_1(p)H_u(p)$ в этом случае численно равно $H_u(p)$, т. е.

$$\begin{aligned} U_2(p) = H_u(p) &= \frac{w(p)}{p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0} = \\ &= \frac{w(p)}{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_m)} = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \dots + \frac{A_m}{p-p_m}, \end{aligned}$$

где $w(p)$ — полином числителя передаточной функции; A_1, A_2, \dots, A_m , — коэффициенты разложения дробно-рациональной функции на сумму простых дробей.

Перейдем от изображения $U_2(p)$ к оригиналу $u_2(t)$:

$$u_2(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_m e^{p_m t}, \quad (7.46)$$

где в общем случае $p_i = \alpha_i + j\omega_i$.

В пассивных и устойчивых активных четырехполюсниках колебания на выходе четырехполюсника после прекращения воздействия должны иметь затухающий характер. Это означает, что в (7.46) вещественные части полюсов p_i должны быть отрицательными ($\alpha_i < 0$), т. е. полюсы должны находиться в левой полуплоскости переменной p .

3. Степени полиномов числителей передаточной функции и квадрата АЧХ не превышают степеней полиномов знаменателей, т. е. $n < m$. Если бы это свойство не выполнялось, то на бесконечно больших частотах АЧХ принимала бы бесконечно большое значение (так как числитель рос бы с увеличением частоты быстрее знаменателя), т. е. цепь обладала бы бесконечным усилением, что противоречит физическому смыслу.

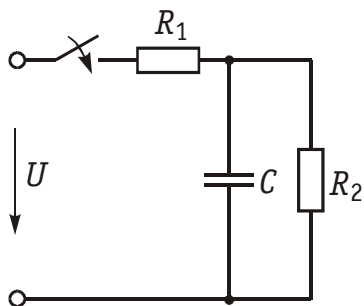


Рис. 7.7

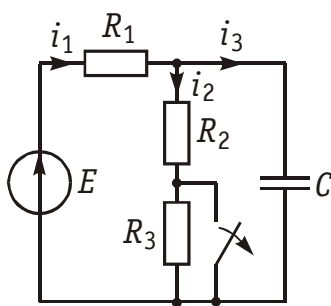


Рис. 7.8

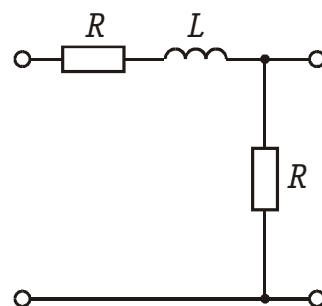


Рис. 7.9

4. Квадрат АЧХ является четной рациональной функцией переменной ω с вещественными коэффициентами. Это свойство с очевидностью вытекает из способа получения квадрата АЧХ по передаточной функции.

5. Квадрат АЧХ не может принимать отрицательных и бесконечно больших значений при $\omega > 0$. Неотрицательность $|H(j\omega)|^2$ следует из свойств квадрата модуля комплексной величины. Конечность значений АЧХ на реальных частотах объясняется так же, как и в свойстве 3.

Вопросы и задания для самопроверки

1. В чем заключается сущность операторного метода расчета цепи?
2. Что такое операторное сопротивление цепи?
3. Что такое операторные схемы замещения при составлении эквивалентной операторной схемы?
4. Чем заменяются индуктивности и емкости в операторной схеме замещения?
5. Как учитываются независимые начальные условия?
6. Записать закон Ома и законы Кирхгофа в операторной форме.
7. Что такое единичная функция и δ -функция?
8. Что понимается под операторной передаточной функцией? Каковы ее свойства?
9. Каким образом можно перейти от изображения к оригиналу?
10. Для схемы, изображенной на рис. 7.7, операторным методом определить напряжение на конденсаторе $u_C(t)$. $U = 20$ В; $R_1 = R_2 = 100$ Ом; $C = 4$ мкФ.
 Ответ: $u_C(t) = 10 - 10e^{-5 \cdot 10^3 t}$, В.
11. Для схемы, изображенной на рис. 7.8, найти изображение тока $I_2(p)$.

Ответ:
$$I_2(p) = \frac{1,675 \cdot 10^{-3} p + 5}{p(p + 2 \cdot 10^3)}.$$

12. Зная изображение тока (рис. 7.8), определить оригинал $i_2(t)$.

Ответ:
$$i_2(t) = 2,5 - 0,825e^{-2 \cdot 10^3 t}.$$

13. Для схемы, изображенной на рис. 7.9, определить:

- 1) операторную передаточную функцию $H_u(p)$;
- 2) найти АЧХ цепи.

Ответ: $H_u(p) = \frac{R}{2R + pL}$; $H(\omega) = \frac{R}{\sqrt{4R^2 + \omega^2 L^2}}$.

ГЛАВА 8. ВРЕМЕННОЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

8.1. Переходные и импульсные характеристики электрических цепей

В основе временного метода лежит понятие переходной и импульсной характеристик цепи. *Переходной характеристикой* цепи называют реакцию цепи на воздействие в форме единичной функции (7.19). Обозначается переходная характеристика цепи $g(t)$. *Импульсной характеристикой* цепи называют реакцию цепи на воздействие единичной импульсной функции (δ -функции) (7.21). Обозначается импульсная характеристика $h(t)$. Причем, $g(t)$ и $h(t)$ определяются при нулевых начальных условиях в цепи*. В зависимости от типа реакции и типа воздействия (ток или напряжение) переходные и импульсные характеристики могут быть безразмерными величинами, либо имеют размерность А/В или В/А.

Использование понятий переходной и импульсной характеристик цепи позволяет свести расчет реакции цепи от действия непериодического сигнала произвольной формы к определению реакции цепи на простейшее воздействие типа единичной $1(t)$ или импульсной функции $\delta(t)$, с помощью которых аппроксимируется исходный сигнал. При этом результирующая реакция линейной цепи находится (с использованием принципа наложения) как сумма реакций цепи на элементарные воздействия $1(t)$ или $\delta(t)$.

Между переходной $g(t)$ и импульсной $h(t)$ характеристиками линейной пассивной цепи существует определенная связь. Ее можно установить, если представить единичную импульсную функцию через предельный переход разности двух единичных функций величины $1/\tau$, сдвинутых друг относительно друга на время τ (см. рис. 7.4):

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1(t) - 1(t - \tau)}{\tau} = \frac{d}{dt} 1(t) = 1'(t), \quad (8.1)$$

* Импульсные и переходные характеристики цепей относятся к так называемым нормированным временным характеристикам, поскольку они рассматриваются по отношению к единичной площади импульсного воздействия или единичного скачка.

т. е. единичная импульсная функция равна производной единичной функции. Так как рассматриваемая цепь предполагается линейной, то соотношение (8.1) сохраняется и для импульсных и переходных реакций цепи

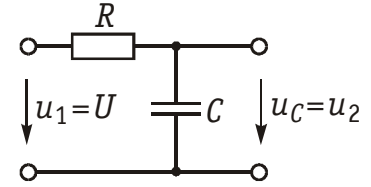


Рис. 8.1

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} = g'(t), \quad (8.2)$$

т. е. импульсная характеристика является производной от переходной характеристики цепи.

Уравнение (8.2) справедливо для случая, когда $g(0) = 0$ (нулевые начальные условия для цепи). Если же $g(0) \neq 0$, то представив $g(t)$ в виде $g(t) = g_1(t) + g(0)1(t)$, где $g_1(0) = 0$, получим уравнение связи для этого случая:

$$h(t) = g'(t) = g'_1(t) + g(0)\delta(t). \quad (8.3)$$

Для нахождения переходных и импульсных характеристик цепи можно использовать как классический, так и операторный методы. Сущность классического метода состоит в определении временной реакции цепи (в форме напряжения или тока в отдельных ветвях цепи) на воздействие единичной $1(t)$ или импульсной $\delta(t)$ функции. Обычно классическим методом удобно определять переходную характеристику $g(t)$, а импульсную характеристику $h(t)$ находить с помощью уравнений связи (8.2), (8.3) или операторным методом.

Пример. Найдем классическим методом переходную характеристику по напряжению для цепи, изображенной на рис. 8.1. Численно $g_u(t)$ для данной цепи совпадает с напряжением на емкости при подключении ее в момент $t = 0$ к источнику напряжения $U_1 = 1$ В:

$$g_u(t) = u_C(t)|_{U_1=1(t)}.$$

Закон изменения напряжения $u_C(t)$ определяется уравнением (6.27), где необходимо положить $U = 1$ В:

$$g_u(t) = 1 - e^{-t/\tau}.$$

При нахождении характеристик $g(t)$ и $h(t)$ операторным методом пользуются изображениями функций $1(t)$, $\delta(t)$ и методикой расчета переходных процессов, изложенных в гл. 7.

Пример. Определим операторным методом переходную характеристику $g_u(t)$ RC-цепи (см. рис. 8.1). Для данной цепи в соответствии с законом Ома в операторной форме (7.35) можем записать:

$$g_u(t) \doteq U_C(p)|_{U_1(p)=1/p} = I(p) \frac{1}{pC},$$

где

$$I(p) = \frac{U_1(p)}{Z(p)} = \frac{1}{p(R + 1/pC)} = \frac{C}{RCp + 1}. \quad (8.4)$$

Окончательно получаем

$$U_C(p) = \frac{1}{p(RCp + 1)}.$$

Отсюда по теореме разложения (7.31) находим

$$U_C(p) \doteq g_u(t) = 1 - e^{-t/\tau},$$

т. е. то же значение, что и полученное классическим методом.

Следует отметить, что величина $I(p)$ в уравнении (8.4) численно равна изображению переходной проводимости. Аналогичное изображение импульсной характеристики численно равно операторной проводимости цепи

$$h_Y(t) \doteq I(p)|_{U_1(p)=1} = \frac{1}{Z(p)} = Y(p).$$

Например, для RC -цепи (см. рис. 8.1) имеем:

$$h_Y(t) \doteq Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{1}{R + 1/pC} = \frac{pC}{RCp + 1}.$$

Применив к $Y(p)$ теорему разложения (7.30), получим:

$$h_Y(t) = -\frac{1}{R^2C} e^{-t/\tau}. \quad (8.5)$$

Следует отметить, что формула (8.5) определяет свободную составляющую реакции цепи при единичном импульсном воздействии. В общем случае в реакции цепи, кроме экспоненциальных составляющих свободного режима при $t > 0$ присутствует импульсное слагаемое, отображающее воздействие при $t = 0$ единичного импульса. Действительно, если учесть, что для RC -контура (см. рис. 8.1) переходная характеристика по току при $U = 1(t)$ согласно (6.28) будет

$$g_i(t) = \frac{1}{R} e^{-t/\tau} \cdot 1(t), \quad (8.6)$$

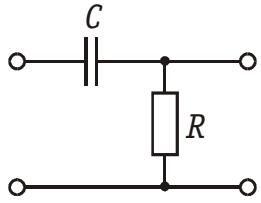
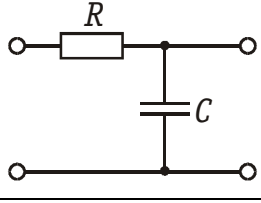
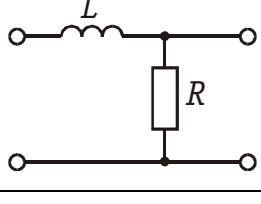
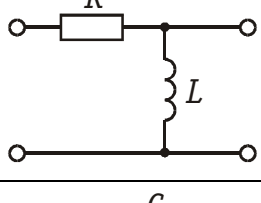
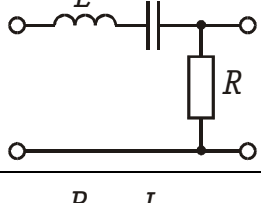
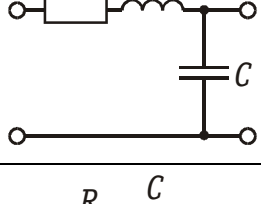
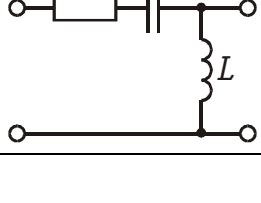
то после дифференцирования (8.6) согласно (8.2) получаем импульсную характеристику RC -цепи $h_i(t)$ в виде

$$h_1(t) = \frac{1}{R} 1'(t) - \frac{1}{R^2C} e^{-t/\tau} = \frac{1}{R} \delta(t) - \frac{1}{R^2C} e^{-t/\tau}, \quad (8.7)$$

т. е. реакция $h_i(t)$ содержит два слагаемых — импульсное и экспоненциальное.

Физический смысл первого слагаемого в (8.7) означает, что при $t = 0$ в результате воздействия на цепь импульсного напряжения

Таблица 8.1

Схема	Переходная характеристика $g_u(t)$	Импульсная характеристика $h_u(t)$
	e^{pt}	$\delta(t) + pe^{pt}$
	$1 - e^{pt}$	$-pe^{pt}$
	$1 - e^{pt}$	$-pe^{pt}$
	e^{pt}	$\delta(t) + pe^{pt}$
	$-\frac{R}{L(p_1 - p_2)}(e^{p_2 t} - e^{p_1 t})$	$-\frac{R}{L(p_1 - p_2)}(p_2 e^{p_2 t} - p_1 e^{p_1 t})$
	$1 - \frac{1}{p_1 - p_2}(p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t})$	$-\frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2}(e^{p_2 t} - e^{p_1 t})$
	$\frac{1}{p_1 - p_2}(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t})$	$\delta(t) + \frac{1}{p_1 - p_2}(p_1^2 e^{p_1 t} - p_2^2 e^{p_2 t})$

$\delta(t)$ зарядный ток мгновенно достигает бесконечно большого значения, при этом за время от 0_- до 0_+ элементу емкости передается конечный заряд и она скачком заряжается до напряжения I/RC . Второе слагаемое определяет свободный процесс в цепи при $t > 0$ и обусловлено разрядом конденсатора через короткозамкнутый вход

(так как при $t > 0$ $\delta(t) = 0$, что равносильно КЗ входа) с постоянной времени $\tau = RC$. Из этого следует, что при $\delta(t)$ -импульсном воздействии на RC -цепь нарушается непрерывность заряда на емкости (второй закон коммутации). Аналогично нарушается и условие непрерывности тока в индуктивности (первый закон коммутации), если к цепи, содержащей элемент индуктивности воздействовать напряжением в виде $\delta(t)$.

8.2. Интеграл Дюамеля

Интеграл Дюамеля может быть получен, если аппроксимировать приложенное воздействие $f_1(t)$ с помощью единичных функций, сдвинутых относительно друг друга на время $\Delta\tau$ (рис. 8.2).

Реакция цепи на каждое ступенчатое воздействие определится как

[illegible]

Результирующая реакция цепи на систему ступенчатых воздействий найдется, исходя из принципа наложения:

$$f_2(t) = f_2(0) + \sum_{k=1}^n f_2(k\Delta\tau) = f_1(0)g(t) + \sum_{k=1}^n \Delta f_k g(t - k\Delta\tau),$$

где n — число аппроксимирующих участков, на которые разбит интервал $0 \dots t$. Домножив и разделив выражение, стоящее под знаком суммы, на $\Delta\tau$ и перейдя к пределу с учетом того, что при $\Delta\tau \rightarrow 0$ $k\Delta\tau \rightarrow \tau$, получим одну из форм интеграла Дюамеля:

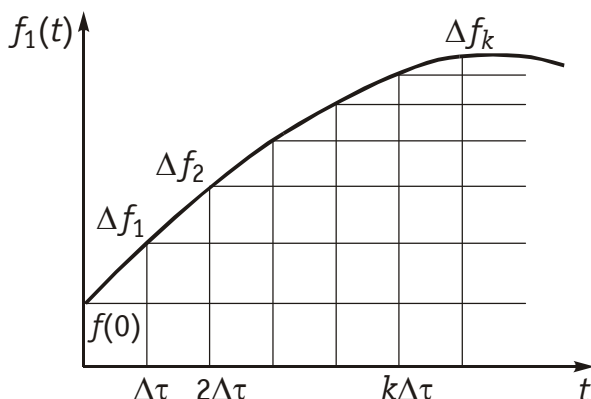


Рис. 8.2

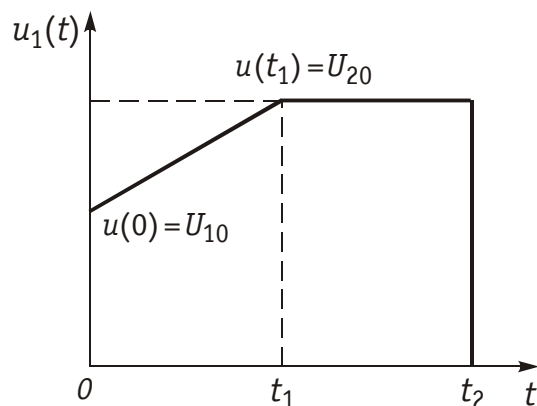


Рис. 8.3

$$\begin{aligned}
f_2(t) &= f_1(0)g(t) + \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{\Delta f_k}{\Delta\tau} g(t - k\Delta\tau)\Delta\tau = \\
&= f_1(0)g(t) + \int_0^t f_1'(\tau)g(t - \tau)d\tau.
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Уравнение (8.8) отражает реакцию цепи на заданное воздействие, поскольку при $\Delta\tau \rightarrow 0$ аппроксимирующая функция стремится к исходной.

Вторая форма интеграла Дюамеля может быть получена с помощью теоремы свертки (см. § 7.1):

$$f_2(t) = f_1(0)g(t) + \int_0^t f_1'(t - \tau)g(\tau)d\tau. \tag{8.9}$$

Наконец, интегрируя по частям выражения, стоящие в уравнениях (8.8) и (8.9), получаем третью и четвертую формы интеграла Дюамеля:

$$f_2(t) = f_1(t)g(0) + \int_0^t f_1(\tau)g'(t - \tau)d\tau; \tag{8.10}$$

$$f_2(t) = f_1(t)g(0) + \int_0^t f_1(t - \tau)g'(\tau)d\tau. \tag{8.11}$$

Применение той или иной формы интеграла Дюамеля диктуется удобством и простотой вычисления подынтегральных выражений.

Пример. Запишем реакцию цепи (см. рис. 8.1) на напряжение, изображенное на рис. 8.3 с помощью интеграла Дюамеля (8.8). Переходная характеристика данной цепи имеет вид $g_u(t) = 1 - e^{-t/RC}$.

После нахождения переходной функции определяем число участков интегрирования, где функция непрерывна и дифференцируема. Определяем значение $u_1'(\tau)$ на этих участках. Для рассматриваемого воздействия таких участков будет три: $0 \leq t < t_1$, $t_1 \leq t < t_2$, $t_2 \leq t < \infty$. Необходимость включения третьего участка объясняется тем обстоятельством, что несмотря на прекращение входного воздействия в силу переходных процессов (см. гл. 6) в цепи будет наблюдаться остаточная реакция. Для каждого из выделенных участков запишем уравнение (8.8) с учетом реакций предыдущих участков:

на участке $0 \leq t < t_1$

$$\begin{aligned}
u_2(t) &= U_{10}g_u(t) + \int_0^t u_1'(\tau)g_u(t - \tau)d\tau = \left[U_{10} - \frac{(U_{20} - U_{10})}{t_1}RC \right] + \\
&+ \frac{(U_{20} - U_{10})}{t_1}t + \left[\frac{(U_{20} - U_{10})}{t_1}RC - U_{10} \right] e^{-t/RC};
\end{aligned}$$

на участке $t_1 \leq t < t_2$

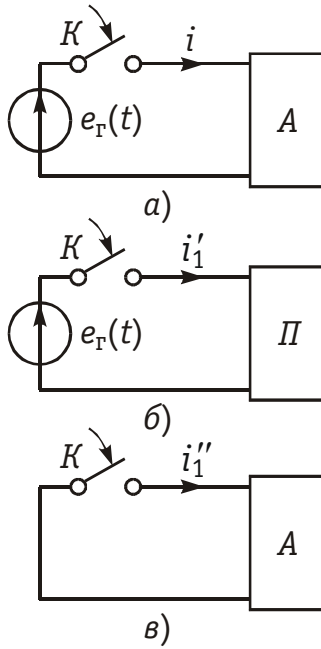


Рис. 8.4

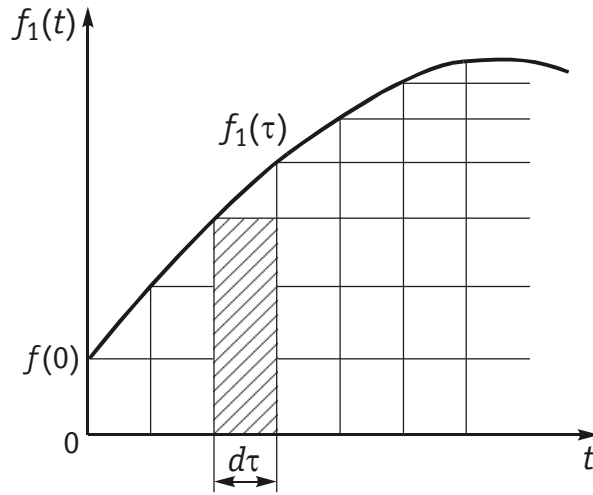


Рис. 8.5

$$u_2(t) = U_{10}g_u(t) + \int_0^{t_1} u'_1(\tau) g_u(t - \tau) d\tau = U_{20} + \\ + \left[\frac{(U_{20} - U_{10})}{t_1} RC(1 - e^{-t_1/RC}) - U_{10} \right] e^{-t/RC};$$

на участке $t_2 \leq t < \infty$

$$u_2(t) = U_{10}g_u(t) + \int_0^{t_1} u'_1(\tau) g_u(t - \tau) d\tau - U_{20}g_u(t - t_2) = \\ = \left[\frac{(U_{20} - U_{10})}{t_1} RC(1 - e^{-t_1/RC}) + U_{20}e^{t_2/RC} - U_{01} \right] e^{-t/RC}.$$

В случае, когда воздействие прикладывается к активной цепи (рис. 8.4, а), расчет переходных процессов можно вести методом наложения. При этом вначале расчет ведется с помощью интеграла Дюамеля для пассивной цепи (рис. 8.4, б), затем определяется классическим или операторным методом реакция цепи при включении рассматриваемой ветви к активному двухполюснику (рис. 8.4, в). Результирующая реакция находится как сумма реакций: $i = i'_1 + i''_2$.

8.3. Интеграл наложения

При нахождении реакции цепи с помощью интеграла наложения используется импульсная характеристика цепи $h(t)$. Для получения общего выражения интеграла наложения аппроксимируем входной сигнал $f_1(t)$ с помощью системы единичных импульсов длительно-

сти $d\tau$, амплитуды $f_1(\tau)$ и площади $f_1(\tau)d\tau$ (рис. 8.5). Выходная реакция цепи на каждый из единичных импульсов

$$df_2(t) = f_1(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

Используя принцип наложения, нетрудно получить суммарную реакцию цепи на систему единичных импульсов:

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)h(\tau)d\tau. \quad (8.12)$$

Интеграл (8.12) носит название *интеграла наложения**. Между интегралами наложения и Дюамеля существует простая связь, определяемая связью (8.3) между импульсной $h(t)$ и переходной $g(t)$ характеристиками цепи. Подставив, например, значение $h(t)$ из (8.3) в формулу (8.12) с учетом фильтрующего свойства δ -функции (7.23), получим интеграл Дюамеля в форме (8.11).

Пример. На вход RC -цепи (см. рис. 8.1) подается скачок напряжения U_1 . Определить реакцию цепи на выходе с использованием интегралов наложения (8.12) и Дюамеля (8.11).

Импульсная характеристика данной цепи равна (см. табл. 8.1): $h_u(t) = (1/RC)e^{-t/RC}$. Тогда, подставляя $h_u(t-\tau) = (1/RC)e^{-(t-\tau)/RC}$ в формулу (8.12), получаем:

$$u_2(t) = \frac{U_1}{RC} \int_0^t e^{-(t-\tau)/RC} d\tau = U_1(1 - e^{-t/RC}).$$

Аналогично результат получаем при использовании переходной функции данной цепи и интеграла Дюамеля (8.11):

$$u_2(t) = U_1 g_u(t) = U_1(1 - e^{-t/RC}).$$

Если начало воздействия не совпадает с началом отсчета времени, то интеграл (8.12) принимает вид

$$f_2(t) = \int_{-\infty}^t f_1(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t f_1(t-\tau)h(\tau)d\tau. \quad (8.13)$$

Интегралы наложения (8.12) и (8.13) представляют собой свертку входного сигнала с импульсной характеристикой цепи и широко применяются в теории электрических цепей и теории передачи сигналов. Ее физический смысл заключается в том, что входной сигнал $f_1(\tau)$ как бы взвешивается с помощью функции $h(t-\tau)$: чем медленнее убывает со временем $h(t)$, тем большее влияние на выходной сигнал оказывает более удаленные от момента наблюдения значение входного воздействия.

* Уравнения (8.12) могут быть получены и непосредственно путем применения теоремы свертки (см. § 7.1) к изображению $f_1(t)$ и $h(t)$.

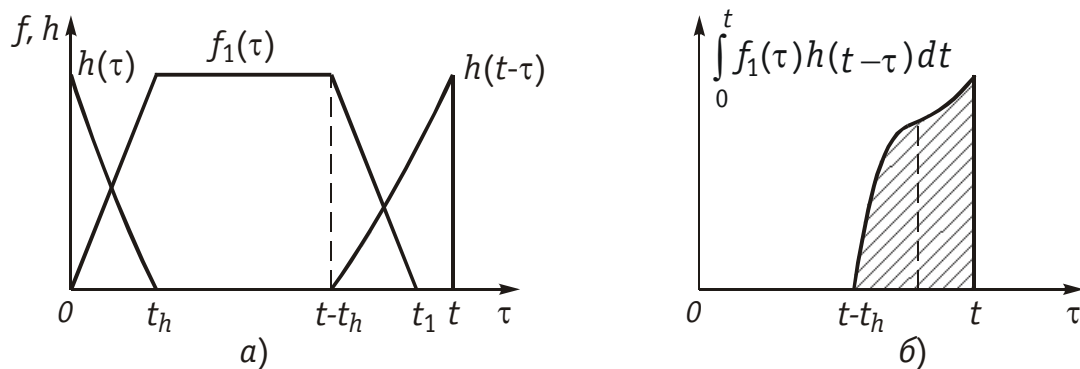


Рис. 8.6

На рис. 8.6, *a* показан сигнал $f_1(\tau)$ и импульсная характеристика $h(t-\tau)$, являющаяся зеркальным отображением $h(\tau)$, а на рис. 8.6, *б* приведена свертка сигнала $f_1(\tau)$ с функцией $h(t-\tau)$ (заштрихованная часть), численно равная реакции цепи в момент t .

Из рис. 8.6 видно, что отклик на выходе цепи не может быть короче суммарной длительности сигнала t_1 и импульсной характеристики t_h . Таким образом, для того чтобы выходной сигнал не искажался импульсная характеристика цепи должна стремиться к δ -функции.

Очевидно также, что в физически реализуемой цепи реакция не может возникнуть раньше воздействия. А это означает, что импульсная характеристика физически реализуемой цепи должна удовлетворять условию

$$h(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0. \quad (8.14)$$

Для физически реализуемой устойчивой цепи кроме того должно выполняться условие абсолютной интегрируемости импульсной характеристики:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty. \quad (8.15)$$

Если входное воздействие имеет сложную форму или задается графически, то для вычисления реакции цепи вместо интеграла свертки (8.12) применяют графоаналитические способы.

Вопросы и задания для самопроверки

1. Дать определения переходной и импульсной характеристик цепи.
2. Указать связь между импульсной и переходной характеристиками.
3. Как определить переходную и импульсную характеристику цепи?
4. В чем отличие переходных характеристик $g_u(t)$, $g_i(t)$, $g_z(t)$, $g_y(t)$, объяснить их физический смысл.
5. Как определить, какую из четырех разновидностей переходных или импульсных характеристик необходимо применить в каждом конкретном случае при расчете реакции цепи?

6. В чем заключается сущность расчета переходных процессов с использованием $g(t)$ и $h(t)$?
7. Как определить реакцию цепи, если воздействие имеет сложную форму?
8. Каким условиям должна удовлетворять цепь при использовании интеграла Дюамеля?
9. Приведите другую форму интеграла наложения, отличную от (8.12).
10. Расчет реакции цепи с использованием интегралов Дюамеля и наложения приводит к одинаковым результатам или разным?
11. Определить переходную проводимость цепи, образованной сопротивлением и индуктивностью, включенными последовательно.
 Ответ: $g_y(t) = 1/R(1 - e^{-(R/L)t})$.
12. Определить $g_y(t)$ цепи, образованной сопротивлением и емкостью, включенными последовательно.
 Ответ: $g_y(t) = (1/R)e^{-t/(RC)}$.
13. Получить третью форму интеграла Дюамеля (8.10) из уравнения свертки (8.10).

ГЛАВА 9. ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

9.1. Интеграл Фурье

Для анализа переходных процессов при воздействии на цепь сигналов произвольной формы наряду с временным и операторным методом широко используется частотный метод анализа, базирующийся на спектральных представлениях сигнала.

Для непериодических сигналов используются спектральные представления, основанные на паре преобразований Фурье. Преобразование Фурье может быть получено предельным переходом от ряда Фурье (5.6). Для этого зададим непериодический сигнал $f(t)$, удовлетворяющий условию абсолютной интегрируемости в бесконечных пределах (рис. 9.1): $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$. С физической точки зрения, это означает, что задается реализуемый сигнал с конечной энергией; при этом

$$|f(t)| < Me^{-c_0 t}, \quad (9.1)$$

где M, c_0 — положительные постоянные величины.

Условие (9.1) означает, что модуль $|f(t)|$ имеет ограниченный показатель роста. Превратим мысленно этот сигнал в периодиче-

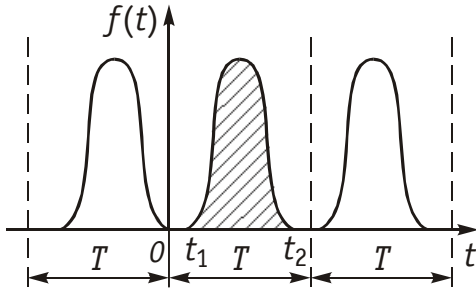


Рис. 9.1

ский повторением его через период T (см. рис. 9.1). К полученному таким образом сигналу применимо разложение (5.6), которое после перехода к переменной t можно записать в виде

$$f_1(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{A}_k e^{jk\omega_1 t}, \quad (9.2)$$

где

$$\underline{A}_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) e^{-jk\omega_1 t} dt; \quad T = 2\pi/\omega_1. \quad (9.3)$$

После подстановки \underline{A}_k в уравнение (9.2) с учетом (9.3) получаем

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_1 t} \omega_1 \left[\int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) e^{-jk\omega_1 t} dt \right]. \quad (9.4)$$

Переходя в уравнении (9.4) к пределу при $T \rightarrow \infty$ и учитывая, что при этом $\omega_1 \rightarrow d\omega$ и $k\omega_1 \rightarrow \omega$, а сумма вырождается в интеграл, получаем для исходного сигнала

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (9.5)$$

Внутренний интеграл в уравнении (9.5) носит название *спектра сигнала* $F(j\omega)$:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (9.6)$$

Тогда формула (9.5) принимает вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (9.7)$$

Уравнения (9.6) и (9.7) являются основными в теории спектрального анализа, причем (9.6) называется *прямым*, а (9.7) — *обратным преобразованием Фурье*. По аналогии с \underline{A}_k спектр $F(j\omega)$ является в общем случае комплексной функцией частоты и может быть записан в алгебраической форме

$$F(j\omega) = A(\omega) - jB(\omega) \quad (9.8)$$

и показательной форме

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{-j\varphi(\omega)}, \quad (9.9)$$

где

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt; \quad B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (9.10)$$

Модуль

$$|F(j\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \quad (9.11)$$

определяет *амплитудный*, а аргумент

$$\varphi(\omega) = \arctg[B(\omega)/A(\omega)] \quad (9.12)$$

— *фазовый спектр сигнала*. Причем, как и для периодического сигнала, амплитудный спектр является четной, а фазовый — нечетной функцией частоты. Физический смысл преобразования Фурье лучше всего проявляется при представлении обратного преобразования (9.7) в тригонометрической форме. Если подставить вместо $F(j\omega)$ в (9.7) его значение из (9.9), то получим

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)| e^{j(\omega t - \varphi)} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)| \cos(\omega t - \varphi) d\omega + j \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)| \sin(\omega t - \varphi) d\omega. \end{aligned}$$

Учитывая, что $|F(j\omega)|$ — четная, а синус — нечетная функция частоты интеграл от второго слагаемого равен нулю. Следовательно, принимая во внимание четность подынтегрального выражения в первом слагаемом, обратное преобразование Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(j\omega)| \cos(\omega t - \varphi) d\omega. \quad (9.13)$$

Из (9.13) следует важнейший вывод о том, что *непериодический сигнал может быть представлен пределом суммы (интеграл) бесконечно большого числа бесконечно малых гармонических колебаний с амплитудами $(1/\pi)|F(j\omega)|$ и начальными фазами $\varphi = \varphi(\omega)$* , причем, учитывая, что разность частот соседних гармоник бесконечно мала $\Delta\omega = d\omega$, то $F(j\omega)$ в уравнении (9.13) представляет непрерывный сплошной спектр в отличие от спектра периодического сигнала, который является дискретным (линейчатым) (см, гл. 5). Поэтому $F(j\omega)$ называют *комплексной спектральной плотностью*, а $|F(j\omega)|$ — *спектральной плотностью амплитуд непериодического сигнала*.

Смысл комплексного спектра $F(j\omega)$ следует из связи между спектрами периодических и непериодических сигналов. Сравнение уравнений (9.3) с (9.6) позволяет установить эту связь между спектрами: при $T \rightarrow \infty$; $\omega_k = k\omega_1 \rightarrow \omega$

$$F(j\omega) = \frac{T}{2} \underline{A}_k, \quad (9.14)$$

и спектр комплексных амплитуд \underline{A}_k обращается в комплексную спектральную плотность $F(j\omega)$.

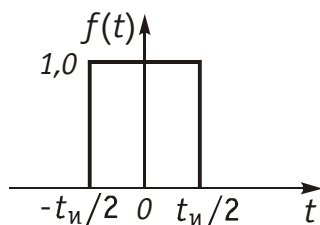


Рис. 9.2

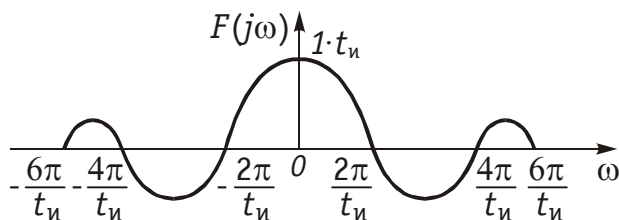


Рис. 9.3

Из (9.14) следует и другой важный вывод: модуль спектральной плотности непериодического сигнала и огибающая линейчатого спектра периодического сигнала, полученного повторением с периодом T непериодического сигнала, совпадают по форме и отличаются только масштабом. Это наглядно можно проиллюстрировать на примере периодической последовательности прямоугольных импульсов (см. рис. 5.3, *а*): с увеличением периода (скважности q) спектр становится гуще (см. рис. 5.4, *б*) и в пределе при $T = \infty$ периодический сигнал превращается в непериодический (рис. 9.2), а дискретный спектр обращается в сплошной (рис. 9.3). При этом огибающая как линейчатого, так и сплошного спектра описывается функцией отсчетов (5.29): $\sin x/x$.

Рассмотрим некоторые основные свойства преобразования Фурье. Если сигнал $f(t)$ является четной функцией времени, то, его спектр $F(j\omega)$ — вещественный. Действительно, согласно (9.6) для $F(j\omega)$ можно записать:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

Второй интеграл равен нулю в силу нечетности подынтегральной функции, следовательно,

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt. \quad (9.15)$$

Аналогично при нечетности сигнала $f(t)$ спектр $F(j\omega)$ является чисто мнимым.

Важным свойством преобразования Фурье является взаимозаменяемость переменных t и ω . Для четного сигнала $f(t)$ и вещественного спектра $F(j\omega)$ можем заменить в преобразовании (9.6) знаки перед $j\omega t$:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt. \quad (9.16)$$

Тогда сравнивая (9.16) и (9.7) видим их подобие. Взаимозаменяемость переменных в преобразовании Фурье позволяет установить связь между частотными и временными характеристиками сигнала (см. § 9.5).

В соответствии с (9.8) и (9.9) сигнал может быть задан либо с помощью своего амплитудного $|F(j\omega)|$ и фазового спектра $\varphi(\omega)$, либо с помощью вещественной $A(\omega)$ и мнимой частей $B(\omega)$ спектра сигнала. Причем, все они взаимосвязаны между собой согласно (9.11)–(9.12), т. е. нельзя задавать независимо амплитудный $|F(j\omega)|$ и фазовый спектр $\varphi(\omega)$, или вещественную $A(\omega)$ и мнимую часть спектра $B(\omega)$.

Наиболее ясно эта связь проявляется для сигнала, заданного на положительной полуоси времени t :

$$f(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (9.17)$$

Перепишем (9.13) в форме

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\infty |F(j\omega)| \cos \varphi \cos \omega t d\omega + \int_0^\infty |F(j\omega)| \sin \varphi \sin \omega t d\omega \right].$$

Или учитывая, что

$$\begin{cases} A(\omega) = |F(j\omega)| \cos \varphi, \\ B(\omega) = |F(j\omega)| \sin \varphi, \end{cases} \quad (9.18)$$

при $t \geq 0$ получим:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\infty A(\omega) \cos \omega t d\omega + \int_0^\infty B(\omega) \sin \omega t d\omega \right] \quad (9.19)$$

и при $t < 0$ с учетом (9.17)

$$0 = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\infty A(\omega) \cos \omega t d\omega - \int_0^\infty B(\omega) \sin \omega t d\omega \right]. \quad (9.20)$$

Суммируя и вычитая равенства (9.19) и (9.20), получаем:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A(\omega) \cos \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty B(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (9.21)$$

Отсюда следует связь между вещественной $A(\omega)$ и мнимой $B(\omega)$ частями спектра сигнала:

$$\int_0^\infty A(\omega) \cos \omega t d\omega = \int_0^\infty B(\omega) \sin \omega t d\omega, \quad (9.22)$$

т. е. в данном случае сигнал $f(t)$ полностью определяется только вещественной $A(\omega)$ или мнимой $B(\omega)$ частями комплексного спектра $F(j\omega)$.

В заключение отметим, что при $\omega = 0$ спектр (9.6) принимает значение

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt, \quad (9.23)$$

т. е. будет равен площади, ограниченной сигналом $f(t)$. Формула (9.23) позволяет в ряде случаев оценить спектр сигнала по виду функции $f(t)$.

Следует подчеркнуть, что временное и спектральное представление является просто двумя формами (моделями) представления реального физического процесса, и они лежат в основе временных и частотных методов анализа электрических цепей.

В заключение установим связь между преобразованием Фурье и преобразованием Лапласа. Если положить, что $f(t)$ удовлетворяет условию (9.17), то прямое преобразование Фурье принимает вид

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (9.24)$$

Соотношение (9.24) носит название *одностороннего преобразования Фурье*, так как оно определяется на положительной полуоси t . Если принять в качестве частного случая в формуле (7.1) $\alpha = 0$, то $p = j\omega$, и прямое преобразование Лапласа (7.2)

$$F(p)|_{p=j\omega} = F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (9.25)$$

т. е. полностью совпадает с односторонним преобразованием Фурье (9.24).

Аналогично получим для обратного преобразования Лапласа (7.4) с учетом того, что $dp = j d\omega$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (9.26)$$

что полностью совпадает с (9.7).

Таким образом, преобразование Фурье есть частный случай преобразования Лапласа при $\alpha = 0$. Следует подчеркнуть, что преобразование Фурье имеет более узкую область применения, чем преобразование Лапласа, так как условие (9.1), которым должны удовлетворять функции, преобразуемые по Фурье более жесткое, чем условие (7.3). Всякая функция, для которой применимо преобразование Фурье (9.6) всегда может быть преобразована по Лапласу, но не наоборот. В этой связи изображение $F(p)$ можно трактовать как своего рода *обобщенный спектр сигнала* $f(t)$.

9.2. Основные теоремы спектрального анализа

Как было установлено выше, между сигналом и его спектром существует однозначная связь, определяемая прямым преобразованием Фурье. Поскольку в процессе передачи сигнала он подвергается различным преобразованиям, очень важно установить как при этом изменяется спектр сигнала. Это имеет большое значение с точки зрения выбора оптимальных методов передачи, приема, требований к параметрам канала связи.

Рассмотрим основные теоремы о спектрах, имеющих практическое применение в электросвязи. Учитывая связь между преобразованием Фурье и Лапласа и имея в виду доказательства основных теорем, данных в § 7.1, остановимся только на физической интерпретации основных теорем спектрального анализа.

Спектр суммы сигналов (теорема линейности) равен сумме спектров этих сигналов. Это свойство является следствием линейности преобразования Фурье. В более общем виде оно может быть записано следующим образом:

$$\sum_{k=1}^n a_k f_k(t) \doteq \sum_{k=1}^n a_k F_k(j\omega), \quad (9.27)$$

где a_k — коэффициенты разложения; \doteq — знак соответствия между сигналом и его спектром, определяемого парой преобразований Фурье.

Сдвиг сигнала во времени $f(t-t_0)$ соответствует умножению его спектра на $e^{-j\omega_0 t}$:

$$f(t-t_0) \doteq F(j\omega)e^{-j\omega_0 t}. \quad (9.28)$$

Из (9.28) следует важный вывод о том, что при сдвиге сигнала во времени его амплитудный спектр не изменяется, а фазовый изменяется пропорционально ωt_0 . Эта теорема имеет большое значение, так как в процессе обработки сигналов часто возникает необходимость осуществлять задержку сигнала (см. гл. 18, 19).

Изменение масштаба независимого переменного (сжатие сигнала) описывается выражением

$$f(at) \doteq \frac{1}{a} F\left(\frac{j\omega}{a}\right). \quad (9.29)$$

Из (9.29) следует, что сжатие сигнала во времени ($a > 1$) приводит к расширению спектра сигнала и напротив — растяжение сигнала ($a < 1$) — к сужению спектра.

Перемножение двух сигналов (теорема свертки). Спектр произведения двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ соответствует свертке их спектров $F_1(j\omega)$ и $F_2(j\omega)$:

$$f_1(t)f_2(t) \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\Omega)F_2(j\omega - j\Omega)d\Omega. \quad (9.30)$$

Важное значение имеет обратная теорема о произведении спектров сигналов:

$$F_1(j\omega)F_2(j\omega) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau. \quad (9.31)$$

Свертка функций широко использовалась ранее во временных методах анализа электрических цепей (см. гл. 8).

Дифференцирование и интегрирование сигнала. При дифференцировании сигнала его спектр умножается на оператор $j\omega$:

$$\frac{d}{dt}f(t) \doteq j\omega F(j\omega), \quad (9.32)$$

а при интегрировании делится на $j\omega$:

$$\int_{-\infty}^t f(t)dt \doteq \frac{1}{j\omega}F(j\omega). \quad (9.33)$$

Доказательство (9.32)–(9.33) следует непосредственно из прямого и обратного преобразований Фурье. Следует подчеркнуть, что (9.33) справедливо для сигналов, удовлетворяющих условию $F(0) = 0$.

Смещение спектра сигнала на частоту $\mp\Omega$ соответствует умножению сигнала на оператор $e^{\pm j\Omega t}$:

$$F[j(\omega \mp \Omega)] \doteq e^{\pm j\Omega t}f(t). \quad (9.34)$$

Теорема смещения (9.34) позволяет определить спектр модулированного сигнала и имеет большое значение в теории электрической связи.

9.3. Распределение энергии в спектре непериодического сигнала

Определим энергию сигнала $f(t)$ по его спектральной характеристике $F(j\omega)$. Предположим, что $f(t)$ представляет собой напряжение или ток, протекающий в единичном сопротивлении $R = 1$ Ом. Тогда согласно (1.4) энергия выделяемая $f(t)$ будет равна

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt. \quad (9.35)$$

Представим подынтегральное выражение (9.35) в виде произведения $f^2(t) = f(t)f(t)$ и применим к $f(t)$ обратное преобразование Фурье (9.7):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Учитывая независимость переменных t и ω , перепишем последнюю формулу в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt.$$

Внутренний интеграл представляет собой сопряженный спектр $F(-j\omega)$. Если учесть, что $F(j\omega)F(-j\omega) = |F(j\omega)|^2$, то получим следующее *равенство Парсеваля (теорема Рэлея)*:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega. \quad (9.36)$$

Из уравнения (9.36) следует, что величина $|F(j\omega)|^2$ представляет собой энергию сигнала, приходящуюся на 1 с^{-1} текущей частоты ω , поэтому квадрат модуля спектра $|F(j\omega)|^2$ называют *спектральной плотностью энергии сигнала*. Вид модуля $|F(j\omega)|$ позволяет судить о распределении энергии в спектре непериодического сигнала. Равенство Парсеваля широко используется в теории цепей и сигналов при выборе полосы пропускания канала связи, обеспечивающей наилучшее использование энергии сигнала.

Следует отметить, что в отличие от формулы (5.23), где рассматривалась средняя за период T мощность периодического несинусоидального сигнала, для непериодического сигнала такое усреднение невозможно ($\lim_{T \rightarrow \infty} P = 0$). Общим для обоих случаев является то, что мощность и энергия сигналов не зависят от фаз спектральных составляющих.

9.4. Спектры типовых сигналов

Определим спектры наиболее распространенных типов электрических сигналов.

Единичная функция задается уравнением (7.19) (см. рис. 7.2, а). Строго говоря, функция (7.19) не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости (см. § 9.1), поэтому воспользуемся следующим приемом: умножим $1(t)$ на «гасящий» множитель e^{-ct} ($c = \text{const}$). При этом можно использовать прямое преобразование Фурье (9.6):

$$F(j\omega, c) = \int_{-\infty}^{\infty} 1(t) e^{-ct} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} 1 e^{-(c+j\omega)t} dt = \frac{1}{c + j\omega}. \quad (9.37)$$

Преобразование $F(j\omega, c)$ носит название *обобщенного преобразования Фурье*. Для получения спектра единичной функции перейдем к пределу:

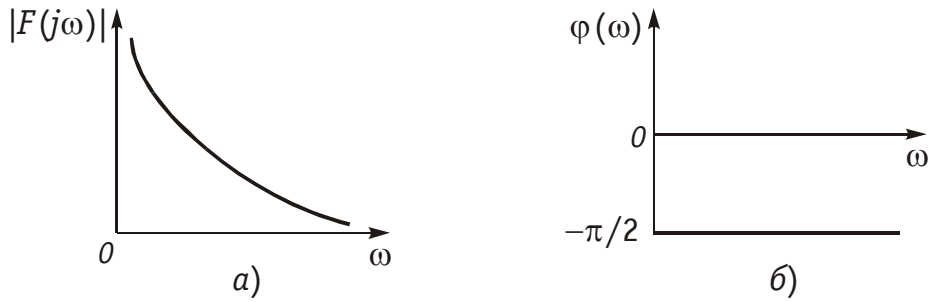


Рис. 9.4

$$F(j\omega) = \lim_{c \rightarrow 0} F(j\omega, c) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\pi/2}. \quad (9.38)$$

Из уравнения (9.38) получаем амплитудный $|F(j\omega)| = 1/\omega$ (рис. 9.4, а) и фазовый спектр функции $\varphi(\omega)$ (рис. 9.4, б): $\varphi(\omega) = -\pi/2$, т. е. амплитудный спектр при $\omega = 0$ обращается в бесконечность, что свидетельствует о наличии в исходной функции $1(t)$ скачка при $t = 0$ (см. рис. 7.2, а). Для образования этого скачка в соответствии с (9.38) при $t = 0$ осуществляется суммирование бесконечно большого числа синусоидальных составляющих. Спектр (9.38) может быть получен и с помощью изображения единичной функции (7.20):

$$F(j\omega) = F(p)|_{p=j\omega} = \frac{1}{j\omega}.$$

Единичная импульсная функция. Функция $\delta(t)$ задается аналитически условиями (7.21). Для нахождения спектра δ -функции воспользуемся прямым преобразованием Фурье (9.6), которое с учетом (9.8)–(9.10) можно записать в виде

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \sin \omega t dt.$$

Так как второе слагаемое равно нулю, а первое — единице вследствие свойств (7.21)–(7.23), то окончательно получим

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \cdot e^{j0} = 1. \quad (9.39)$$

Таким образом, δ -функция имеет равномерный амплитудный и нулевой фазовый спектры. Равенство нулю на всех частотах фазового спектра означает, что все гармонические составляющие δ -функции, суммируясь с нулевыми начальными фазами, образуют при $t = 0$ пик бесконечно большого значения.

Следует отметить, что сдвиг δ -функции на время τ приводит согласно свойствам преобразования Фурье (см. § 9.2) к спектру $F(j\omega) = 1 \cdot e^{-j\omega\tau}$, т. е. амплитудный спектр функции $\delta(t - \tau)$ остается прежним, а фазовый изменяется пропорционально $\omega\tau$.

Из равенства (9.39) согласно обратному преобразованию Фурье (9.7) следует, что

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega. \quad (9.40)$$

Учитывая условие взаимозаменяемости параметров t и ω (см. § 9.1), последнее выражение можно переписать в следующем виде:

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j\omega t} dt. \quad (9.41)$$

Уравнения (9.40) и (9.41) широко используются в теории сигналов и цепей.

Спектр постоянной составляющей функции $a_0/2 = 1/2$ с учетом (9.41) определяется уравнением

$$F(j\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = \pi\delta(\omega). \quad (9.42)$$

Таким образом, спектр постоянной составляющей равен нулю на всех частотах, кроме $\omega = 0$, где $F(j\omega)$ обращается в бесконечность, то есть имеем на частоте $\omega = 0$ дискретную составляющую частоты в форме δ -функции.

Спектр гармонического колебания. Проиллюстрируем методику использования прямого преобразования Фурье при определении спектра гармонического колебания

$$f(t) = A_m \cos \omega_0 t. \quad (9.43)$$

Преобразование (9.6) для функции (9.43) имеет вид

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A_m e^{-j\omega t} \cos \omega_0 t dt. \quad (9.44)$$

Формально функция (9.43) не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости, так как имеет показатель роста $c = 0$. По этому для вычисления интеграла (9.44) воспользуемся формулой Эйлера (3.18) и уравнением (9.41):

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{A_m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt + \frac{A_m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega+\omega_0)t} dt = \\ &= \pi A_m [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]. \end{aligned} \quad (9.45)$$

т. е. гармоническое колебание имеет дискретный спектр, состоящий из двух спектральных линий на частотах $\pm\omega_0$.

Спектр одиночного прямоугольного импульса (см. рис. 9.2) можно найти как непосредственно из прямого преобразования Фурье (9.6), так и путем предельного перехода при $q \rightarrow \infty$ ($T \rightarrow \infty$) в разложении (5.27). В результате получим

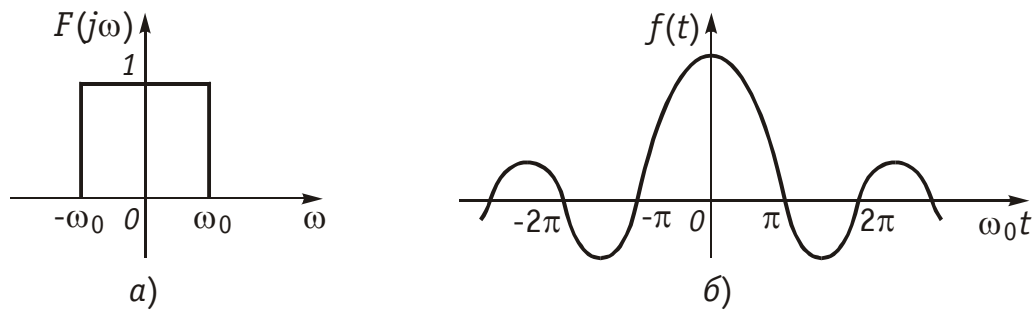


Рис. 9.5

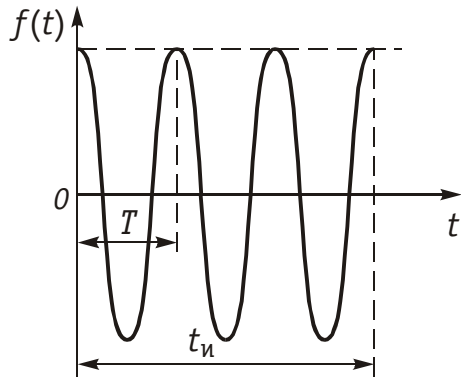


Рис. 9.6

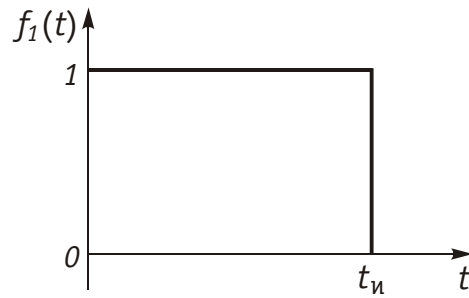


Рис. 9.7

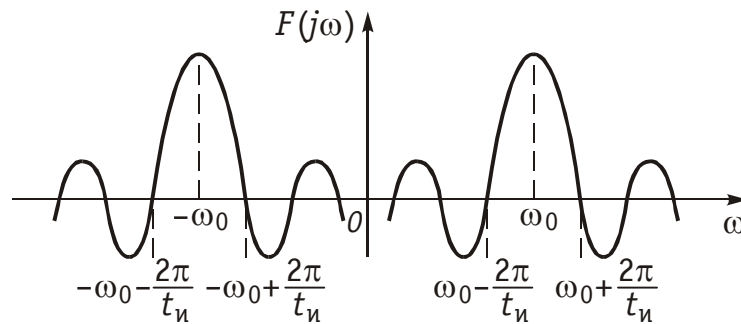


Рис. 9.8

$$F(j\omega) = 1 \cdot t_n \frac{\sin(\omega t_n/2)}{\omega t_n/2}. \quad (9.46)$$

На рис. 9.3 изображен спектр одиночного импульса. Сравнение рис. 9.3 и рис. 5.4 показывает, что по своей форме спектр одиночного импульса совпадает с огибающей дискретного спектра последовательности периодических импульсов, однако спектр одиночного импульса является сплошным.

Из условия взаимосвязи между частотными и временными характеристиками сигнала следует, что сигнал с ограниченным по частоте $\pm\omega_0$ спектром прямоугольной формы (рис. 9.5, а) имеет бесконечную протяженность и форму, аналогичную спектру прямоугольного импульса (рис. 9.5, б).

Спектр радиоимпульса (рис. 9.6) можно найти как произведение видеоимпульса прямоугольной формы (рис. 9.7) и гармонического колебания (9.43). Тогда, воспользовавшись теоремой свертки (9.30), получим:

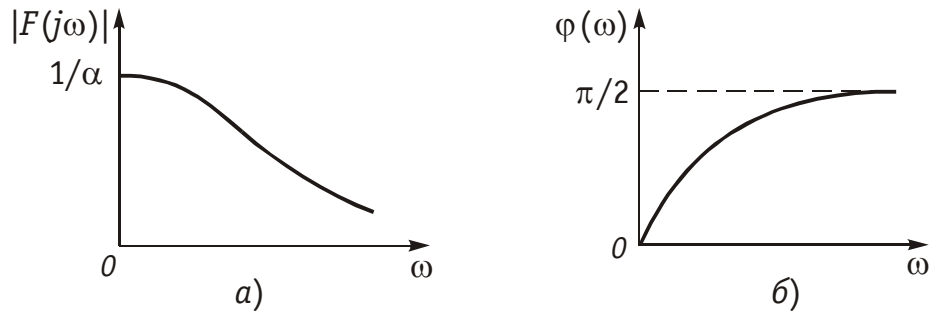


Рис. 9.9

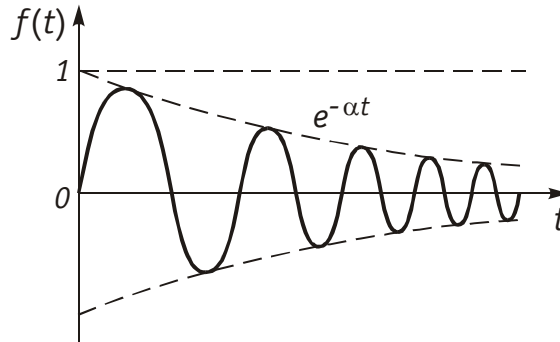


Рис. 9.10

$$F(j\omega) = \frac{A_m}{2} \{ F[j(\omega - \omega_0)] + F[j(\omega + \omega_0)] \}. \quad (9.47)$$

На рис. 9.8 показан вид спектра радиоимпульса.

Аналогичным образом можно найти спектр сигналов и более сложной формы.

Пример. Найти спектр экспоненциального импульса

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

В соответствии с прямым преобразованием (9.6) получаем

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} e^{-j\varphi(\omega)},$$

где $|F(j\omega)| = 1/\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$ — амплитудный (рис. 9.9, а) и $\varphi(\omega) = \arctg(\omega/\alpha)$ — фазовый (рис. 9.9, б) спектры сигнала.

Пример 2. Определить спектр затухающего колебания (рис. 9.10)

$$f(t) = 1(t) e^{-\alpha t} \sin \omega_1 t.$$

Согласно (9.6) находим

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} \sin \omega_1 t dt = \frac{\omega_1}{\alpha^2 - \omega^2 + \omega_1^2 + j2\alpha\omega}.$$

Отсюда находим спектры:

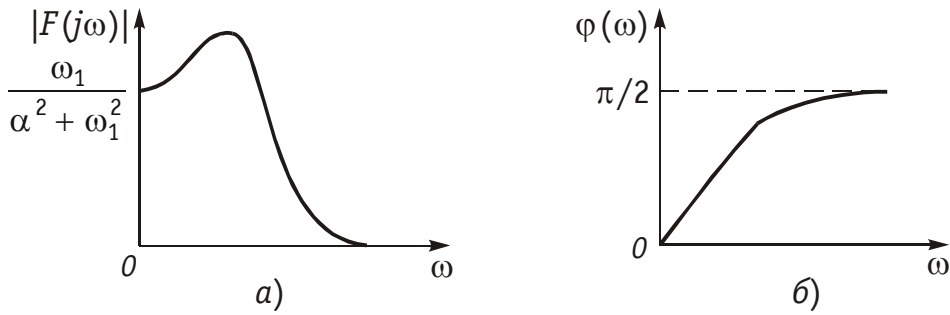


Рис. 9.11

амплитудный (рис. 9.11, а)

$$|F(j\omega)| = \frac{\omega_1}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2 + \omega_1^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}}$$

и фазовый (рис. 9.11, б)

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{2\alpha\omega}{\alpha^2 - \omega^2 + \omega_1^2}.$$

В таблице 9.1 приведены спектры некоторых наиболее распространенных сигналов.

9.5. Частотный анализ линейных электрических цепей при неперiodических воздействиях

Представление неперiodических сигналов в форме интеграла Фурье (9.6) и (9.7) позволяет применить к бесконечно малым гармоникам, составляющим его спектр, частотные методы анализа рассмотрены в гл. 3 и 4. В частности, если цепь находится при нулевых начальных условиях (т. е. до начала входного воздействия в реактивных элементах цепи не была накоплена энергия электрического и магнитного полей), то по аналогии с (3.46), (3.48) и (3.49) можно записать законы Ома и Кирхгофа для спектров:

$$I(j\omega) = U(j\omega)/Z(j\omega) = U(j\omega)Y(j\omega); \quad (9.48)$$

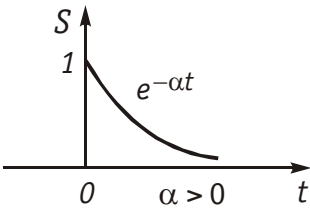
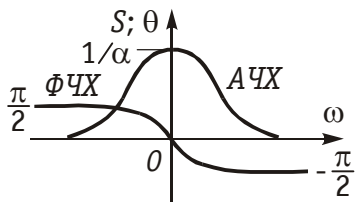
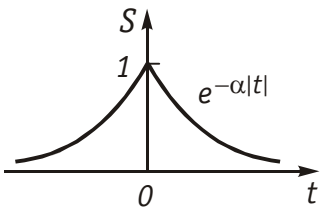
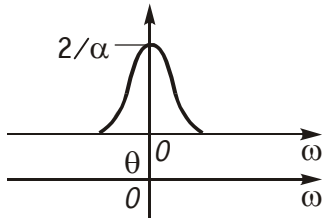
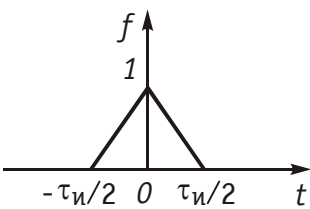
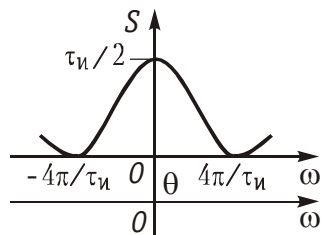
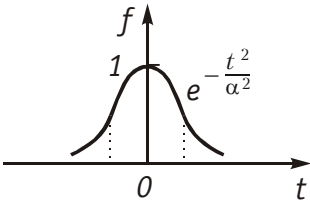
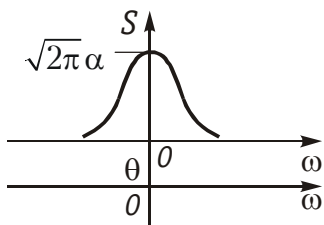
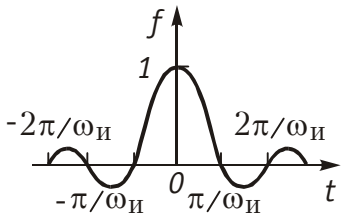
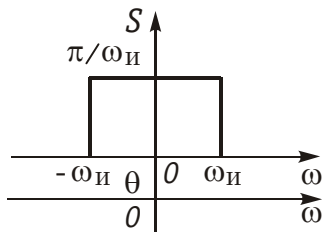
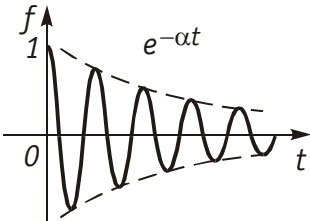
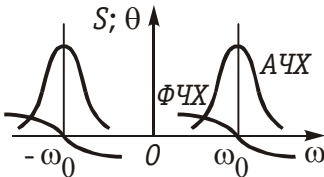
$$\sum_{k=1}^m I_k(j\omega) = 0; \quad (9.49)$$

$$\sum_{k=1}^n U_k(j\omega) = 0, \quad (9.50)$$

где $I(j\omega)$, $U(j\omega)$ — спектры токов и напряжений ветвей соответственно; $Z_1(j\omega)$ и $Y(j\omega)$ имеют смысл комплексных сопротивлений и проводимостей ветвей*. Законы Ома и Кирхгофа для спектров

* Это следует из уравнения связи (9.14): $I(j\omega) = T\underline{I}/2$; $U(j\omega) = T\underline{U}/2$; отсюда: $Z(j\omega) = U(j\omega)/I(j\omega) = \underline{U}/\underline{I} = \underline{Z} = 1/\underline{Y}$.

Таблица 9.1

Типы сигнала	Спектр	
	$\frac{1}{\alpha + j\omega}$	
	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$	
	$\frac{\tau_n}{2} \left(\frac{\sin \omega \tau_n / 4}{\omega \tau_n / 4} \right)^2$	
	$\sqrt{\pi} \alpha e^{-\alpha^2 \omega^2 / 2}$	
	$\begin{cases} \pi/\omega_n & \text{при } \omega < \omega_n \\ 0 & \text{при } \omega > \omega_n \end{cases}$	
	$\frac{j\omega + \alpha}{(j\omega + \alpha)^2 + \omega_0^2}$	

позволяют распространить рассмотренные ранее частотные методы анализа цепей при гармонических и периодических несинусоидальных воздействиях на непериодические сигналы.

В случае, если необходимо найти выходную реакцию цепи в виде четырехполюсника при воздействии на входе непериодического сигнала, используют комплексную передаточную функцию цепи (см. § 4.1). При этом спектр выходной реакции согласно (4.1) и (4.2)

$$F_2(j\omega) = F_1(j\omega)H(j\omega). \quad (9.51)$$

После определения спектра $F_2(j\omega)$ выходная реакция $f_2(t)$ может быть найдена с помощью обратного преобразования Фурье (9.7) или по таблицам.

Пример. Рассчитать спектральную плотность выходного сигнала в цепи (рис. 9.12), если на вход действует единичный импульс (рис. 9.7) с амплитудой $U_1 = 4$ В.

Для заданного входного сигнала (3.15) преобразование Фурье дает выражение

$$U_1(j\omega) = \int_0^{t_n} U_1 e^{-j\omega t} dt = \frac{U_1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega t_n}),$$

которое после преобразований принимает более удобную форму (см. (9.46)):

$$U_1(j\omega) = \frac{2U_1}{\omega} \sin \frac{\omega t_n}{2} e^{-j\frac{\omega t_n}{2}} = U_1 t_n \frac{\sin \frac{\omega t_n}{2}}{\frac{\omega t_n}{2}} e^{-j\frac{\omega t_n}{2}}.$$

Комплексная спектральная плотность выходного сигнала находится по формуле (9.51)

$$U_2(j\omega) = H(j\omega) \cdot U_1(j\omega),$$

где $H(j\omega)$ — комплексная передаточная функция цепи по напряжению. Функция $H(j\omega)$ находится как отношение комплексного значения гармонического напряжения \underline{U}_2 на выходе цепи к комплексному значению гармонического напряжения \underline{U}_1 той же частоты, приложенному ко входу цепи:

$$H(j\omega) = \underline{U}_2 / \underline{U}_1 = \frac{1 + j\omega R_2 C}{1 + j\omega (R_1 + R_2) C}.$$

При этом спектральная плотность выходного сигнала:

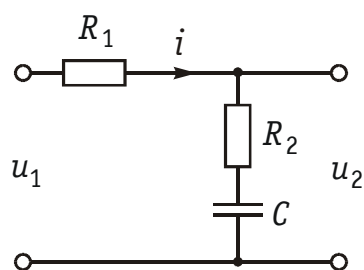


Рис. 9.12

$$U_2(j\omega) = \frac{2U_1(1 + j\omega R_2 C)}{\omega [1 + j\omega (R_1 + R_2) C]} \sin \frac{\omega t_n}{2} e^{-j\frac{\omega t_n}{2}}.$$

Отсюда находим модули: спектральной плотности входного напряжения

$$U_1(\omega) = |U_1(j\omega)| = \frac{2U_1}{\omega} \sin \frac{\omega t_n}{2};$$

АЧХ цепи

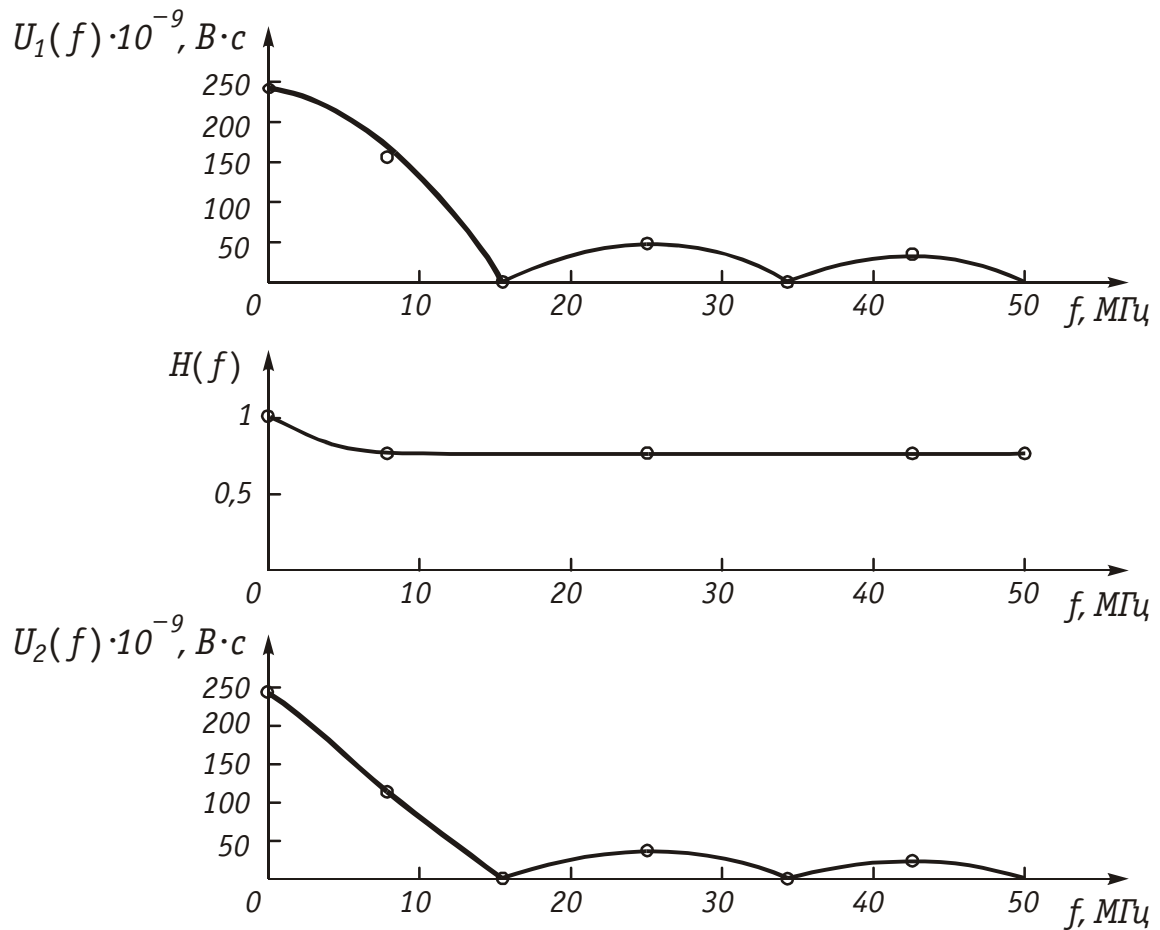


Рис. 9.13

$$H(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{\frac{1 + (\omega R_2 C)^2}{1 + \omega^2 (R_1 + R_2)^2 C^2}};$$

спектральной плотности выходного напряжения

$$U_2(\omega) = |U_2(j\omega)| = \frac{2U_1}{\omega} \sin \frac{\omega t_n}{2} \sqrt{\frac{1 + (\omega R_2 C)^2}{1 + \omega^2 (R_1 + R_2)^2 C^2}}.$$

На рис. 9.13 изображен спектр входного сигнала, АЧХ цепи и спектр выходного сигнала $U_2(f)$.

9.6. Условия безыскаженной передачи сигналов через линейную цепь

Частотный метод является достаточно эффективным и наглядным при анализе передачи сигналов через линейную систему. Он позволяет оценить частотные искажения в канале связи, требования к характеристикам электрической цепи. Особенно важно определить требования к АЧХ и ФЧХ цепи с точки зрения искажения формы сигнала. Определим условия неискажаемой передачи сигнала через линейную систему. Предположим,

что на входе линейной цепи, как четырехполюсника действует сигнал $f_1(t)$ определенной формы (рис. 9.12). На выходе в результате прохождения сигнала через четырехполюсник с комплексной передаточной функцией $H(j\omega)$ амплитуда сигнала может измениться (на рис. 9.12 уменьшилась), и сигнал вследствие конечности скорости его распространения может запаздывать относительно входного воздействия на t_0 . Однако важно, чтобы при этом не изменилась форма сигнала. Таким образом, *условие безыскаженной передачи* можно сформулировать с помощью равенства

$$f_2(t) = kf_1(t - t_0), \quad (9.52)$$

где k — некоторая вещественная постоянная; t_0 — время задержки (запаздывания) выходного сигнала относительно входного. Применяв к (9.52) прямое преобразование Фурье и учтя свойство линейности и теорему запаздывания (см. § 9.2), перепишем условие (9.52) в частотной области:

$$F_2(j\omega) = kF_1(j\omega)e^{-j\omega t_0}. \quad (9.53)$$

Так как комплексная передаточная функция цепи с учетом (4.5) должна быть

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = \frac{F_2(j\omega)}{F_1(j\omega)} = ke^{-j\omega t_0},$$

то отсюда получаем требование к АЧХ и ФЧХ неискажающей цепи

$$|H(j\omega)| = k = \text{const}; \quad (9.54)$$

$$\varphi(\omega) = -\omega t_0, \quad (9.55)$$

т. е. для того, чтобы линейная цепь не искажала форму сигнала ее АЧХ должна быть равномерной (рис. 9.13, а), а ФЧХ — линейной (рис. 9.13, б).

Условие безыскаженной передачи во всем частотном диапазоне

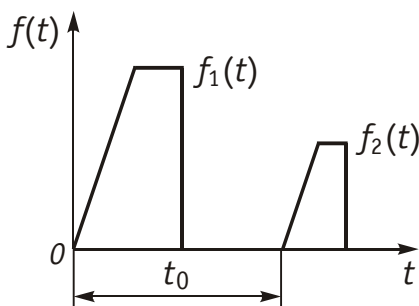


Рис. 9.12

можно выполнить лишь для резистивных цепей*. В цепях с реактивными элементами условия (9.54) и (9.55) можно обеспечить лишь в ограниченном частотном диапазоне ω_0 (на рис. 9.13 показано пунктиром).

В этой связи представляет практический интерес вопрос о влиянии на форму сигнала отклонения АЧХ и ФЧХ от

* Если пренебречь зависимостью сопротивлений резистивных элементов от частоты (см. гл. 1).

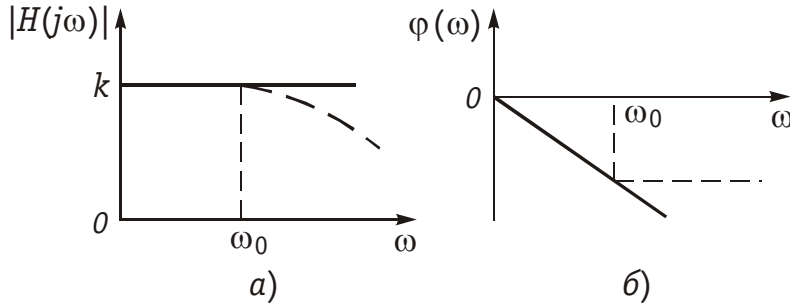


Рис. 9.13

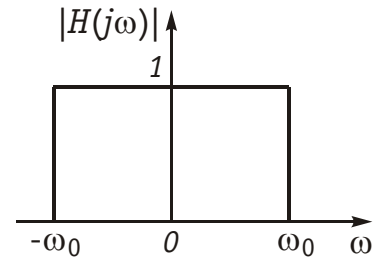


Рис. 9.14

идеальной. Рассмотрим в качестве примера прохождение сигнала в форме единичной функции, в форме единичного импульса и импульса прямоугольной формы через цепь с АЧХ, изображенной на рис. 9.14. Эта цепь соответствует идеальному ФНЧ (см. гл. 17) и задается условием

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 \cdot e^{-j\omega t_0} & \text{при } -\omega_0 < \omega \leq \omega_0, \\ 0 & \text{при } -\omega_0 \geq \omega > \omega_0. \end{cases} \quad (9.56)$$

Фильтр нижних частот пропускает без искажений все частотные составляющие от 0 до ω_0 и задерживает составляющие больше ω_0 .

Единичный импульс. Рассмотрим вначале входной сигнал $f_1(t)$ в форме единичного импульса (рис. 7.2, б). Так как для единичного импульса $F_1(j\omega) = 1$, то с учетом (9.56) и обратного преобразования Фурье (9.7), получим:

$$\begin{aligned} f_2(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \cos[\omega(t-t_0)] d\omega + j \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \sin[\omega(t-t_0)] d\omega. \end{aligned}$$

Учитывая, что второй интеграл равен нулю, окончательно после интегрирования получаем:

$$f_2(t) = \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{\sin[\omega_0(t-t_0)]}{\omega_0(t-t_0)}. \quad (9.57)$$

На рис. 9.15 изображена форма выходного сигнала $f_2(t)$, определяемая функцией (9.57). Из рисунка видно, что форма выходного сигнала существенно отличается от входного импульса $f_1(t)$: он искажается по форме и растягивается во времени (теоретически на бесконечность), что отражает установленное ранее соотношение между длительностью сигнала и шириной его спектра: сигнал ограниченный по частоте — бесконечен во времени и наоборот (см. § 9.4). Запаздывание выходного сигнала t_0 определяется крутизной ФЧХ: $t_0 = -d\varphi/d\omega$. С увеличением ω_0 (с расширением полосы пропускания фильтра) ширина главного лепестка импульса

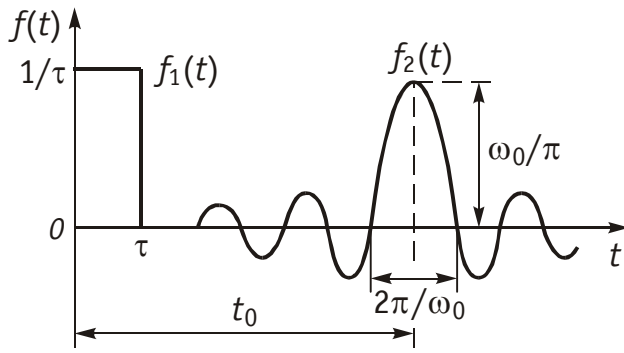


Рис. 9.15

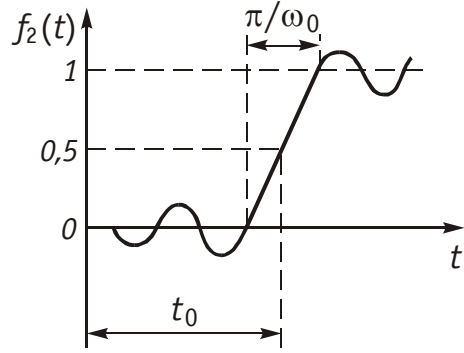


Рис. 9.16

равная $2\pi/\omega_0$ — сужается, задержка t_0 уменьшается, амплитуда импульса увеличивается. Важно отметить, что теоретически согласно (9.57) сигнал $f_2(t)$ существует и при $t < 0$, т. е. до воздействия входного сигнала, что конечно, противоречит условию физической реализуемости и является следствием идеализации АЧХ ФНЧ.

Единичный сигнал. Рассмотрим теперь прохождение сигнала в форме единичной функции (рис. 7.2, а) через ФНЧ с характеристикой (9.56). Запишем уравнение единичной функции $1(t)$ в интегральной форме*:

$$1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega t d\omega. \quad (9.58)$$

Интеграл в (9.58) можно рассматривать как вещественную форму обратного преобразования Фурье (9.7) для нечетной функции $f(t) = 1(t) - 1/2$, спектр которой равен $1/\omega$. Тогда на основании (9.58) и с учетом условий (9.52) и (9.56), для выходного сигнала можно записать:

$$f_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0} \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega(t - t_0) d\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega(t - t_0)]. \quad (9.59)$$

Интеграл в (9.59) табулирован и носит название интегрального синуса: $\text{Si}[\omega(t - t_0)]$. На рис. 9.16 приведен график сигнала на выходе идеального ФНЧ, определяемой функцией (9.59).

Как следует из представленного графика, чем уже полоса пропускания ФНЧ (меньше ω_0), тем меньше крутизна фронта нарастания импульса: $df_2/dt = \omega_0/\pi$. Таким образом, как и в случае единичного импульса для уменьшения искажений выходного сигнала необходимо расширять полосу пропускания ФНЧ. Выбросы в выходном сигнале обусловлены теми же причинами, что и в случае, изображенном на рис. 9.15 (идеализация АЧХ ФНЧ).

* Уравнение (9.58) может быть получено путем использования обобщенного преобразования Фурье (9.37) для единичной функции $1(t)$ при $c \rightarrow 0$.

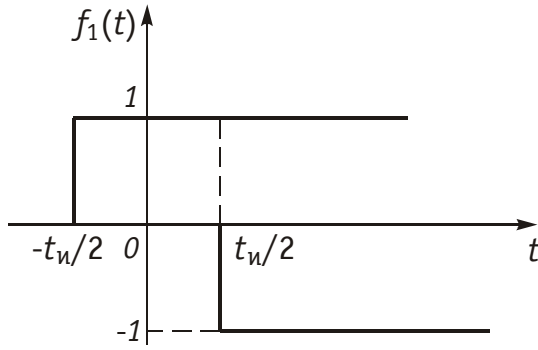


Рис. 9.17

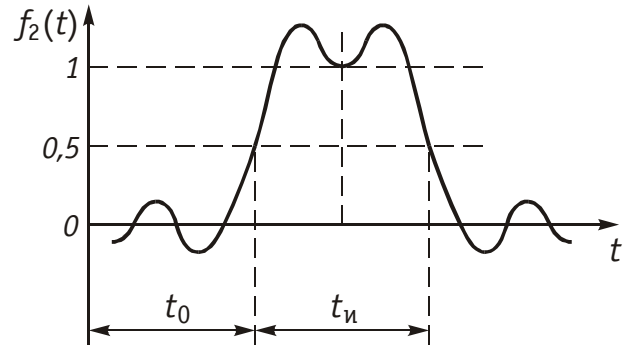


Рис. 9.18

Прямоугольный импульс можно рассматривать как разность двух единичных функций сдвинутых относительно друг друга на $t_{\text{н}}/2$ (рис. 9.17). Тогда учитывая линейность цепи и равенство (9.59) получим уравнение выходного сигнала для этого случая:

$$f_2(t) = \frac{1}{\pi} \left\{ \text{Si} \left[\omega_0 \left(t - t_0 + \frac{t_{\text{н}}}{2} \right) \right] - \text{Si} \left[\omega_0 \left(t - t_0 - \frac{t_{\text{н}}}{2} \right) \right] \right\}. \quad (9.60)$$

На рис. 9.18 изображен вид выходного сигнала $f_2(t)$, т. е., как и в предыдущих случаях, длительность фронта нарастания и спада импульса обратно пропорциональна полосе пропускания цепи ω_0 . Чем уже полоса, тем более затянут фронт импульса; чем меньше длительность импульса, тем шире должна быть полоса пропускания цепи. Обычно на практике полосу пропускания выбирают из условия: $S_A = 2/t_{\text{н}}$.

9.7. Связь между временными и частотными характеристиками электрических цепей

Рассмотренные в гл. 8 и 9 временной и частотный методы анализа переходных процессов базируются на двух взаимосвязанных характеристиках электрических цепей: импульсной или переходной, с одной стороны, и комплексной передаточной функции, с другой. Между этими характеристиками существует однозначное соответствие. Определим эту связь. Допустим, что на вход пассивной электрической цепи с комплексной передаточной функцией $H(j\omega)$ приложено воздействие в виде единичной импульсной функции. Тогда с учетом того, что спектр единичного импульсного сигнала равен единице (см. (9.39)), спектр выходного сигнала согласно (9.51) будет:

$$F_2(j\omega) = F_1(j\omega)H(j\omega) = 1 \cdot H(j\omega). \quad (9.61)$$

Обратное преобразование (9.7) определит выходной сигнал $f_2(t)$, который численно равен импульсной характеристике цепи:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (9.62)$$

Аналогично с учетом условия физической реализуемости (8.14) можно записать прямое преобразование Фурье:

$$H(j\omega) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (9.63)$$

Таким образом, приходим к важному выводу: *импульсная и комплексная передаточные функции пассивной электрической цепи связаны между собой парой преобразования Фурье* (9.62) и (9.63). А это, в свою очередь, означает, что импульсная характеристика однозначным образом определяет комплексную передаточную функцию цепи и наоборот. Причем, для $h(t)$ и $H(j\omega)$ справедливы все свойства и теоремы, рассмотренные в § 9.2. В частности, из теоремы изменения масштаба независимого переменного следует, что чем более растянута во времени импульсная характеристика цепи, тем уже ее АЧХ и наоборот. В § 9.6 было показано, что для неискажающей линейной цепи АЧХ должна быть равномерна, а это соответствует согласно (9.40) импульсной характеристике цепи в виде δ -функции, что полностью подтверждает изложенное.

Связь комплексной передаточной функции с переходной характеристикой также определяется однозначно, поскольку последняя связана соотношением (8.2) с импульсной характеристикой цепи. Для установления этой связи можно воспользоваться интегральным представлением единичной функции (9.58):

$$1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \sin \omega t d\omega \quad (9.64)$$

с учетом формулы Эйлера (3.18) перепишем (9.64):

$$1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j\omega} d\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} d\omega. \quad (9.65)$$

Если ко входу электрической цепи с передаточной функцией $H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$ приложена единичная функция (9.65), то сигнал на выходе цепи будет численно равен переходной характеристики $g(t)$, спектр которой определяется согласно (9.51), где $F_1(j\omega) = 1/j\omega$. Тогда после применения обратного преобразования Фурье с учетом (9.65) получим:

$$g(t) = \frac{H(0)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

или

$$g(t) = \frac{H(0)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{|H(j\omega)|}{\omega} \cos\left[\omega t - \frac{\pi}{2} + \varphi(\omega)\right] d\omega, \quad (9.66)$$

где

$$H(0) = H(j\omega)|_{\omega=0}.$$

Таким образом, зная $H(j\omega)$, можно найти с помощью (9.66) также и $g(t)$. Важно отметить предельное соотношение между $g(t)$ и $H(j\omega)$, вытекающее непосредственно из свойств (7.17)–(7.18) и связи между преобразованием Фурье и Лапласа:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) &= g(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow 0} H(j\omega) = H(0), \\ \lim_{t \rightarrow 0} g(t) &= g(0) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} H(j\omega) = H(\infty). \end{aligned} \right\} \quad (9.67)$$

Эти соотношения означают, что реакция на выходе цепи от единичного воздействия в установившемся режиме будет отлична от нуля, если передаточная функция на нулевой частоте не равна нулю (есть путь постоянной составляющей). И напротив, в начальный момент при $t = 0$ (момент коммутации) реакция на выходе будет изменяться скачком, если $H(\infty)$ — не равна нулю, т. е. цепь имеет бесконечно большую полосу пропускания. Рассмотренные соотношения хорошо иллюстрируются условиями пропускания сигнала через линейную цепь (см. § 9.6).

В заключение рассмотрим связь между вещественной $H_1(\omega)$ и мнимой $H_2(\omega)$ частями комплексной передаточной функции (4.7). Перепишем (9.62) в форме

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |H(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi) d\omega. \quad (9.68)$$

Отсюда, учитывая (4.7) и (4.8), получаем

$$h(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [H_1(\omega) \cos \omega t + H_2(\omega) \sin \omega t] d\omega. \quad (9.69)$$

Согласно условия физической реализуемости (8.14) при $t < 0$ $h(t) = 0$, поэтому (9.69) принимает вид

$$0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [H_1(\omega) \cos \omega t + H_2(\omega) \sin \omega t] d\omega. \quad (9.70)$$

Отсюда, почленно складывая и вычитая (9.69) и (9.70), получаем уравнения связи импульсной характеристики с вещественной и мнимой частями комплексной передаточной функции $H(j\omega)$:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} H_1(\omega) \cos \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} H_2(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (9.71)$$

Таким образом, для нахождения импульсной характеристики цепи достаточно воспользоваться частотной зависимостью только вещественной или мнимой частей $H(j\omega)$. Из (9.71) следует также важный вывод о том, что нельзя независимо выбирать вещественную и мнимую части передаточной функции или, что то же самое, нельзя произвольно выбирать АЧХ и ФЧХ цепи, так как они связаны между собой определенной зависимостью (4.9), (4.10).

Вопросы и задания для самопроверки

1. Какие существуют методы определения сигнала по спектру?
2. Каким образом можно определить постоянную составляющую единичной функции, если известна спектральная плотность единичной функции?
3. Чем отличаются сигналы с дискретным и сплошным спектрами?
4. В каких случаях используется теорема свертки?
5. Каким образом и зачем определяют полюсы спектральной функции?
6. Что понимают под спектральной плотностью энергии сигнала?
7. Зависит ли спектральная плотность энергии сигнала от формы (вида) сигнала и фазы спектральных составляющих?
8. Как можно получить уравнение единичной функции в интегральной форме $\left(1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega\right)$, если известно обобщенное преобразование Фурье единичной функции?
9. Как связаны между собой импульсная, переходная и комплексная передаточная функции пассивной электрической цепи?
10. В чем сущность частотного анализа линейных электрических цепей при негармонических воздействиях?
11. Можно ли создать электрическую цепь для безыскаженной передачи сигнала во всем частотном диапазоне?
12. Как связаны между собой комплексная амплитуда и комплексная спектральная плотность?
13. В каких случаях при анализе сигналов применяются интеграл Фурье и ряд Фурье?
14. Каким условиям должен удовлетворять сигнал, подвергаемый преобразованию Фурье?
15. Пояснить физический смысл основных теорем спектрального анализа?
16. Связь между преобразованиями Фурье и Лапласа.
17. Что представляет собой «обобщенный спектр сигнала»?

Глава 10. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ В РЕЖИМЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

10.1. Нелинейные элементы. Их характеристики и свойства

Нелинейные резистивные элементы. Напомним, что нелинейными называются электрические цепи, у которых реакции и воздействие связаны нелинейными зависимостями. Подобные цепи содержат один или несколько приборов, замена которых линейными моделями приводит к недопустимому нарушению количественной и качественной картины колебаний в цепи.

Резистивными нелинейными цепями будем называть цепи, которые допустимо считать нелинейными безынерционными цепями. В соответствии с этим модель нелинейной резистивной цепи не содержит реактивных элементов. В нее входят хотя бы один нелинейный безынерционный резистивный двухполюсник или многополюсник, хотя бы один источник напряжения или тока и то или иное число резистивных сопротивлений.

Для построения многих функциональных узлов аппаратуры связи используется большой класс нелинейных двухполюсных полупроводниковых и электронных приборов, называемых диодами. Единственной электрической характеристикой диода является его вольт-амперная характеристика (ВАХ) – зависимость постоянного тока в диоде от постоянного напряжения на его зажимах $i = F(u)$ при согласном выборе положительных направлений напряжения и тока. Отличительные особенности вольт-амперных характеристик некоторых типов диодов различного назначения и их условные (схемные) обозначения приведены на рис. 10.1. Это характеристики полупроводниковых приборов: выпрямительного диода (рис. 10.1, а), стабилитрона (рис. 10.1, б), туннельного диода (рис. 10.1, в) и диодистора (рис. 10.1, г). Характеристики рис. 10.1, а, б получили наименование однозначных, а рис. 10.1, в, г – многозначных, так как у них одному и тому же значению тока (рис. 10.1, в) или напряжения (рис. 10.1, г) соответствуют разные напряжения и токи.

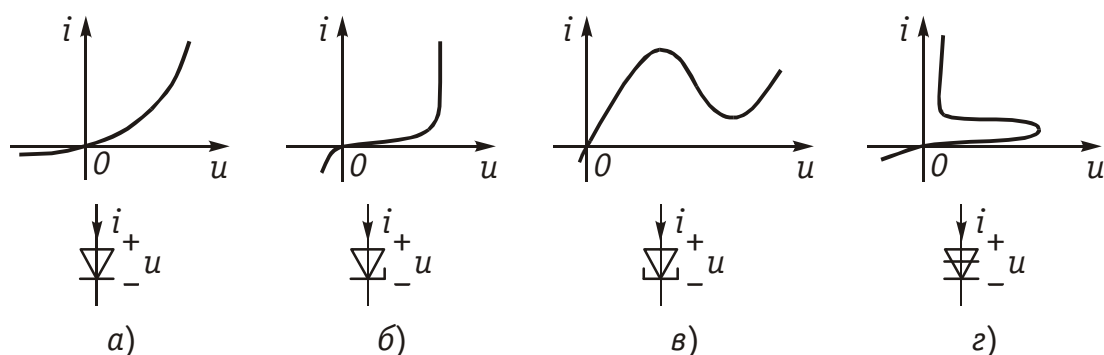


Рис. 10.1



Существуют и электронные приборы с подобными характеристиками.

В последующем, простоты ради, нелинейные резистивные двухполюсники будем называть нелинейными резисторами. Схемное изображение нелинейного резистора приведено на рис. 10.2.

Рис. 10.2

Некоторые из нелинейных резисторов относятся к числу управляемых нелинейных элементов. Управляющей величиной может быть, например, внешняя температура, давление или освещенность. Свойства таких резисторов определяются не одной, а семейством ВАХ, каждая из которых соответствует различным значениям управляющей величины.

Транзисторы, электронные лампы, тиристоры и некоторые другие полупроводниковые и электронные приборы могут рассматриваться как нелинейные резистивные четырехполюсники. Например, при включении транзистора рис. 10.3, а, являющегося трехполюсником, в электрическую цепь один из зажимов оказывается общим для пары входных и пары выходных зажимов транзистора. Поэтому транзистор принято рассматривать как четырехполюсник с двумя парами зажимов. На рис. 10.3, б показано такое включение транзистора по схеме с общим эмиттером.

Нелинейный четырехполюсник, как и линейный, описывается двумя уравнениями, которые связывают напряжения и токи на его входе и выходе. При анализе транзисторов часто используется следующая система уравнений:

$$u_1 = F_1(i_1, u_2), \quad (10.1)$$

$$i_2 = F_2(i_1, u_2). \quad (10.2)$$

Для включения транзистора по схеме с общим эмиттером (рис. 10.3, б) $u_1 = u_{БЭ}$ — напряжение между базой и эмиттером, $i_2 = i_K$ — ток коллектора, $i_1 = i_B$ — ток базы и $u_2 = u_{КЭ}$ — напряжение между коллектором и эмиттером.

Уравнения (10.1) и (10.2) изображаются в виде графиков. Так u_1 зависит от двух переменных i_1 и u_2 и, вообще говоря, его графическое изображение представляет собой поверхность в трехмер-

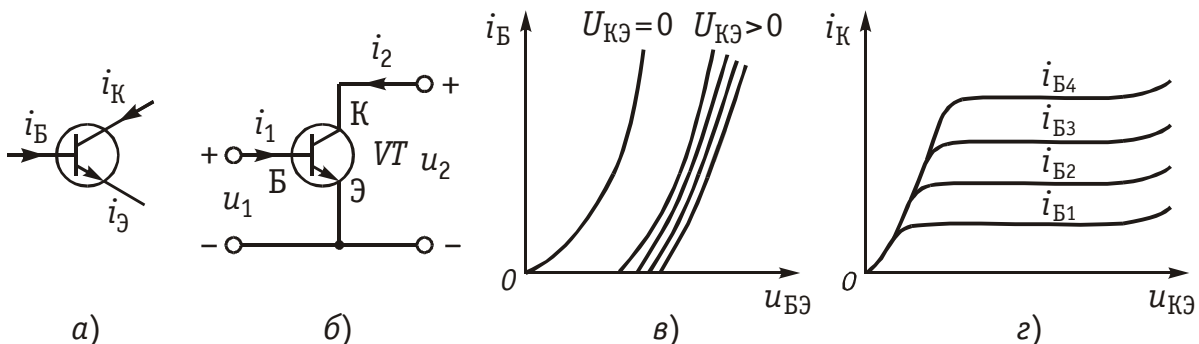


Рис. 10.3

ном пространстве. Так как начертить такую поверхность трудно, то функцию двух переменных изображают на плоскости в виде семейства характеристик: фиксируется одна переменная и непрерывно изменяется другая.

Графическое изображение уравнений (10.1) и (10.2) для транзистора в схеме с общим эмиттером показано на рис. 10.3, в и г. Это так называемые входная и выходная вольт-амперные характеристики. Принято говорить, что ВАХ транзистора управляются током или напряжением. Так, выходная ВАХ транзистора в схеме с общим эмиттером управляется током базы.

ВАХ нелинейных полупроводниковых и электронных приборов находятся, как правило, в результате измерений и приводятся в соответствующих справочниках в виде усредненных графических зависимостей. Необходимость усреднения связана с большим (до 30—50%) технологическим разбросом характеристик различных образцов прибора одного и того же типа. Эти характеристики являются *статическими*, т. е. характеристиками режима постоянного тока.

Для резистивных нелинейных элементов (НЭ) важным параметром является их сопротивление, которое в отличие от линейных резисторов не является постоянным, а зависит от того, в какой точке ВАХ оно определяется. Различают два вида сопротивлений: статическое и дифференциальное (динамическое). *Статическое сопротивление* $R_{ст}$ определяется как (рис. 10.4)

$$R_{ст} = \frac{U_0}{I_0},$$

где U_0 — приложенное к НЭ постоянное напряжение; I_0 — протекающий через НЭ постоянный ток. Это сопротивление постоянному току; оно характеризуется тангенсом угла наклона прямой, проходящей через начало координат и рабочую точку (U_0 , I_0) на ВАХ НЭ.

В силу предположения о резистивном характере цепи статические характеристики определяют одновременно и соотношения между мгновенными значениями напряжений и токов на внешних зажимах соответствующего нелинейного прибора.

Определим *дифференциальное сопротивление* R_d как отношение приращения на-

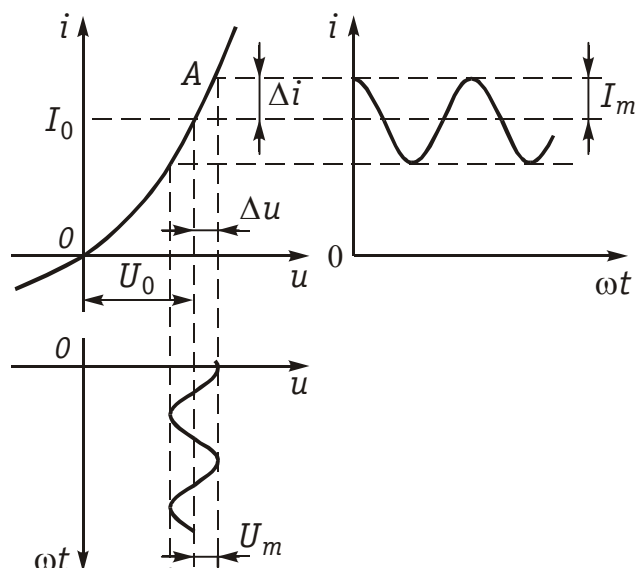


Рис. 10.4

пряжения Δu к приращению тока Δi при небольшом смещении рабочей точки на ВАХ под воздействием переменного напряжения малой амплитуды (рис. 10.4):

$$R_d = \frac{\Delta u}{\Delta i}.$$

Это сопротивление представляет собой сопротивление НЭ переменному току малой амплитуды. Обычно переходят к пределу этих приращений и определяют дифференциальное сопротивление в виде

$$R_d = \frac{du}{di}.$$

Оно характеризуется тангенсом угла наклона касательной к ВАХ в рабочей точке.

Иногда удобно пользоваться понятием *дифференциальной крутизны* (имеющей смысл проводимости)

$$S_d = G_d = 1/R_d = di/du.$$

Нелинейные индуктивные элементы. Типичными динамическими нелинейными элементами электрической цепи являются катушки с сердечниками из ферромагнитных материалов — сплавов на основе металлов группы железа или их оксидов — ферритов. Нелинейность таких элементов обусловлена характеристикой намагничивания материала сердечника $B(H)$. Поскольку в приближении теории магнитных цепей для замкнутого неразветвленного сердечника с постоянным сечением s и длиной l средней магнитной линии магнитный поток Φ пропорционален индукции B : $\Phi = Bs$, а напряженность H связана с током i в обмотке, имеющей w витков, соотношением $H = iw/l$, то вид зависимости $B(H)$ предопределяет характер вебер-амперной характеристики катушки $\Psi(i)$ ($\Psi = \Phi w$ — потокосцепление обмотки см. § 1.2). Типичная вебер-амперная характеристика индуктивного элемента приведена на рис. 10.5, а. В общем случае вид ВАХ индуктивного элемента определяется многими факторами, и она часто является неоднозначной. Например, при циклическом намагничивании сердечника зависимость $\Psi(i)$ имеет гистерезисный характер (рис. 10.5, б). В этом случае процесс перемагничивания сопровождается необратимыми потерями в сердечнике.

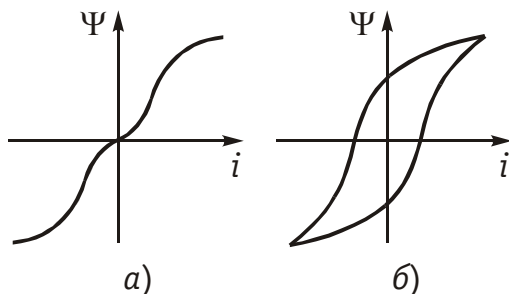


Рис. 10.5

Нелинейный элемент индуктивности характеризуется согласно (1.8) *статической индуктивностью* $L_{ст} = \Psi/i$ и *дифференциальной индуктивностью* $L_d = d\Psi/di$, которые зависят от намагничивающего тока i .

Нелинейные емкостные элементы. Нелинейные емкостные эле-

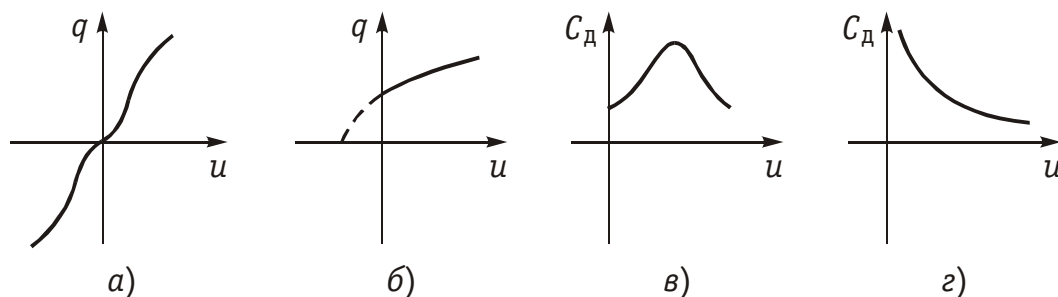


Рис. 10.6

менты могут служить моделями конденсаторов, диэлектрическая проницаемость ε которых является функцией от напряженности электрического поля E в диэлектрике. Такие емкостные элементы описываются нелинейной вольт-кулоновой характеристикой — зависимостью заряда q от приложенного напряжения u . Подобными свойствами обладают, в частности, сегнетоэлектрики, вольт-амперные характеристики которых, аналогичны характеристикам ферромагнетиков (рис. 10.6, а); обратно смещенные p – n -переходы (рис. 10.6, б) и др.

Нелинейный элемент емкости характеризуется согласно (1.11) *статической емкостью* $C_{ст} = q/u_c$ и *дифференциальной емкостью* $C_d = dq/du_c$, которые зависят от приложенного напряжения u_c .

На рис. 10.6, в, г, показан характер изменения дифференциальной емкости для вольт-кулонных характеристик, изображенных на рис. 10.6, а и б, соответственно.

10.2. Графические методы расчета цепей с нелинейными резистивными двухполюсниками

Задача нахождения начальных постоянных напряжений и токов на внешних зажимах нелинейных полупроводниковых или электронных приборов, входящих в электрическую цепь, сводится к задаче анализа режима постоянного тока в исследуемой цепи, т. е., к анализу нелинейной резистивной цепи с источниками постоянного напряжения или (и) тока. Решаются подобные задачи обычно с использованием графических построений.

Ниже рассматривается задача анализа режима постоянного тока в электрической цепи с одним нелинейным двухполюсником, — нелинейным резистивным элементом (НЭ). Его ВАХ считается известной и заданной графически.

Рассмотрим простейшую электрическую цепь, изображенную на рис. 10.7. В нее входят источник постоянного напряжения с задающим напряжением U_r , линейный резистивный

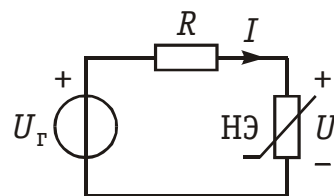


Рис. 10.7

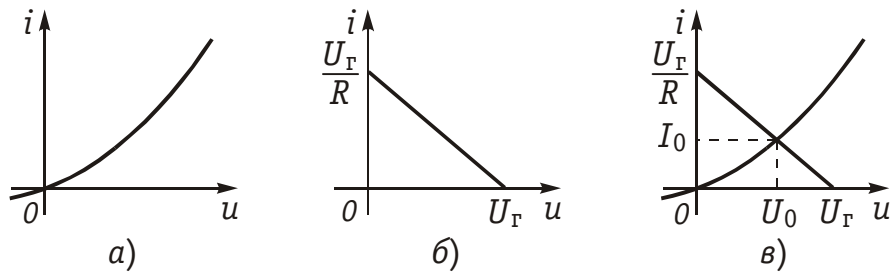


Рис. 10.8

элемент R и нелинейный резистивный элемент, в котором подлежат определению постоянное напряжение $U = U_0$ и ток $I = I_0$. Рассмотрим два случая НЭ: с однозначной и многозначной ВАХ.

Нелинейный резистивный элемент с однозначной характеристикой. Пусть однозначная ВАХ нелинейного резистивного элемента имеет вид, показанный на рис. 10.8, а.

Согласно ЗНК (рис. 10.7) напряжение $U = U_Г - RI$, и ток в элементе R связан с напряжением U на зажимах НЭ зависимостью $I = (U_Г - U)/R$, представляющей собой прямую, проходящую через точки $U_Г$ на оси абсцисс и $U_Г/R$ — на оси ординат. Поскольку нелинейный и линейный элементы соединены последовательно, то ВАХ НЭ и прямая $I = (U_Г - U)/R$, определяющие один и тот же ток, удовлетворяются одновременно, чему на графиках рис. 10.8, в соответствует точка их пересечения. Она и определяет искомые значения постоянного напряжения U_0 и тока I_0 в нелинейном резисторе, или, как принято говорить, его рабочую точку.

Графические построения, связанные с решением задачи, всегда выполнимы, а найденное ее решение — единственное.

Рабочая точка нелинейного резистора изменяется как с изменением сопротивления R , так и с изменением задающего напряжения источника $U_Г$. Изменение сопротивления R приводит к изменению наклона зависимости $I = (U_Г - U)/R$ и смещению рабочей точки на вольт-амперной характеристике нелинейного резистора (см. рис. 10.9, а). Изменение задающего напряжения на величину $\Delta U_Г$ вызывает перемещение той же зависимости параллельно самой себе и изменение тока и напряжения в нелинейном резисторе соответственно на величины ΔI и ΔU (см. рис. 10.9, б).

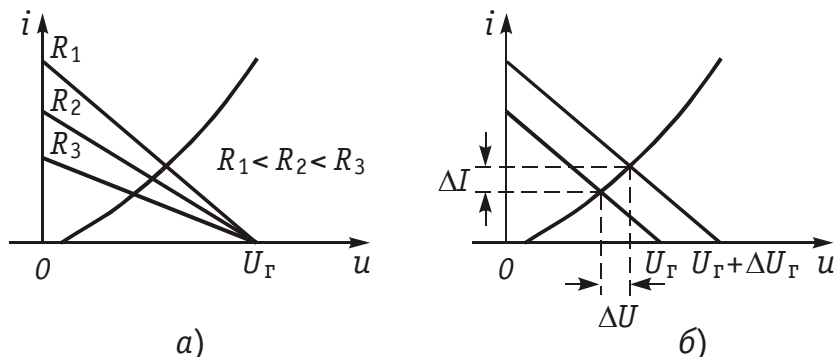


Рис. 10.9

Напомним, что отношение бесконечно малого приращения тока к бесконечно малому приращению напряжения на нелинейном элементе, обусловленных смещением рабочей точки, называется дифференциальной проводимостью (крутизной), а обратное отношение — дифференциальным сопротивлением нелинейного резистора в его рабочей точке.

Отношение постоянных тока и напряжения в рабочей точке нелинейного резистора определяет его статистическую проводимость, а обратное отношение — статическое сопротивление резистора в его рабочей точке.

Статическая проводимость пассивного нелинейного резистора всегда положительна. Положительна и дифференциальная проводимость нелинейного резистора с однозначной вольт-амперной характеристикой в силу возрастающего характера последней. Заметим также, что статическая и дифференциальная проводимости нелинейного резистора не отличаются одна от другой.

Нелинейный резистивный элемент с многозначной характеристикой. Пусть многозначная ВАХ нелинейного резистивного элемента в схеме рис. 10.7 имеет вид, показанный на рис. 10.10, а. Это характеристика туннельного диода. Для нахождения рабочей точки на ВАХ резистивного НЭ применим те же, что и выше, графические построения.

На рис. 10.10, б совмещены графики вольт-амперной характеристики нелинейного резистора и зависимостей $I = (U_r - U)/R$ для трех различных значений сопротивления линейного резистора R и одного и того же значения напряжения задающего источника U_r .

Анализ рис. 10.10, б показывает, что рабочими точками могут быть точки 1 и 5, соответствующие единственному решению уравнений $I = F(U)$ и $I = (U_r - U)/R$. Рабочими точками могут быть также точка 2 или точка 4. Точка 3, расположенная на ниспадающем участке ВАХ, является точкой неустойчивого равновесия. Можно показать, что если зафиксировать сопротивление R , при котором могут существовать три точки пересечения указанных зависимостей, и увеличивать задающее напряжение источника от нуля до величины U_r , то рабочей будет точка 4. Если же задающее напряжение источника от очень большого значения уменьшать до значения U_r , то рабочей будет точка 2.

Итак, в цепи с нелинейным двухполюсником, имеющим многозначную ВАХ задачи нахождения рабочей точки не всегда имеет единственное решение.

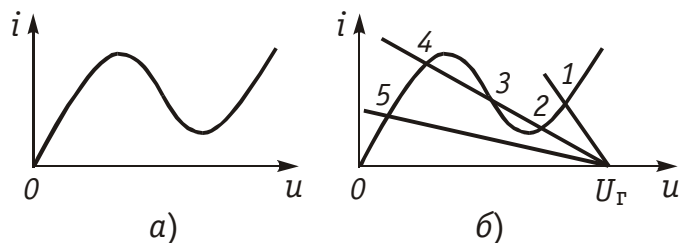


Рис. 10.10

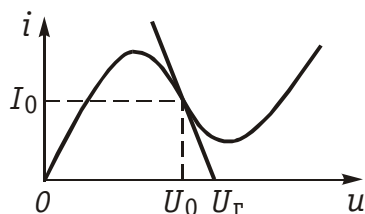


Рис. 10.11

Рабочая точка может быть расположена и на ниспадающем участке вольт-амперной характеристики, если выбрать сопротивление R и задающее напряжение U_{Γ} так, как показано на рис. 10.11. Заметим, что в рабочей точке, расположенной на ниспадающем участке вольт-амперной характеристики, дифференциальная проводимость и дифференциальное сопротивление нелинейного резистора отрицательны, поскольку малым положительным значениям приращения напряжения (тока) на зажимах нелинейного резистора соответствуют отрицательные значения приращения тока (напряжения).

Метод эквивалентного генератора. Изложенная методика определения рабочей точки в цепи с одним линейным и одним нелинейным резистивными элементами распространяется на резистивные цепи с одним резистивным НЭ и произвольным числом линейных резистивных элементов и источников постоянного напряжения или (и) тока, если воспользоваться теоремой об эквивалентном генераторе. Для этого следует внешнюю по отношению к нелинейному двухполюснику линейную активную цепь (см. рис. 10.12, а) заменить эквивалентным генератором с задающим напряжением $U_{\text{эГ}}$ и внутренним линейным резистивным эквивалентным сопротивлением $R_{\text{э}}$ (рис. 10.12, б). Тогда схема анализируемой цепи не будет отличаться от схемы рис. 10.7, и задача нахождения рабочей точки сводится к рассмотренной выше.

Напряжения и токи в элементах цепи, внешней по отношению к НЭ, можно найти, воспользовавшись теоремой замещения (см. § 1.7). Для этого нелинейный резистивный элемент следует заменить источником напряжения (источником тока), напряжение (ток) которого равно (равен) найденному значению напряжения (тока) в рабочей точке. Напряжения и токи в линейной части электрической цепи находят любым методом анализа режима постоянного тока.

Метод, с использованием эквивалентного генератора, является графоаналитическим, поскольку в нем аналитические методы определения параметров эквивалентного генератора и расчета линейной цепи после замены НЭ источником напряжения или тока сочетаются с графическим методом нахождения рабочей точки.

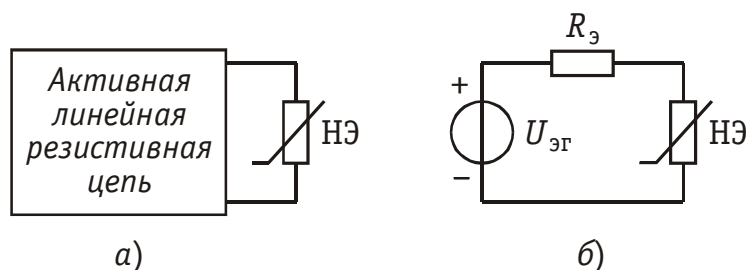


Рис. 10.12

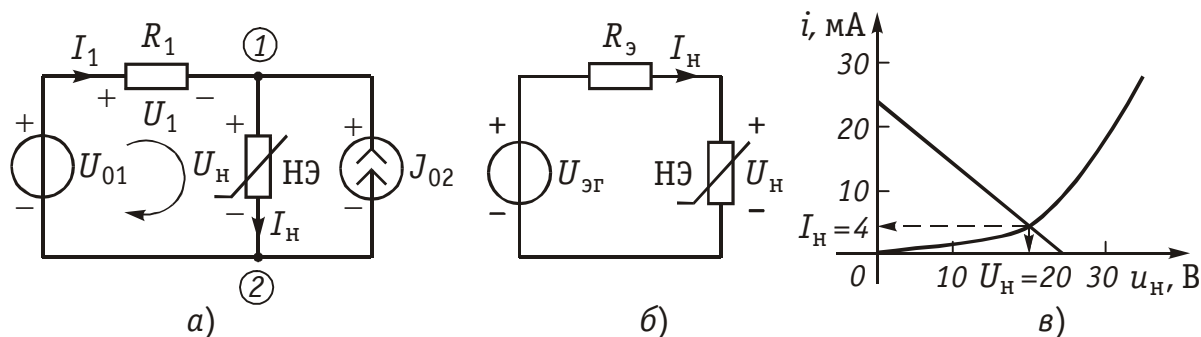


Рис. 10.13

Пример. Применим метод эквивалентного генератора к схеме рис. 10.13, а, где $U_{01} = 14$ В, $J_{02} = 10$ мА, $R_1 = 1$ кОм, $I_H = 10^{-5}U_H^2$. Из рисунка следует, что напряжение $U_{эГ}$ при отключении НЭ равно

$$U_{эГ} = J_{02}R_1 + U_{01} = 24 \text{ В},$$

а эквивалентное сопротивление $R_э = R_1 = 1$ кОм. В соответствии с ЗНК (рис. 10.13, б) имеем

$$I_H = (U_{эГ} - U_H)/R_1 = -10^{-3}U_H + 24 \cdot 10^{-3}.$$

Построение графиков прямой линии и ВАХ нелинейного элемента показано на рис. 10.13, в. Пересечение этих кривых дает координаты рабочей точки: $I_H = 4$ мА и $U_H = 20$ В.

10.3. Графические методы расчета цепей с нелинейными резистивными четырехполюсниками

Рассмотрим задачу анализа режима постоянного тока в резистивной электрической цепи с нелинейным четырехполюсником (рис. 10.14).

Пусть входная ВАХ и семейство выходных ВАХ будут иметь вид показанный на рис. 10.15, а и б; управляющим параметром для семейства выходных характеристик четырехполюсника является его входной ток I_1 .

Задача нахождения входных напряжения $U_1 = U_{10}$ и тока $I_1 = I_{10}$ сводится к задаче нахождения рабочей точки на входной вольт-амперной характеристике $i_1 = F_1(u_1)$. Она решается с помощью графических построений, которые полностью аналогичны рассмотренным в § 10.2 (рис. 10.16, а).

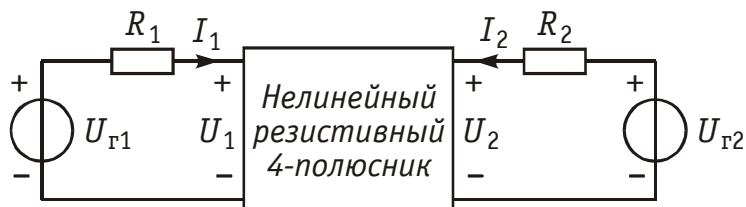


Рис. 10.14

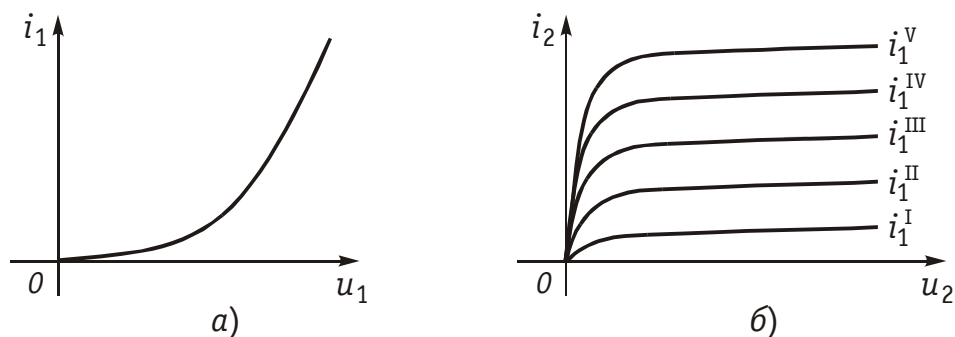


Рис. 10.15

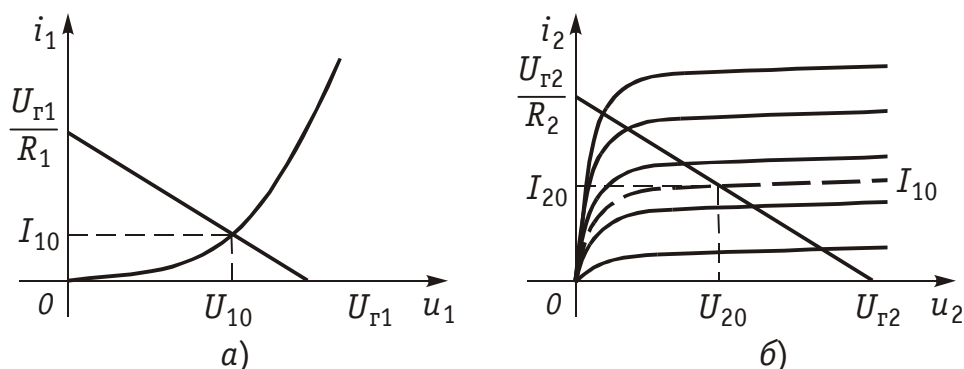


Рис. 10.16

Найденному входному току $I_1 = I_{10}$ соответствует определенная выходная вольт-амперная характеристика $i_2 = F_2(u_2)$. Она может быть измерена или, как это обычно делается, определена по семейству выходных вольт-амперных характеристик четырехполюсника из справочника. Для этого необходимо провести линейное интерполирование двух характеристик семейства с ближайшими значениями параметров $I_1 < I_{10}$ и $I_1 > I_{10}$. На рис. 10.16, б эта характеристика изображена штриховой линией.

Выходной ток I_2 и выходное напряжение U_2 (см. рис. 10.14) связаны между собой линейной зависимостью $I_2 = (U_{r2} - U_2)/R_2$, которая на рис. 10.16, б представляет собой прямую, проходящую через точки $U_2 = U_{r2}$ на оси абсцисс и $I_2 = U_{r2}/R_2$ на оси ординат.

Точка пересечения зависимостей $I_2 = (U_{r2} - U_2)/R_2$ и $i_2 = F_2(u_2)$ при $I_1 = I_{10}$ и определяет рабочую точку (U_{20}, I_{20}) на выходных характеристиках четырехполюсника.

Дальнейший анализ рассматриваемой цепи может быть связан с нахождением напряжений и токов в ветвях входной и выходной цепей, если до анализа эти цепи были заменены эквивалентными генераторами.

10.4. Эквивалентные преобразования схем с нелинейными элементами

Суть эквивалентных преобразований состоит в замене участков цепи с параллельным или последовательным соединением ветвей

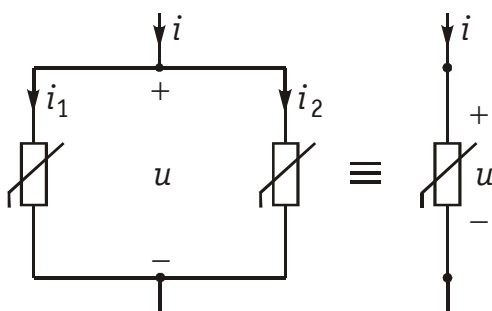


Рис. 10.17

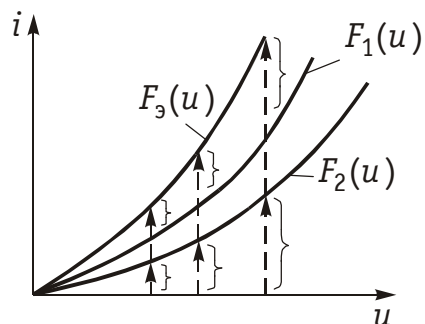


Рис. 10.18

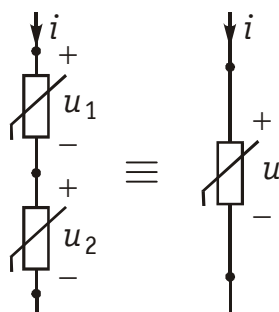


Рис. 10.19

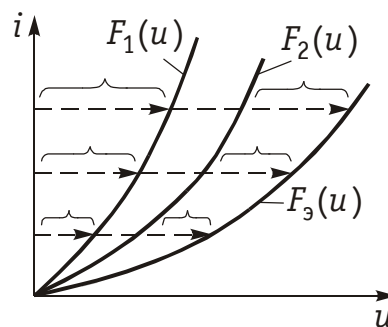


Рис. 10.20

одной эквивалентной ветвью путем суммирования их токов или напряжений. Речь здесь идет о суммировании ординат или абсцисс заданных характеристик ветвей цепи. Этот метод особенно эффективен в случае цепи с одним источником: цепь представляется источником и одним эквивалентным нелинейным элементом.

Пусть два НЭ с уравнениями (ВАХ) $i_1 = F_1(u_1)$ и $i_2 = F_2(u_2)$ включены параллельно (рис. 10.17)*.

Необходимо найти уравнение НЭ, эквивалентного данному соединению элементов. Так как элементы соединены параллельно, то $u_1 = u_2 = u$, а по первому закону Кирхгофа $i = i_1 + i_2$. Выполним сложение токов графически, как показано на рис. 10.18. Задаемся значением напряжения. При этом значении напряжения находим токи НЭ и суммируем их. Задаемся новым значением напряжения и опять суммируем токи. Таким образом, находим серию точек, соединяя которые, получаем ВАХ эквивалентного НЭ.

Рассмотрим последовательное соединение НЭ (рис. 10.19). В данном случае $i_1 = i_2 = i$, а $u = u_1 + u_2$. Процесс определения ВАХ НЭ показан на рис. 10.20. Заметим, что рассмотренные преобразования применимы и в случае, когда последовательно или параллельно соединены несколько нелинейных, а также линейных элементов.

* Поскольку приводимые ниже рассуждения справедливы не только для режима постоянного, но и для режима переменного тока, в дальнейшем будем использовать для обозначений напряжений и токов малые (строчные) буквы.

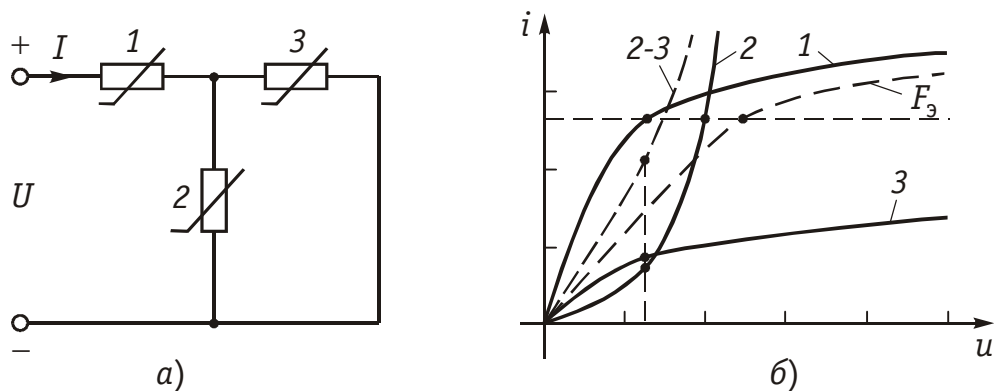


Рис. 10.21

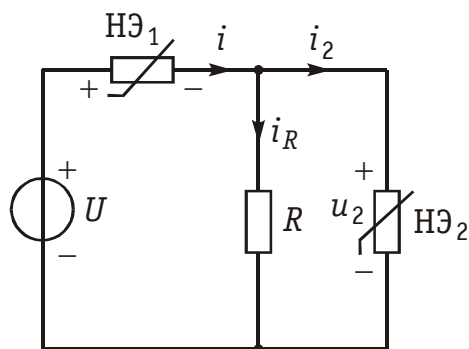


Рис. 10.22

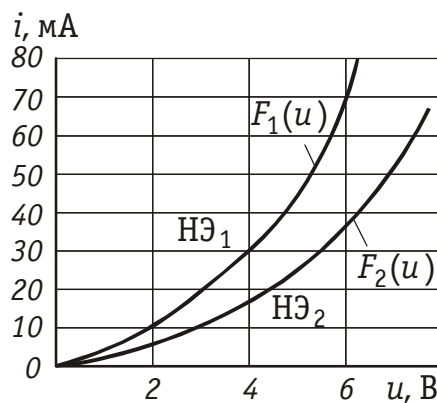


Рис. 10.23

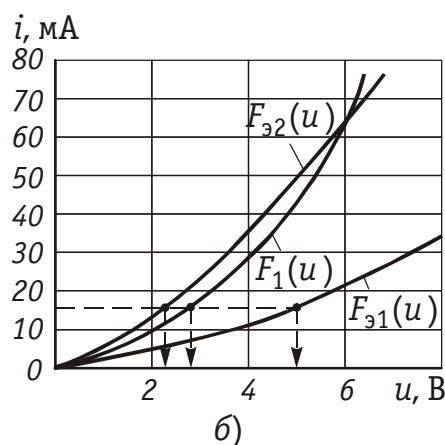
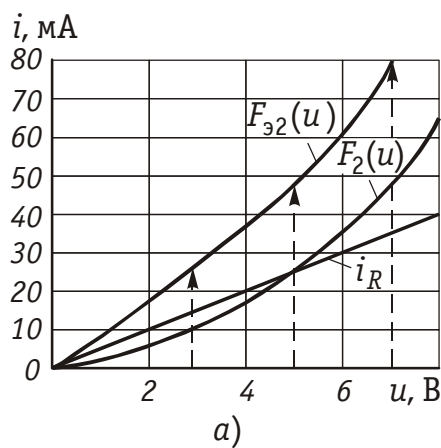


Рис. 10.24

Пример. На рис. 10.21, а показана подключенная к источнику напряжения цепь из трех резистивных НЭ (рис. 10.21, б). Суммирование ординат характеристик элементов 2 и 3, соединенных параллельно, дает эквивалентную характеристику 2–3. Суммируя абсциссы последней с абсциссами кривой 1, получаем эквивалентную характеристику нелинейной цепи F_3 . Из графиков рис. 10.21, б можно, задаваясь напряжением на входе, получить токи и напряжения ветвей.

Пример. Рассчитаем напряжения и токи в цепи, схема которой изображена на рис. 10.22, где $U = 5$ В, $R = 500$ Ом, а ВАХ НЭ заданы графиками на рис. 10.23.

Поскольку ВАХ заданы графиками, то при решении воспользуемся графическими построениями. Найдем ВАХ $i = F_{\Sigma 2}(u)$ двухполюсника, эквивалентного параллельному соединению линейного сопротивления R и НЭ₂. Для этого перенесен ВАХ НЭ₂ на новый рисунок и построим ВАХ линейного элемента (рис. 10.24, *a*). На этом же рисунке показана эквивалентная ВАХ $i = F_{\Sigma 2}(u)$. Перенесем эту эквивалентную ВАХ и ВАХ НЭ₁ на рис. 10.24, *б* и найдем ВАХ эквивалентного двухполюсника $i = F_{\Sigma 1}(u)$, который присоединяется к зажимам источника.

По рис. 10.24, *б* по кривой $i = F_{\Sigma 1}(u)$ находим, что напряжению $u = 5$ В соответствует ток $i = 16$ мА, по кривой $i = F_1(u)$ — напряжение на НЭ₁ $u_1 = 2,8$ В и по-кривой $i = F_{\Sigma 2}(u)$ — напряжение на параллельном соединении R и НЭ₂ $u_2 = 2,2$ В. Зная это напряжение, по графикам рис. 10.24, *a* находим $i_R = 11$ мА и $i_2 = 5$ мА.

10.5. Аналитическое представление вольт-амперных характеристик

Часто необходимо иметь аналитические выражения для вольт-амперных характеристик нелинейных элементов. Эти выражения могут лишь приближенно представлять ВАХ, поскольку физические закономерности, которым подчиняются зависимости между напряжениями и токами в электронных и полупроводниковых приборах, не выражаются аналитически.

Задача приближенного аналитического представления функции, заданной графически или таблицей значений, в заданных пределах изменения ее аргумента (независимой переменной) предполагает, во-первых, выбор аппроксимирующей функции, т. е. функции, с помощью которой приближенно представляется заданная зависимость, и, во-вторых, выбор критерия оценки «близости» этой зависимости и аппроксимирующей ее функция.

В качестве аппроксимирующих функций используются, чаще всего, алгебраические полиномы, некоторые дробные рациональные и трансцендентные функции или совокупность отрезков прямых линий.

Будем считать, что ВАХ нелинейного элемента $i = F(u)$ задана графически, т. е. определена в каждой точке интервала $U_{min} \leq u \leq U_{max}$, и представляет собой однозначную непрерывную функцию переменной u . Тогда задача аналитического представления вольт-амперной характеристики может рассматриваться как задача аппроксимации заданной функции $\xi(x)$ выбранной аппроксимирующей функцией $f(x)$.

О близости аппроксимирующей $f(x)$ и аппроксимируемой $\xi(x)$ функций или, иными словами, о погрешности аппроксимации, обычно судят по наибольшему абсолютному значению разности между этими функциями в интервале аппроксимации $a \leq x \leq b$, т. е. по величине

$$\Lambda = \max |f(x) - \xi(x)|. \quad (10.3)$$

Часто критерием близости выбирается среднее квадратическое значение разности между указанными функциями в интервале аппроксимации, т. е. величина

$$\Lambda = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - \xi(x)]^2 dx. \quad (10.4)$$

Иногда под близостью двух функций $f(x)$ и $\xi(x)$ понимают совпадение в заданной точке $x = X_0$ самих функций и $n + 1$ их производных.

Наиболее распространенным способом приближения аналитической функции к заданной является *интерполяция* (метод выбранных точек), когда добиваются совпадения функций $f(x)$ и $\xi(x)$ в выбранных точках (*узлах интерполяции*) x_k , $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Погрешность аппроксимации может быть достигнута тем меньшей, чем больше число варьируемых параметров входит в аппроксимирующую функцию, т. е., например, чем выше степень аппроксимирующего полинома или чем больше число отрезков прямых содержит аппроксимирующая линейно-ломаная функция. Одновременно с этим, естественно, растет объем вычислений как при решении задачи аппроксимации, так и при последующем анализе нелинейной цепи. Простота этого анализа наряду с особенностями аппроксимируемой функции в пределах интервала аппроксимации служит одним из важнейших критериев при выборе типа аппроксимирующей функции.

В задачах аппроксимации вольт-амперных характеристик электронных и полупроводниковых приборов стремиться к высокой точности их воспроизведения, как правило, нет необходимости ввиду значительного разброса характеристик приборов от образца к образцу и существенного влияния на них дестабилизирующих факторов, например, температуры в полупроводниковых приборах. В большинстве случаев достаточно «правильно» воспроизвести общий усредненный характер зависимости $i = F(u)$ в пределах ее рабочего интервала.

Полиномиальная аппроксимация. В качестве аппроксимирующей функции в задачах аналитического представления вольт-амперных характеристик очень часто используются алгебраические полиномы

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (10.5)$$

той или иной степени.

Постоянные $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ представляют собой варьируемые параметры, значения которых выбираются такими, чтобы в интервале аппроксимации $a \leq x \leq b$ свести к минимуму погрешность аппроксимации в соответствии с выбранным критерием близости.

[illegible]

В теории интерполирования функций доказывается, что система уравнений (10.6) имеет единственное решение. Единственным, следовательно, будет и решение рассматриваемой задачи интерполирования вольт-амперной характеристики полиномом выбранной степени.

A graph showing a function $f(x)$ and its tangent line $\xi(x)$ at the point $x=1$. The x-axis is labeled x and has tick marks at 0, 0.5, 1, and 1.5. The y-axis is labeled $f(x)$ and $\xi(x)$ and has tick marks from 0.1 to 1.0 in increments of 0.1. The function $f(x)$ is a concave down curve starting at (0,0) and passing through (1,0.5). The tangent line $\xi(x)$ is a straight line starting at (0,0) and passing through (1,0.5), which is the point of tangency. The label $f(x)$ is placed near the upper right end of the curve, and the label $\xi(x)$ is placed near the upper right end of the tangent line.

247

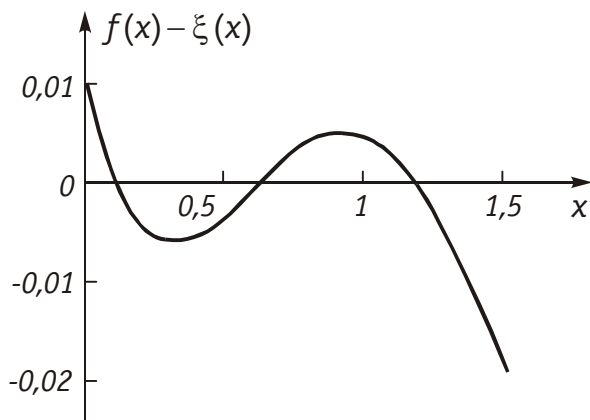


Рис. 10.26

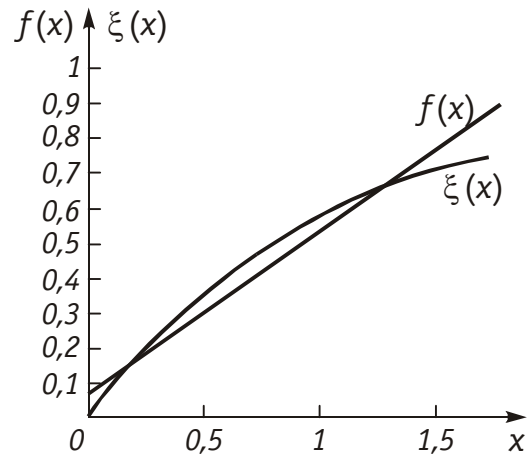


Рис. 10.27

тически совпадают. На рис. 10.26 приведен график разности этих функций, из которого следует, что погрешность в том же заданном интервале не превышает 0,026, т. е. уменьшилась по сравнению с линейной интерполяцией в 6 раз.

Одним из эффективных методов аппроксимации функций, в котором погрешность аппроксимации контролируется во всем интервале приближения $a \leq x \leq b$, а не в его дискретных точках, является метод наилучшего равномерного приближения (аппроксимации) функций (приближения по П.Л. Чебышеву). В этом методе параметры аппроксимирующей функции выбираются такими, чтобы в интервале приближения наибольшее по абсолютной величине отклонение функции $f(x)$ от непрерывной функции $\xi(x)$ было бы минимально возможным, или, используя обозначения (10.3), чтобы в интервале $a \leq x \leq b$

$$\Lambda = \max |f(x) - \xi(x)| = \min. \quad (10.7)$$

В рассмотренном выше примере этому критерию удовлетворяет полином $f(x) = 0,071 + 0,518x$. Наибольшие его отклонения от функции $\xi(x) = 1 - e^{-x}$ в интервале $0 \leq x \leq 1,5$ расположены при $x = 0$, $x = x_m = 0,658$ и $x = 1,5$ (см. рис. 10.27), причем, что очень важно, все они равны по абсолютной величине. Легко понять, что любое изменение наклона (a_1) или уровня (a_0) полинома $f(x)$, которое ведет к уменьшению экстремального отклонения в двух из трех указанных точек, увеличивает отклонения в оставшейся точке. Таким образом, полином $f(x) = 0,071 + 0,518x$ из всех полиномов первой степени действительно минимизирует абсолютную величину отклонения от функции $1 - e^{-x}$ в интервале $0 \leq x \leq 1,5$.

В теории аппроксимации функций доказывается, что наибольшее по абсолютной величине отклонение полинома $f(x)$ степени n от непрерывной функции $\xi(x)$ будет минимально возможным, если в интервале приближения $a \leq x \leq b$ разность $f(x) - \xi(x)$ не меньше, чем $n + 2$ раза принимает свои последовательно чередующиеся

предельные наибольшие $f(x) - \xi(x) = L > 0$ и наименьшие $f(x) - \xi(x) = -L$ значения (критерий Чебышева).

Характер графика разности $f(x) - \xi(x)$ для полинома $f(x)$ пятой степени, удовлетворяющего этому критерию, приведен на рис. 10.28.

Этому же критерию удовлетворяет полином $f(x)$ в рассмотренном выше примере (см. рис. 10.27).

Во многих прикладных задачах находит применение полиномиальная аппроксимация по среднеквадратическому критерию близости, когда параметры аппроксимирующей функции $f(x)$ выбираются из условия обращения в минимум в интервале аппроксимации $a \leq x \leq b$ квадрата отклонения функции $f(x)$ от заданной непрерывной функции $\xi(x)$, т. е., из условия:

$$\Lambda = \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x) - \xi(x)|^2 dx = \min. \quad (10.8)$$

В соответствии с правилами отыскания экстремумов решение задачи сводится к решению системы линейных уравнений, которая образуется в результате приравнивания к нулю первых частных производных функции Λ по каждому из искомых коэффициентов a_k аппроксимирующего полинома $f(x)$, т. е. уравнений

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial a_0} = 0; \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial a_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial a_n} = 0. \quad (10.9)$$

Доказано, что и эта система уравнений имеет единственное решение. В простейших случаях оно находится аналитически, а в общем случае — численно. Так, в рассматриваемом примере система уравнений при аппроксимации в интервале $0 \leq x \leq 1,5$ функции $1 - e^{-x}$ полиномом первой степени такова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda}{\partial a_0} &= \int_0^{1,5} 2(a_0 + a_1 x - 1 + e^{-x}) dx = 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial a_1} &= \int_0^{1,5} 2(a_0 + a_1 x - 1 + e^{-x}) x dx = 0, \end{aligned}$$

или после преобразований:

$$3a_0 + 2,25a_1 = 1 + 2 \cdot e^{-1,5}; \quad 2,25a_0 + 2,25a_1 = 0,25 - 5 \cdot e^{-1,5}.$$

Поэтому $f(x) = 0,108 + 0,500x$.

Заметим, что, как правило, средняя квадратическая погрешность наилучшего равномерного приближения функций $f(x)$ и $\xi(x)$ лишь не намного отличается от минимально возможной. Обратное утверждение обычно ошибочно, т. е. при квадратической аппроксимации в некоторых участках интервала аппроксимации возмож-

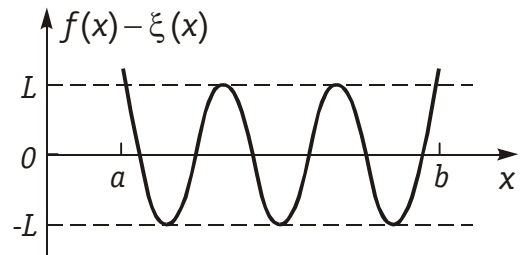


Рис. 10.28

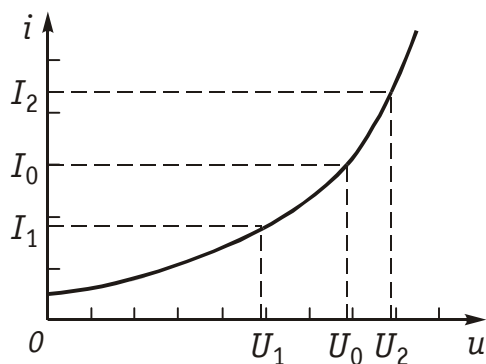


Рис. 10.29

ны существенные превышения погрешности аппроксимации (выбросы) по сравнению с теми, которые соответствуют критерию (10.7).

Вернемся к вольт-амперным характеристикам. Общий вид записи степенного полинома, аппроксимирующего ВАХ:

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n. \quad (10.10)$$

Иногда бывает удобно решать задачу аппроксимации заданной характеристики в окрестности рабочей точки U_0 . Тогда используют степенной полином другого вида:

$$i = a_0 + a_1 (u - U_0) + a_2 (u - U_0)^2 + \dots + a_n (u - U_0)^n. \quad (10.11)$$

Пример. Используя метод интерполяции, аппроксимировать ВАХ нелинейного резистивного элемента (рис. 10.29) степенным полиномом. Аппроксимированная ВАХ должна совпадать с заданной в выбранных точках U_0 , U_1 и U_2 .

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} I_0 = a_0 + a_1 (U_0 - U_0) + a_2 (U_0 - U_0)^2 \\ I_1 = a_0 + a_1 (U_1 - U_0) + a_2 (U_1 - U_0)^2 \\ I_2 = a_0 + a_1 (U_2 - U_0) + a_2 (U_2 - U_1)^2 \end{cases}$$

из которой найдём искомые коэффициенты

$$a_0 = i_0;$$

$$a_1 = \frac{I_0 [(U_1 - U_0)^2 - (U_2 - U_0)^2] + I_1 (U_2 - U_0)^2 - I_2 (U_1 - U_0)^2}{D};$$

$$a_2 = \frac{I_0 (U_2 - U_1) - I_1 (U_2 - U_0) - I_2 (U_0 - U_1)}{D};$$

$$D = -(U_2 - U_0)(U_2 - U_1)(U_0 - U_1).$$

Пример. ВАХ нелинейного резистивного элемента $i = F(u)$ задана таблицей:

u_k	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
i_k	0	0.06	0.23	0.5	0.85	1.18	1.65	2.3	2.9

Используя квадратический критерий, аппроксимировать характеристику выражением $i = a_2 u^2$.

Сумма квадратов отклонений аппроксимирующей функции от заданной:

$$\Lambda = \sum_{k=0}^8 [a_2 u_k^2 - i_k]^2 \text{ минимальна при значении коэффициента } a_2, \text{ удовлетво-}$$

ряющего уравнению

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial a_2} = 2 \sum_{k=0}^8 (a_2 u_k^2 - i_k) u_k^2 = 0, \text{ откуда } a_2 = \left(\sum_{k=0}^8 u_k^2 i_k \right) / \sum_{k=0}^8 u_k^4 = 4.63.$$

Пример. На рис. 10.30 кружочками показаны полученные экспериментально пять точек характеристики $i_B = F(u_{БЭ})$ транзистора КТ301. Осуществим степенную аппроксимацию этой характеристики в диапазоне $u_{БЭ}$ от 0,4 до 0,9 В полиномом второй степени в окрестности рабочей точки $U_0 = 0,7$ В.

Коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_N полинома $i_B = a_0 + a_1(u_{БЭ} - U_0) + a_2(u_{БЭ} - U_0)^2$ найдем, используя метод интерполяции. Выберем в качестве узлов интерполяции точки, соответствующие напряжениям 0,5; 0,7 и 0,9 В и составим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a_0 - 0,2a_1 + 0,04a_2 &= 0,05; \\ a_0 &= 0,15; \\ a_0 + 0,2a_1 + 0,04a_2 &= 0,5. \end{aligned} \right\}$$

Решение этой системы дает $a_0 = 0,15$ мА, $a_1 = 1,125$ мА/В, $a_2 = 3,125$ мА/В². Кривая тока

$$i_B = 0,15 + 1,125(u_{БЭ} - 0,7) + 3,125(u_{БЭ} - 0,7)^2$$

проходит через три экспериментальные точки, соответствующие узлам интерполяции (см. рис. 10.30, кривая 1). Из рисунка видно, что некоторые экспериментальные точки (например, при $U_{БЭ} = 0,4$ В) плохо «ложатся» на эту кривую. Кроме того, появляется загиб в нижней части характеристики.

Лучшей аппроксимации можно добиться, если использовать полином четвертой степени и выбрать соответственно пять узлов интерполяции (0,4; 0,5; 0,7; 0,8; 0,9 В). В этом случае кривая тока i_B пройдет через все пять экспериментальных точек.

Однако можно попытаться сохранить вторую степень полинома и улучшить аппроксимацию, воспользовавшись каким-либо другим методом для определения коэффициентов a_s . Найдем эти коэффициенты, используя среднеквадратическое приближение тока по всем пяти экспериментальным значениям.

Составим уравнения (10.9):

$$\left. \begin{aligned} 5a_0 - 0,2a_1 + 0,18a_2 &= 0,98; \\ -0,2a_0 + 0,18a_1 - 0,026a_2 &= 0,106; \\ 0,18a_0 - 0,026a_1 + 0,0123a_2 &= 0,0272. \end{aligned} \right\}$$

Решение этой системы уравнений дает: $a_0 = 0,164$ мА, $a_1 = 1,07$ мА/В и $a_2 = 2,069$ мА/В².

График тока при этом определяется полиномом

$$i_B = 0,164 + 1,07(u_{БЭ} - 0,7) + 2,069(u_{БЭ} - 0,7)^2$$

и показан на рис. 10.30, кривая 2. Эта характеристика является более приемлемой для аналитического описания экспериментальных результатов.

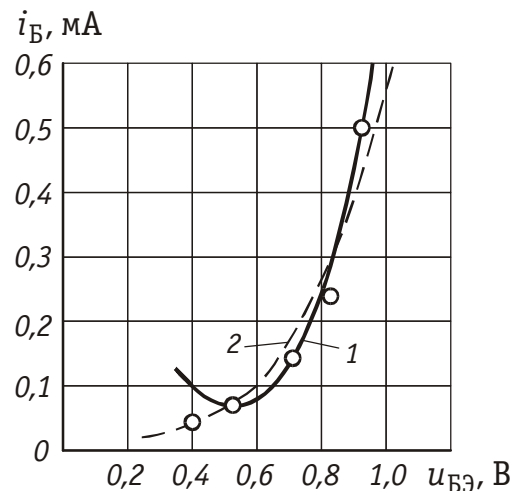


Рис. 10.30

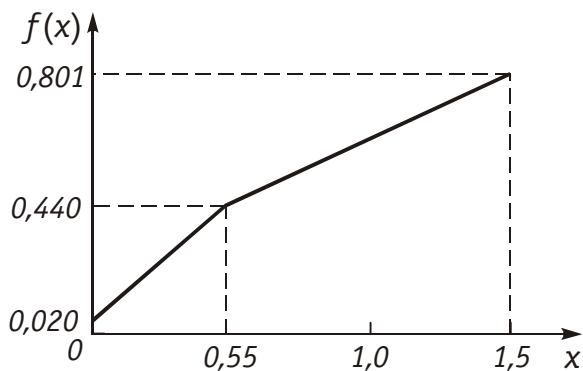


Рис. 10.31

Кусочно-линейная аппроксимация. Наряду с полиномиальной аппроксимацией ВАХ в радиотехнике и связи широко используется их аппроксимация линейно-ломаной зависимостью — совокупностью отрезков прямых, образующих в интервале аппроксимации непрерывную функцию $f(x)$. Так, на рис. 10.31 приведена линейно-ломаная за-

ВИСИМОСТЬ

$$f(x) = \begin{cases} 0,020 + 0,764x & \text{при } 0 \leq x \leq 0,55, \\ 0,232 + 0,379x & \text{при } 0,55 \leq x \leq 1,5, \end{cases}$$

составленная из двух отрезков прямых и аппроксимирующая в интервале $0 \leq x \leq 1,5$ функцию $1 - e^{-x}$ с абсолютной погрешностью, не превышающей 0,024.

Параметры аппроксимирующих прямых могут быть выбраны так, чтобы в интервале аппроксимации выполнялся критерий (10.7) или (10.8).

В пределах каждого из линеаризованных участков вольт-амперной характеристики применимы все методы анализа колебаний в линейных электрических цепях. Ясно, что, чем на большее число линеаризованных участков разбивается заданная вольт-амперная характеристика, тем точнее она может быть аппроксимирована и тем больше объем вычислений в ходе анализа колебаний в цепи.

Во многих прикладных задачах анализа колебаний в нелинейных резистивных цепях аппроксимируемая вольт-амперная характеристика в интервале аппроксимации с достаточной точностью представляется двумя или тремя отрезками прямых. Графики типичных аппроксимирующих функций приведены на рис. 10.32, а — в, где $U_{\text{отс}}$ — так называемое напряжение отсечки, $U_{\text{н}}$ и $I_{\text{н}}$ — напряжение и ток насыщения в НЭ.

Подобная аппроксимация вольт-амперных характеристик дает в большинстве случаев вполне удовлетворительные по точности ре-

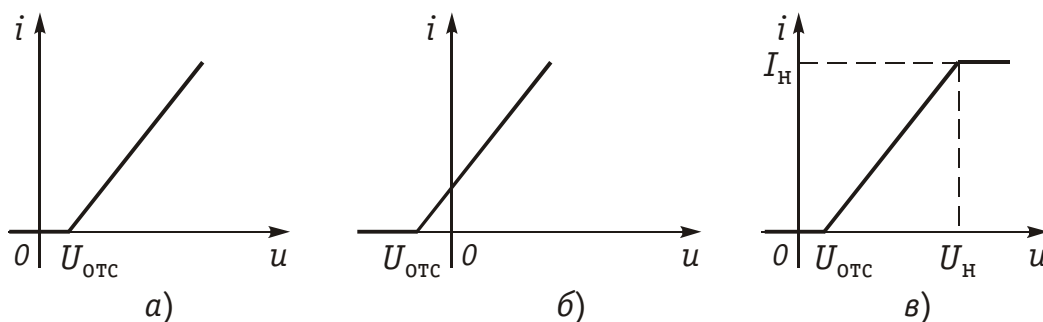


Рис. 10.32

зультаты анализа колебаний в нелинейной резистивной цепи при «больших» по величине воздействиях на нелинейный элемент, т. е. когда мгновенные значения токов в нелинейном элементе изменяются в предельно допустимых границах от $I = 0$ до $I = I_H$ (см. рис. 10.32, в).

Пример. На рис. 10.33 (кривая 1) приведен график экспериментальной зависимости $i_B = F(u_{БЭ})$ транзистора КТ306. Выполним кусочно-линейную аппроксимацию этой зависимости.

где $U_{отс}$ — напряжение отсечки.

Используя полином первой степени

$$i_B = a_0 + a_1(u_{БЭ} - U_0),$$

осуществим аппроксимацию заданной зависимости в окрестности точки $U_0 = 0,8$ В и определим коэффициенты по методу Тейлора:

$$i_B = F(U_0) + \frac{F'(U_0)}{1!}(u_{БЭ} - U_0) = I_0 + S(U_0)(u_{БЭ} - U_0).$$

Ток в рабочей точке в соответствии с экспериментальными данными $I_0 = 1,2$ мА. Крутизну $S(U_0)$ в рабочей точке можно найти приближенно методом приращений:

$$S(U_0) = \left. \frac{di_B}{du_{БЭ}} \right|_{u_{БЭ}=U_0} = \left. \frac{\Delta i_B}{\Delta u_{БЭ}} \right|_{u_{БЭ}=U_0} = \frac{0,8}{0,2} = 4 \text{ мА/В}.$$

В результате аппроксимации получим

$$i_B = 1,2 + 4(u_{БЭ} - 0,8) = -2 + 4u_{БЭ} = 4(u_{БЭ} - 0,5) \text{ мА}.$$

Видно, что при $u_{БЭ} < 0,5$ В ток i_B принимает отрицательные значения, что не согласуется с экспериментальной зависимостью. Таким образом, полученным полиномом будем аппроксимировать заданную зависимость на участке $u_{БЭ} > 0,5$. На участке же $0 < u_{БЭ} < 0,5$ можно выбрать полином первой степени с нулевыми коэффициентами, т. е. $i_B = 0$. Итак, аппроксимирующая функция запишется в виде (рис. 10.33, кривая 2)

$$i_B = F(u_{БЭ}) = \begin{cases} 0, & u_{БЭ} \leq 0,5 \text{ В}, \\ 4(u_{БЭ} - 0,5), & u_{БЭ} > 0,5 \text{ В}. \end{cases}$$

Представим эту зависимость в более общей форме:

$$i = F(u) = \begin{cases} 0, & u \leq U_{отс}, \\ S(u - U_{отс}), & u > U_{отс}, \end{cases}$$

Другие виды аппроксимации вольт-амперных характеристик. Вольт-амперная характеристика идеализированного полупроводни-

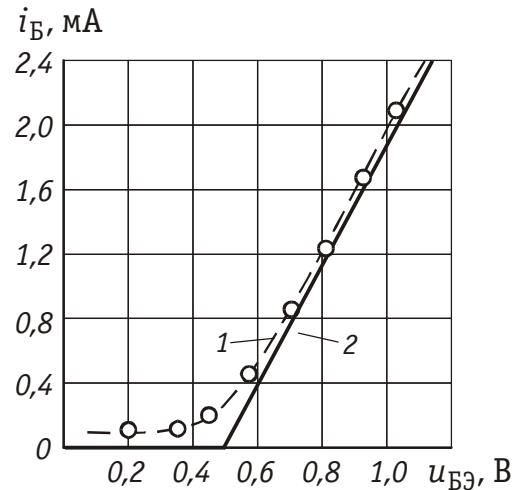


Рис. 10.33

кового диода совпадает с характеристикой идеализированного $p-n$ перехода

$$i = I_0 (e^{u/\varphi_T} - 1), \quad (10.12)$$

где I_0 – обратный (тепловой) ток, φ_T – тепловой потенциал ($\varphi_T \cong 0,026$ В при $T = 300$ К).

Функция (10.12) иногда используется для аппроксимации вольт-амперных характеристик. Ее единственным варьируемым параметром является обратный ток I_0 , значение которого можно найти, интерполируя заданную характеристику функцией (10.12) в одной из точек. График функции (10.12) подобен приведенному на рис. 10.1, а.

Заметим, что вольт-амперные характеристики реальных полупроводниковых диодов в силу ряда причин отличаются от идеализированных и чаще всего аппроксимируются отрезками прямых.

В ряде случаев вольт-амперные характеристики, подобные приведенной на рис. 10.32, в, аппроксимируются функцией

$$i = \frac{I_0}{2} [1 + \operatorname{th} g(u - U_0)] \quad (10.13)$$

с тремя варьируемыми параметрами I_0 , g и U_0 .

Можно считать, что $I = I_n$, U_0 – соответствует значению напряжения U , при котором $i = 0,5I_{max}$, а постоянная g находится по известной крутизне $S = dI/dU$ аппроксимируемой вольт-амперной характеристики в точке U_0 из условия $S(U_0) = 0,5I_0$.

10.6. Аналитические методы расчета нелинейных резистивных цепей

Составление уравнений состояния цепи на основании законов Кирхгофа. Из предыдущих разделов известно, что в общем случае, когда цепь содержит n_b ветвей (в том числе n_t источников тока) и n_y узлов, число неизвестных токов (напряжений) равно (см. § 1.4) $n_b - n_y + 1 - n_t$. Для отыскания такого числа неизвестных составляется система уравнений по законам Кирхгофа.

По первому закону Кирхгофа (ЗТК) записывается $n_y - 1$ уравнений вида (1.16):

$$\sum_{k=1}^m i_k = 0,$$

где m – число ветвей, сходящихся в узле.

По второму закону Кирхгофа (ЗНК) записывается $n_b - n_y + 1$ уравнений вида (1.17):

$$\sum_{k=1}^n u_k = 0,$$

где n — число ветвей, входящих в контур.

Если цепь содержит, кроме линейных, также и НЭ, то в системе уравнений, описывающей состояние цепи, появятся уравнения вида $i_k = F_k(u_k)$. Методика составления уравнений состояния цепи на основе законов Кирхгофа остается такой же, как и в случае линейных резистивных цепей (см. гл. 2, 3).

Составим, например, систему уравнений состояния для цепи, схема которой изображена на рис. 10.13. Пусть ВАХ нелинейного элемента аппроксимируется выражением

$$I_{\text{н}} = \begin{cases} 0, & U_{\text{н}} < 0, \\ \alpha U_{\text{н}}^2, & U_{\text{н}} > 0. \end{cases} \quad (10.14)$$

Зададимся положительными направлениями напряжений и токов. Цепь содержит один независимый контур (I) и один независимый узел (1). Уравнения, записанные по ЗТК и ЗНК, имеют следующий вид:

$$I_1 + J_{02} - I_{\text{н}} = 0; \quad (10.15)$$

$$I_1 R_1 + U_{\text{н}} - U_{01} = 0. \quad (10.16)$$

К этим уравнениям дописываем уравнение (10.14). Неизвестными в данной системе уравнений являются напряжение $U_{\text{н}}$ и токи I_1 и $I_{\text{н}}$. Всего три неизвестных. Для их отыскания составлено три уравнения. Как видим, процесс составления системы уравнений такой же, как и в случае линейной цепи. Однако процесс решения полученной системы, которая содержит нелинейное уравнение, может существенно затрудниться. Для большинства относительно сложных цепей аналитического решения системы уравнений может и не существовать. Тогда приходится прибегать к численным методам решения.

В рассматриваемом примере достаточно просто получить аналитическое решение. Предположим вначале, что решение системы уравнений существует при $U_{\text{н}} > 0$. Тогда уравнение НЭ имеет вид

$$I_{\text{н}} = \alpha U_{\text{н}}^2. \quad (10.17)$$

Выразим из уравнения (10.15) ток $I_1 = I_{\text{н}} - J_{02}$ и подставим его в уравнение (10.16). В результате этой операции получим

$$I_{\text{н}} R_1 - J_{02} R_1 + U_{\text{н}} - U_{01} = 0. \quad (10.18)$$

Подставив в (10.18) выражение (10.17), получим уравнение относительно неизвестного напряжения на нелинейном двухполюснике

$$U_{\text{н}}^2 + \frac{1}{\alpha R_1} U_{\text{н}} - \frac{J_{02} R_1 + U_{01}}{\alpha R_1} = 0. \quad (10.19)$$

Отсюда имеем

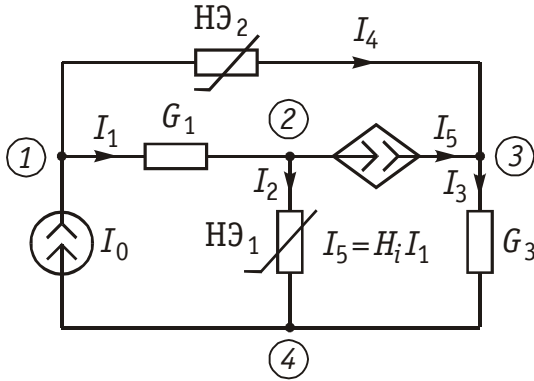


Рис. 10.34

Допустим теперь существование решения системы уравнений (10.15)–(10.16) при $U_H < 0$. Согласно уравнению НЭ (10.14) $I_H = 0$. Тогда из уравнения (10.18) имеем

$$U_H = J_{02}R_1 + U_0 = 24 \text{ В} > 0,$$

а это противоречит условию, что $U_H < 0$.

Таким образом, остается первое решение (10.20). Найдем остальные неизвестные. Из (10.17) имеем $I_H = \alpha U_H^2 = 10^{-5} \times 10^2 = 4 \text{ мА}$, а из (10.15) $I_1 = I_H - J_{02} = -6 \text{ мА}$.

В данном примере получено аналитическое решение системы нелинейных уравнений. Если бы ВАХ нелинейного элемента описывалась более сложной функцией, то этого достичь не удалось бы.

Составление уравнений состояния цепи методом узловых напряжений (потенциалов). Как известно, переменными в методе узловых напряжений являются напряжения $n_y - 1$ узлов по отношению к базисному узлу.

Рассмотрим в качестве примера схему, изображенную на рис. 10.34. Пусть ВАХ нелинейных элементов описываются выражениями $I = \alpha U^3$ для элемента НЭ₁ и $I = \beta U^2$ для элемента НЭ₂. В схеме имеется зависимый источник (ИТУТ) с током $I_5 = H_i I_1$.

Приняв узел 4 за базисный, имеем три независимых узла: 1, 2 и 3. Токи ветвей выражаются через узловые напряжения U_1 , U_2 и U_3 следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= (U_1 - U_2)G_1; \quad I_2 = \alpha U_2^3; \\ I_3 &= U_3 G_3; \quad I_4 = \beta (U_1 - U_3)^2; \\ I_5 &= H_i I_1 = H_i G_1 (U_1 - U_2). \end{aligned} \right\} \quad (10.21)$$

Составим уравнения для узлов 1, 2 и 3 по ЗТК:

$$\begin{aligned} I_1 + I_4 &= I_0; \\ -I_1 + I_2 + I_5 &= 0; \\ I_3 - I_4 - I_5 &= 0. \end{aligned}$$

$$U_H = -\frac{1}{2\alpha R_1} + \sqrt{\frac{1}{4\alpha^2 R_1^2} + \frac{J_{02}R_1 + U_{01}}{\alpha R_1}}. \quad (10.20)$$

Пусть $R_1 = 1 \text{ кОм}$, $U_{01} = 14 \text{ В}$, $J_{02} = 10 \text{ мА}$, $\alpha = 10^{-5} \text{ А/В}$. Тогда $U_H = 20 \text{ В}$.

Второе решение уравнения (10.19) даст $U_H < 0$. Это решение не подходит, так как применялось уравнение НЭ, справедливое при $U_H > 0$.

Подставив в эти уравнения значения токов из (10.21), получим

$$\left. \begin{aligned} (U_1 - U_2)G_1 + \beta(U_1 - U_3)^2 &= I_0; \\ -(U_1 - U_2)G_1(1 + H_i) + \alpha U_2^3 &= 0; \\ -(U_1 - U_2)G_1H_i + U_3G_3 - \beta(U_1 - U_3)^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.22)$$

Уравнения узловых напряжений получены в виде системы трех нелинейных уравнений с тремя неизвестными узловыми напряжениями. Можно уменьшить число уравнений, если из первого уравнения выразить U_2 через U_1 и U_3 и исключить его из двух остальных уравнений. В результате получим систему двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными напряжениями узлов 1 и 3.

Решить данную систему уравнений можно одним из численных методов (например, известным из математики методом Ньютона—Рафсона). Определив узловые напряжения, можно вычислить токи и напряжения ветвей.

Аналитические методы нахождения рабочей точки. Задача о нахождении рабочей точки может решаться и аналитическими методами, если зависимость $I(U)$ нелинейного резистивного элемента задана аналитически. Она сводится к решению нелинейного уравнения

$$I(U) = \frac{E - U}{R} \quad (10.23)$$

относительно напряжения $U = U_0$ в рабочей точке резистора. Так например, в цепи с идеализированным выпрямительным диодом, у которого $I = I_0(e^{U/\varphi_T} - 1)$, где I_0 и φ_T — некоторые постоянные, задача нахождения рабочей точки приводит к решению трансцендентного уравнения $I = I_0(e^{U/\varphi_T} - 1) = (E - U)/R$ относительно неизвестного напряжения $U = U_0$ с последующим нахождением тока $I_0 = (E - U_0)/R$ в рабочей точке диода.

Если вольт-амперная характеристика нелинейного резистора аппроксимирована полиномом $I = a_1U + a_2U^2 + \dots + a_nU^n$, то уравнение (10.23) будет представлять собой алгебраическое уравнение степени n относительно искомого напряжения в рабочей точке и, как известно, в общем случае может быть решено лишь численно, если $n > 4$.

В заключение следует подчеркнуть, что нелинейный характер взаимозависимостей между реакциями и воздействием в анализируемых цепях обуславливает неприменимость к ним в общем случае принципа наложения, лежащего в основе высокоэффективных методов анализа и синтеза линейных электрических цепей. По этой же причине только в редких случаях удастся найти решение задач анализа колебаний в аналитической форме, даже в таких простейших нелинейных цепях, как нелинейные резистивные цепи.

10.7. Стабилизация постоянного напряжения нелинейными резистивными цепями

Для поддержания постоянства (стабилизации) напряжения питания активных электрических цепей при возможных колебаниях первичного питающего напряжения и изменениях сопротивления нагрузки используются устройства, получившие название *стабилизаторов постоянного напряжения*.

Схема простейшего стабилизатора приведена на рис. 10.35, а. В него входят генератор первичного питающего напряжения, задающее напряжение U_{Γ} которого под воздействием дестабилизирующих факторов может меняться относительно его среднего значения, и стабилитрон, подсоединенный параллельно нагрузке. Его вольт-амперная характеристика была приведена на рис. 10.1, б. Внутреннее сопротивление генератора R_{Γ} и сопротивление нагрузки R_{H} считаются чисто резистивными.

При анализе работы стабилизатора цепь, внешнюю по отношению к стабилитрону, заменим эквивалентным генератором с задающим напряжением U_0 и внутренним сопротивлением R_0 . После этой замены схема анализируемой цепи преобразуется в схему рис. 10.35, б. На этой схеме через U_{H} обозначено напряжение на зажимах нагрузки, которое совпадает с напряжением в рабочей точке стабилитрона (рис. 10.35, а). Зная последнюю, можно найти токи в ветвях исходной цепи: $I_{\Gamma} = (U_{\Gamma} - U_{\text{H}})/R_{\Gamma}$, $I_{\text{H}} = U_{\text{H}}/R_{\text{H}}$, $I_{\text{д}} = I_{\Gamma} - I_{\text{H}}$.

Рис. 10.36, а и б показывает, что рабочая точка стабилитрона изменяется вдоль прямой, практически параллельной оси ординат, с изменением как задающего напряжения эквивалентного генератора (рис. 10.36, а), так и его внутреннего сопротивления (рис. 10.36, б).

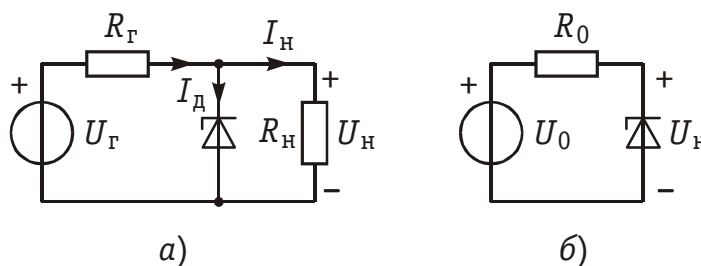


Рис. 10.35

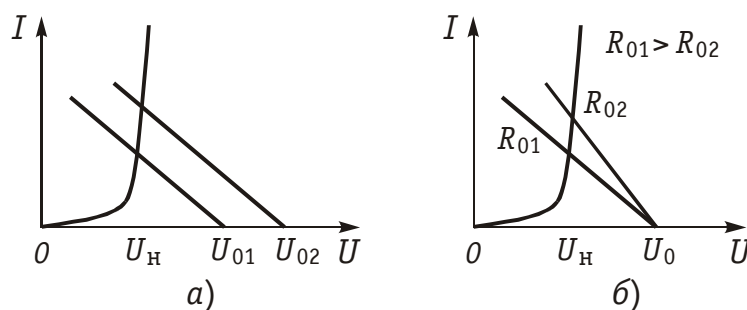


Рис. 10.36

Тем самым решается задача стабилизации напряжения на зажимах нагрузки, поскольку оно незначительно меняется при изменении в широких пределах первичного питающего напряжения U_T и сопротивления нагрузки R_H .

Естественно, что эффект стабилизации достигается ценой рассеяния энергии в стабилитроне и резисторе R_T .

Вопросы и задания для самопроверки

1. Какими уравнениями описываются нелинейные резистивные цепи, какими — нелинейные цепи, содержащие реактивные элементы?
2. Какие значения может принимать дифференциальное сопротивление нелинейного элемента?
3. Какой элемент цепи обладает одинаковыми статическим и дифференциальным сопротивлением?
4. Что называется рабочей точкой вольт-амперной характеристики нелинейного элемента?
5. Приведите пример многозначной вольт-амперной характеристики нелинейного элемента?
6. Объясните на примерах трехзначных характеристик N -типа и S -типа возможность получения неоднозначного решения задачи нахождения рабочей точки вольт-амперной характеристики резистивных нелинейных элементов?
7. В каком режиме (постоянного или переменного тока) могут быть сняты статические вольт-амперные характеристики резистивных нелинейных элементов?
8. Нарисуйте схему измерительной установки для снятия статической вольт-амперной характеристики резистивного двухполюсника.
9. Применим ли метод эквивалентного генератора к нелинейной цепи? К ее линейной части? Как определяются характеристики этого генератора?
10. Какие из указанных ниже законов справедливы для нелинейной цепи (нелинейного элемента): закон Ома, закон Кирхгофа, закон Джоуля-Ленца?
11. В чем отличие метода эквивалентных преобразований для линейной и нелинейной цепей?
12. Найдите ток i_2 и напряжение u_2 на нелинейном элементе (рис. 10.37), если $U_0 = 6$ В, $I_0 = 3$ А, $R_1 = 8$ Ом, $R_2 = 6$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $i = 0,1u^2$ А.

Ответ: $i_2 = 1,6$ А, $u_2 = 4$ В.

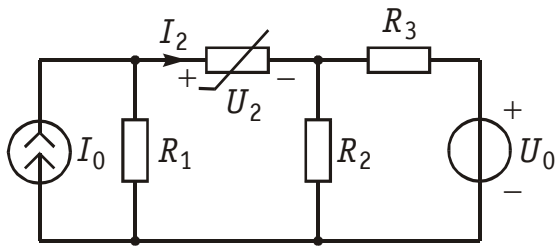


Рис. 10.37

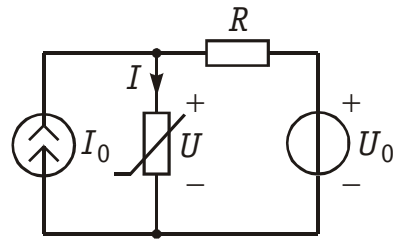


Рис. 10.38

13. Найдите токи и напряжения в ветвях цепи (рис. 10.38), если $U_0 = 6$ В, $I_A = 6$ мА, $R = 1$ кОм, $i = 0,001u^2$ А. Найдите алгебраические суммы частичных токов и напряжений, вызванных действием каждого источника в отдельности и убедитесь, что метод наложения дает неверные результаты.

Ответ: $I = 9$ мА, $U = 3$ В.

Ток и напряжение, вызванные генератором тока $I^I = 4$ мА, $U^I = 2$ В; ток и напряжение, вызванные генератором напряжения, имеют те же значения $I^{II} = 4$ мА, $U^{II} = 2$ В. В результате получаем

$$I = I^I + I^{II} = 8 \text{ мА}, \\ U = U^I + U^{II} = 4 \text{ В}.$$

Следовательно, принцип наложения для нелинейной цепи не справедлив.

14. Найдите токи и напряжения в цепи (рис. 10.39), если $I_0 = 0,2$ А, $R_1 = 100$ Ом, $i = 0,01u^2$ А и определите соответствующие значения статических и дифференциальных сопротивлений нелинейного элемента и параллельного соединения сопротивления R_1 и нелинейного элемента.

Ответ: $I = 0,16$ А, $I_1 = 0,04$ А, $R_{ст} = 25$ Ом,

$R_{ст экв} = 20$ Ом, $R_d = 12,5$ Ом, $R_{д экв} = 11,1$ Ом.

15. Найдите ток и напряжение в цепи (рис. 10.40), если $u = i^2$ В, $U_0 = 11$ В, $R_1 = 10$ Ом. Определите новое значение R_1 , при котором дифференциальное сопротивление в новой рабочей точке вольт-амперной характеристики нелинейного элемента будет равно 1 Ом.

Ответ: $I = 1$ А, $U_1 = 10$ В, $R_1 = 21,5$ Ом.

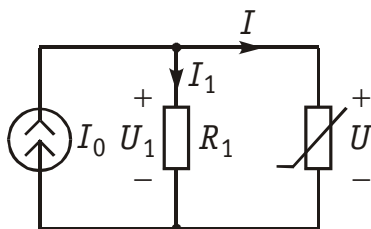


Рис. 10.39

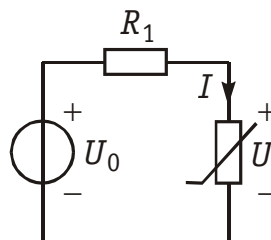


Рис. 10.40

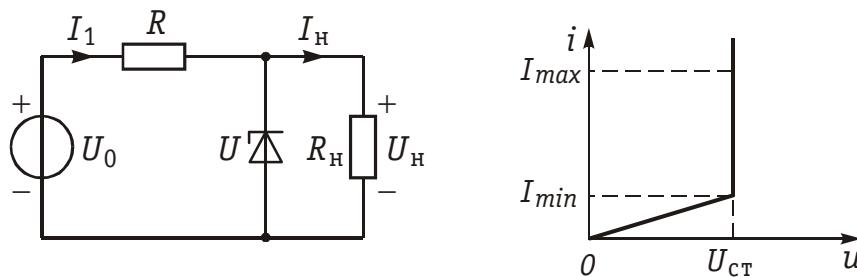


Рис. 10.41

16. На рис.10.41 изображена вольт-амперная характеристика стабилитрона — нелинейного полупроводникового прибора, используемого для стабилизации постоянного напряжения на входе питаемой цепи. Найдите, в каких пределах может изменяться сопротивление нагрузки R_n при неизменном напряжении $U_n = 6$ В, если $U_0 = 12$ В, $R = 100$ Ом, $U = 6$ В, $I_{max} = 50$ мА, $I_{min} = 10$ мА.

Ответ: $120 \text{ Ом} \leq R_n \leq 600 \text{ Ом}$.

17. Найдите величину сопротивления R_3 (рис. 10.42), при которой $I = 3$ мА, если $U_0 = 16$ В, $R_1 = R_2 = 2$ кОм, $I = (2^U - 1) \cdot 10^{-3}$ А. Определите в рабочей точке дифференциальное и статическое сопротивление нелинейного элемента.

Ответ: $R_3 = 1$ кОм, $R_{ст} = 666,7$ Ом, $R_d = 364$ Ом.

18. Найдите вольт-амперную характеристику параллельного соединения НЭ (рис. 10.43), если $i_1 = 0,02u^2$ А, $i_2 = 0,08u^2$ А. Определите величину R , при которой $i = 0,4$ А, если $u_0 = 6$ В.

Ответ: $R = 10$ Ом.

19. Найдите токи и напряжения в цепи (рис. 10.44), если $U_0 = 30$ В, $I_0 = 3$ А, $u_1 = 10\sqrt{i_1}$ В, $i_2 = 0,01u_2^2$ В.

Ответ: $i_1 = 1$ А, $u_1 = 10$ В, $i_2 = 4$ А, $u_2 = 20$ В.

20. Найдите токи и напряжения в цепи (рис. 10.45), если $U_{01} = U_{02} = 6$ В, $u_1 = 2\sqrt{i_1}$ В, $u_2 = 10\sqrt{i_2}$ В, $R = 0,8$ Ом.

Ответ: $I_1 = 1$ А, $I_2 = 4$ А, $I_3 = 5$ А, $U_1 = U_2 = 2$ В, $U_R = 4$ В.

21. Применив интерполяционный метод, аппроксимируйте ВАХ нелинейного резистивного элемента (рис. 10.45) полиномом вида $i = a_0 + a_1u + a_2u^2$.

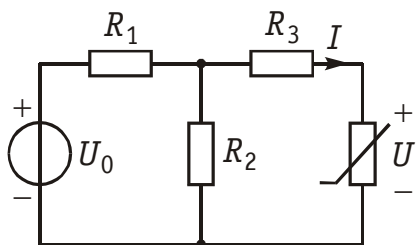


Рис. 10.42

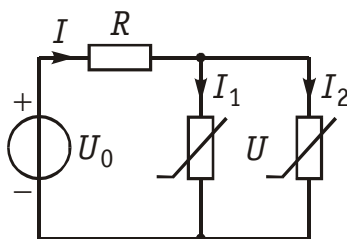


Рис. 10.43

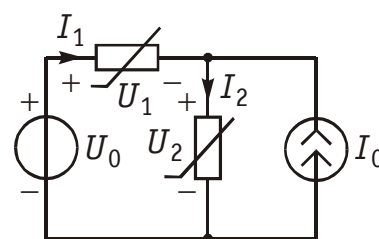


Рис. 10.44

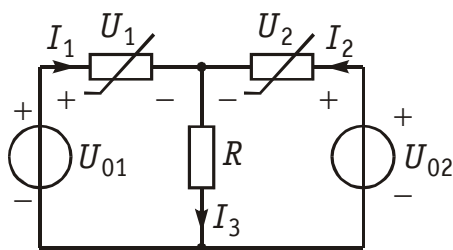


Рис. 10.45

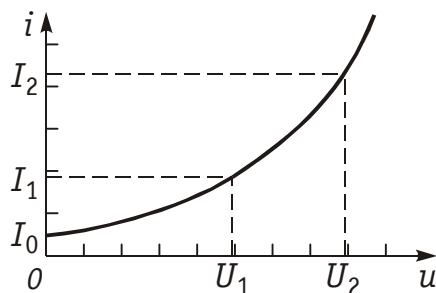


Рис. 10.46

Ответ: $a_0 = i_0$; $a_1 = \left[-I_0 (U_2^2 - U_1^2) + I_1 U_2^2 - I_2 U_1^2 \right] D$;
 $a_2 = \left[I_0 (U_2 - U_1) - I_1 U_2 - I_2 U_1 \right] D$;
 $D = \left[U_1 U_2 (U_2 - U_1) \right]^{-1}$.

22. Заданную в виде таблицы (U_k, I_k) ВАХ нелинейного резистивного элемента аппроксимируйте линейной функцией $i = a_1 u$.

U_k	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
I_k	0	0.26	0.54	0.72	0.93	1.1	1.18	1.28	1.36

Коэффициент a_1 определить методом наименьших квадратов.

Ответ: $i = 1,94u$.

23. Падающий участок ВАХ нелинейного резистивного элемента $i = F(u)$ задан таблицей:

U_k	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4
I_k	9.0	6.75	4.6	3.0	2.0

Аппроксимируйте характеристику на отрезке $[0.2; 0.4]$ линейной функцией $i = a_0 + a_1 u$ методом наименьших квадратов.

Ответ: $i = -35,3 + 15,7u$.

ГЛАВА 11. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

11.1. Нахождение реакции нелинейной резистивной цепи на заданное воздействие

Для нахождения реакции нелинейной электрической цепи с нелинейным двухполюсником или четырехполюсником на заданное воздействие можно использовать графические построения. Статические характеристики нелинейного прибора, т. е. зависимость между воздействием и реакцией на его внешних зажимах для режима

постоянного тока, считаются известными. Ими могут быть, например, вольт-амперная характеристика нелинейного резистора, или зависимость между постоянными напряжениями на входе и выходе нелинейного четырехполюсника и др. Эти характеристики находятся, как правило, в результате измерений и представляются в виде графических зависимостей, что и оправдывает использование графических методов решения рассматриваемой задачи.

В основе метода лежит предположение о том, что в любой момент времени реакция нелинейного прибора на подведенное к нему воздействие будет такой же, как и его реакция на постоянное воздействие той же величины. Иными словами, предполагается, что модель анализируемой цепи является моделью резистивной электрической цепи. Ниже на примере рассматривается методика графического нахождения реакции нелинейного прибора с однозначной характеристикой нелинейности.

Рассмотрим зависимость постоянного напряжения U_2 на выходе нелинейного четырехполюсника от постоянного напряжения U_1 , подведенного к его входу. Ее график $U_2 = U_2(U_1)$ показан на рис. 11.1. На этом же рисунке, приведен график воздействия $u_1(t)$. Он повернут на угол $\pi/2$ по часовой стрелке по сравнению с общепринятым графическим изображением функции времени. Воздействие в примере тождественно равно нулю вне интервала $0 < t < T$, внутри которого оно описывается функцией $u_1(t) = U_m \sin(2\pi t/T)$.

В момент времени $t = t_1$ ко входу нелинейного прибора, как это следует из рис. 11.1, подводится напряжение $u_1(t)$, т. е. при $t = t_1$: $U_1 = u_1(t_1)$. Напряжение на его выходе, которое находится по графику $U_2(U_1)$, т. е. напряжение U_2 при $U_1 = u_1(t_1)$ и будет напряжением реакции $u_2(t_1)$ нелинейного прибора в момент времени

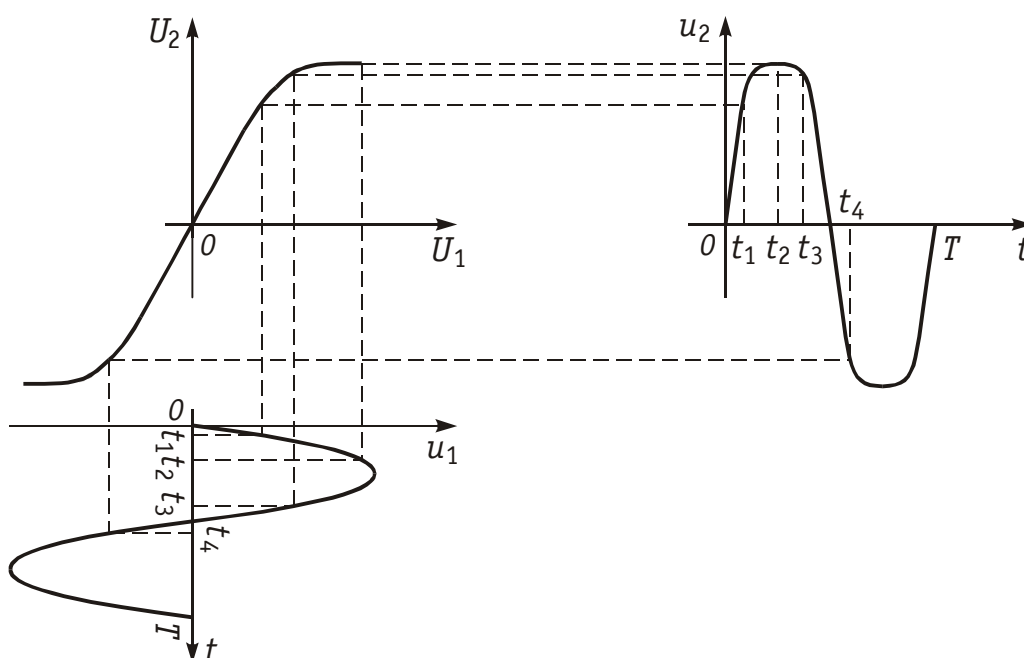


Рис. 11.1

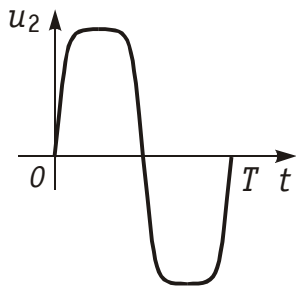


Рис. 11.2

t_1 . Значение реакции отложено на графике $u_2(t)$, приведенном на том же рисунке. Отсчетные значения $u_1(t_1)$ и $u_2(t_1)$ соединены на рис. 11.1 штриховой линией. Аналогичные построения приведены на рисунке и для трех других моментов времени $t = t_2, t = t_3, t = t_4$. В результате подобных построений и находится график реакции $u_2(t)$.

Сопоставление графиков воздействия $u_1(t)$ и реакции $u_2(t)$, приведенных на рис. 11.1, показывает, что они отличаются друг от друга формой. Следовательно, в рассматриваемой нелинейной электрической цепи произошло искажение формы реакции по сравнению с формой воздействия, обусловленное нелинейностью характеристики используемого нелинейного прибора. Из тех же графиков следует, что указанные искажения уменьшаются с уменьшением амплитуды воздействия и для любого t при условии $|u_1(t)| < u_1(t_1)$, зависимость реакции от воздействия будет близка к линейной. Итак, анализируемую цепь в ряде случаев можно рассматривать как линейную электрическую цепь и с тем большим основанием, чем меньше амплитуда воздействия. Наоборот, с увеличением амплитуды воздействия заметнее отличия формы реакции от формы воздействия. В частности, значение реакции $u_2(t)$ по абсолютной величине практически не зависит от воздействия, если (см. рис. 11.1) $|u_1(t)| > u_1(t_2)$, а при $|u_1(t)| \gg u_1(t_2)$ реакция принимает вид двух трапецеидальных импульсов различной полярности. Ее график показан на рис. 11.2.

Искажение формы реакции относительно формы воздействия свойственно электрическим цепям и с другими характеристиками нелинейности, отличающимися от рассмотренных в примере, в том числе и многозначными. Вместе с тем в рассматриваемых резистивных нелинейных цепях не искажается форма воздействия в виде импульса прямоугольной формы, график которого приведен на рис. 11.3. Здесь нелинейность проявляется в отсутствии прямой пропорциональности между амплитудами реакции и воздействия, а при больших амплитудах воздействия — в независимости их друг от друга.

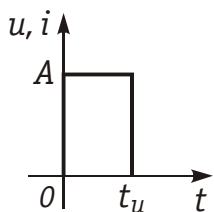


Рис. 11.3

Естественно, что если характеристика нелинейности задана аналитически, то реакция нелинейного прибора на заданное воздействие может быть найдена и в результате численного решения нелинейного уравнения, связывающего мгновенные значения реакции и воздействия в выбранной совокупности дискретных моментов времени.

11.2. Режим малых колебаний в нелинейных электрических цепях

Линейные функциональные узлы современной радиоэлектронной аппаратуры, в частности, усилители самого разнообразного назначения, содержат то или иное число, часто весьма значительное, транзисторов, операционных усилителей и других полупроводниковых или электронных приборов. Между тем характеристики перечисленных приборов в широком интервале изменения воздействий относятся к числу нелинейных.

Убедимся в принципиальной возможности построения цепей (двухполюсников, четырехполюсников, многополюсников) с линейными (близкими к линейным) характеристиками, хотя в их составе имеются приборы с нелинейными характеристиками.

Рассматриваемые активные цепи с полупроводниковыми или электронными приборами содержат источники постоянного напряжения, необходимые для «питания» этих приборов. При отсутствии других воздействий в цепи устанавливается режим постоянного тока. В рассматриваемых цепях рабочие точки (см. § 10.2 и § 10.3) располагаются на тех участках характеристик, в пределах которых последние могут считаться линейными. На рис. 11.4 это точка с координатами U_0, I_0 . Такие участки всегда можно выделить на характеристиках приборов.

Выбор рабочей точки в каждом из используемых нелинейных приборов определяет и рабочие участки характеристик этих приборов. Здесь под рабочим участком нелинейной характеристики понимается тот ее участок, включающий рабочую точку, в пределах которого характеристика может быть аппроксимирована одной прямой. Обычно рабочая точка располагается в середине рабочего участка характеристики.

Пусть, далее, к цепи подведено воздействие $u_0(t)$, изменяющееся по любому закону, такое, при котором напряжения (токи) в нелинейных устройствах цепи не выходят за пределы их рабочих участков. Реакция цепи на рассматриваемое воздействие выражается в изменениях (приращениях x) напряжений и токов в устройствах цепи по сравнению с их значениями в режиме постоянного тока.

Приращения напряжений $\Delta u_k(t)$ и токов $\Delta i_k(t)$ в k -й ветви цепи ($k=1, 2, \dots, n$) связаны между собой линейными соотношениями в силу линейности используемых рабочих участков характеристик нелинейных приборов и, следовательно, по отношению к указанным приращениям цепь может рассматриваться как линей-

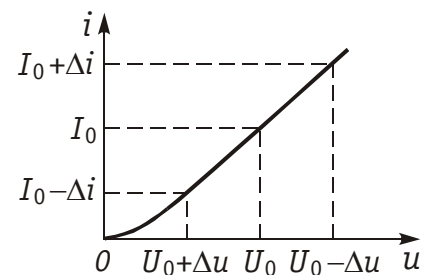


Рис. 11.4

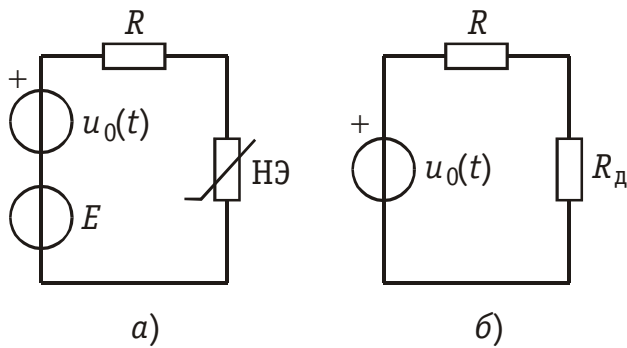


Рис. 11.5

относительно их начальных значений, обусловленные приложенным к цепи внешним напряжением (током), называются просто напряжениями и токами и обозначают их соответствующими строчными буквами $u_k(t)$, $i_k(t)$.

Рассмотрим простейший пример. На рис. 11.5, а приведена схема цепи, содержащей нелинейный резистивный элемент, источник постоянного напряжения E , линейный резистор с сопротивлением R и источник с задающим напряжением $u_0(t)$. Рабочая точка нелинейного резистора находится так, как это изложено в § 10.2. Приращения напряжения Δu и тока Δi на внешних зажимах нелинейного резистора связаны соотношением $\Delta i = G_d \Delta u$, если вольт-амперная характеристика нелинейного резистора может считаться линейной в окрестности его рабочей точки. Действительно, при этом условии отношение $\Delta i / \Delta u$ не отличается от его предела при $\Delta u \Rightarrow 0$, т. е. от дифференциальной проводимости нелинейного резистора в его рабочей точке. Поэтому последний можно заменить в схеме замещения анализируемой цепи линейным резистором с проводимостью G_d . В соответствии с этим на рис. 11.57, б изображена схема линейной электрической цепи, пригодная для нахождения реакции исходной цепи на воздействие $u_0(t)$.

Линейность характеристик цепей с нелинейными полупроводниковыми и электронными приборами может быть существенно повышена за счет применения ряда схемных решений (отрицательная обратная связь, двухтактное включение нелинейных приборов и др.).

Нелинейные электрические цепи, у которых при ограниченных по величине воздействиях реакции являются линейными функциями воздействия, часто называют *нелинейными электрическими цепями в режиме малых колебаний*. Малыми они называются потому, что по абсолютной величине не могут выходить за пределы линейных участков вольт-амперных характеристик используемых нелинейных приборов. Термин этот условен, поскольку для решения задач техники радиосвязи используются нелинейные цепи в режиме малых колебаний с мощностями сигналов в десятки и сотни киловатт.

Постоянные же напряжения и токи обуславливают необходимый режим работы нелинейных приборов, их рабочие точки. В связи с этим на схемах замещения нелинейных цепей, используемых как линейные, цепи постоянного тока не изображаются, а приращения напряжений и токов

Хорошим примером использования прибора с нелинейной вольт-амперной характеристикой для линейного усиления сигналов в режиме малых колебаний может служить усилитель на туннельном диоде. ВАХ последнего была приведена на рис. 10.1.

Идеализированная схема замещения усилителя, рассматриваемого как резистивная электрическая цепь, изображена на рис. 11.6. На ней показаны источник усиливаемого сигнала с задающим током $i_0(t)$ и внутренней проводимостью G , проводимость нагрузки G_n и туннельный диод. Рабочая точка диода выбирается на ниспадающем участке его вольт-амперной характеристики (см. рис. 10.1, в), для чего в усилителе имеются цепи питания диода от источника постоянного напряжения, не показанные на схеме.

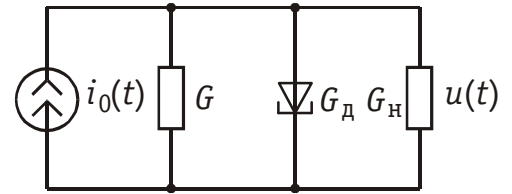


Рис. 11.6

Пусть напряжение сигнала на зажимах диода не будет выходить за пределы линейного участка его вольт-амперной характеристики в окрестности рабочей точки. Дифференциальная проводимость G_d диода в его рабочей точке отрицательна и при сделанных допущениях может считаться постоянной, т. е. $G_d < 0$ и $G_d = \text{const}$. При этом напряжение сигнала, развиваемое на зажимах нагрузки

$$u(t) = \frac{i_0(t)}{G + G_n + G_d}$$

будет, во-первых, линейно связано с задающим током $i_0(t)$ источника сигналов, и, во-вторых, при $G_d < 0$ превышать то, которое было бы в отсутствии диода, т. е. при $G_d = 0$.

Возрастает и мгновенная мощность сигнала в нагрузке $p(t) = i_0^2(t) G_n / (G + G_n + G_d)^2$. Оба последних соотношения и свидетельствуют о линейном усилении сигнала в рассматриваемой цепи. Естественно, что эффект усиления обусловлен введением в цепь энергии от источника питания туннельного диода. Последний лишь управляет расходом энергии источника питания в точном соответствии с изменением сигнала во времени. Усилители на туннельных диодах применяются в технике сверхвысоких частот.

11.3. Воздействие гармонического колебания на нелинейный резистивный элемент

Постановка задачи анализа. Пусть к нелинейному резистивному элементу подведено гармоническое колебание $U_m \cos(\omega t + \varphi)$ и постоянное напряжение смещения U_0 , т. е. пусть $u = U_0 + U_m \cos(\omega t + \varphi)$. Ток в элементе может быть найден по вольт-амперной характеристике элемента $i = F(u)$ и является функцией времени $i(t)$.

График тока $i(t)$ может быть найден с помощью простейших построений, которые иллюстрируются на рис. 11.7. Данные этого рисунка показывают, что реакция $i(t)$ и воздействие $u(t)$ могут существенно отличаться по форме.

Искажения формы сигнала, обусловленные нелинейностью характеристик электрической цепи, называются *нелинейными искажениями*.

При воздействии $u = U_0 + U_m \cos(\omega t + \varphi)$, подведенном к нелинейному элементу, ток $i(t)$ в элементе будет периодической функцией времени, которая может быть представлена рядом Фурье в форме (5.9)*:

$$i(t) = \Delta I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \cos(k\omega t + k\varphi). \quad (11.1)$$

Следовательно, ток в нелинейном элементе содержит постоянную составляющую ΔI_0 , гармоническое колебание с частотой ω и начальной фазой φ воздействия и гармонические колебания с частотами, кратными частоте воздействия (гармоники колебания). Начальные фазы гармоник кратны начальной фазе воздействия.

Появление гармоник в составе тока в элементе обусловлено нелинейностью его вольт-амперной характеристики, в связи с чем их часто называют продуктами нелинейности.

В соответствии с изложенным спектр амплитуд тока в нелинейном элементе при гармоническом воздействии на элемент является

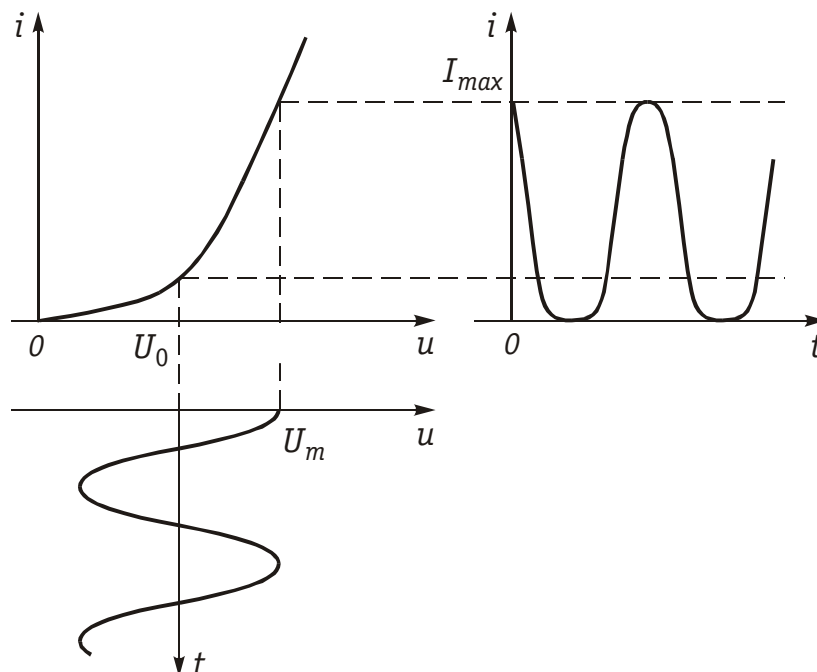


Рис. 11.7

* Поскольку исходное напряжение $u(t)$ — четная функция, в выражении (11.1) ряд синусов будет отсутствовать.

дискретным. Такими же будут спектры напряжений и токов в тех ветвях цепи, которые не подсоединены непосредственно к источнику гармонического воздействия.

В устройствах, используемых в режиме малого сигнала, нелинейные искажения носят паразитный характер и строго нормируются. Для их оценки обычно используется *коэффициент нелинейности*

$$k = \frac{\sqrt{U_{m1}^2 + U_{m2}^2 + \dots}}{U_{m1}}, \quad (11.2)$$

где U_{m1} — амплитуда колебания основной частоты (частоты воздействия), а U_{m2} , U_{m3} , ... — амплитуды гармоник напряжения на выходных зажимах устройства. Так, в высококачественных системах звуковоспроизведения коэффициент нелинейности не превышает долей одного процента.

Ниже рассматриваются аналитические методы вычисления спектров амплитуд колебаний в нелинейных резистивных электрических цепях для различных функций, аппроксимирующих вольт-амперную характеристику нелинейного элемента.

Спектр реакции при полиномиальной характеристике нелинейного элемента. Пусть в окрестности рабочей точки (U_0, I_0) вольт-амперная характеристика нелинейного элемента описывается полиномом степени n :

$$i = I_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2 + \dots + a_n(u - U_0)^n. \quad (11.3)$$

При гармоническом воздействии, когда $u = U_0 + U_m \cos(\omega t + \varphi)$,

$$i(t) = a_1 U_m \cos(\omega t + \varphi) + a_2 U_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \dots + a_n U_m^n \cos^n(\omega t + \varphi).$$

Для нахождения спектра амплитуд реакции тока $i(t)$ в нелинейном элементе удобно вместо общего метода разложения периодической функции $i(t)$ в ряд Фурье воспользоваться выражениями степеней функции $\cos^k \alpha$ через функции кратных дуг, согласно которым:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + 1); \\ \cos^3 \alpha &= \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha); \\ \cos^4 \alpha &= \frac{1}{8}(\cos 4\alpha + 4 \cos 2\alpha + 3); \\ \cos^5 \alpha &= \frac{1}{16}(\cos 5\alpha + 5 \cos 3\alpha + 10 \cos \alpha); \\ &\dots \end{aligned}$$

Тогда, полагая $\alpha = \omega t + \varphi$ и осуществляя группировку коэффициентов при функциях одинаковых аргументов, преобразуем выражение для $i(t)$ к виду

$$i(t) = \Delta I_0 + I_{m1} \cos(\omega t + \varphi) + I_{m2} \cos 2(\omega t + \varphi) + \dots + I_{mn} \cos n(\omega t + \varphi),$$

где:

$$\Delta I_0 = \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{3}{8} a_4 U_m^4 + \dots,$$

$$I_{m1} = a_1 U_m + \frac{3}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{8} a_5 U_m^5 + \dots,$$

$$I_{m2} = \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{1}{2} a_4 U_m^4 + \dots,$$

$$I_{m3} = \frac{1}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{16} a_5 U_m^5 + \dots,$$

$$I_{m4} = \frac{1}{8} a_4 U_m^4 + \dots,$$

$$I_{m5} = \frac{1}{16} a_5 U_m^5 + \dots$$

Анализ полученных выражений показывает, что при полиномиальной вольт-амперной характеристике нелинейного элемента и гармоническом воздействии на НЭ:

1. Число гармонических составляющих реакции (гармоник) конечно и равно степени полинома, поскольку при $n > 2$:

$$\cos^k \alpha = \frac{1}{2^{k-1}} [\cos k\alpha + k \cos(k-2)\alpha + \dots].$$

2. Амплитуда I_{m1} первой гармоники колебания при $n > 2$ в общем случае нелинейно зависит от амплитуды U_m приложенного воздействия.
3. Амплитуды четных (нечетных) гармоник определяются только коэффициентами при четных (нечетных) степенях слагаемых полинома.
4. Изменяется на величину ΔI_0 постоянная составляющая тока.

Спектр реакции при линейно-ломаной характеристике нелинейного элемента. Пусть на одном из участков ВАХ нелинейного элемента монотонно возрастает по закону, близкому к линейному, а на другом, когда элемент «заперт», может считаться равной нулю. Пусть, далее, между ними расположен небольшой по сравнению с первым участок, в котором одна из указанных характеристик переходит в другую. Примером может служить усредненная анодно-сеточная характеристика мощного пентода, приведенная на рис. 11.8, где i_A — анодный ток; $u_{СК}$ — напряжение между сеткой и катодом. Пусть, наконец, мгновенные значения напряжения на выходе нели-

нейного элемента изменяются в пределах всех трех участков его характеристики.

При сформулированных условиях рассматриваемую нелинейную характеристику можно и целесообразно аппроксимировать линейно-ломаной зависимостью, изображенной на рис. 10.32, б. Напряжение «излома» этой зависимости $U_{отс}$ находится обычно как точка пересечения обоих линейных участков характеристики. Так, на рис. 11.8 $U_{отс} = -120$ В.

Решим задачу спектрального анализа колебаний в нелинейном элементе с рассматриваемой линейно-ломаной вольт-амперной характеристикой, если ко входу элемента подведено напряжение $U_0 + U_m \cos \omega t$. Закон изменения тока в элементе может быть, как и ранее, найден с помощью графических построений. Они приведены на рис. 11.9 и показывают, что искомый ток представляет собой периодическую последовательность импульсов, отличающихся от нуля в интервалах $2k\pi - \theta < \omega t < 2k\pi + \theta$ ($k = 0, \pm 1; \pm 2; \dots$). Форма одиночного импульса в интервале $-\pi \leq \omega t \leq \pi$ описывается в обозначениях рис. 11.9, как легко убедиться, функцией

$$i(t) = \begin{cases} I_{max} \frac{\cos \omega t - \cos \theta}{1 - \cos \theta} & \text{при } -\theta \leq \omega t \leq \theta, \\ 0 & \text{при } -\pi \leq \omega t \leq -\theta \text{ и при } \theta \leq \omega t \leq \pi. \end{cases}$$

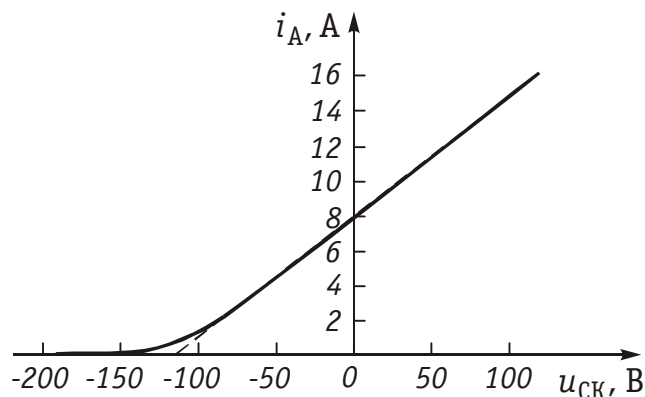


Рис. 11.8

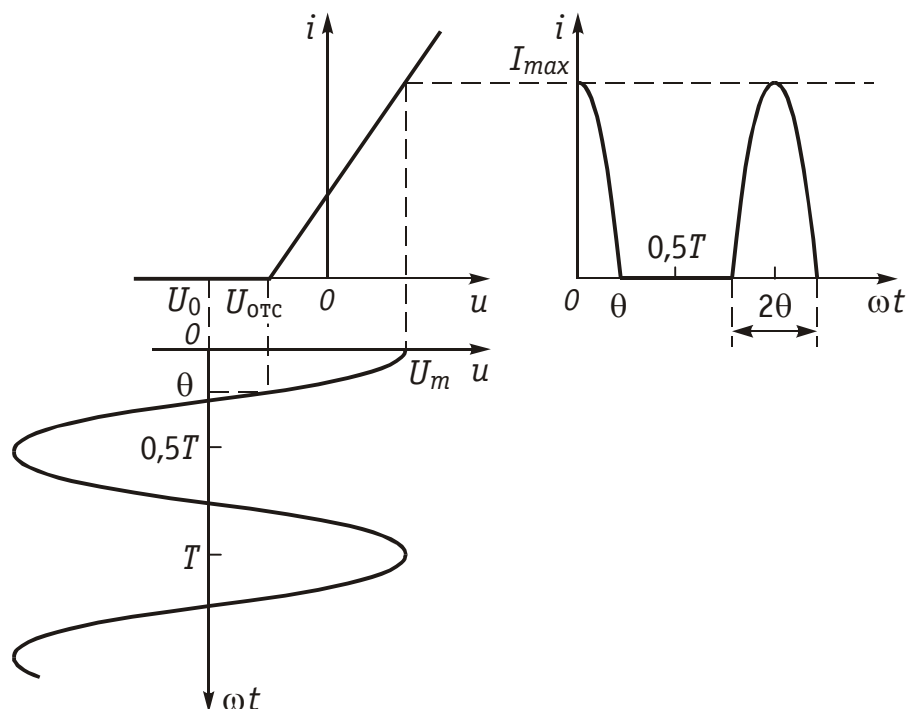


Рис. 11.9

Действительно, при $\omega t = 0$ ток $i(0) = I_{max}$, при $\omega t = \pm\theta$ $i(t) = 0$, а в интервале $-\theta \leq \omega t \leq \theta$ функция $i(t)$ изменяется как ограниченная снизу (отсеченная) косинусоида.

Угол θ называется *углом отсечки*. При гармоническом воздействии $U = U_0 + U_m \cos \omega t$ угол отсечки определяет в интервале $-\pi \leq \omega t \leq \pi$ нижнюю ($\omega t = -\theta$) и верхнюю ($\omega t = \theta$) границы временного интервала, в котором ток в элементе отличен от нуля. Поскольку на границах интервала $U_0 + U_m \cos \theta = U_{отс}$ (см. рис. 11.9), то

$$\cos \theta = \frac{U_{отс} - U_0}{U_m}. \quad (11.4)$$

Пределы изменения угла отсечки заключены между $\theta = 0$, когда нелинейный элемент заперт, и $\theta = \pi$ ($\theta = 180^\circ$), когда ограничение снизу отсутствует, т. е. когда элемент используется в линейном режиме.

Для нахождения спектра амплитуд рассматриваемой периодической последовательности разложим ее в ряд Фурье. Тогда, опуская промежуточные выкладки, находим следующие выражения:

для постоянной составляющей тока

$$\Delta I_0 = \frac{I_0}{2} \int_{-\theta}^{\theta} I_{max} \frac{\cos \omega t - \cos \theta}{1 - \cos \theta} d(\omega t) = I_{max} \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{\pi(1 - \cos \theta)}; \quad (11.5, a)$$

для амплитуды первой (основной) гармоники

$$I_{m1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} I(t) \cos \omega t d(\omega t) = I_{max} \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{\pi(1 - \cos \theta)}; \quad (11.5, б)$$

для второй гармоники

$$I_{m2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} I(t) \cos 2\omega t d(\omega t) = I_{max} \frac{(1 - \cos 2\theta) \sin \theta}{3\pi(1 - \cos \theta)}. \quad (11.5, в)$$

Эти выражения можно было бы получить как частные случаи существующей общей формулы для амплитуды k -й гармоники

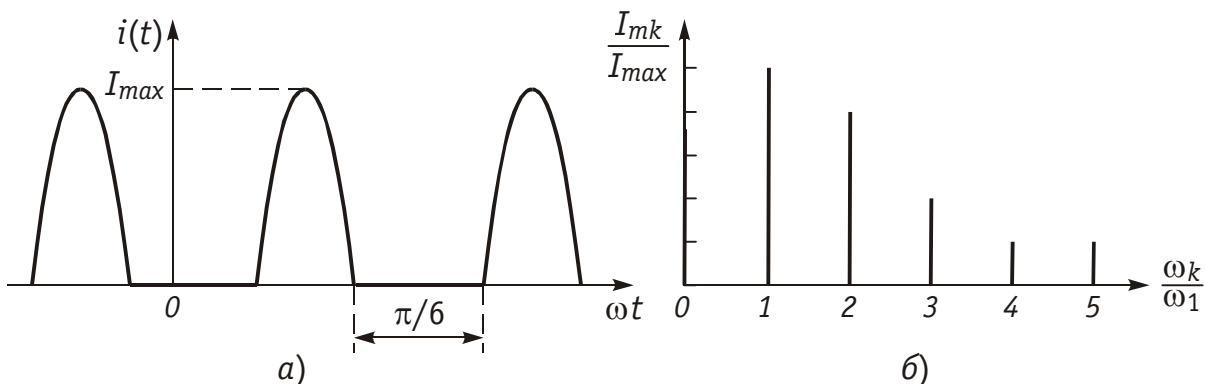


Рис. 11.10

$$I_{mk} = 2I_{max} \frac{\sin k\theta \cos \theta - k \cos k\theta \sin \theta}{\pi k (k^2 - 1)(1 - \cos \theta)}. \quad (11.6)$$

На рис. 11.10 приведены графики тока и спектра амплитуд тока, соответствующие углу отсечки $\theta = \pi/3$.

Постоянная составляющая и амплитуды гармоник тока в элементе являются функциями угла отсечки. Обычно они выражаются в относительных единицах

$$\alpha_k = \alpha_k(\theta) = \frac{I_{mk}}{I_{max}} \quad (11.7)$$

и называются *коэффициентами А.И. Берга*. Их графики приведены на рис. 11.11 для $k \leq 3$.

Анализ установленных соотношений показывает, что при линейно-ломаной характеристике нелинейного элемента и гармоническом воздействии на него:

1. Число гармонических составляющих реакции бесконечно велико, хотя амплитуды некоторых из них при определенных значениях угла отсечки могут быть равны нулю.
2. В общем случае амплитуды гармоник нелинейно зависят от амплитуды гармонического воздействия в силу нелинейного характера зависимости угла отсечки от U_m .
3. В частном случае, когда рабочая точка U_0 совмещена с точкой излома характеристики $U_{отс}$, т. е. когда угол отсечки равен $\pi/2$, амплитуды гармоник оказываются прямо пропорциональными амплитуде U_m гармонического воздействия, поскольку при этом условии величина I_{max} прямо пропорциональна U_m , а угол отсечки согласно (11.4) не изменяется с изменением U_m .

Выражение (11.6) является достаточно громоздким для выполнения вычислений. Из (11.7) следует, что

$$I_{mk} = I_{max} \cdot \alpha_k.$$

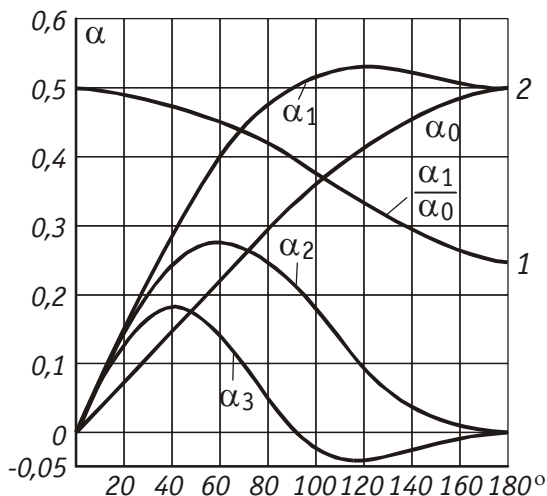


Рис. 11.11

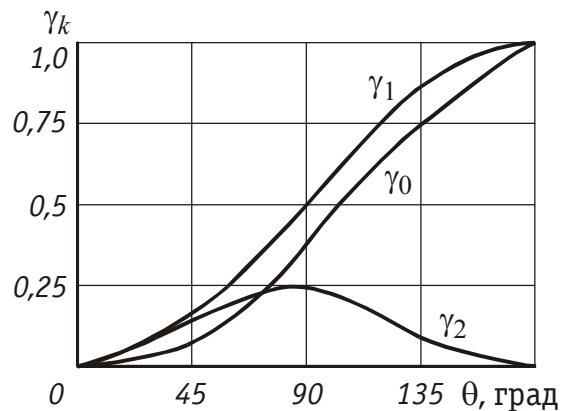


Рис. 11.12

Выражая величину I_{max} через амплитуду U_m напряжения на НЭ, крутизну S вольт-амперной характеристики и угол отсечки θ

$$I_{max} = SU_m (1 - \cos \theta),$$

получим более компактную формулу для расчета амплитуд гармоник тока:

$$I_{mk} = SU_m (1 - \cos \theta) \alpha_k(\theta) = SU_m \gamma_k(\theta), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (11.8)$$

где $\gamma_k(\theta) = \alpha_k(\theta)(1 - \cos \theta)$ — функции Берга.

Графики нескольких таких функций представлены на рис. 11.12.

Пример. Считая, что диод обладает идеализированной характеристикой, определить U_0 , при котором в спектре напряжения $U_R(t)$ отсутствует 3-я гармоника, если $u_0(t) = 2 \cos \omega t$ (рис. 11.13, а).

Напряжение на сопротивлении R создают гармоники тока. Выражение для амплитуды k -той гармоники тока при кусочно-линейной аппроксимации НЭ имеет вид (11.6):

$$I_{mk} = 2I_{max} \frac{\sin k\theta \cos \theta - k \cos k\theta \sin \theta}{\pi k(k^2 - 1)(1 - \cos \theta)}.$$

Приравнявая в этом выражении амплитуду 3-й гармоники нулю $I_{m3} = 0$, получим

$$\sin 3\theta \cos \theta - 3 \sin \theta \cos 3\theta = 0. \quad (11.9)$$

Учитывая, что

$$\sin 3\theta \cos \theta = \frac{1}{2} [\sin 2\theta + \sin 4\theta],$$

$$\sin \theta \cos 3\theta = \frac{1}{2} [-\sin 2\theta + \sin 4\theta],$$

перепишем (11.9) в виде

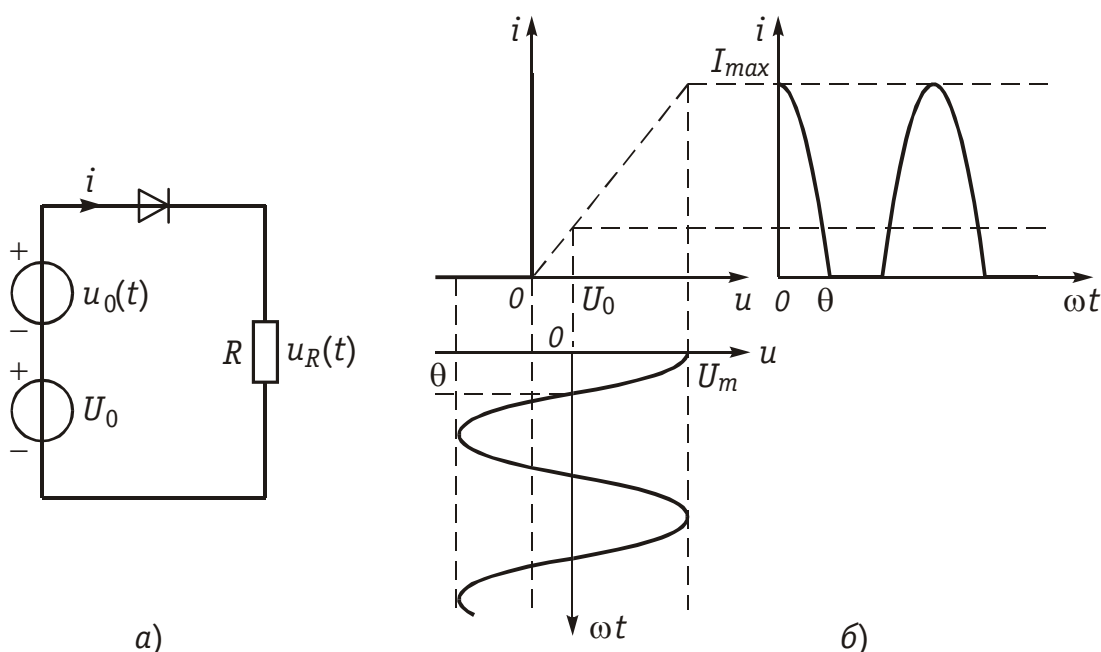


Рис. 11.13

$$\begin{aligned}\sin 2\theta + \sin 4\theta &= -3 \sin 2\theta + 3 \sin 4\theta \\ 2 \sin 2\theta &= \sin 4\theta.\end{aligned}$$

Учитывая, что $\sin 4\theta = 2 \sin 2\theta \cos 2\theta$, получим

$$\begin{aligned}2 \sin 2\theta &= 2 \sin 2\theta \cos 2\theta; \\ \cos 2\theta &= 1; \quad 2\theta = 2\pi; \quad \theta = \pi,\end{aligned}$$

что выполняется при $U_0 = U_m = 2 \text{ В}$ (рис. 11.13, б).

11.4. Резонансное усиление и умножение частоты колебаний

Резонансное усиление в режиме малого сигнала. В радиопередающих и радиоприемных устройствах широко используются для усиления *узкополосных сигналов** так называемые резонансные усилители, ламповые и транзисторные. У таких усилителей в качестве нагрузки анода (коллектора, стока) используется параллельный колебательный контур.

Упрощенная схема лампового резонансного усилителя приведена на рис. 11.14, а, а его схема замещения для режима малого сигнала — на рис. 11.14, б. На этих рисунках E_c и E_a — постоянные напряжения сеточного и анодного источников питания.

Частотная зависимость комплексного коэффициента усиления усилителя $H(j\omega) = \underline{U}_{\text{ВЫХ}} / \underline{U}_{\text{ВХ}}$ прямо пропорциональна характеристике контура $Z(j\omega)$, поскольку в обозначениях рис. 11.14 $\underline{I} = -S \underline{U}_{\text{ВХ}}$, $\underline{U}_{\text{ВЫХ}} = \underline{I} Z(j\omega) = -S Z(j\omega) \underline{U}_{\text{ВХ}}$ и, следовательно,

$$H(j\omega) = \frac{\underline{U}_{\text{ВЫХ}}}{\underline{U}_{\text{ВХ}}} = -S Z(j\omega) = -\frac{S}{G \left[1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]}, \quad (11.10)$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — резонансная частота контура и $Q = \omega_0 C/G$ его добротность.

График типовой амплитудно-частотной характеристики усилителя приведен на рис. 11.15.

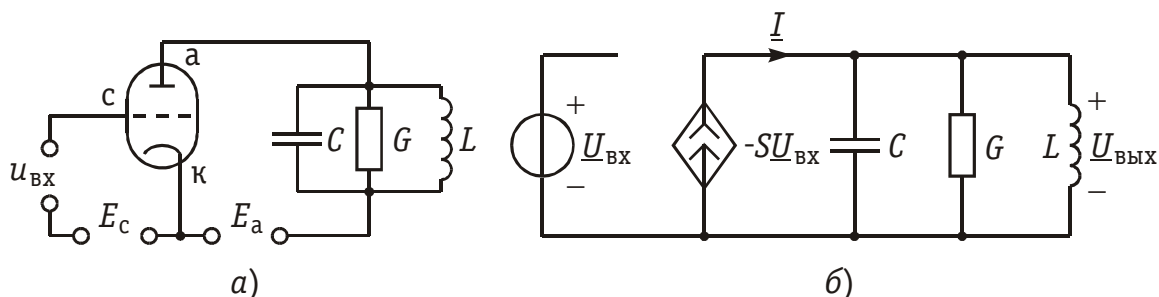


Рис. 11.14

* Узкополосным называется сигнал, спектр которого можно считать ограниченным полосой $\omega_{-1} \leq \omega \leq \omega_1$ при условии $(\omega_1 - \omega_{-1})/(\omega_1 + \omega_{-1}) \ll 1$.

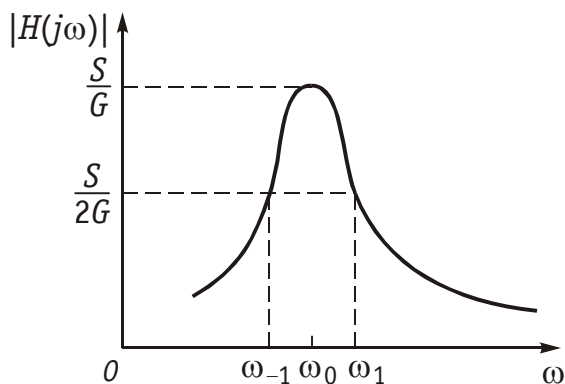


Рис. 11.15

Резонансная частота колебательного контура принимается равной средней частоте усиливаемого узкополосного сигнала, чем достигается его избирательное усиление и подавление помех, если их спектры по частоте достаточно удалены от резонансной частоты контура. Ширина же полосы пропускания контура $\omega_1 - \omega_{-1} = \omega_0/Q$ выбирается в ре-

зультате компромисса между требованиями к селективности амплитудно-частотной характеристики контура и допустимыми искажениями спектра усиливаемого сигнала.

Резонансные усилители в режиме малого сигнала находят широкое применение в радиоприемных устройствах, где мощности усиливаемых узкополосных сигналов невелики, поэтому малы, как мощности, потребляемые усилителем от источников питания, так и их роль в формировании общей мощности, расходуемой радиоприемным устройством.

Резонансное усиление в режиме большого сигнала. Для увеличения амплитуды и мощности усиленного сигнала в качестве рабочего используется также и нелинейный участок характеристики усилительного прибора резонансного усилителя, что достигается увеличением амплитуды входного воздействия и выбором соответствующей рабочей точки. Иными словами, усилитель используется в режиме большого сигнала.

В силу нелинейности рабочего участка вольт-амперной характеристики используемого электронного прибора в составе его тока появляются помимо колебания с частотой воздействия, т. е. первой (основной) гармоники, высшие гармоники колебания: вторая и последующие. Если частота воздействия совпадает с резонансной частотой колебательного контура (близка к ней), то амплитуды напряжений, создаваемых на зажимах контура высшими гармониками колебания, могут считаться пренебрежимо малыми по сравнению с амплитудой напряжения первой гармоники, поскольку модуль сопротивления контура на частоте k -й гармоники меньше резонансного сопротивления контура $G_{\text{оэ}}^{-1}$ в число раз, равное

$$\frac{1}{G_{\text{оэ}} |Z(jk\omega_0)|} = \sqrt{1 + Q^2 (k - 1/k)^2} \cong Q(k - 1/k).$$

Так, при $Q = 100$ и $k = 2$: $|Z(j2\omega_0)| \cong |Z(j\omega_0)|/150$. К тому же амплитуды высших гармоник тока обычно меньше амплитуды его первой гармоники.

Итак, можно считать, что в установившемся режиме гармоническому напряжению на входе резонансного усилителя, работающего в режиме большого сигнала, соответствует гармоническое же выходное напряжение. Естественно, что это заключение справедливо для гармонических воздействий, частоты которых находятся в пределах рабочей полосы частот усилителя, т. е. близки к резонансной частоте контура.

При анализе процессов в резонансном усилителе, например, ламповом, пренебрежем влиянием анодного напряжения на анодный ток лампы и будем считать, что анодно-сеточная характеристика лампы является линейно-ломаной (см. рис. 11.8).

Крутизну этой характеристики в ее линейно-возрастающей части обозначим через S . При гармоническом воздействии максимумы импульсов анодного тока лампы I_{max} связаны с амплитудой воздействия $U_{m\text{ВХ}}$ соотношением

$$I_{max} = S(1 - \cos \theta)U_{m\text{ВХ}} \quad (11.11)$$

поскольку $I_{max} = S[U_{m\text{ВХ}} - (U_{\text{отс}} - U_0)]$, а согласно (11.4) $U_1 - U_0 = U_{m\text{ВХ}} \cos \theta$.

Используя соотношения (11.11) и (11.5, б), находим следующие выражения для амплитуды I_{m1} первой гармоники тока в анодной цепи лампы и амплитуды $U_{m\text{ВЫХ}}$ с частотой воздействия на зажимах колебательного контура усилителя

$$I_{m1} = \alpha_1 I_{max} = S \frac{U_{m\text{ВХ}}}{\pi} (\theta - \sin \theta \cos \theta),$$

$$U_{m\text{ВЫХ}} = I_{m1} |Z(j\omega)| = S \frac{U_{m\text{ВХ}}}{\pi} (\theta - \sin \theta \cos \theta) |Z(j\omega)|.$$

Для того чтобы амплитуды гармонической реакции $U_{m\text{ВЫХ}}$ и гармонического воздействия $U_{m\text{ВХ}}$ линейно зависели одна от другой, в последнем выражении угол отсечки θ не должен изменяться с изменением амплитуды воздействия, что согласно (11.4) возможно при $U_0 = U_{\text{отс}}$, когда $\theta = \pi/2$. Итак, при $\theta = \pi/2$

$$U_{m\text{ВЫХ}} = \frac{1}{2} S |Z(j\omega)| U_{m\text{ВХ}}$$

и, следовательно, резонансный усилитель, работающий в режиме большого сигнала, т. е. в существенно нелинейном режиме, по отношению к его двум парам внешних зажимов может рассматриваться как линейный активный четырехполюсник — усилитель с коэффициентом усиления $H(j\omega) = 0,5S|Z(j\omega)|$.

В технике радиопередающих устройств резонансные усилители, работающие в режиме большого сигнала, используются как для усиления узкополосных сигналов, так и для усиления гармонических колебаний большей мощности. Оценим коэффициент полезно-

го действия усилителя (КПД) — отношение средней мощности $P_1 = 0,5 U_{m \text{ Вых }} \cdot I_{m1}$, развиваемой усилителем в его колебательном контуре при $\omega = \omega_0$, к мощности $P_a = E_a \Delta I_0$ потребляемой усилителем от источника анодного питания

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{I_{m1}}{\Delta I_0} \frac{U_{m \text{ Вых }}}{E_a}.$$

В этом выражении отношение $U_{m \text{ Вых }} / E_a$ может быть доведено до значения, близкого к единице, а отношение $I_{m1} / \Delta I_0$ является функцией угла отсечки. Обращаясь к формулам (11.5), имеем при $U_{m \text{ Вых }} = E_a$

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta - \theta \cos \theta}. \quad (11.12)$$

Если усилитель используется для усиления узкополосных сигналов, угол отсечки, как было показано, должен быть равен $\pi/2$, чему, согласно (11.12), соответствует $\eta = \pi/4$, а практически $\eta < \pi/4$. Следует учитывать также, что при $\theta \leq \pi/2$ усилитель не расходует энергии в паузах сигнала.

Заметим, что при работе усилителя в режиме малого сигнала, т. е. когда мгновенные значения воздействия не выходят за пределы возрастающего участка линейно-ломаной характеристики лампы (транзистора), коэффициент полезного действия $\eta < 0,5$.

При использовании резонансного усилителя в режиме большого сигнала для усиления гармонического колебания неизменной амплитуды, когда важно лишь сохранение формы воздействия, угол отсечки может отличаться от $\pi/2$. Исследование функции (11.12) показывает, что ее значения монотонно возрастают от значения $\eta = 0,5$ при $\theta = \pi$ до единицы при $\theta \rightarrow 0$. Практически малые значения угла отсечки и значения КПД усилителя, близкие к единице, не могут быть достигнуты по ряду причин. Обычно в резонансных усилителях указанного назначения $\eta = 0,85 \dots 0,9$.

Резонансное умножение частоты колебаний. Резонансный усилитель в режиме большого сигнала используется и для генерации гармонического колебания, частота которого кратна частоте гармонического воздействия. Резонансная частота колебательного контура ω_0 подобного резонансного умножителя частоты совпадает с частотой выделяемой гармоники анодного (коллекторного, стокового) тока. Она создает на зажимах контура с резонансным сопротивлением G_{o3}^{-1} гармоническое напряжение с частотой $\omega_0 = k\omega$ и амплитудой $I_{mk} G_{o3}^{-1}$. По сравнению с ней амплитуды напряжения остальных гармоник, включая и первую, должны быть пренебрежительно малы. Для этого используются контуры высокой добротности и выбирается такой угол отсечки, при котором амплитуда выделяемой гармоники тока принимает максимальное значение. Так, ам-

плитуда второй гармоники тока максимальна (см. рис. 11.10) при $\theta = 60^\circ$, третьей — при $\theta = 40^\circ$ и т. д. Максимальные значения амплитуд гармоник тока убывают с ростом порядкового номера гармоники, что ограничивает возможные области практического применения резонансных умножителей частоты. Обычно кратность умножения не выше трех.

11.5. Выпрямление гармонических колебаний

Для питания полупроводниковых и электронных приборов активных электрических цепей необходимо постоянное питающее напряжение. С этой целью используются преобразователи химической энергии в электрическую (гальванические элементы, аккумуляторы), термоэлектрические преобразователи (термоэлементы, солнечные батареи), а также выпрямители — устройства, преобразующие гармоническое напряжение в напряжение знакопостоянное с теми или иными допустимыми флуктуациями относительно его среднего значения.

Схема простейшего выпрямителя приведена на рис. 11.16. Если к этой нелинейной цепи подвести гармоническое воздействие, то спустя определенное время в ней установятся периодические колебания, которые, естественно, не будут гармоническими. Постоянная составляющая напряжения на зажимах резистивной нагрузки выпрямителя этих периодических колебаний и представляет собой выпрямленное постоянное напряжение. Гармоники же колебаний оказывают мешающее действие на работу питаемых устройств. Для снижения их уровня в рассматриваемый простейший выпрямитель введен конденсатор. Емкость конденсатора выбирается такой, чтобы его сопротивление на частотах гармоник, начиная с первой, было бы значительно меньше сопротивления нагрузки выпрямителя, т. е. чтобы $(1/\omega C) \ll R_H$ или $\omega C R_H \gg 1$. Ясно, что чем сильнее неравенство, т. е. чем больше постоянная времени $\tau = R_H C$ превышает период $T = 2\pi/\omega$ гармонического воздействия, тем меньше амплитуды гармоник напряжения на зажимах нагрузки, обусловленных гармониками тока.

При выбранных на рис. 11.16 положительных направлениях напряжений в силу однонаправленного характера проводимости диода напряжение $u_c(t)$ на зажимах нагрузки будет создаваться лишь положительными полуволнами выпрямляемого напряжения. Следовательно, и напряжение на конденсаторе всегда будет положительным.

Пусть в установившемся режиме колебаний в момент времени t_1 (см.

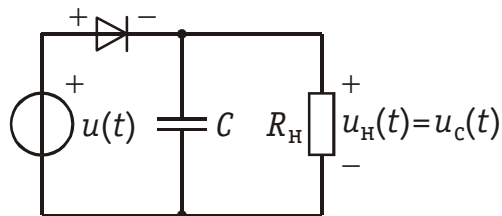


Рис. 11.16

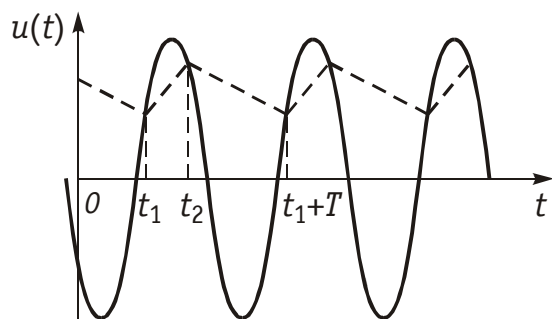


Рис. 11.17

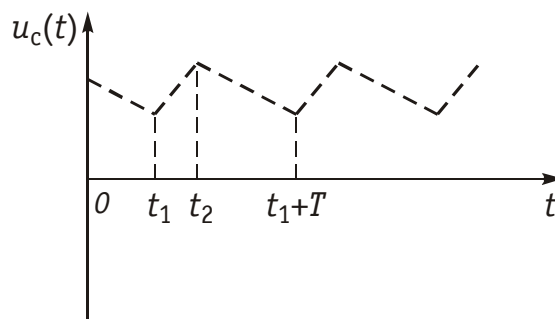


Рис. 11.18

рис. 11.17) периодически изменяющееся воздействие $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ достигает, возрастая, напряжения заряженного конденсатора $u_c(t_1)$, т. е. пусть $u(t_1) = u_c(t_1)$. С этого момента времени $u_d > 0$, диод открывается и начинается заряд (подзаряд) конденсатора. Он длится до тех пор, пока напряжение на зажимах конденсатора не сравняется в момент времени t_2 (см. рис. 11.17) с убывающим после максимума напряжением воздействия. После этого, пока $t_2 < t < t_1 + T$, диод оказывается закрытым ($u_d < 0$) и конденсатор разряжается на сопротивление R . Следовательно, в указанном интервале времени напряжение на зажимах конденсатора (нагрузки) убывает по закону

$$u_c(t) = u_c(t_2) e^{-(t-t_2)/\tau}.$$

Затем процесс периодически повторяется с периодом воздействия T . График $u_c(t)$ приведен на рис. 11.18. Среднее значение выпрямленного напряжения U_0 равно среднему значению функции $u_c(t)$, т. е.

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u_c(t) dt.$$

Разность же $u_c(t) - U_0$ определяет закон изменения во времени суммы гармоник напряжения на зажимах нагрузки выпрямителя — «пульсацию» выпрямленного напряжения. О ней можно судить по отношению наибольшего и наименьшего значений напряжения, равного

$$\frac{u_c(t_2)}{u_c(t_1 + T)} = e^{\frac{t_1+T-t_2}{\tau}} = e^{\frac{T-(t_2-t_1)}{\tau}} < e^{\frac{T}{\tau}}.$$

Так, при $\tau = 10T$ и $t_2 - t_1 = 0,25T$ это отношение не превышает 1,08, а значит наибольшие и наименьшие значения напряжения на выходе выпрямителя отличаются не более, чем на 8 %.

Величина выпрямленного напряжения существенно зависит от соотношения между параметрами генератора, диода и нагрузки. Для приближенной оценки постоянной составляющей выпрямленного напряжения положим, что вольт-амперная характеристика

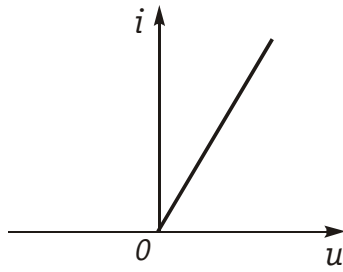


Рис. 11.19

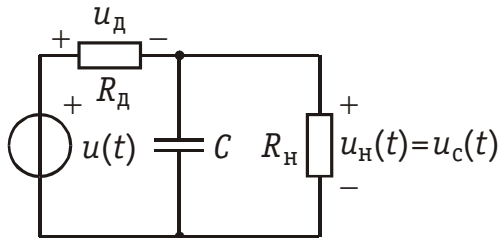


Рис. 11.20

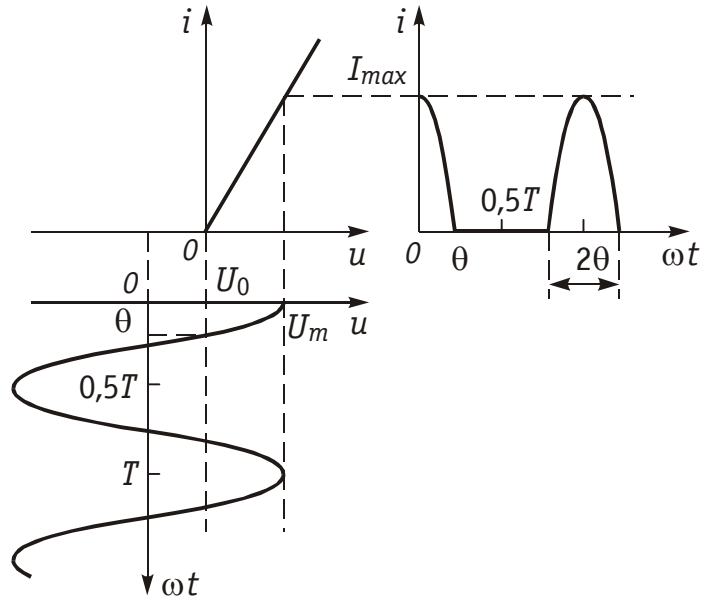


Рис. 11.21

диода имеет вид, показанный на рис. 11.19. Сопротивление диода при $u_d > 0$ с учетом резистивного внутреннего сопротивления генератора, обозначим через R_d . Положим, далее, что флуктуации напряжения относительно его постоянной составляющей U_0 пренебрежимо малы, т.е. будем считать, что $u_c(t) \cong U_0 = \text{const}$. О допустимости этого предположения, которое потребуется выполнять на практике, можно судить по приведенному выше примеру.

При указанных допущениях ток через диод в цепи, схема которой для $u_c(t) = U_0$ приведена на рис. 11.20, представляет собой периодическую последовательность импульсов, подобную показанной на рис. 11.10, а.

Графические построения, иллюстрирующие процессы в анализируемой цепи, показаны на рис. 11.21. Из них следует, что

$$U_0 = U_m \cos \theta \quad \text{и} \\ I_{max} = \frac{(U_m - U_0)}{R_d} = \left(1 - \frac{U_0}{U_m}\right) \frac{U_m}{R_d} = (1 - \cos \theta) \frac{U_m}{R_d}.$$

Этому значению максимума тока соответствует согласно (11.10, а) постоянная составляющая тока

$$\Delta I_0 = \alpha_0 I_{max} = \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{\pi R_d},$$

протекающего через диод и нагрузку.

Заменяя в этом выражении ΔI_0 на U_0/R_H и учитывая, что $U_0 = U_m \cos \theta$, находим зависимость между углом отсечки и сопротивлением диода и нагрузки:

$$R_d/R_H = (\text{tg } \theta - \theta)/\pi.$$

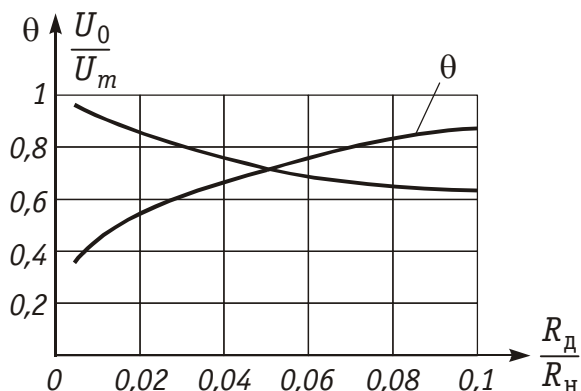


Рис. 11.22

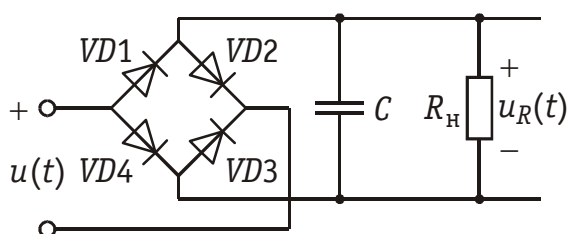


Рис. 11.23

Решив это трансцендентное уравнение, определяем неизвестный пока угол отсечки θ , как функцию отношения сопротивлений R_d/R_n , а затем и величину выпрямленного постоянного напряжения $U_0 = U_m \cos \theta$.

На рис. 11.22 приведен в относительных единицах график зависимости выпрямленного постоянного напряжения U_0/U_m от сопротивления диода R_d/R_n . Данные рисунки показывают, что при $(R_d/R_n) \ll 1$ величина постоянного напряжения близка к амплитуде выпрямляемого гармонического напряжения и убывает при прочих равных условиях с увеличением сопротивления диода. Чаще всего $(R_d/R_n) \leq 0,1$, когда $U_0 \geq 0,65U_m$, иначе КПД выпрямителя становится недопустимо малым. На том же рисунке показан график зависимости угла отсечки в радианах от того же отношения R_d/R_n . При $(R_d/R_n) < 0,1$ угол отсечки не превышает 0,87 рад, т. е. 50° , и убывает с уменьшением отношения (R_d/R_n) .

Рассмотренные простейшие выпрямители называются однополупериодными, поскольку у них при формировании выпрямленного напряжения используется энергия только одного из каждой пары полупериодов выпрямляемого гармонического напряжения, а, точнее, его части.

Схема двухполупериодного выпрямителя мостового типа изображена на рис. 11.23. Здесь за счет поочередного открытия диодов, помеченных на рисунке четными и нечетными индексами, достигается постоянство знака тока в нагрузке выпрямителя для обоих полупериодов выпрямляемого напряжения. Именно двухполупериодные выпрямители нашли преимущественное применение для выпрямления однофазного гармонического напряжения. Качественные и количественные оценки процессов в двухполупериодных выпрямителях можно получить прямым обобщением таковых в выпрямителях однополупериодных.

Для более полного подавления гармоник, если в этом возникает необходимость, в выпрямитель вводятся в дополнение к конденсатору один или два реактивных элемента, образующие фильтр нижних частот с необходимым ослаблением на частотах гармоник. За-

дача фильтрации гармоник двухполупериодного выпрямителя облегчается тем, что у него амплитуда пульсаций выпрямленного напряжения вдвое меньше, а их частота вдвое выше, чем у выпрямителя однополупериодного при прочих равных условиях. В бытовой радиоэлектронной аппаратуре вместо фильтра в дополнение к конденсатору существенное подавление гармоник осуществляет включенный на выходе выпрямителя стабилизатор напряжения — устройство для поддержания постоянства напряжения на его выходе при изменении сопротивления его нагрузки.

11.6. Ограничение мгновенных значений гармонических колебаний

Нелинейный четырехполюсник, предназначенный для ограничения мгновенных напряжений сигнала, называется *ограничителем*.

Схема простейшего ограничителя с ограничением сверху приведена на рис. 11.24, а. В ограничитель входят линейный резистор с сопротивлением R , выпрямительный диод и генератор постоянного напряжения с задающим пороговым напряжением U_{Π} . На первом этапе анализа процессов в рассматриваемом ограничителе будем считать, во-первых, что диод идеален, т. е. его сопротивление или бесконечно велико, если $u_{\text{д}} < 0$, или равно нулю, если $u_{\text{д}} > 0$, и во-вторых, что внутреннее сопротивление генератора постоянного напряжения равно нулю.

Если при указанных предположениях напряжение на зажимах диода будет отрицательным, т. е. когда $u_{\text{вх}}(t) < U_{\Pi}$, диод будет «закрыт» и напряжение на выходе ограничителя будет равно напряжению на его входе, т. е. $u_{\text{вых}}(t) = u_{\text{вх}}(t)$. Если же $u_{\text{вх}}(t) > U_{\Pi}$, диод «открывается», его сопротивление становится равным нулю. Тем самым источник постоянного напряжения подключается к выходу ограничителя и напряжение на выходе ограничителя будет равно задающему напряжению источника U_{Π} на протяжении всего времени пока $u_{\text{вх}} > U_{\Pi}$. Итак:

$$u_{\text{вых}}(t) = \begin{cases} u_{\text{вх}}(t) & \text{при } u_{\text{вх}}(t) < U_{\Pi}, \\ U_{\Pi} & \text{при } u_{\text{вх}}(t) > U_{\Pi}. \end{cases}$$

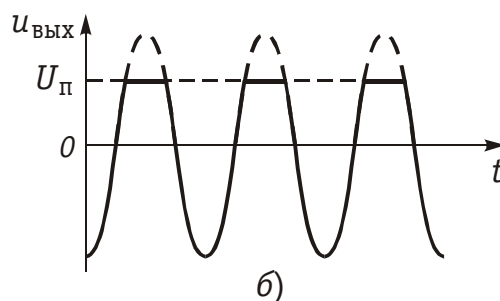
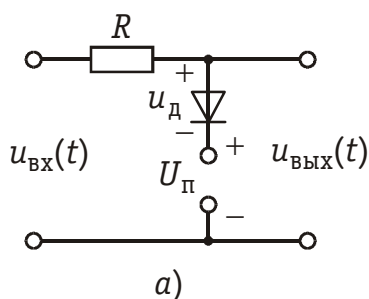


Рис. 11.24

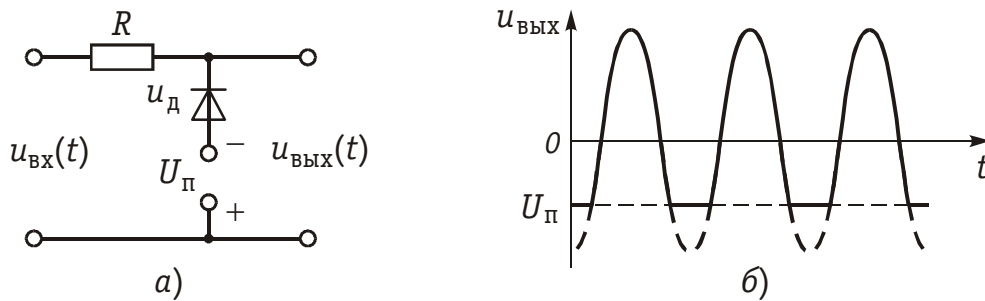


Рис. 11.25

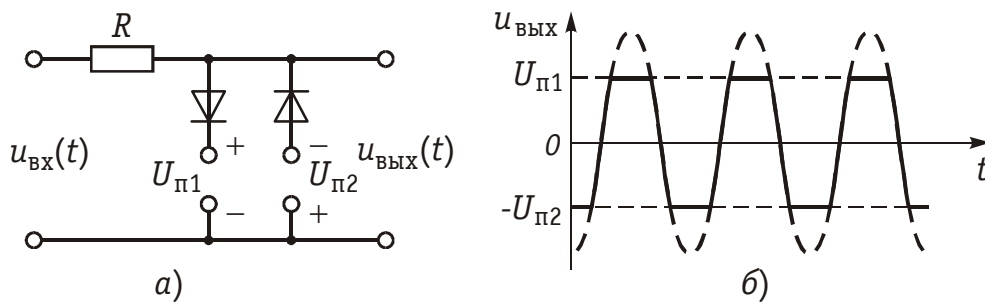


Рис. 11.26

Соответствующая графическая иллюстрация приведена на рис. 10.24, б для воздействия в виде гармонического колебания $u_{\text{BX}}(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$. Штриховой линией на рисунке показаны «отсеченные» ограничителем участки входного колебания.

На рис. 10.25, а изображена схема ограничителя с ограничением снизу. Аналогичные рассуждения показывают, что у такого ограничителя при тех же, что и выше, допущениях:

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \begin{cases} u_{\text{BX}}(t) & \text{при } u_{\text{BX}}(t) > -U_{\text{П}}, \\ -U_{\text{П}} & \text{при } u_{\text{BX}}(t) < -U_{\text{П}}. \end{cases}$$

График напряжения на выходе ограничителя с ограничением снизу для того же, гармонического, воздействия изображен на рис. 10.25, б.

Наконец, на рис. 10.26, а приведена схема ограничителя с двухсторонним ограничением, у которого для принятых допущений

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \begin{cases} U_{\text{П1}} & \text{при } u_{\text{BX}}(t) > U_{\text{П1}}, \\ u_{\text{BX}}(t) & \text{при } -U_{\text{П2}} < u_{\text{BX}}(t) < U_{\text{П1}}, \\ -U_{\text{П2}} & \text{при } u_{\text{BX}}(t) < -U_{\text{П2}}. \end{cases}$$

Обычно ограничители с двухсторонним ограничением имеют как симметричные, так и асимметричные пределы ограничений.

Напряжение на выходе ограничителя с симметричными пределами ограничения, если к его входу подается гармоническое напряжение $u_{\text{BX}}(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$, по форме близко к периодической последовательности импульсов трапециевидальной формы и чередующейся полярности (см. рис. 11.2). Форма импульсов приближается к прямоугольной по мере усиления неравенства $U_m > U_{\text{П1}} = U_{\text{П2}}$.

Если рассматриваемую периодическую последовательность импульсов подвести к устройству, моделирующему операцию дифференцирования, то напряжение на его выходе будет представлять собой периодическую последовательность коротких импульсов чередующейся полярности. Форма каждого отдельного импульса близка к прямоугольной; его длительность тем меньше, а высота тем больше, чем больше амплитуда гармонического колебания превышает порог ограничения.

В заключение заметим, что задачу анализа колебаний в ограничителе можно решать с учетом реальных характеристик диодов и конечного внутреннего сопротивления генераторов. При этом качественно картина процессов в ограничителе практически сохранится без изменений по сравнению с рассмотренной выше.

11.7. Воздействие суммы гармонических колебаний на нелинейный резистивный элемент

Спектральный состав тока при бигармоническом воздействии. Пусть к нелинейному резистивному элементу подведено бигармоническое воздействие, т. е. колебание в виде суммы двух гармонических колебаний разных частот и постоянное напряжение смещения U_0

$$U = U_0 + U_{m1} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_{m2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Предположим, что ВАХ нелинейного элемента описывается полиномом

$$i(t) = a_0 + a_1(n - U_0) + a_2(n - U_0)^2 + \dots + a_n(n - U_0)^n.$$

Тогда ток в цепи НЭ равен:

$$i(t) = \sum_{k=1}^n a_k [U_{m1} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_{m2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)]^k. \quad (11.13)$$

Для анализа спектра тока аппарат рядов Фурье здесь не применим, так как в общем случае функция (11.13) не является периодической. Следует, как и при гармоническом воздействии на НЭ, воспользоваться формулами преобразования тригонометрических функций. При этом

для квадратичного члена суммы (11.13)

$$\begin{aligned} i_2(t) &= a_2 [U_{m1} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_{m2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)]^2 = \\ &= a_2 U_{m1}^2 \cos^2(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 U_{m2}^2 \cos^2(\omega_2 t + \varphi_2) + \\ &+ 2a_2 U_{m1} U_{m2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = a_2 U_{m1}^2 / 2 + \\ &+ \frac{a_2 U_{m2}^2}{2} + \frac{a_2 U_{m1}^2}{2} \cos(2\omega_1 t + 2\varphi_1) + \frac{a_2 U_{m2}^2}{2} \cos(2\omega_2 t + 2\varphi_2) + \end{aligned}$$

$$a_2 U_{m1} U_{m2} \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2] + \\ + a_2 U_{m1} U_{m2} \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2];$$

для кубического члена

$$i_3(t) = a_3 [U_{m1} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_{m2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)]^3 = \\ = a_3 \left(\frac{3}{4} U_{m1}^3 + \frac{3}{2} U_{m1} U_{m2}^2 \right) \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \\ + a_3 \left(\frac{3}{4} U_{m2}^3 + \frac{3}{2} U_{m1}^2 U_{m2} \right) \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \\ + a_3 \frac{U_{m1}^3}{4} \cos(3\omega_1 t + 3\varphi_1) + a_3 \frac{U_{m2}^3}{4} \cos(3\omega_2 t + 3\varphi_2) + \\ + a_3 \frac{3}{4} U_{m1}^2 U_{m2} \cos[(2\omega_1 + \omega_2)t + 2\varphi_1 + \varphi_2] + \\ + a_3 \frac{3}{4} U_{m1}^2 U_{m2} \cos[(2\omega_1 - \omega_2)t + 2\varphi_1 - \varphi_2] + \\ + a_3 \frac{3}{4} U_{m1} U_{m2}^2 \cos[(\omega_1 + 2\omega_2)t + \varphi_1 + 2\varphi_2] + \\ + a_3 \frac{3}{4} U_{m1} U_{m2}^2 \cos[(\omega_1 - 2\omega_2)t + \varphi_1 - 2\varphi_2] \text{ и т. д.}$$

Допустим, что $n = 3$, т. е., что вольт-амперная характеристика нелинейного элемента описывается полиномом третьей степени. Тогда полученные выше выражения для $i_2(t)$ и $i_3(t)$ показывают, что ток в элементе кроме линейной составляющей реакции $i_1(t) = a_1 U_{m1} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + a_1 U_{m2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ содержит также постоянную составляющую, гармонические колебания с частотам воздействия ω_1 и ω_2 и гармоники колебаний с частотами $2\omega_1$, $2\omega_2$, $3\omega_1$ и $3\omega_2$.

Перечисленные составляющие спектра характерны и для воздействия на тот же элемент двух гармонических колебаний с частотами ω_1 и ω_2 порознь. При совместном же их воздействии в спектре реакции появляются колебания с частотами

$$|\omega_1 \pm \omega_2|, |2\omega_1 \pm \omega_2| \text{ и } |\omega_1 \pm 2\omega_2|^*.$$

Соответствующие колебания называются комбинационными, а их частоты — *комбинационными частотами*. Амплитуды комбинационных колебаний зависят от амплитуд обеих составляющих би-гармонического воздействия и в рассматриваемом примере для колебаний с частотами

$$|\omega_1 \pm \omega_2|, |2\omega_1 \pm \omega_2| \text{ и } |\omega_1 \pm 2\omega_2|$$

* Знак модуля в общем случае необходим, так как частота колебания не может быть отрицательной.

пропорциональны соответственно произведениям $U_{m1}U_{m1}$, $U_{m1}^2U_{m2}$ и $U_{m1}U_{m2}^2$.

Аналогичные выкладки для остальных членов суммы (11.13) приводят к заключению, что при бигармоническом воздействии на нелинейный элемент с полиномиальной вольт-амперной характеристикой спектр реакции содержит гармонические колебания с частотами

$$\omega = |l\omega_1 \pm m\omega_2|, \quad (11.14)$$

где $l = 0, 1, 2, \dots, n$; $m = 0, 1, 2, \dots, n$, $l + m \leq n$.

Сумма $l + m$ определяет порядок комбинационного колебания с частотой (11.14). Так, комбинационные колебания 4-го порядка — это колебание с частотами $4\omega_1$, $|3\omega_1 \pm \omega_2|$, $|2\omega_1 \pm 2\omega_2|$, $|\omega_1 \pm 3\omega_2|$ и $4\omega_2$.

Комбинационные частоты при воздействии суммы гармонических колебаний. В общем случае входное воздействие можно представить бесконечной суммой

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \cos(\omega_k t + \varphi_k).$$

В зависимости от степени n аппроксимирующего полинома в спектре тока, протекающего через нелинейный элемент, появляются комбинационные частоты вида:

$$|l\omega_1 \pm m\omega_2 \pm s\omega_3 \pm k\omega_k \pm \dots|; \quad l + m + s + \dots + k + \dots \leq n;$$

l, m, s, k — целые положительные числа. Например, при воздействии на НЭ с ВАХ в виде полинома второй степени суммы трех гармонических колебаний в спектре тока, помимо постоянной составляющей и первых двух гармоник каждой частоты, присутствуют комбинационные частоты $|\omega_1 \pm \omega_2|$; $|\omega_1 \pm \omega_3|$; $|\omega_2 \pm \omega_3|$. При аппроксимации полиномом третьей степени дополнительно появляются третьи гармоники с частотами $3\omega_1$, $3\omega_2$, $3\omega_3$ и колебания с комбинационными частотами типа $|\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3|$, $|2\omega_1 \pm \omega_3|$, $|\omega_1 \pm 2\omega_3|$ и т. д.

11.8. Преобразование частоты гармонического колебания

При передаче электрических сигналов на расстояние часто требуется переносить спектр сигнала вверх или вниз по шкале частот. Такой перенос спектра называется *преобразованием частоты*. Необходимость в преобразовании частот возникает, например, в случаях если спектр сигнала, который нужно передать, расположен на шкале частот значительно ниже полосы пропускания системы передачи.

В качестве преобразователя частоты может быть использован усилительный каскад на транзисторе с колебательным контуром

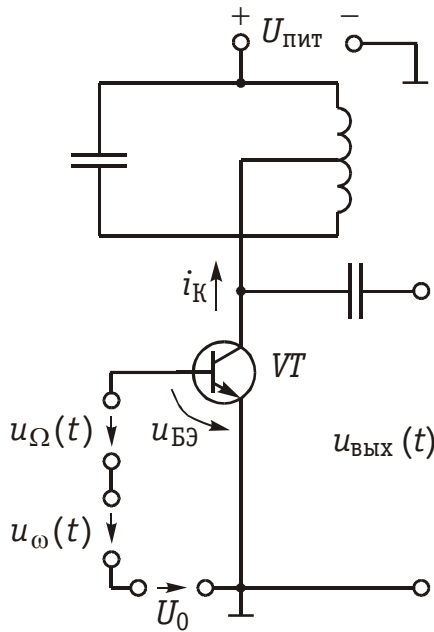


Рис. 11.27

полиномом второй степени

$$i_K = F(u_{БЭ}) = a_0 + a_1(u_{БЭ} - U_0) + a_2(u_{БЭ} - U_0)^2. \quad (11.15)$$

Напряжение на участке база — эмиттер

$$u_{БЭ} = U_0 + U_{m\Omega} \cos \Omega t + U_{m\omega} \cos \omega t.$$

После подстановки этого выражения в зависимость (11.15) в формуле для тока появляются гармонические колебания с частотами Ω , ω , 2Ω , 2ω и с суммарной и разностной комбинационными частотами $\omega + \Omega$ и $\omega - \Omega$.

Колебательный контур резонансного усилителя настроен на частоту $\omega + \Omega$ и выделяет из спектрального состава тока колебание

$$i_{\omega+\Omega}(t) = a_2 U_{m\Omega} U_{m\omega} \cos(\omega + \Omega)t.$$

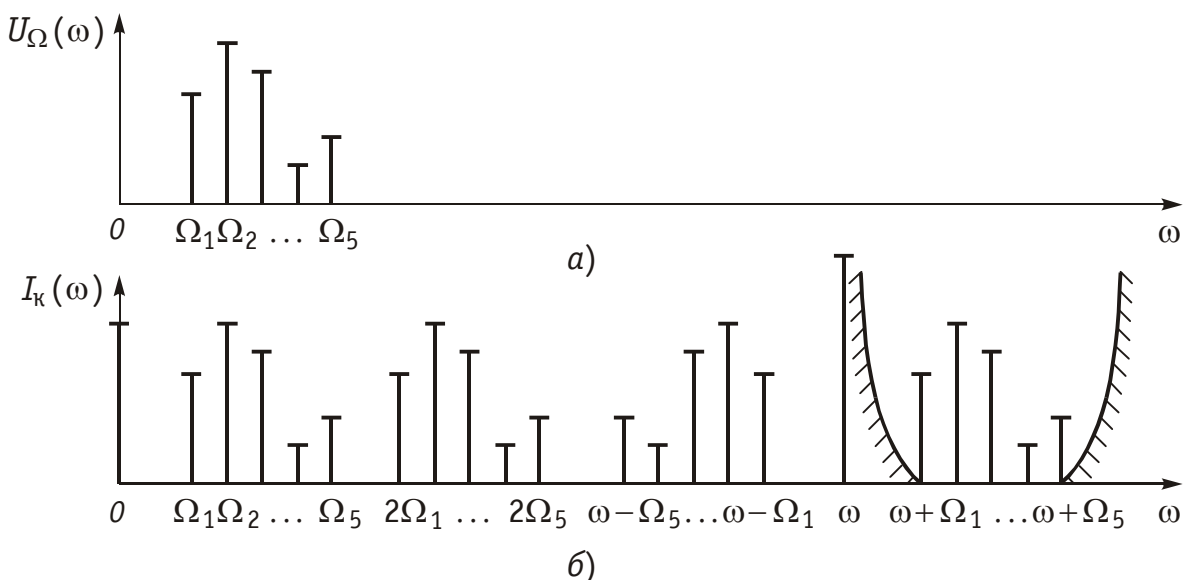


Рис. 11.28

Выделенное колебание тока создает на резонансном сопротивлении контура $R_{0\Omega}$ падение напряжения

$$u_{\text{вых}}(t) = a_2 R_{0\Omega} U_{m\Omega} U_{m\omega} \cos(\omega + \Omega)t = U_{m+\Omega} \cos(\omega + \Omega)t,$$

которое и является выходным сигналом преобразователя частоты.

В реальных системах связи передаваемый низкочастотный сигнал не является гармоническим, а имеет сложный спектр $U_{\Omega}(\omega)$ (рис. 11.28, а), т. е. состоит из суммы гармонических колебаний с частотами $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots$.

Если этот сигнал вместе с высокочастотным колебанием $u_{\omega}(t)$ подать на нелинейный элемент, то в спектре тока $I_K(\omega)$ (рис. 11.28, б), протекающего через НЭ, будут присутствовать полезные продукты преобразования — комбинационные частоты $\omega + \Omega_1, \omega + \Omega_2, \omega + \Omega_3, \dots$. Чтобы отфильтровать токи с этими частотами, недостаточно воспользоваться одиночным колебательным контуром, поскольку он не сможет обеспечить хорошую фильтрацию полезных продуктов преобразования. Его можно заменить в схеме рис. 11.27 обычной резистивной нагрузкой, а на выходе схемы включить электрический фильтр с характеристикой ослабления (на рис. 11.28, б она показана штриховой линией), обеспечивающей необходимую степень подавления несущего колебания с частотой ω .

Приведем еще несколько практических схем преобразователей частоты. На рис. 11.29 представлены диодные преобразователи: одноконтный (а), двухконтный или балансный (б) и кольцевой (в), работающие в режиме больших амплитуд колебания частоты ω , т. е. в режиме аппроксимации ВАХ диодов линейно-ломаными функциями.

В балансных и кольцевых преобразователях гораздо меньше побочных продуктов преобразования; тем самым значительно облегчаются требования к фильтру, выделяющему полезные колебания.

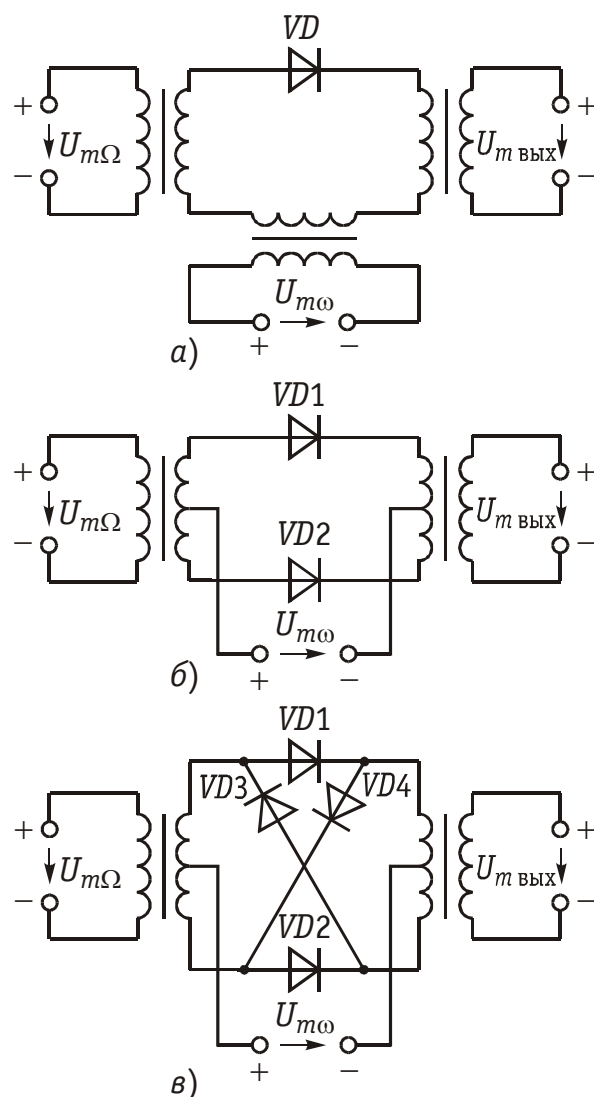


Рис. 11.29

Вопросы и задания для самопроверки

1. Каково число гармонических составляющих реакции при полиномиальной аппроксимации ВАХ нелинейного элемента и гармоническом воздействии?
2. В чем принципиальное отличие спектров при полиномиальной аппроксимации ВАХ нелинейного элемента при воздействии порознь двух гармонических колебаний с частотами ω_1 и ω_2 и при совместном их воздействии?
3. Что называется углом отсечки и как он зависит от напряжения смещения и амплитуды гармонического воздействия?
4. При каком угле отсечки амплитуды гармонических составляющих реакции прямо пропорциональны амплитуде гармонического воздействия и почему?
5. Какими коэффициентами при полиномиальной аппроксимации ВАХ определяются амплитуды четных (нечетных) гармоник реакции при гармоническом воздействии? Покажите это на примере.
6. При каких условиях в резонансном усилителе, работающем в режиме «большого» сигнала, т. е. в нелинейном режиме, амплитуда реакции и гармонического воздействия имеют линейную зависимость?
7. Напишите возможные частоты гармонических составляющих реакции в электрической цепи при аппроксимации ВАХ нелинейного элемента полиномом четвертого порядка при бигармоническом воздействии.
8. Как изменяется КПД и выходная мощность резонансного усилителя от угла отсечки?
9. На какую частоту настраивают параллельный колебательный контур и каким выбирают угол отсечки в умножителях частоты? Чем ограничена кратность умножения частоты на практике?
10. Как изменяется выпрямленное постоянное напряжение U_0/U_m от отношения сопротивления диода к сопротивлению нагрузки R_d/R_n ?
11. В чем преимущество двухполупериодного выпрямителя по сравнению с однополупериодным и почему?
12. ВАХ нелинейного резистивного элемента аппроксимирована полиномом $i = a_0 + a_1 u + a_3 u^3$. Найдите частоты всех составляющих тока, если к элементу приложено напряжение:
а) $u = U_m \cos \omega_0 t$, б) $u = U_0 + U_m \cos \omega_0 t$.
Ответ: а) 0, ω_0 , $3\omega_0$; б) 0, ω_0 , $2\omega_0$, $3\omega_0$.
13. ВАХ нелинейного резистивного элемента аппроксимирована полиномом $i = 50 + 4u + 1,5u^2$ мА. К элементу приложено напряжение $u = 4 + U_m \cos 10^4 t$ В. Найдите зависимость амплиту-

ды первой гармоники от амплитуды переменной составляющей напряжения U_m .

Ответ: $I_{m1} = 16 U_m (\text{мА, В})$.

14. На нелинейный резистивный элемент с ВАХ $i = 30 + 5u + 2u^2$ мА действует напряжение $u = U_0 + U_m \cos 10^5 t$ В. Определите зависимость амплитуды первой гармоники тока I_{m1} от напряжения смещения U_0 при фиксированной амплитуде переменной составляющей напряжения $U_m = 3\text{В}$.

Ответ: $I_{m1} = 15 + 12U_0 (\text{мА, В})$.

15. К нелинейному резистивному элементу, ВАХ которого аппроксимирована полиномом $i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2$, приложено напряжение $u = \sum_{k=1}^2 U_{mk} \cos \omega_k t$. Найдите амплитуды гармонических составляющих тока.

Ответ: $I_0 = a_0 + 0,5a_2 U_{m1}^2 + 0,5a_2 U_{m2}^2$; $I_{m1}|_{\omega_1} = a_1 U_{m1}$;
 $I_{m2}|_{\omega_1} = 0,5a_2 U_{m1}^2$; $I_{m1}|_{\omega_2} = a_1 U_{m2}$; $I_{m2}|_{\omega_2} = 0,5a_2 U_{m2}^2$;
 $I_m|_{\omega_1 - \omega_2} = I_m|_{\omega_1 + \omega_2} = a_2 U_{m1} U_{m2}$.

16. Найдите аналитическое выражение для ВАХ нелинейного элемента, который обеспечивает преобразование синусоидального воздействия $x(t)$ в бесконечную последовательность треугольных импульсов.

Ответ: $y = |2/\pi \arcsin x|$; $-1 \leq x \leq 1$.

17. К нелинейному резистивному элементу, ВАХ которого описывается полиномом $i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3$, приложено напряжение $u = U_m \cos \omega t$. При каком условии постоянная составляющая тока через элемент не зависит от амплитуды приложенного к нему напряжения?

Ответ: $a_2 = 0$.

ГЛАВА 12. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

12.1. Общие положения

В технике связи под *четырёхполусником* понимают электрическую цепь (или ее часть) любой сложности, имеющую две пары зажимов для подключения к источнику и приемнику электрической энергии. Зажимы, к которым подключается источник, называются *входными*, а зажимы, к которым присоединяется приемник (нагрузка), — *выходными зажимами (полюсами)*.

В качестве примеров четырехполусников можно привести трансформатор и усилитель. Четырёхполусниками являются элек-

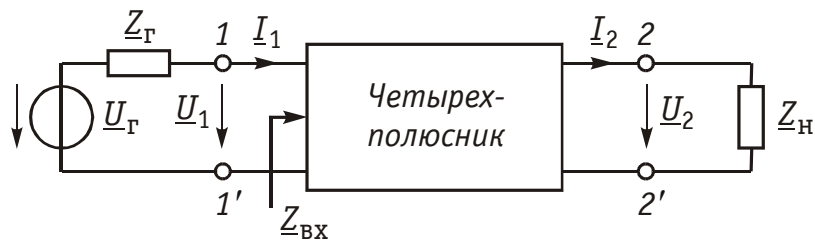


Рис. 12.1

трические фильтры, усилительные устройства радиопередатчиков или радиоприемников, линия междугородной телефонной связи и т. д. Все эти устройства, имеющие совершенно «непохожие» схемы, обладают рядом общих свойств.

В общем виде четырехполюсник изображают, как показано на рис. 12.1. Ко входу четырехполюсника $1-1'$ подключен источник электрической энергии с задающим напряжением $\underline{U}_Г$ и внутренним сопротивлением $\underline{Z}_Г$. К выходным зажимам $2-2'$ присоединена нагрузка с сопротивлением $\underline{Z}_Н$. На входных зажимах действует напряжение \underline{U}_1 ; на выходных — \underline{U}_2 . Через входные зажимы протекает ток \underline{I}_1 , через выходные зажимы — \underline{I}_2 . Заметим, что в роли источника и приемника электрической энергии могут выступать другие четырехполюсники.

На рис. 12.1 использованы символические обозначения напряжений и токов, что справедливо при анализе четырехполюсника в режиме гармонических колебаний. Если же используется источник периодических негармонических или непериодических колебаний, то можно воспользоваться спектральным представлением напряжений и токов (гл. 5, 9)

$$\underline{U}_Г(j\omega), \quad \underline{U}_1(j\omega), \quad \underline{U}_2(j\omega), \quad \underline{I}_1(j\omega) \text{ и } \underline{I}_2(j\omega).$$

Подобное представление будем широко использовать при анализе частотных характеристик четырехполюсников. В необходимых случаях обращаться к операторным изображениям $\underline{U}_Г(p)$, $\underline{U}_1(p)$, $\underline{U}_2(p)$, $\underline{I}_1(p)$ и $\underline{I}_2(p)$, которые легко получить, заменяя оператор $j\omega$ на оператор p (см. § 7.4).

Различают четырехполюсники *линейные* и *нелинейные*. Линейные четырехполюсники отличаются от нелинейных тем, что не содержат нелинейных элементов (НЭ) и поэтому характеризуются линейной зависимостью напряжения и тока на выходных зажимах от напряжения и тока на входных зажимах. Примерами линейных четырехполюсников являются электрический фильтр, линия связи, трансформатор без сердечника; примерами нелинейных — преобразователь частоты (содержащий диоды) в радиоприемнике, выпрямитель переменного тока, трансформатор со стальным сердечником (при работе с насыщением стали). Усилитель, содержащий НЭ (например, триоды), может являться как линейным, так и нелиней-

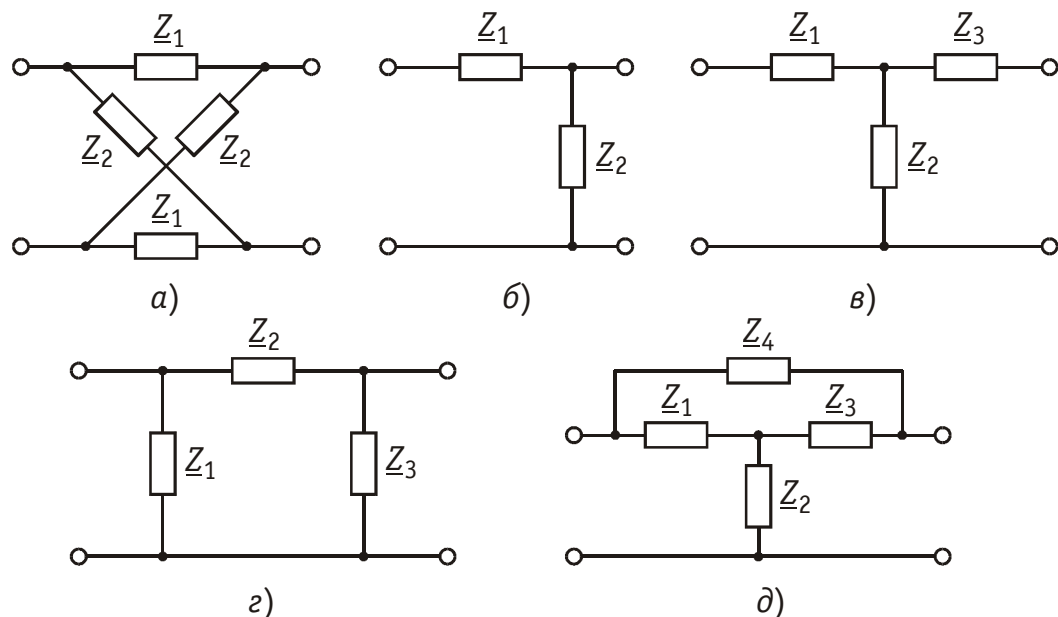


Рис. 12.2

ным четырехполусником в зависимости от режима его работы (на линейном или нелинейном участке характеристик триодов).

Четырехполусники бывают *пассивными* и *активными*. Пассивные схемы не содержат источников электрической энергии, активные — содержат. Последние могут содержать зависимые и независимые источники. Примером активного четырехполусника с зависимыми источниками может служить любой усилитель; примером пассивного — LC -фильтр.

В зависимости от структуры различают четырехполусники мостовые (рис. 12.2, а) и лестничные: Γ -образные (рис. 12.2, б), T -образные (рис. 12.2, в), Π -образные (рис. 12.2, г). Промежуточное положение занимают T -образно-мостовые (T -перекрытые) схемы четырехполусников (рис. 12.2, д).

Четырехполусники делятся на *симметричные* и *несимметричные*. В симметричном четырехполуснике перемена местами входных и выходных зажимов не изменяет напряжений и токов в цепи, с которой он соединен. Четырехполусники, кроме электрической симметрии, могут иметь структурную симметрию, определяемую относительно вертикальной оси симметрии. Так, T -образный, Π -образный и T -перекрытый четырехполусники (рис. 12.2) имеют вертикальную ось симметрии при $Z_1 = Z_3$. Мостовая схема структурно симметрична. Очевидно, четырехполусники, симметричные в структурном отношении, обладают электрической симметрией.

Четырехполусники могут быть *уравновешенными* и *неуравновешенными*. Уравновешенные четырехполусники имеют горизонтальную ось симметрии (например, мостовая схема на рис. 12.2, а) и используются, когда необходимо сделать зажимы симметричными относительно какой-либо точки (например, земли). Можно сделать уравновешенной любую из лестничных схем четырехполусников.

Четырехполюсники также делятся на *обратимые* и *необратимые*. Обратимые четырехполюсники позволяют передавать энергию в обоих направлениях; для них справедлива теорема обратимости или взаимности, в соответствии с которой отношение напряжения на входе к току на выходе не меняется при перемене местами зажимов (см. § 2.4).

12.2. Уравнения передачи четырехполюсника

Системы уравнений четырехполюсника. Основной задачей теории четырехполюсников является установление соотношений между четырьмя величинами: напряжениями на входе и выходе, а также токами, протекающими через входные и выходные зажимы. Уравнения, дающие зависимость между \underline{U}_1 , \underline{U}_2 , \underline{I}_1 и \underline{I}_2 , называются *уравнениями передачи четырехполюсника*. Для линейных четырехполюсников эти уравнения будут линейными. Величины, связывающие в уравнениях передачи напряжения и токи, называются *параметрами четырехполюсников*.

Сложная электрическая цепь (например, канал связи), имеющая входные и выходные зажимы, может рассматриваться как совокупность четырехполюсников, соединенных по определенной схеме. Зная параметры этих четырехполюсников, можно вычислить параметры сложного четырехполюсника и получить тем самым зависимость между напряжениями и токами на зажимах результирующего сложного четырехполюсника, не производя расчетов всех напряжений и токов внутри заданной схемы.

Кроме того, теория четырехполюсников позволяет решить обратную задачу: по заданным напряжениям и токам найти параметры четырехполюсника и затем построить его схему и рассчитать элементы, т. е. решить задачу синтеза.

Пусть четырехполюсник содержит n независимых контуров. Отнесем первый контур ко входу четырехполюсника ($\underline{I}_{K1} = \underline{I}_1$), второй контур — к его выходу ($\underline{I}_{K2} = \underline{I}_2$). Будем считать, что во внутренних контурах четырехполюсника отсутствуют независимые источники энергии.

При рассмотрении четырехполюсника важно заранее условиться о положительных направлениях напряжений и токов. В дальнейшем будем придерживаться положительных направлений, показанных стрелками на рис. 12.1, если особо не будут оговорены другие случаи.

Составим систему уравнений для контурных токов (см. § 2.4):

$$\begin{cases} \underline{Z}_{11}\underline{I}_{K1} + \underline{Z}_{12}\underline{I}_{K2} + \dots + \underline{Z}_{1n}\underline{I}_{Kn} = \underline{U}_1, \\ \underline{Z}_{21}\underline{I}_{K1} + \underline{Z}_{22}\underline{I}_{K2} + \dots + \underline{Z}_{2n}\underline{I}_{Kn} = -\underline{U}_2, \\ \vdots \\ \underline{Z}_{n1}\underline{I}_{K1} + \underline{Z}_{n2}\underline{I}_{K2} + \dots + \underline{Z}_{nn}\underline{I}_{Kn} = 0. \end{cases} \quad (12.1)$$

Определим из этой системы токи \underline{I}_1 и \underline{I}_2 .

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_1 = \underline{I}_{\kappa 1} &= \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z} \underline{U}_1 + \frac{\Delta_{21}}{\Delta_Z} \underline{U}_2, \\ \underline{I}_2 = \underline{I}_{\kappa 2} &= -\frac{\Delta_{12}}{\Delta_Z} \underline{U}_1 - \frac{\Delta_{22}}{\Delta_Z} \underline{U}_2, \end{aligned} \right\} \quad (12.2a)$$

где Δ_Z — определитель системы уравнений (12.1); Δ_{11} , Δ_{22} , Δ_{12} и Δ_{21} — алгебраические дополнения определителя Δ_Z .

Введем обозначения

$$\underline{Y}_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z}; \quad \underline{Y}_{12} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_Z}; \quad \underline{Y}_{21} = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta_Z}; \quad \underline{Y}_{22} = -\frac{\Delta_{22}}{\Delta_Z}.$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \underline{U}_2; \\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \underline{U}_2. \end{aligned} \right\} \quad (12.2b)$$

Коэффициенты \underline{Y}_{11} , \underline{Y}_{12} , \underline{Y}_{21} и \underline{Y}_{22} в уравнениях (12.2) называются **Y-параметрами**, или *параметрами проводимостей* четырехполюсника, так как по размерности они являются именно таковыми. Уравнения (12.2) называются уравнениями передачи четырехполюсника в Y-параметрах. Эти уравнения представляют собой одну из возможных форм уравнений передачи. Она позволяет находить любую пару из значений \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{U}_1 и \underline{U}_2 , если заданы значения другой пары.

Помимо уравнений в форме (12.2) существует еще пять форм уравнений передачи. Уравнения, связывающие напряжения \underline{U}_1 , \underline{U}_2 и токи \underline{I}_1 , \underline{I}_2

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}_2, \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}_2 \end{aligned} \right\} \quad (12.3)$$

содержат в качестве коэффициентов *параметры сопротивлений* четырехполюсника, или **Z-параметры**, и называются уравнениями передачи в Z-параметрах. Параметры \underline{Z}_{11} , \underline{Z}_{12} , \underline{Z}_{21} и \underline{Z}_{22} имеют размерность сопротивлений. Заметим, что они не являются обратными величинами по отношению к параметрам проводимости, таким образом, например, $\underline{Z}_{11} \neq 1/\underline{Y}_{11}$ или $\underline{Z}_{12} \neq 1/\underline{Y}_{12}$. Не следует также путать эти параметры с собственными и взаимными сопротивлениями контуров \underline{Z}_{11} , \underline{Z}_{12} и т. д. в уравнениях (12.1) для контурных токов.

Коэффициенты, входящие в систему уравнений, связывающую входные \underline{U}_1 и \underline{I}_1 и выходные \underline{U}_2 и \underline{I}_2 напряжения и токи

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11} \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21} \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}_2 \end{aligned} \right\} \quad (12.4)$$

называются **A-параметрами**, или *обобщенными параметрами*. Уравнения (12.4) называются уравнениями передачи в A-парамет-

рах. Параметры \underline{A}_{11} и \underline{A}_{22} являются безразмерными, параметр \underline{A}_{12} имеет размерность сопротивления; параметр \underline{A}_{21} — размерность проводимости.

Приведем еще две формы уравнений передачи:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{H}_{11}\underline{I}_1 + \underline{H}_{12}\underline{U}_2, \\ \underline{I}_2 &= \underline{H}_{21}\underline{I}_1 + \underline{H}_{22}\underline{U}_2. \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{F}_{11}\underline{U}_1 + \underline{F}_{12}\underline{I}_2, \\ \underline{U}_2 &= \underline{F}_{21}\underline{U}_1 + \underline{F}_{22}\underline{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (12.5)$$

Коэффициенты \underline{H}_{11} , \underline{H}_{12} , \underline{H}_{21} и \underline{H}_{22} называются **Н-параметрами** и применяются при рассмотрении схем с транзисторами. Параметры \underline{H}_{12} и \underline{H}_{21} являются безразмерными, а параметры \underline{H}_{11} и \underline{H}_{22} имеют размерности сопротивления и проводимости.

Коэффициенты \underline{F}_{11} , \underline{F}_{12} , \underline{F}_{21} и \underline{F}_{22} называются **Ф-параметрами** и применяются при рассмотрении схем с электронными лампами. Параметры \underline{F}_{12} и \underline{F}_{21} безразмерные, а параметры \underline{F}_{11} и \underline{F}_{22} имеют размерности проводимости и сопротивления. Уравнения (12.5) называются соответственно уравнениями передачи в **Н-параметрах** и **Ф-параметрах**.

Все формы уравнений передачи принципиально равноправны. Выбор той или иной формы зависит исключительно от задачи, которая в данном случае решается.

Полная совокупность параметров любой системы уравнений передачи образует систему параметров четырехполюсника. Так, систему **Y**-параметров четырехполюсника образует совокупность его параметров \underline{Y}_{11} , \underline{Y}_{12} , \underline{Y}_{21} , \underline{Y}_{22} .

Два четырехполюсника, имеющие одинаковые системы параметров, независимо от их внутренней структуры, числа элементов и т. д., характеризуются, очевидно, одинаковыми уравнениями передачи. Такие четырехполюсники называются *эквивалентными*, и при включении любого из них между одними и теми же внешними цепями на их зажимах устанавливаются одинаковые режимы.

Свойства параметров-коэффициентов. Системы **Y**-, **Z**-, **A**-, **H**- и **F**-параметров образованы из коэффициентов уравнений передачи, и поэтому часто их объединяют одним названием *параметры-коэффициенты*. Рассмотрим основные свойства параметров-коэффициентов.

1. Параметры-коэффициенты определяются только схемой четырехполюсника и ее элементами и не зависят от внешних цепей, между которыми может быть включен четырехполюсник, т. е. они характеризуют собственно четырехполюсник.

Пример. На входе Г-образного четырехполюсника (см. рис. 12.2, б), подключенного к внешним цепям, действует напряжение \underline{U}_1 и ток \underline{I}_1 , а на выходе напряжение \underline{U}_2 и ток \underline{I}_2 . Определим **A**-параметры четырехполюсника.

В соответствии с ЗНК и ЗТК $\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{I}_1 \underline{Z}_1$ и $\underline{I}_1 = \underline{U}_2 / \underline{Z}_2 + \underline{I}_2$.

Подставляя выражение для тока \underline{I}_1 в первое равенство, получаем

$$\underline{U}_1 = (1 + \underline{Z}_1/\underline{Z}_2)\underline{U}_2 + \underline{Z}_1\underline{I}_2; \quad \underline{I}_1 = (1/\underline{Z}_2)\underline{U}_2 + \underline{I}_2.$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями передачи в **A**-параметрах (12.4), находим $\underline{A}_{11} = 1 + \underline{Z}_1/\underline{Z}_2$, $\underline{A}_{12} = \underline{Z}_1$; $\underline{A}_{21} = 1/\underline{Z}_2$ и $\underline{A}_{22} = 1$. Как видим, **A**-параметры определяются только элементами Γ -образного четырехполюсника и не зависят от внешних воздействий.

2. Все системы параметров-коэффициентов описывают один и тот же четырехполюсник, поэтому между различными системами параметров-коэффициентов существует однозначная взаимосвязь.

Пример. Установим связь между **A**-параметрами и **Z**-параметрами. Решая систему уравнений в **Z**-параметрах (12.3) относительно неизвестных \underline{U}_1 и \underline{I}_1 , находим:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}}\underline{U}_2 - \frac{\Delta_Z}{\underline{Z}_{21}}\underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_{21}}\underline{U}_2 - \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}}\underline{I}_2, \end{aligned} \right\}$$

где $\Delta_Z = \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}$ — определитель системы уравнений (12.3).

Сравнивая эту систему уравнений с системой (12.4), устанавливаем, что $\underline{A}_{11} = \underline{Z}_{11}/\underline{Z}_{22}$; $\underline{A}_{12} = -\Delta_Z/\underline{Z}_{21}$; $\underline{A}_{21} = 1/\underline{Z}_{21}$ и $\underline{A}_{22} = -\underline{Z}_{22}/\underline{Z}_{21}$. Решая систему (12.4) относительно неизвестных \underline{U}_1 и \underline{U}_2 , можно найти выражение **Z**-параметров через **A**-параметры:

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}; \quad \underline{Z}_{12} = \frac{-\Delta_A}{\underline{A}_{21}}; \quad \underline{Z}_{21} = \frac{1}{\underline{A}_{21}}; \quad \underline{Z}_{22} = \frac{-\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}},$$

где $\Delta_A = \underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}$ — определитель системы уравнений (12.4).

Аналогичным образом можно установить связь между другими системами параметров. В табл. 12.1 приведены соотношения между различными системами параметров — коэффициентов.

3. Пассивный четырехполюсник полностью характеризуется не более чем тремя независимыми параметрами. Действительно, в многоконтурной схеме пассивного четырехполюсника взаимные сопротивления \underline{Z}_{km} и \underline{Z}_{mk} k -го и m -го контуров равны между собой. Следовательно, $\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21}$. Зная связь между **Y**-параметрами и **Z**-параметрами, можно установить, что $\underline{Z}_{12} = -\underline{Z}_{21}$. Далее можно показать, что для **A**-параметров справедливо соотношение

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{vmatrix} = \underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1.$$

Это легко доказать, если выразить в данном определителе **A**-параметры, например, через **Z**-параметры.

Наконец, аналогичным образом можно найти, что $\underline{H}_{12} = \underline{H}_{21}$ и $\underline{F}_{12} = \underline{F}_{21}$.

Таким образом, независимыми параметрами четырехполюсника могут быть: \underline{Y}_{11} , $\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21}$, \underline{Y}_{22} ; \underline{Z}_{11} , $\underline{Z}_{12} = -\underline{Z}_{21}$, \underline{Z}_{22} ; \underline{H}_{11} , $\underline{H}_{12} =$

Таблица 12.1

	Y	Z	A	H	F
Y	—	$\frac{\underline{Z}_{22}}{\Delta_Z} - \frac{\underline{Z}_{12}}{\Delta_Z}$ $\frac{\underline{Z}_{21}}{\Delta_Z} - \frac{\underline{Z}_{11}}{\Delta_Z}$	$\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{12}} - \frac{\Delta_A}{\underline{A}_{12}}$ $\frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{12}} - \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{12}}$	$\frac{1}{\underline{H}_{11}} - \frac{\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{11}}$ $\frac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{11}} - \frac{\Delta_H}{\underline{H}_{11}}$	$\frac{\Delta_F}{\underline{F}_{22}} - \frac{\underline{F}_{12}}{\underline{F}_{22}}$ $\frac{\underline{F}_{21}}{\underline{F}_{22}} - \frac{1}{\underline{F}_{22}}$
Z	$\frac{\underline{Y}_{22}}{\Delta_Y} - \frac{\underline{Y}_{12}}{\Delta_Y}$ $\frac{\underline{Y}_{21}}{\Delta_Y} - \frac{\underline{Y}_{11}}{\Delta_Y}$	—	$\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}} - \frac{\Delta_A}{\underline{A}_{21}}$ $\frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{21}} - \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}$	$\frac{\Delta_H}{\underline{H}_{22}} - \frac{\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{22}}$ $\frac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22}} - \frac{1}{\underline{H}_{22}}$	$\frac{1}{\underline{F}_{11}} - \frac{\underline{F}_{12}}{\underline{F}_{11}}$ $\frac{\underline{F}_{11}}{\underline{F}_{11}} - \frac{\Delta_F}{\underline{F}_{11}}$
A	$-\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} - \frac{1}{\underline{Y}_{21}}$ $-\frac{\Delta_Y}{\underline{Y}_{21}} - \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}}$	$\frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}} - \frac{\Delta_Z}{\underline{Z}_{21}}$ $\frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{21}} - \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}}$	—	$-\frac{\Delta_H}{\underline{H}_{21}} - \frac{\underline{H}_{11}}{\underline{H}_{21}}$ $-\frac{\underline{H}_{22}}{\underline{H}_{21}} - \frac{1}{\underline{H}_{21}}$	$-\frac{1}{\underline{F}_{21}} - \frac{\underline{F}_{22}}{\underline{F}_{21}}$ $-\frac{\underline{F}_{11}}{\underline{F}_{21}} - \frac{\Delta_F}{\underline{F}_{21}}$
H	$\frac{1}{\underline{Y}_{11}} - \frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{11}}$ $\frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11}} - \frac{\Delta_Y}{\underline{Y}_{11}}$	$\frac{\Delta_Z}{\underline{Z}_{22}} - \frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{22}}$ $-\frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22}} - \frac{1}{\underline{Z}_{22}}$	$\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}} - \frac{\Delta_A}{\underline{A}_{22}}$ $\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{22}} - \frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{22}}$	—	$\frac{\underline{F}_{22}}{\Delta_F} - \frac{\underline{F}_{12}}{\Delta_F}$ $-\frac{\underline{F}_{21}}{\Delta_F} - \frac{\underline{F}_{11}}{\Delta_F}$
F	$\frac{\Delta_Y}{\underline{Y}_{22}} - \frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{22}}$ $-\frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{22}} - \frac{1}{\underline{Y}_{22}}$	$\frac{1}{\underline{Z}_{11}} - \frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{11}}$ $\frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11}} - \frac{\Delta_Z}{\underline{Z}_{11}}$	$\frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{11}} - \frac{\Delta_A}{\underline{A}_{11}}$ $\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{11}} - \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}$	$\frac{\underline{H}_{22}}{\Delta_H} - \frac{\underline{H}_{12}}{\Delta_H}$ $-\frac{\underline{H}_{21}}{\Delta_H} - \frac{\underline{H}_{11}}{\Delta_H}$	—

$= \underline{H}_{21}, \underline{H}_{22}; \underline{F}_{11}, \underline{F}_{12} = \underline{F}_{21}$ и \underline{F}_{22} или любые три из параметров \underline{A}_{11} , \underline{A}_{12} , \underline{A}_{21} и \underline{A}_{22} .

4. При изменении направления передачи энергии через четырехполюсник во всех выражениях, включающих A -параметры, коэффициенты \underline{A}_{11} и \underline{A}_{22} меняются местами.

Рассмотрим передачу энергии через четырехполюсник в обратном направлении, т. е. от зажимов $2-2'$ к зажимам $1-1'$ (рис. 12.3). Если в уравнениях передачи (12.4) заменить напряжение \underline{U}_1 и ток \underline{I}_1 на зажимах $1-1'$ на напряжение \underline{U}_2' и ток $-\underline{I}_2'$ в соответствии с рис. 12.3, а напряжение \underline{U}_2 и ток \underline{I}_2 на зажимах $2-2'$ на величины $-\underline{U}_1'$ и $-\underline{I}_1'$, то (12.4) можно переписать в виде

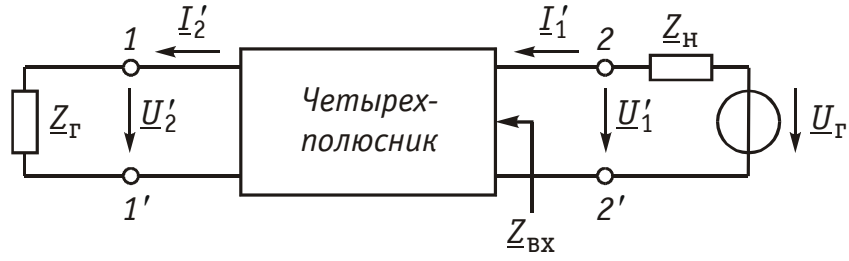


Рис. 12.3

$$\begin{cases} \underline{U}'_2 = \underline{A}_{11}\underline{U}'_1 - \underline{A}_{12}\underline{I}'_1; \\ -\underline{I}'_2 = \underline{A}_{21}\underline{U}'_1 - \underline{A}_{22}\underline{I}'_1. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно нового входа четырехполюсника, т. е. относительно переменных \underline{U}'_1 и \underline{I}'_1 , получаем

$$\begin{cases} \underline{U}'_1 = \underline{A}_{22}\underline{U}'_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}'_2; \\ \underline{I}'_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}'_2 + \underline{A}_{11}\underline{I}'_2. \end{cases} \quad (12.6)$$

Сопоставляя эти уравнения с (12.4), можно сделать интересное наблюдение: в уравнениях передачи параметры \underline{A}_{11} и \underline{A}_{22} поменялись местами. Оказывается, этот факт справедлив не только для уравнений передачи, но и для любых других выражений, в которые входят А-параметры.

5. Симметричные пассивные четырехполюсники имеют только два независимых параметра. В самом деле, в случае симметричного пассивного четырехполюсника не имеет значения направление передачи энергии: напряжения и токи на входе и выходе не изменятся при замене местами зажимов. Сравнивая уравнения передачи (12.4) и (12.6), устанавливаем, что $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$. Из табл. 12.1 находим также, что в симметричных четырехполюсниках $\underline{Y}_{11} = -\underline{Y}_{22}$; $\underline{Z}_{11} = -\underline{Z}_{22}$ и $\Delta_H = -1$.

Любой симметричный пассивный четырехполюсник полностью описывается двумя независимыми параметрами: $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$ и любым из параметров \underline{A}_{12} и \underline{A}_{21} (так как они связаны уравнением $\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1$); $\underline{Y}_{11} = -\underline{Y}_{22}$ и $\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21}$; $\underline{Z}_{11} = -\underline{Z}_{22}$ и $\underline{Z}_{12} = -\underline{Z}_{21}$; $\underline{H}_{12} = \underline{H}_{21}$ и любым из параметров \underline{H}_{11} и \underline{H}_{22} (так как для симметричных четырехполюсников $\underline{H}_{11}\underline{H}_{22} - \underline{H}_{12}\underline{H}_{21} = -1$); $\underline{F}_{12} = \underline{F}_{21}$ и любым из параметров \underline{F}_{11} и \underline{F}_{22} .

6. Параметры-коэффициенты имеют определенный физический смысл. Для выявления этого физического смысла следует четырехполюсник поставить в такой режим работы, при котором уравнения передачи содержат лишь один интересующий нас параметр. Подобное произойдет, если использовать режимы холостого хода (ХХ — размыкания пары зажимов) и короткого замыкания (КЗ — замыкания накоротко пары зажимов). Так, при ХХ на зажимах 2—2'

(см. рис. 12.1) ток $\underline{I}_2 = 0$. Тогда уравнения передачи, содержащие ток \underline{I}_2 , например уравнения (12.3) в \underline{Z} -параметрах, имеют вид:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 \text{ и } \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1.$$

Коэффициент $\underline{Z}_{11} = \underline{U}_1/\underline{I}_1$ при $\underline{I}_2 = 0$ есть входное сопротивление четырехполюсника, измеренное со стороны зажимов $1-1'$ при разомкнутых зажимах $2-2'$ или входное сопротивление ХХ.

Коэффициент $\underline{Z}_{21} = \underline{U}_2/\underline{I}_1|_{\underline{I}_2=0}$ — отношение комплексного действующего напряжения на разомкнутых зажимах $2-2'$ четырехполюсника к комплексному действующему току, протекающему через зажимы $1-1'$, или взаимное (передаточное) сопротивление ХХ.

Рассматривая режим ХХ на зажимах $1-1'$ ($\underline{I}_1 = 0$), убеждаемся из уравнений (12.3), что \underline{Z}_{22} — выходное сопротивление четырехполюсника при разомкнутых входных зажимах, а \underline{Z}_{12} — взаимное (передаточное) сопротивление при ХХ на зажимах $1-1'$.

Предлагаем читателю самостоятельно установить физический смысл остальных параметров, «устранивая» поочередно ХХ на зажимах $2-2'$ ($\underline{I}_2 = 0$) и зажимах $1-1'$ ($\underline{I}_1 = 0$) и КЗ на этих же зажимах ($\underline{U}_2 = 0$ и $\underline{U}_1 = 0$) и используя соответствующие уравнения передачи (12.2), (12.4) и (12.5).

7. Из предыдущего свойства следует, что параметры-коэффициенты являются комплексными величинами, так как они определяются отношением комплексных амплитуд (действующих значений) напряжений и токов. В случае анализа четырехполюсника в режиме негармонических колебаний используют спектральные представления электрических величин. Можно показать, что параметры-коэффициенты, рассматриваемые относительно не отдельной частоты, а определенного спектра частот, являются рациональными функциями оператора $j\omega$. При переходе от оператора $j\omega$ к оператору p параметры-коэффициенты представляют собой рациональные функции оператора p .

Пример. Для четырехполюсника на рис. 12.2, б определим параметр \underline{Z}_{11} . Исходя из физического смысла параметра \underline{Z}_{11} (он является входным сопротивлением Г-образной схемы при разомкнутых зажимах на выходе), определяем из рис. 12.2, б: $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$.

Этот же результат можно получить следующим образом:

$$\underline{Z}_{11} = \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \right|_{\underline{I}_2=0} = \left. \frac{\underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2}{\underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2} \right|_{\underline{I}_2=0} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2,$$

где значения параметров \underline{A}_{11} и \underline{A}_{21} взяты из первого примера этой главы.

Пусть далее двухполюсник \underline{Z}_1 состоит только из индуктивности L , а двухполюсник \underline{Z}_2 — только из емкости C . Тогда, используя операторную форму записи, получаем

$$Z_1(p) = pL; \quad Z_2(p) = 1/(pC) \quad \text{и} \quad Z_{11}(p) = pL + 1/(pC) = \frac{p^2 + 1/(LC)}{p},$$

т. е. Z_{11} является дробно-рациональной функцией оператора p с положительными вещественными коэффициентами. Нули этой функции $p_{01,02} = \pm j\sqrt{1/(LC)}$ — мнимые и лежат на мнимой оси комплексной плоскости, полюс $p_1 = 0$. При замене оператора p оператором $j\omega$ переходим к частотной характеристике

$$Z_{11}(j\omega) = L/j\omega \left[(1/LC) - \omega^2 \right].$$

Полученные выражения $Z_{11}(p)$ и $Z_{11}(j\omega)$ напоминают выражение входного сопротивления последовательного LC -контура. Это объясняется тем, что входное сопротивление Γ -образной цепи (см. рис. 12.2, б) при разомкнутых зажимах определяется последовательным соединением двухполюсников \underline{Z}_1 и \underline{Z}_2 (индуктивности и емкости), т. е. \underline{Z}_{11} является сопротивлением двухполюсника (ср. с (4.115)).

12.3. Применение матриц к расчету четырехполюсников

Уравнения передачи в матричной форме. Любую из систем уравнений передачи четырехполюсника можно записать в матричной форме. В частности, для системы уравнений в \mathbf{Y} -параметрах (12.2)

$$\begin{Bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{Bmatrix}, \quad (12.7)$$

где слева и справа записаны матрицы-столбцы.

Действительно, выполняя операцию умножения в правой части (12.7), имеем

$$\begin{Bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 \\ \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2 \end{Bmatrix}.$$

Из равенства этих матриц следует система уравнений (12.2). Система уравнений в \mathbf{Z} -параметрах в матричной форме записи имеет вид:

$$\begin{Bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Bmatrix}.$$

Для уравнений передачи в \mathbf{A} -параметрах

$$\begin{Bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{Bmatrix}.$$

Наконец, запишем в матричной форме системы уравнений передачи в \mathbf{H} -параметрах и \mathbf{F} -параметрах:

$$\begin{Bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{F}_{11} & \underline{F}_{12} \\ \underline{F}_{21} & \underline{F}_{22} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Bmatrix}.$$

Расчет соединений четырехполюсников. Сложные четырехполюсники можно представить в виде различных соединений простых четырехполюсников. При этом параметры сложного четырехполюс-

ника могут быть найдены по параметрам образующих его простых четырехполюсников.

На рис. 12.4 показана схема *каскадного соединения* двух четырехполюсников. В соответствии с обозначениями на рисунке при каскадном соединении $\underline{U}_2' = \underline{U}_1''$ и $\underline{I}_2' = \underline{I}_1''$. Для каждого из четырехполюсников можно составить матричные равенства:

$$\begin{Bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{A}_{11}' & \underline{A}_{12}' \\ \underline{A}_{21}' & \underline{A}_{22}' \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \underline{U}_2' \\ \underline{I}_2' \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \underline{U}_1'' \\ \underline{I}_1'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{A}_{11}'' & \underline{A}_{12}'' \\ \underline{A}_{21}'' & \underline{A}_{22}'' \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{Bmatrix}.$$

Так как матрицы $\begin{Bmatrix} \underline{U}_2' \\ \underline{I}_2' \end{Bmatrix}$ и $\begin{Bmatrix} \underline{U}_1'' \\ \underline{I}_1'' \end{Bmatrix}$ равны между собой, получаем

для результирующего четырехполюсника

$$\begin{Bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{A}_{11}' & \underline{A}_{12}' \\ \underline{A}_{21}' & \underline{A}_{22}' \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \underline{A}_{11}'' & \underline{A}_{12}'' \\ \underline{A}_{21}'' & \underline{A}_{22}'' \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{Bmatrix}.$$

Таким образом, матрица **A** результирующего четырехполюсника при каскадном соединении равна произведению одноименных матриц соединенных четырехполюсников: $\mathbf{A} = \mathbf{A}'\mathbf{A}''$. Это правило распространяется на любое число каскадно соединенных четырехполюсников, причем матрицы должны записываться в порядке следования четырехполюсников, так как умножение матриц не подчиняется переместительному закону.

При *последовательном соединении* двух (или большего числа) четырехполюсников (рис. 12.5) удобно пользоваться матрицами **Z**. Для этого вида соединения $\underline{U}_1 = \underline{U}_1' + \underline{U}_1''$ и $\underline{U}_2 = \underline{U}_2' + \underline{U}_2''$, т. е. напряжения на выходах и входах отдельных четырехполюсников в результирующем четырехполюснике складываются. Записывая уравнения передачи в Z-форме для каждого четырехполюсника

$$\begin{Bmatrix} \underline{U}_1' \\ \underline{U}_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{Z}_{11}' & \underline{Z}_{12}' \\ \underline{Z}_{21}' & \underline{Z}_{22}' \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{Bmatrix} \underline{U}_1'' \\ \underline{U}_2'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{Z}_{11}'' & \underline{Z}_{12}'' \\ \underline{Z}_{21}'' & \underline{Z}_{22}'' \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Bmatrix}$$

и складывая эти матричные равенства, получаем

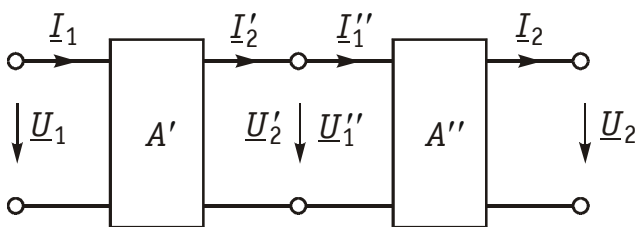


Рис. 12.4

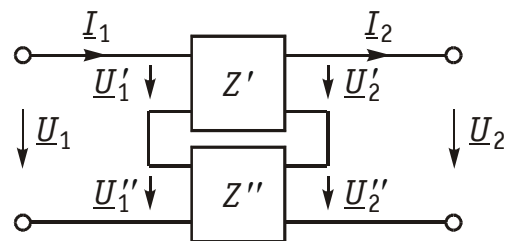


Рис. 12.5

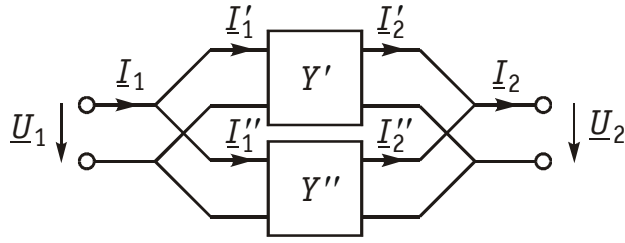


Рис. 12.6

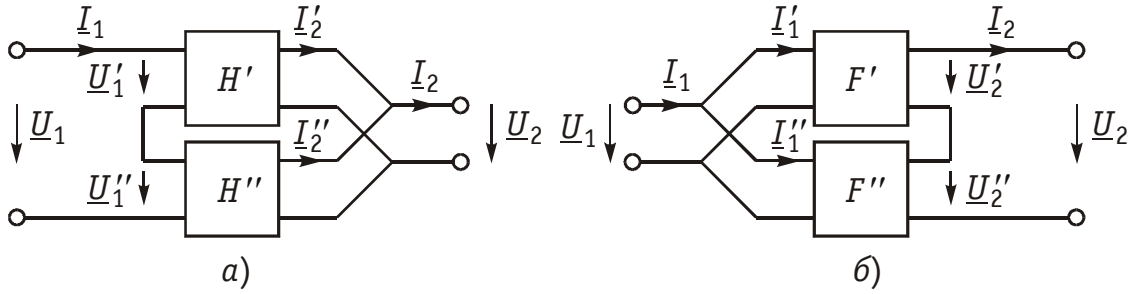


Рис. 12.7

$$\begin{Bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{Bmatrix} = \left(\begin{Bmatrix} \underline{Z}'_{11} & \underline{Z}'_{12} \\ \underline{Z}'_{21} & \underline{Z}'_{22} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \underline{Z}''_{11} & \underline{Z}''_{12} \\ \underline{Z}''_{21} & \underline{Z}''_{22} \end{Bmatrix} \right) \times \begin{Bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{Bmatrix}.$$

При последовательном соединении четырехполюсников матрица \mathbf{Z} результирующего четырехполюсника равна сумме одноименных матриц соединенных четырехполюсников: $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}' + \mathbf{Z}''$.

Совершенно аналогично доказывается, что при *параллельном соединении* четырехполюсников (рис. 12.6), где $\underline{I}_1 = \underline{I}'_1 + \underline{I}''_1$ и $\underline{I}_2 = \underline{I}'_2 + \underline{I}''_2$, матрица \mathbf{Y} результирующего четырехполюсника равна сумме одноименных матриц соединяемых четырехполюсников: $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}' + \mathbf{Y}''$.

Матрицы \mathbf{H} удобно применять при смешанном — *последовательно-параллельном* соединении четырехполюсников (рис. 12.7, а). При этом $\mathbf{H} = \mathbf{H}' + \mathbf{H}''$.

Матрицы \mathbf{F} удобно применять при *параллельно-последовательном* соединении четырехполюсников (рис. 12.7, б). При этом $\mathbf{F} = \mathbf{F}' + \mathbf{F}''$.

Параметры типовых четырехполюсников. К типовым пассивным четырехполюсникам относят Г-, Т-, П-образные схемы (см. рис. 12.2, б—г), мостовые (см. рис. 12.2, а) и Т-перекрытые схемы (см. рис. 12.2, д). Можно получить, основываясь на матричных методах расчета, параметры типовых четырехполюсников, если рассматривать их как сложные четырехполюсники, состоящие из соединений простейших четырехполюсников.

Рассмотрим сначала простейшие четырехполюсники, изображенные на рис. 12.8, а и б. Для первого из них (рис. 12.8, а), пользуясь законами Кирхгофа, можно записать: $\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_1$ и

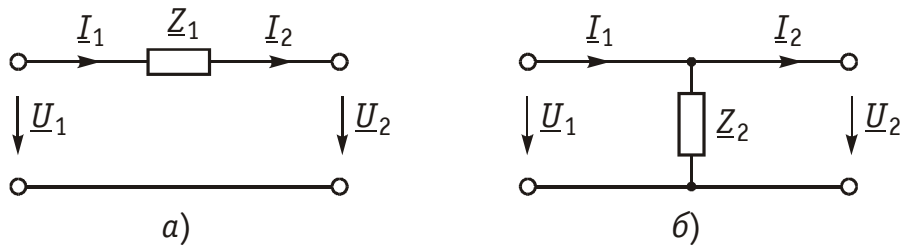


Рис. 12.8

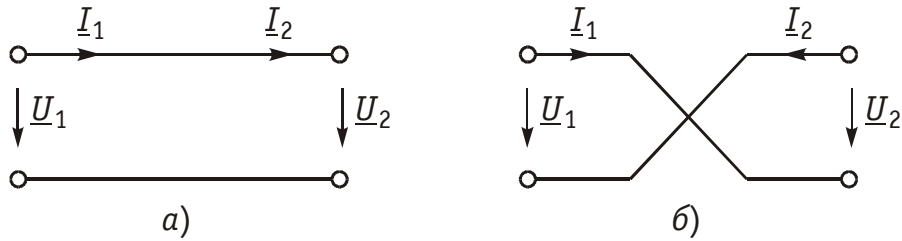


Рис. 12.9

$\underline{I}_1 = \underline{I}_2$. Сравнивая эти уравнения с уравнениями в **A**-параметрах (12.4), можно записать матрицу **A** для такого четырехполюсника:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для второго простейшего четырехполюсника (рис. 12.8, б) имеем $\underline{U}_1 = \underline{U}_2$ и $\underline{I}_1 = \underline{U}_2 / Z_2 + \underline{I}_2$ и поэтому

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Другие матрицы — **Z**, **Y** и **H** — могут быть легко получены из табл. 12.1. Заметим, что для первого простейшего четырехполюсника не существует **Z**-параметров, так как все они обращаются в бесконечность. По этой же причине для второго простейшего четырехполюсника не существует **Y**-параметров.

На рис. 12.9, а, б показаны соответственно прямое и скрещенное соединения. Нетрудно убедиться, что прямому соединению соответствует матрица

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а скрещенному соединению — матрица

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Найдем теперь параметры типовых пассивных четырехполюсников, изображенных на рис. 12.2. Г-образный четырехполюсник (рис. 12.2, б) получается путем каскадного соединения простейших четырехполюсников, приведенных на рис. 12.8, а и б. Его матрица

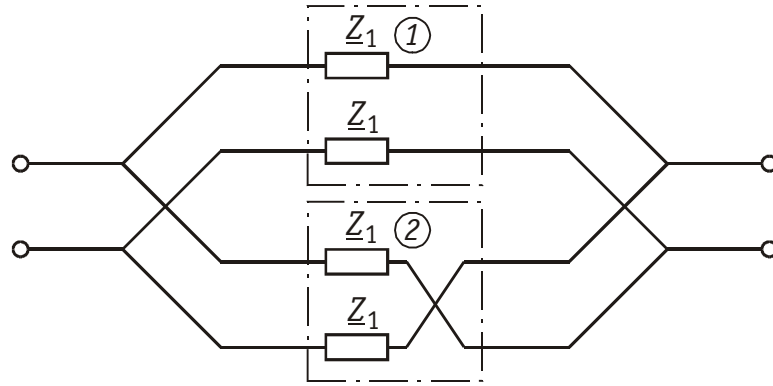


Рис. 12.10

A может быть получена перемножением вышеприведенных матриц простейших четырехполюсников:

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} 1 & \underline{Z}_1 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 1/\underline{Z}_2 & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 + \underline{Z}_1/\underline{Z}_2 & \underline{Z}_1 \\ 1/\underline{Z}_2 & 1 \end{Bmatrix}. \quad (12.8)$$

Для Т-образного четырехполюсника (рис. 12.2, в) матрицу **A** можно найти, если рассматривать его как каскадное соединение Г-образной схемы с элементами \underline{Z}_1 и \underline{Z}_2 и простейшей схемы с элементом \underline{Z}_3 в продольном плече (рис. 12.8, а):

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{Bmatrix} 1 + (\underline{Z}_1/\underline{Z}_2) & \underline{Z}_1 \\ 1/\underline{Z}_2 & 1 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 1 & \underline{Z}_3 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} 1 + (\underline{Z}_1/\underline{Z}_2) & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + (\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 / \underline{Z}_2) \\ 1/\underline{Z}_2 & 1 + (\underline{Z}_3 / \underline{Z}_2) \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (12.9)$$

Для П-образной схемы (рис. 12.2, г), если ее представить в виде каскадного соединения простейшего четырехполюсника, изображенного на рис. 12.8, б и Г-образного четырехполюсника с элементами \underline{Z}_2 в продольном плече и \underline{Z}_3 в поперечном плече, матрица

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 1/\underline{Z}_1 & 1 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 1 + (\underline{Z}_2/\underline{Z}_3) & \underline{Z}_2 \\ 1/\underline{Z}_3 & 1 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} 1 + (\underline{Z}_2/\underline{Z}_3) & \underline{Z}_2 \\ 1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2/(\underline{Z}_1 \underline{Z}_3) & 1 + (\underline{Z}_2/\underline{Z}_3) \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Зная **A**-параметры Г-, Т- и П-образных четырехполюсников, можно найти по табл. 12.1 другие системы параметров-коэффициентов.

Мостовой четырехполюсник (см. рис. 12.2, а) можно представить как параллельное соединение двух простейших четырехполюсников (рис. 12.10). При параллельном соединении следует пользоваться матрицами **Y**. Используя данные табл. 12.1, найдем по известным матрицам **A** простейших четырехполюсников (второй из них имеет скрещенные выходные зажимы) их матрицы **Y** и,

просуммировав последние, получим результирующую матрицу \mathbf{Y} мостового четырехполюсника. Матрицы \mathbf{Y} простейших четырехполюсников с учетом скрещивания выходных зажимов во втором равны

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\underline{Z}_1} & -\frac{1}{2\underline{Z}_1} \\ \frac{1}{2\underline{Z}_1} & -\frac{1}{2\underline{Z}_1} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\underline{Z}_2} & \frac{1}{2\underline{Z}_2} \\ -\frac{1}{2\underline{Z}_2} & -\frac{1}{2\underline{Z}_2} \end{vmatrix}.$$

Отсюда матрица \mathbf{Y} мостовой схемы

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 = \begin{vmatrix} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{2\underline{Z}_1\underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2}{2\underline{Z}_1\underline{Z}_2} \\ \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{2\underline{Z}_1\underline{Z}_2} & -\frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{2\underline{Z}_1\underline{Z}_2} \end{vmatrix}. \quad (12.10)$$

С помощью табл. 12.1 можно получить матрицы \mathbf{A} и \mathbf{Z} мостового четырехполюсника:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{2} & \frac{2\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} \\ \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{2} & \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} \end{vmatrix}; \quad \mathbf{Z} = \begin{vmatrix} \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{2} & \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{2} \\ \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2}{2} & -\frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{2} \end{vmatrix}.$$

Предлагаем читателям самостоятельно найти параметры Т-перекрытого четырехполюсника (см. рис. 12.2, ∂), рассматривая его как параллельное соединение простейшего четырехполюсника с сопротивлением \underline{Z}_4 в продольном плече и Т-образного четырехполюсника.

Параметры зависимых источников. Системе уравнений в \mathbf{Y} -параметрах (12.2, δ) можно сопоставить в соответствии с ЗТК схему с двумя зависимыми источниками типа ИТУН (рис. 12.11, a). Если положить $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{22} = 0$ и $\underline{Y}_{21} = \underline{H}_Y$, то получим идеальный источник тока, управляемый напряжением (рис. 1.7, δ). Таким образом, \mathbf{Y} -матрица идеального ИТУНа равна

$$\mathbf{Y} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \underline{H}_Y & 0 \end{vmatrix}.$$

Воспользовавшись таблицей 12.1, можно записать его \mathbf{A} -матрицу:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{\underline{H}_Y} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Аналогичным образом системе уравнений (12.5) в \mathbf{H} -параметрах можно сопоставить согласно ЗНК схему с двумя зависимыми

источниками: ИНУН и ИТУН (рис. 12.11, б). Принимая $\underline{H}_{11} = \underline{H}_{12} = \underline{H}_{22} = 0$ и $\underline{H}_{21} = \underline{H}_i$ переходим к идеальному источнику тока, управляемому током (рис. 1.7, з). Его матрица \mathbf{H} имеет вид

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ H_i & 0 \end{bmatrix},$$

а переход с помощью таблицы 12.1 к \mathbf{A} -матрице дает

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{H_i} \end{bmatrix}.$$

Если использовать систему уравнений (12.3) в \mathbf{Z} -параметрах, то получаем схему с двумя источниками типа ИНУТ (рис. 12.11, в). Полагая $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{22} = 0$ и $\underline{Z}_{21} = \underline{H}_Z$, приходим к идеальному источнику напряжения, управляемому током (рис. 1.7, в). Значит \mathbf{Z} -матрица идеального ИНУТ записывается в виде

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ H_Z & 0 \end{bmatrix}.$$

Соответствующая ей \mathbf{A} -матрица равна

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{H_Z} & 0 \end{bmatrix}.$$

Система уравнений четырехполюсника в \mathbf{F} -параметрах (12.5) связывает входной ток \underline{I}_1 и выходное напряжение \underline{U}_2 с остальными двумя величинами \underline{U}_1 и \underline{I}_2 :

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{F}_{11}\underline{U}_1 + \underline{F}_{12}\underline{I}_2; \\ \underline{U}_2 &= \underline{F}_{21}\underline{U}_1 + \underline{F}_{22}\underline{I}_2. \end{aligned} \right\}$$

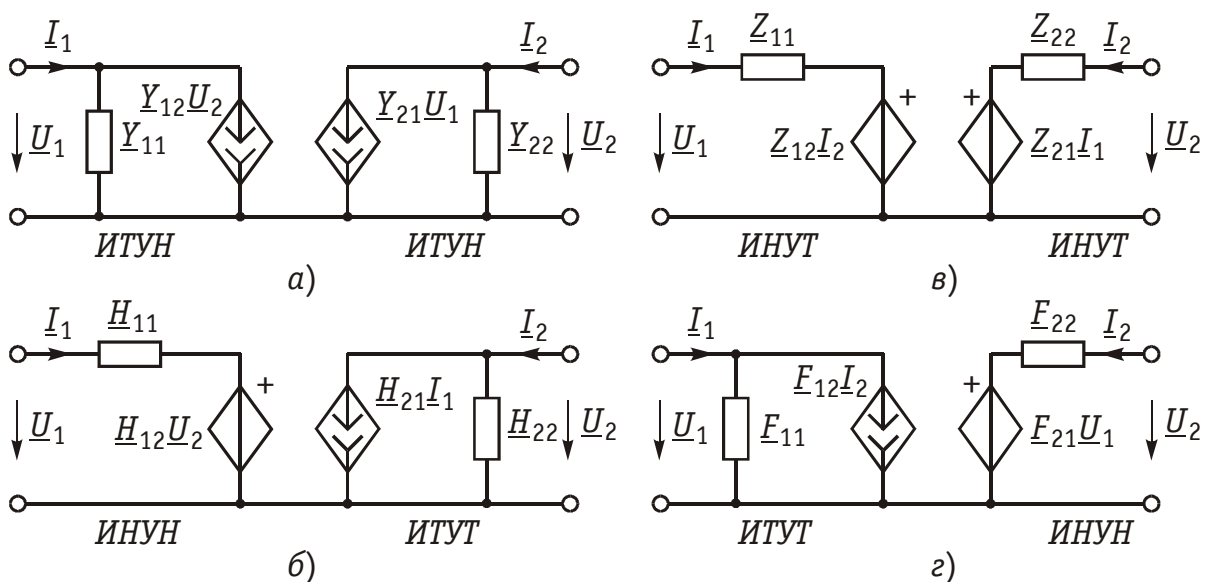


Рис. 12.11

Она может быть представлена схемой, показанной на рис. 12.11, *г*. При $\underline{F}_{11} = \underline{F}_{12} = \underline{F}_{22} = 0$ и $\underline{F}_{21} = \underline{H}_u$ данная схема превращается в идеальный ИНУН (рис. 1.7, *а*). Следовательно, **F**-матрица ИНУН записывается в виде:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ H_u & 0 \end{bmatrix},$$

и соответствующая ей **A**-матрица:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ H_u & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

К числу простейших активных линейных четырехполюсников с зависимыми источниками относятся транзисторы и лампы, работающие в линейном режиме.

Чаще всего для транзисторов используют уравнения передачи в **H**- или **Y**-параметрах. Иногда используются также **Z**-параметры. Усредненные значения **Y**-, **Z**- и **H**-параметров транзисторов приводятся в справочной литературе. Следует иметь в виду, что одни и те же параметры имеют различные значения в зависимости от того, какой именно из электродов транзистора (эмиттер, база, коллектор) является общим для входной и выходной пар зажимов транзистора как четырехполюсника. Различают поэтому **Y**-, **Z**- и **H**-параметры транзисторов с общим эмиттером, с общей базой и с общим коллектором.

Пример. Определим параметры биполярного транзистора *n-p-n* типа, включенного по схеме с общим эмиттером (рис. 12.12, *а*). Его схема замещения в области нижних частот показана на рис. 12.12, *б*. Сравнивая эту схему со схемой рис. 12.11, *а*, видим, что при $\underline{Y}_{11} = 1/R_{БЭ}$, $\underline{Y}_{12} = 0$, $\underline{Y}_{21} = H_Y$ и $\underline{Y}_{22} = 0$ обе схемы становятся идентичными. Следовательно, **Y**-матрица биполярного транзистора с общим эмиттером имеет вид

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{БЭ}} & 0 \\ H_Y & 0 \end{bmatrix}.$$

По формулам табл. 9.1 находим матрицы **A** и **H** транзистора:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{H_Y} \\ 0 & \frac{1}{H_Y R_{БЭ}} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} R_{БЭ} & 0 \\ H_Y R_{БЭ} & 0 \end{bmatrix}.$$

Электронная лампа как четырехполюсник чаще всего характеризуется **Y**- или **A**-параметрами. Для электронной лампы с общим катодом, если считать, что сеточные токи отсутствуют, и не учитывать паразитные емкости, имеем:

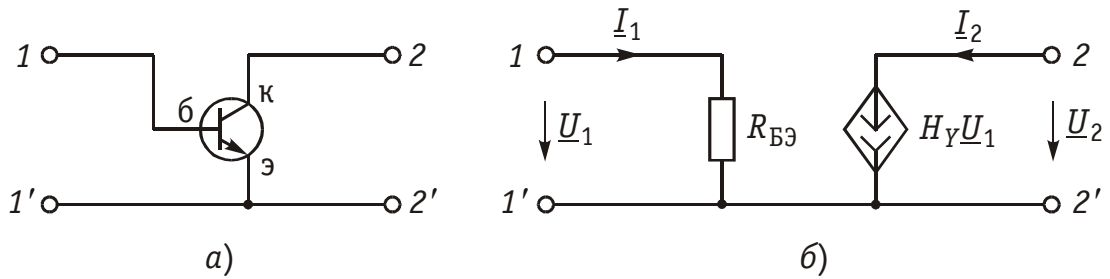


Рис. 12.12

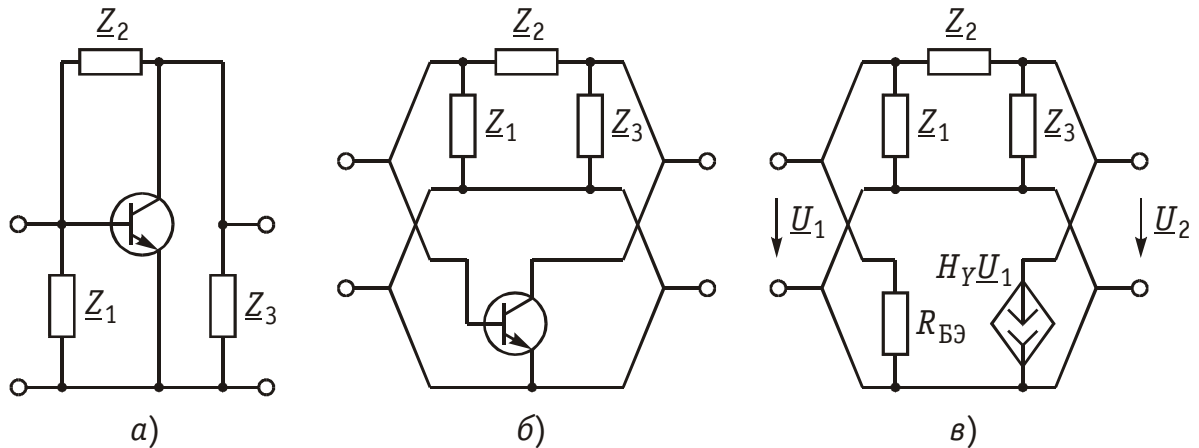


Рис. 12.13

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{12} = 0; \quad \underline{Y}_{21} = S; \quad \underline{Y}_{22} = 1/R_i; \\ \underline{A}_{11} = -1/SR_i = -1/\mu; \quad \underline{A}_{12} = -1/S; \quad \underline{A}_{21} = \underline{A}_{22} = 0, \end{aligned}$$

где S — крутизна электронной лампы (скорость изменения анодного тока с изменением сеточного напряжения); R_i — внутреннее сопротивление лампы; μ — коэффициент усиления лампы (см. § 1.2).

При перечисленных выше условиях **Z**- и **H**-параметров для электронной лампы не существует. В общем случае, когда с влиянием между электродами лампы через паразитные элементы приходится считаться, ни один из параметров лампы с учетом ее паразитных элементов не равен нулю и лампа как четырехполюсник может характеризоваться любой системой параметров.

Параметры сложных четырехполюсников. При анализе сложного четырехполюсника следует выделить простейшие и типовые четырехполюсники и установить способы их соединения. Затем с помощью матричных методов расчета можно определить соответствующие матрицы сложного четырехполюсника.

Пример. Рассмотрим методику определения **H**-параметров каскада усилителя на транзисторе со схемой, показанной на рис. 12.13, а. Каскад усилителя образуется в результате параллельного соединения транзистора и П-образного пассивного четырехполюсника (рис. 12.13, б). Поэтому следует оперировать матрицами **Y** соединяемых четырехполюсников. Ранее для П-образной схемы была найдена матрица **A**. От нее с помощью табл. 12.1 можно перейти к мат-

рице **Y** П-образного четырехполюсника. Для транзистора, включенного по схеме с общим эмиттером, **Y**-параметры определяем из выбранной модели (рис. 12.13, *в*), либо берем из справочника. Просуммировав найденные таким образом матрицы **Y** П-образного четырехполюсника и транзистора, получим матрицу **Y** усилительного каскада. Далее по табл. 12.1 перейдем к искомой матрице **H** усилительного каскада.

12.4. Параметры холостого хода и короткого замыкания четырехполюсника

Входное сопротивление четырехполюсника. Если к одной паре зажимов четырехполюсника, например $2-2'$, подключить произвольное сопротивление \underline{Z}_H (рис. 12.14, *а*), то со стороны другой пары зажимов, т. е. $1-1'$, четырехполюсник можно рассматривать как двухполюсник с входным сопротивлением \underline{Z}_{BX1} , которое называют входным сопротивлением четырехполюсника. Следовательно, $\underline{Z}_{BX1} = \underline{U}_1 / \underline{I}_1$.

Входное сопротивление можно выразить через параметры четырехполюсника. Проще всего это сделать, воспользовавшись выражениями для \underline{U}_1 и \underline{I}_1 из уравнений передачи в **A**-параметрах (12.4). В этом случае

$$\underline{Z}_{BX1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2}{\underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_H + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_H + \underline{A}_{22}}, \quad (12.11)$$

так как

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2.$$

На рис. 12.14, *б* показан тот же четырехполюсник, нагруженный со стороны зажимов $1-1'$ на сопротивление $\underline{Z}_Г$. Его входное сопротивление со стороны зажимов $2-2'$ равно $\underline{Z}_{BX2} = \underline{U}'_1 / \underline{I}'_1$.

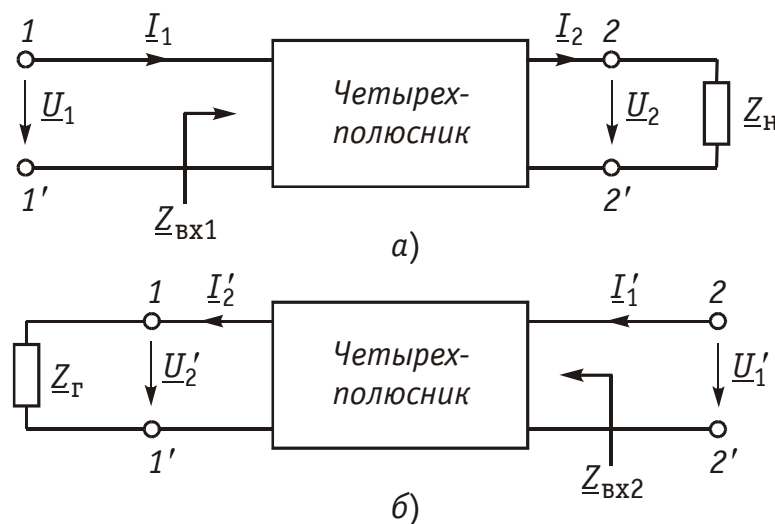


Рис. 12.14

В связи с тем, что изменилось направление передачи энергии, следует воспользоваться уравнениями передачи (12.6). Тогда

$$\underline{Z}_{\text{вх}2} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{U}'_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}'_2}{\underline{A}_{21}\underline{U}'_2 + \underline{A}_{11}\underline{I}'_2} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_\Gamma + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_\Gamma + \underline{A}_{11}}, \quad (12.12)$$

так как $\underline{U}'_2 = \underline{Z}_\Gamma \underline{I}'_2$.

Заметим, что при изменении направления передачи энергии через четырехполюсник в выражениях (12.11) и (12.12) параметры \underline{A}_{11} и \underline{A}_{22} поменялись местами (см. свойство 4, § 12.2).

Входное сопротивление четырехполюсника не является его внутренним параметром, так как оно зависит не только от свойств четырехполюсника, но и от свойств внешней цепи (нагрузки), на которую замкнута пара зажимов четырехполюсника.

Параметры холостого хода и короткого замыкания. Формулы (12.11) и (12.12) описывают входные сопротивления четырехполюсника при произвольных сопротивлениях нагрузки $\underline{Z}_\text{н}$ и \underline{Z}_Γ . Из них легко получить значения $\underline{Z}_{\text{вх}1}$ и $\underline{Z}_{\text{вх}2}$ при разомкнутых и замкнутых накоротко зажимах четырехполюсника.

В режиме холостого хода на зажимах 2—2' (выходные зажимы разомкнуты) входное сопротивление четырехполюсника со стороны зажимов 1—1' обозначается $\underline{Z}_{\text{хх}1}$ и определяется из формулы (12.11) при $\underline{Z}_\text{н} = \infty$:

$$\underline{Z}_{\text{хх}1} = \underline{A}_{11}/\underline{A}_{21} = \underline{Z}_{11}. \quad (12.13)$$

Аналогично входное сопротивление со стороны зажимов 2—2' при разомкнутых зажимах 1—1' определяется из (12.12) при $\underline{Z}_\Gamma = \infty$:

$$\underline{Z}_{\text{хх}2} = \underline{A}_{22}/\underline{A}_{21} = \underline{Z}_{22}. \quad (12.14)$$

При коротком замыкании зажимов 2—2' и 1—1' в формулах (12.11) и (12.12) нужно положить $\underline{Z}_\text{н} = 0$ и $\underline{Z}_\Gamma = 0$. В этом случае

$$\underline{Z}_{\text{кз}1} = \underline{A}_{12}/\underline{A}_{22} = 1/\underline{Y}_{11} \text{ и } \underline{Z}_{\text{кз}2} = \underline{A}_{12}/\underline{A}_{11} = 1/\underline{Y}_{22}. \quad (12.15)$$

Величины $\underline{Z}_{\text{хх}1}$, $\underline{Z}_{\text{хх}2}$, $\underline{Z}_{\text{кз}1}$ и $\underline{Z}_{\text{кз}2}$ называются *параметрами холостого хода и короткого замыкания*. Значения этих параметров для любой данной частоты могут быть измерены с помощью специального прибора для измерения комплексных сопротивлений — моста переменного тока. Это особенно удобно, когда четырехполюсник представляется в виде «черного ящика» и нет возможности узнать его содержимое или рассчитать какие-либо другие системы параметров, либо когда влияние паразитных элементов четырехполюсника трудно учесть аналитически. Измерение же других систем параметров часто представляет значительную сложность.

Из приведенных выше соотношений для параметров ХХ и КЗ легко получить, что $\underline{Z}_{\text{хх}1}/\underline{Z}_{\text{хх}2} = \underline{Z}_{\text{кз}1}/\underline{Z}_{\text{кз}2}$, т. е. только три пара-

метра из четырех являются независимыми. Этих параметров достаточно для составления уравнений передачи пассивного четырехполюсника, причем из параметров ХХ и КЗ может быть получена любая система параметров-коэффициентов.

У активного четырехполюсника все четыре параметра независимы, поэтому их нельзя найти по параметрам ХХ и КЗ.

В случае симметричного пассивного четырехполюсника параметры $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$ и, следовательно, $\underline{Z}_{xx1} = \underline{Z}_{xx2}$ и $\underline{Z}_{kз1} = \underline{Z}_{kз2}$, т. е. симметричный четырехполюсник характеризуется только двумя параметрами ХХ и КЗ.

12.5. Характеристические параметры четырехполюсника

Согласованное включение четырехполюсника. При передаче сигналов на расстояние может участвовать большое число каскадно соединенных четырехполюсников. На практике используется такое включение четырехполюсников, которое получило название *согласованного*. Если рассматривать четырехполюсник, включенный по схеме рис. 12.1, то это означает, что должны выполняться два условия: $\underline{Z}_{вх1} = \underline{Z}_Г$ и $\underline{Z}_{вх2} = \underline{Z}_Н$, т. е. входное сопротивление четырехполюсника должно быть согласовано с сопротивлением генератора, а выходное — с сопротивлением нагрузки.

В случае каскадного включения нескольких четырехполюсников обеспечивают согласованное включение каждого из них.

Режим согласованного включения является наиболее благоприятным при передаче сигналов, поскольку при этом отсутствуют отражения электрической энергии (а значит, ее рассеяние) на стыках «генератор — четырехполюсник» и «четыреполюсник — нагрузка» и искажение сигнала.

Характеристические сопротивления четырехполюсника. Остается не ясным, всегда ли можно включить четырехполюсник согласованно, т. е. всегда ли можно подобрать такие сопротивления $\underline{Z}_Г$ и $\underline{Z}_Н$, при которых

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{вх1} &= \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_Н + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_Н + \underline{A}_{22}} = \underline{Z}_Г; \\ \underline{Z}_{вх2} &= \frac{\underline{A}_{22}\underline{Z}_Г + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_Г + \underline{A}_{22}} = \underline{Z}_Н.\end{aligned}\tag{12.16}$$

Оказывается, для любого четырехполюсника всегда существует такая пара сопротивлений, для которой выполняется условие (12.16). Эти сопротивления называются *характеристическими* (собственными) сопротивлениями четырехполюсника и обозначаются $\underline{Z}_{с1}$ и $\underline{Z}_{с2}$. Индекс «1» указывает на то, что характеристическое сопротивление определяется со стороны зажимов 1—1', а индекс «2» — со стороны зажимов 2—2'.

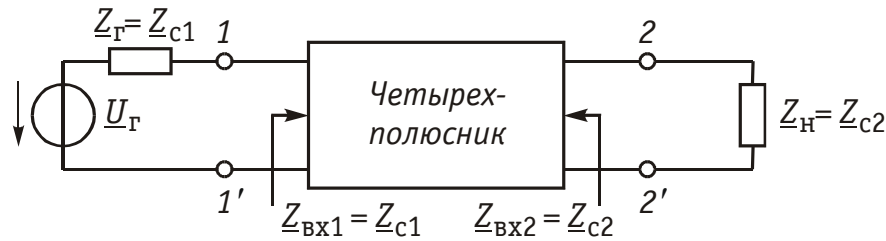


Рис. 12.15

Таким образом, если в качестве внутреннего сопротивления генератора выбрать $\underline{Z}_Г = \underline{Z}_{c1}$, а в качестве сопротивления нагрузки $\underline{Z}_Н = \underline{Z}_{c2}$, то $\underline{Z}_{вх1}$ будет равно \underline{Z}_{c1} , а $\underline{Z}_{вх2} = \underline{Z}_{c2}$. Рисунок 12.15 иллюстрирует это свойство характеристических сопротивлений.

Можно теперь уточнить определение режима согласованного включения. *Режимом согласованного включения четырехполюсника* называется такой режим его работы, когда внутреннее сопротивление генератора выбрано равным характеристическому сопротивлению четырехполюсника \underline{Z}_{c1} , а сопротивление нагрузки равным характеристическому сопротивлению \underline{Z}_{c2} .

Положив в (12.16) $\underline{Z}_{вх1} = \underline{Z}_Г = \underline{Z}_{c1}$ и $\underline{Z}_{вх2} = \underline{Z}_Н = \underline{Z}_{c2}$, получим

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{c1} &= \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_{c2} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{c2} + \underline{A}_{22}}; \\ \underline{Z}_{c2} &= \frac{\underline{A}_{22}\underline{Z}_{c1} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{c1} + \underline{A}_{11}}.\end{aligned}$$

Совместное решение этих уравнений относительно величин \underline{Z}_{c1} и \underline{Z}_{c2} дает выражение характеристических сопротивлений через \underline{A} -параметры:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{c1} &= \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}/\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}}; \\ \underline{Z}_{c2} &= \sqrt{\underline{A}_{22}\underline{A}_{12}/\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}}.\end{aligned}\tag{12.17}$$

Характеристическое сопротивление можно выразить через параметры ХХ и КЗ. Проще всего это получить из (12.17), если воспользоваться формулами (12.13)–(12.15), где параметры ХХ и КЗ выражены через \underline{A} -параметры:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{c1} &= \sqrt{\underline{Z}_{xx1}\underline{Z}_{кз1}}; \\ \underline{Z}_{c2} &= \sqrt{\underline{Z}_{xx2}\underline{Z}_{кз2}}.\end{aligned}\tag{12.18}$$

Последние формулы удобны для экспериментального определения характеристических сопротивлений методами ХХ и КЗ.

Пример. Дан резистивный Г-образный четырехполюсник (см. рис. 12.2, б) с элементами $\underline{Z}_1 = 1600$ Ом, $\underline{Z}_2 = 900$ Ом. Включим его согласованно с генератором и нагрузкой. Для согласования четырехполюсника с генератором нужно выбрать его внутреннее сопротивление равным характеристическому сопро-

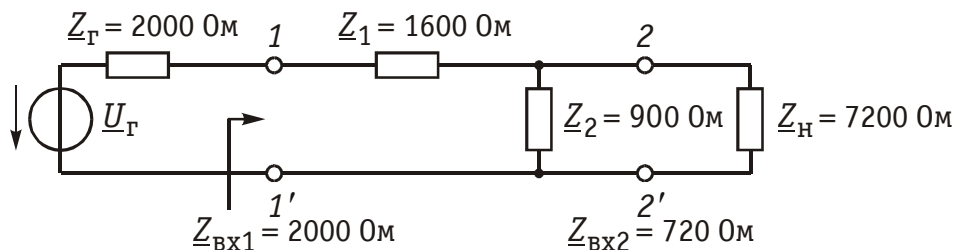


Рис. 12.16

тивлению четырехполюсника со стороны зажимов $1-1'$, т. е. $Z_G = Z_{c1}$. Чтобы согласовать четырехполюсник с нагрузкой, следует подключить к его зажимам $2-2'$ сопротивление нагрузки $Z_H = Z_{c2}$.

Матрица **A** четырехполюсника имеет вид

$$A = \begin{Bmatrix} 1 + Z/Z_2 & Z_1 \\ 1/Z_2 & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2,77 & 1600 \\ 0,00111 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Зная **A**-параметры, по формулам (12.17) определяем характеристические сопротивления четырехполюсника: $Z_{c1} = \sqrt{A_{11}A_{12}/A_{21}A_{22}} = 2000$ Ом и $Z_{c2} = \sqrt{A_{22}A_{12}/A_{21}A_{11}} = 720$ Ом. Их можно найти также по параметрам ХХ и КЗ из формулы (12.18). Последние можно определить непосредственно из схемы: $Z_{xx1} = Z_1 + Z_2 = 2500$ Ом, $Z_{кз1} = Z_1 = 1600$ Ом и, следовательно, $Z_{c1} = \sqrt{Z_{xx1}Z_{кз1}} = 2000$ Ом. Аналогично $Z_{xx2} = Z_2 = 900$ Ом, $Z_{кз2} = Z_1Z_2/(Z_1 + Z_2) = 580$ Ом и $Z_{c2} = \sqrt{Z_{xx2}Z_{кз2}} = 720$ Ом.

Итак, внутреннее сопротивление генератора следует взять равным $Z_G = 2000$ Ом, а сопротивление нагрузки $Z_H = 720$ Ом.

Схема согласованного включения четырехполюсника показана на рис. 12.16. Входное сопротивление четырехполюсника

$$Z_{ВХ1} = (A_{11}Z_H + A_{12})/(A_{21}Z_H + A_{22}) = 2000 \text{ Ом}$$

или из схемы

$$\begin{aligned} Z_{ВХ1} &= Z_1 + Z_2Z_H/(Z_2 + Z_H) = 2000 \text{ Ом} \\ Z_{ВХ2} &= (A_{11}Z_G + A_{12})/(A_{21}Z_G + A_{11}) = 720 \text{ Ом}, \end{aligned}$$

или из схемы

$$Z_{ВХ2} = Z_2(Z_1 + Z_G)/(Z_2 + Z_1 + Z_G) = 720 \text{ Ом}.$$

Характеристическая постоянная передачи четырехполюсника.

При согласованном включении на стыках «генератор — четырехполюсник» и «четыреполюсник — нагрузка» рассеяние электрической энергии будет происходить только в четырехполюснике (например, она будет превращаться в тепловую энергию на резистивных элементах схемы).

Чтобы учесть эти потери, вводят меру передачи энергии — *характеристическую (собственную) постоянную передачи четырехполюсника*, определяемую через отношение произведения напряжения и тока на входе четырехполюсника к произведению напряжения и тока на его выходе, взятое в логарифмическом масштабе

$$\underline{\Gamma}_c = \frac{1}{2} \ln \left[\underline{U}_1 \underline{I}_1 / (\underline{U}_2 \underline{I}_2) \right], \quad (12.19)$$

причем все токи и напряжения измеряются или вычисляются в режиме согласованного включения четырехполюсника, т. е. при $\underline{Z}_r = \underline{Z}_{c1}$ и $\underline{Z}_h = \underline{Z}_{c2}$.

Так как $\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_{вх1} = \underline{I}_1 \underline{Z}_{c1}$ и $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_{вх2} = \underline{I}_2 \underline{Z}_{c2}$, характеристическую (собственную) постоянную передачи можно представить в иных формах записи

$$\underline{\Gamma}_c = \ln \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{c1}}{\underline{Z}_{c2}}} = \ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{c2}}{\underline{Z}_{c1}}}. \quad (12.20)$$

Если четырехполюсник симметричный, то из (12.17) следует, что $\underline{Z}_{c1} = \underline{Z}_{c2} = \underline{Z}_c$, а из (12.20)

$$\underline{\Gamma}_c = \ln(\underline{I}_1 / \underline{I}_2) = \ln(\underline{U}_1 / \underline{U}_2). \quad (12.21)$$

Так же, как и характеристические сопротивления, характеристическую постоянную передачи можно выразить через параметры-коэффициенты. Чтобы выразить $\underline{\Gamma}_c$ через **A**-параметры, представим ток из (12.4) в виде $\underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}_2$. Так как при согласованном включении $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_h = \underline{I}_2 \underline{Z}_{c2}$, то $\underline{I}_1 = (\underline{A}_{21} \underline{Z}_{c2} + \underline{A}_{22}) \underline{I}_2$. Подставляя выражение для \underline{I}_1 в (12.20) и учитывая из (12.17), что

$$\underline{Z}_{c2} = \sqrt{\underline{A}_{22} \underline{A}_{12} / \underline{A}_{21} \underline{A}_{11}} \text{ и } \sqrt{\underline{Z}_{c1} / \underline{Z}_{c2}} = \sqrt{\underline{A}_{11} / \underline{A}_{22}},$$

получаем:

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma}_c &= \ln \left(\underline{A}_{21} \sqrt{\underline{A}_{22} \underline{A}_{12} / \underline{A}_{21} \underline{A}_{11}} + \underline{A}_{22} \right) \sqrt{\underline{A}_{11} / \underline{A}_{22}} = \\ &= \ln \left(\sqrt{\underline{A}_{12} / \underline{A}_{21}} + \sqrt{\underline{A}_{11} / \underline{A}_{22}} \right). \end{aligned} \quad (12.22)$$

Приведем без вывода связь собственной постоянной передачи с параметрами ХХ и КЗ:

$$\text{th } \underline{\Gamma}_c = \sqrt{\underline{Z}_{кз1} / \underline{Z}_{хх1}} = \sqrt{\underline{Z}_{кз2} / \underline{Z}_{хх2}}. \quad (12.23)$$

С собственной постоянной передачи $\underline{\Gamma}_c$ связаны конкретные физические представления. Воспользуемся выражением (12.19)

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma}_c &= \frac{1}{2} \ln \frac{\underline{U}_1 \underline{I}_1}{\underline{U}_2 \underline{I}_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{|\underline{U}_1| e^{j\varphi_{u1}} |\underline{I}_1| e^{j\varphi_{i1}}}{|\underline{U}_2| e^{j\varphi_{u2}} |\underline{I}_2| e^{j\varphi_{i2}}} = \frac{1}{2} \ln \frac{|\underline{U}_1 \underline{I}_1|}{|\underline{U}_2 \underline{I}_2|} + \\ &+ \frac{1}{2} \ln e^{j[(\varphi_{u1} - \varphi_{u2}) + (\varphi_{i1} - \varphi_{i2})]}. \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\underline{\Gamma}_c = \frac{1}{2} \ln \frac{|\underline{U}_1 \underline{I}_1|}{|\underline{U}_2 \underline{I}_2|} + j \frac{(\varphi_{u1} - \varphi_{u2}) + (\varphi_{i1} - \varphi_{i2})}{2} = A_c + jB_c. \quad (12.24)$$

Величина

$$A_c = \frac{1}{2} \ln(|U_1 I_1|/|U_2 I_2|) = \frac{1}{2} \ln(S_1/S_2), \quad (12.25)$$

где S_1 и S_2 — полные мощности на входе и выходе четырехполюсника при согласованном его включении, называется *характеристическим (собственным) ослаблением четырехполюсника*. Она показывает в логарифмическом масштабе, на сколько уменьшилась мощность на выходе четырехполюсника по сравнению с мощностью на его входе при передаче энергии через четырехполюсник в режиме согласованного включения.

Для симметричного четырехполюсника из (12.21) получаем

$$A_c = \ln(|U_1|/|U_2|) = \ln(|I_1|/|I_2|). \quad (12.26)$$

В этом случае величина A_c показывает ослабление абсолютных значений напряжения и тока.

Единица измерения отношений величин в масштабе натуральных логарифмов называется *непером* (сокращенно Нп).

Ослаблению в 1 Нп соответствует уменьшение мощности в $e^2 = 7,39$ раза (так как при $(1/2) \ln(S_1/S_2) = 1$ имеем $S_1/S_2 = e^2$), а в симметричном четырехполюснике — уменьшение напряжения и тока в $e = 2,718$ раз (так как при $\ln(U_1/U_2) = \ln(I_1/I_2) = 1$, имеем $U_1/U_2 = I_1/I_2 = e$).

На практике принято вычислять и измерять ослабление в других единицах — *белах* (сокращенно Б). Ослаблению в 1 Б соответствует уменьшение мощности в 10 раз, ослаблению 2 Б — в 100 раз и т. д. Вместо формулы (12.25) в этом случае используют формулу

$$A_c = \lg(|U_1 I_1|/|U_2 I_2|) = \lg(S_1/S_2).$$

Бел достаточно крупная единица измерения. Вместо нее обычно применяют в 10 раз меньшую единицу — *децибел* (сокращенно дБ). Поскольку 1 Б = 10 дБ, то

$$A_c = 10 \lg(|U_1 I_1|/|U_2 I_2|) = 10 \lg(S_1/S_2).$$

Для симметричных четырехполюсников вместо (12.26) удобно пользоваться формулой

$$A_c = 20 \lg(|U_1|/|U_2|) = 20 \lg(|I_1|/|I_2|).$$

Между неперами и децибелами существует связь: 1 Нп = 8,7 дБ; 1 дБ = 0,115 Нп.

Пример. Несимметричный и симметричный четырехполюсники включены согласованно. Мощность на выходе первого из них уменьшается по сравнению с мощностью на входе в 1000 раз, на выходе второго по сравнению с его входом — в 10 000 раз. Определим характеристические (собственные) ослабления четырехполюсников.

Характеристическое ослабление по мощности для несимметричного четырехполюсника согласно формуле (12.25) составляет $A_c = 10 \lg 1000 = 30$ дБ, а для симметричного — $A_c = 10 \lg 10\,000 = 40$ дБ. Кроме того, для симметричного четырехполюсника можно указать характеристическое ослабление по напряжению и току. В соответствии с (12.25) оно равно $20 \lg 10\,000 = 80$ дБ.

Второе слагаемое в формуле (12.24)

$$B_c = \frac{1}{2}[(\varphi_{u1} - \varphi_{u2}) + (\varphi_{i1} - \varphi_{i2})]$$

учитывает изменение начальных фаз напряжений и токов при передаче энергии через согласованно включенный четырехполюсник и носит название *характеристической (собственной) фазы* или *фазовой постоянной четырехполюсника*.

Преобразование (12.21) для симметричного четырехполюсника приводит к характеристической (собственной) фазовой постоянной, равной разности фаз входного и выходного напряжений или токов:

$$B_c = \varphi_{u1} - \varphi_{u2} = \varphi_{i1} - \varphi_{i2}.$$

Измеряется фазовая постоянная в *радианах* (сокращенно рад) или *градусах* (сокращенно град).

Величины \underline{Z}_{c1} , \underline{Z}_{c2} и $\underline{\Gamma}_c$ образуют систему *характеристических (собственных) параметров четырехполюсника*. Она полностью описывает пассивный четырехполюсник.

Связь с другими системами параметров. Вычисление характеристических параметров по А-параметрам осуществляется с помощью формул (12.17), (12.22), а по параметрам ХХ и КЗ — с помощью формул (12.18) и (12.23). Установим обратные соотношения, т. е. выразим А-параметры и параметры ХХ и КЗ через характеристическое.

Из (12.22) следует:

$$e^{\underline{\Gamma}_c} = \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} \text{ и } e^{-\underline{\Gamma}_c} = \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} - \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}.$$

Воспользовавшись формулой Эйлера, запишем

$$\operatorname{ch} \underline{\Gamma}_c = \frac{e^{\underline{\Gamma}_c} + e^{-\underline{\Gamma}_c}}{2} = \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}}; \quad (12.27)$$

$$\operatorname{sh} \underline{\Gamma}_c = \frac{e^{\underline{\Gamma}_c} - e^{-\underline{\Gamma}_c}}{2} = \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}. \quad (12.28)$$

Далее из (12.17) получаем

$$\sqrt{\underline{Z}_{c1}/\underline{Z}_{c2}} = \sqrt{\underline{A}_{11}/\underline{A}_{22}}; \quad (12.29)$$

$$\sqrt{\underline{Z}_{c1}\underline{Z}_{c2}} = \sqrt{\underline{A}_{12}/\underline{A}_{21}}. \quad (12.30)$$

Параметр \underline{A}_{11} определяется из произведения (12.27) и (12.29)

$$\underline{A}_{11} = \operatorname{ch} \underline{\Gamma}_c \sqrt{\underline{Z}_{c1}/\underline{Z}_{c2}}. \quad (12.31)$$

Чтобы найти параметр \underline{A}_{12} , необходимо перемножить (12.28) и (12.30)

$$\underline{A}_{12} = \operatorname{sh} \underline{\Gamma}_c \sqrt{\underline{Z}_{c1}\underline{Z}_{c2}}. \quad (12.32)$$

Остальные два параметра получаются из отношений (12.28) к (12.30) и (12.27) к (12.29):

$$\underline{A}_{21} = \operatorname{sh} \underline{\Gamma}_c / \sqrt{\underline{Z}_{c1}\underline{Z}_{c2}}; \quad (12.33)$$

$$\underline{A}_{22} = \operatorname{ch} \underline{\Gamma}_c / \sqrt{\underline{Z}_{c2}/\underline{Z}_{c1}}. \quad (12.34)$$

Уравнения передачи (12.4) в \mathbf{A} -параметрах после подстановки в них величин из (12.31)–(12.34) превратятся в уравнения передачи в характеристических параметрах:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \sqrt{\underline{Z}_{c1}/\underline{Z}_{c2}} \operatorname{ch} \underline{\Gamma}_c \underline{U}_2 + \sqrt{\underline{Z}_{c1}\underline{Z}_{c2}} \operatorname{sh} \underline{\Gamma}_c \underline{I}_2; \\ \underline{I}_1 &= \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{c1}\underline{Z}_{c2}}} \operatorname{sh} \underline{\Gamma}_c \underline{U}_2 + \sqrt{\underline{Z}_{c2}/\underline{Z}_{c1}} \operatorname{ch} \underline{\Gamma}_c \underline{I}_2. \end{aligned} \right\}$$

Для симметричного четырехполюсника, где $\underline{Z}_{c1} = \underline{Z}_{c2} = \underline{Z}_c$ эти уравнения примут вид

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\Gamma}_c + \underline{I}_2 \underline{Z}_c \operatorname{sh} \underline{\Gamma}_c; \\ \underline{I}_1 &= (\underline{U}_2 / \underline{Z}_c) \operatorname{sh} \underline{\Gamma}_c + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\Gamma}_c. \end{aligned} \right\} \quad (12.35)$$

Запись уравнений передачи в форме (12.35) широко применяется для описания цепей с распределенными параметрами (см. гл. 13).

Формулы (12.13)–(12.15) и (12.31)–(12.34) позволяют выразить параметры ХХ и КЗ через характеристические параметры. Действительно,

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{xx1}} &= \underline{A}_{11}/\underline{A}_{21} = \underline{Z}_{c1} \operatorname{cth} \underline{\Gamma}_c; & \underline{Z}_{\text{кз1}} &= \underline{A}_{12}/\underline{A}_{22} = \underline{Z}_{c1} \operatorname{th} \underline{\Gamma}_c; \\ \underline{Z}_{\text{xx2}} &= \underline{A}_{22}/\underline{A}_{21} = \underline{Z}_{c2} \operatorname{cth} \underline{\Gamma}_c; & \underline{Z}_{\text{кз2}} &= \underline{A}_{12}/\underline{A}_{11} = \underline{Z}_{c2} \operatorname{th} \underline{\Gamma}_c. \end{aligned}$$

Заметим, что из этих формул легко выводится формула (12.23), приведенная ранее без вывода.

Расчет каскадного согласованного соединения четырехполюсников. При расчете каскадного соединения четырехполюсников ранее был использован матричный метод, в котором матрица \mathbf{A} результирующего четырехполюсника определялась произведением матриц \mathbf{A} составляющих четырехполюсников. Если четырехполюсники соединены согласованно, то удобнее пользоваться характеристическими параметрами.

На рис. 12.17 показано каскадное согласованное включение трех четырехполюсников с характеристическими постоянными передачи $\underline{\Gamma}_{c1}$, $\underline{\Gamma}_{c2}$ и $\underline{\Gamma}_{c3}$.

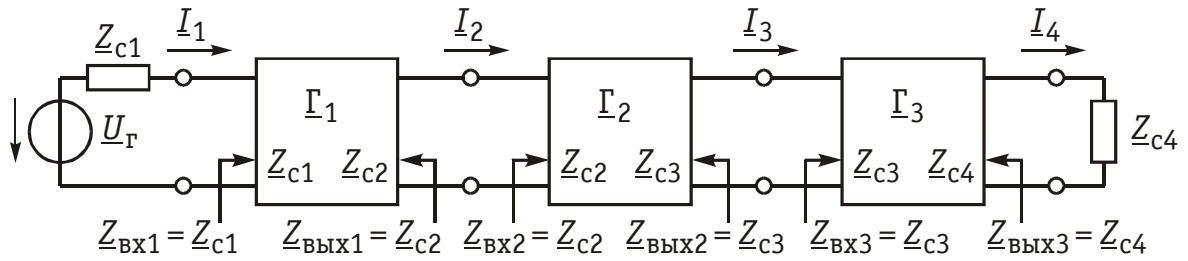


Рис. 12.17

Согласование четырехполюсников состоит в том, что характеристические сопротивления со стороны их соединения выбраны равными друг другу, а внутреннее сопротивление генератора и сопротивление нагрузки — равными характеристическим сопротивлениям крайних четырехполюсников. Действительно, крайний справа четырехполюсник нагружен на сопротивление, равное его характеристическому \underline{Z}_{c4} , значит, входное сопротивление этого крайнего четырехполюсника будет равно характеристическому сопротивлению \underline{Z}_{c3} предшествующего четырехполюсника. В свою очередь, входное сопротивление среднего четырехполюсника оказывается равным характеристическому сопротивлению \underline{Z}_{c2} крайнего левого четырехполюсника. Следовательно, входное сопротивление крайнего слева четырехполюсника равно \underline{Z}_{c1} и согласовано с внутренним сопротивлением генератора.

Аналогичным образом можно провести рассуждения, начиная с левого четырехполюсника.

На рис. 12.17 во избежание путаницы входные сопротивления четырехполюсников со стороны зажимов 2—2' названы выходными сопротивлениями четырехполюсников. Определим характеристическую постоянную передачи результирующего четырехполюсника. Согласно (12.20)

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma}_c &= \ln \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_4} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{c1}}{\underline{Z}_{c4}}} = \ln \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_3} \frac{\underline{I}_3}{\underline{I}_4} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{c1}}{\underline{Z}_{c2}}} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{c2}}{\underline{Z}_{c3}}} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{c3}}{\underline{Z}_{c4}}} = \\ &= \ln \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{c1}}{\underline{Z}_{c2}}} + \ln \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_3} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{c2}}{\underline{Z}_{c3}}} + \ln \frac{\underline{I}_3}{\underline{I}_4} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{c3}}{\underline{Z}_{c4}}} = \underline{\Gamma}_{c1} + \underline{\Gamma}_{c2} + \underline{\Gamma}_{c3}. \end{aligned}$$

Таким образом, результирующий четырехполюсник, составленный из каскадно и согласованно соединенных отдельных четырехполюсников, имеет характеристические сопротивления, равные характеристическим сопротивлениям крайних четырехполюсников, и оказывается включенным согласованно с генератором и нагрузкой. Его характеристическая постоянная передачи равна сумме характеристических постоянных передачи соединяемых четырехполюсников. Учитывая, что $\underline{\Gamma}_c = A_c + jB_c$, можно записать:

$$A_c = \sum_{i=1}^3 A_{ci}; \quad B_c = \sum_{i=1}^3 B_{ci}.$$

12.6. Внешние характеристики четырехполюсника

Рабочее ослабление четырехполюсника. Режим согласованного включения четырехполюсника является наиболее благоприятным для передачи энергии. Однако обеспечить идеальное согласование четырехполюсника с генератором и нагрузкой в широкой полосе частот возможно только в том случае, когда внутреннее сопротивление генератора, сопротивление нагрузки и характеристические сопротивления четырехполюсника являются резистивными. Добиться же равенства комплексных сопротивлений на всех частотах рабочего диапазона, как правило, не удастся. Возникающая вследствие этого несогласованность приводит к дополнительным потерям энергии.

Рассмотрим работу четырехполюсника в реальных условиях (см. рис. 12.1), когда $\underline{Z}_Г \neq \underline{Z}_{c1}$ и $\underline{Z}_Н \neq \underline{Z}_{c2}$. В этом случае $\underline{Z}_{вх1} \neq \underline{Z}_Г$ и $\underline{Z}_{вх2} \neq \underline{Z}_Н$. Несогласованность на входе приводит к тому, что часть энергии отражается от входных зажимов четырехполюсника и возвращается к генератору. Из-за несогласованности на выходе не вся энергия из четырехполюсника передается нагрузке: часть ее отражается от нагрузки и возвращается обратно в четырехполюсник. Очевидно, какая-то часть энергии будет теряться за счет многократного ее отражения на входных и выходных зажимах четырехполюсника.

Чтобы учесть дополнительно возникающие в рабочих условиях потери энергии, пользуются рабочими мерами передачи, которые являются внешними характеристиками четырехполюсника.

К внешним характеристикам относится *рабочее ослабление четырехполюсника*, которое позволяет сравнить в логарифмических единицах полную мощность S_2 , выделяемую в нагрузке $\underline{Z}_Н$ на выходе четырехполюсника, с полной мощностью S_0 , которую генератор отдает в нагрузку, согласованную с его внутренним сопротивлением.

Мощность, выделяемая в нагрузке $\underline{Z}_Н$ (см. рис. 12.1)

$$S_2 = |\underline{U}_2 \underline{I}_2| = |\underline{U}_2^2 / \underline{Z}_Н|.$$

Полная мощность S_0 выделяется на сопротивлении, равном внутреннему сопротивлению генератора, т. е. на $\underline{Z}_Г$, и подключенном непосредственно к его зажимам:

$$S_0 = |\underline{I}^2 \underline{Z}_Г| = |(\underline{U}_Г / 2 \underline{Z}_Г)^2 \underline{Z}_Г| = |\underline{U}_Г^2 / 4 \underline{Z}_Г|.$$

Рабочее ослабление четырехполюсника, выраженное в неперах (Нп), подсчитывается по формуле

$$A_p = \frac{1}{2} \ln \frac{S_0}{S_2} = \ln \left| \frac{U_{\Gamma}^2 \underline{Z}_H}{4 \underline{U}_2^2 \underline{Z}_{\Gamma}} \right| = \ln \left| \frac{U_{\Gamma}}{2 \underline{U}_2} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\underline{Z}_H}{\underline{Z}_{\Gamma}} \right|, \quad (12.36)$$

или в децибелах (дБ),

$$A_p = 20 \lg |U_{\Gamma}/2 \underline{U}_2| + 10 \lg |\underline{Z}_H/\underline{Z}_{\Gamma}|. \quad (12.37)$$

В (12.36) и (12.37) входят действующие значения \underline{U}_{Γ} и \underline{U}_2 , которые могут быть измерены экспериментально, поэтому эти формулы лежат в основе большинства методов измерения рабочего ослабления четырехполюсника.

При теоретических расчетах пользуются другой формулой

$$A_p = A_c + \Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3,$$

где A_c — характеристическое ослабление четырехполюсника; ΔA_1 , ΔA_2 — дополнительные ослабления из-за несогласованностей на входе и выходе четырехполюсника:

$$\Delta A_1 = 20 \lg \left| \frac{\underline{Z}_{c1} + \underline{Z}_{\Gamma}}{2 \sqrt{\underline{Z}_{c1} \underline{Z}_{\Gamma}}} \right|, \quad \Delta A_2 = 20 \lg \left| \frac{\underline{Z}_{c2} + \underline{Z}_H}{2 \sqrt{\underline{Z}_{c2} \underline{Z}_H}} \right|,$$

ΔA_3 — дополнительное ослабление за счет многократного отражения энергии от входных и выходных зажимов четырехполюсника:

$$\Delta A_3 = 20 \lg \left| 1 - \frac{\underline{Z}_{c1} - \underline{Z}_{\Gamma}}{\underline{Z}_{c1} + \underline{Z}_{\Gamma}} \frac{\underline{Z}_{c2} - \underline{Z}_H}{\underline{Z}_{c2} + \underline{Z}_H} e^{-2\Gamma_c} \right|.$$

При согласовании четырехполюсника с генератором $\underline{Z}_{\Gamma} = \underline{Z}_{c1}$ и $\Delta A_1 = \Delta A_3 = 0$. При согласовании четырехполюсника с нагрузкой $\underline{Z}_H = \underline{Z}_{c2}$ и $\Delta A_2 = \Delta A_3 = 0$.

Если согласование полное, т. е. $\underline{Z}_{\Gamma} = \underline{Z}_{c1}$ и $\underline{Z}_H = \underline{Z}_{c2}$, то $A_p = A_c$, т. е. рабочее ослабление четырехполюсника равно его характеристическому (собственному) ослаблению. Для пассивного четырехполюсника рабочее ослабление больше собственного ослабления вследствие рассогласования на входе и выходе.

Рабочее ослабление является вещественной частью комплексной величины $\underline{\Gamma}_p$ — *рабочей постоянной передачи четырехполюсника*:

$$\underline{\Gamma}_p = A_p + jB_p.$$

где B_p — рабочая фазовая постоянная.

Передаточные функции четырехполюсника. *Передаточной функцией нагруженного четырехполюсника* (см. рис. 12.1) называется отношение выходной электрической величины к входной электрической величине, т. е. отношение реакции к воздействию (см. §7.4).

Если входным воздействием считать напряжение генератора с комплексным действующим значением \underline{U}_{Γ} , а реакцией четырехпо-

люсника на это воздействие — напряжение с комплексным действующим значением \underline{U}_2 или ток с комплексным действующим значением \underline{I}_2 , то получаются *комплексные передаточные функции общего вида*:

$$\underline{H}_u = \underline{U}_2 / \underline{U}_1 \text{ и } \underline{H}_i = \underline{I}_2 / \underline{I}_1. \quad (12.38)$$

В частных случаях, когда заданными воздействиями являются напряжение на входных зажимах четырехполюсника или ток, протекающий через эти зажимы, получают следующие четыре разновидности передаточных функций (см. § 7.4):

$\underline{H}_u = \underline{U}_2 / \underline{U}_1$ — комплексный коэффициент передачи по напряжению (для активных четырехполюсников, например усилителей, он носит название коэффициента усиления по напряжению);

$\underline{H}_i = \underline{I}_2 / \underline{I}_1$ — комплексный коэффициент передачи по току (для активных цепей — коэффициент усиления по току);

$\underline{H}_Z = \underline{U}_2 / \underline{I}_1$ — комплексное передаточное сопротивление;

$\underline{H}_Y = \underline{I}_2 / \underline{U}_1$ — комплексная передаточная проводимость.

Передаточные функции четырехполюсника выражаются через любую систему параметров и сопротивления нагрузки. Например,

$$\underline{H}_u = \underline{U}_2 / \underline{U}_1 = \underline{U}_2 / (\underline{A}_{11} \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}_2) = \underline{Z}_H / (\underline{A}_{11} \underline{Z}_H + \underline{A}_{12}); \quad (12.39)$$

$$\underline{H}_i = \underline{I}_2 / \underline{I}_1 = \underline{I}_2 / (\underline{A}_{21} \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}_2) = 1 / (\underline{A}_{21} \underline{Z}_H + \underline{A}_{22}). \quad (12.40)$$

Можно вычислять передаточные функции в различных режимах работы четырехполюсника (холостой ход, короткое замыкание, согласованное включение). Например, при холостом ходе на выходе (разомкнутые зажимы 2—2') комплексный коэффициент передачи по напряжению находится из (12.39) при $\underline{Z}_H = \infty$

$$\underline{H}_{u\text{xx}} = 1 / \underline{A}_{11}. \quad (12.41)$$

Коэффициент передачи по току в режиме короткого замыкания на выходе (замкнутые накоротко зажимы 2—2') получим из (12.40) при $\underline{Z}_H = 0$:

$$\underline{H}_{i\text{кз}} = 1 / \underline{A}_{22}. \quad (12.42)$$

При согласованном включении симметричного четырехполюсника из (12.39) следует

$$\begin{aligned} \underline{H}_{uc} &= \frac{\underline{Z}_{c2}}{\underline{A}_{11} \underline{Z}_{c2} + \underline{A}_{12}} = \frac{\sqrt{\underline{A}_{22} \underline{A}_{12}} / (\underline{A}_{21} \underline{A}_{11})}{\underline{A}_{11} \sqrt{\underline{A}_{22} \underline{A}_{12}} / (\underline{A}_{21} \underline{A}_{11}) + \underline{A}_{12}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}}} = e^{-\Gamma_c}. \end{aligned} \quad (12.43)$$

Формула (12.43) устанавливает связь между передаточной функцией по напряжению согласованно включенного симмет-

ричного четырехполюсника с его характеристической (собственной) постоянной передачи. Аналогичным образом можно получить остальные передаточные функции в различных режимах работы и выражения их через интересующие нас параметры.

Часто используют так называемую *рабочую передаточную функцию* четырехполюсника:

$$\underline{H}_p = \frac{2\underline{U}_2}{\underline{U}_r} \sqrt{\frac{\underline{Z}_r}{\underline{Z}_H}}. \quad (12.44)$$

Рабочая передаточная функция непосредственно связана с рабочей постоянной передачи четырехполюсника. Действительно, из (12.44) и (12.36) вытекает, что

$$\ln \frac{1}{|\underline{H}_p|} = \ln \left| \frac{\underline{U}_r}{2\underline{U}_2} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\underline{Z}_H}{\underline{Z}_r} \right| = A_p, \quad (12.45)$$

или $|\underline{H}_p| = e^{-A_p}$.

Справедливы также более общие соотношения: $-\ln \underline{H}_p = \underline{\Gamma}_p$ или $\underline{H}_p = e^{-\underline{\Gamma}_p}$.

Если на входе четырехполюсника действует негармоническое (периодическое или непериодическое) воздействие, то, переходя от мгновенных значений напряжений и токов к их изображениям по Лапласу $U_r(p)$, $U_1(p)$, $U_2(p)$, $I_1(p)$ и $I_2(p)$, получают операторные передаточные функции $H(p)$, которые представляются в общем виде (7.41):

$$H(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}, \quad (12.46)$$

или

$$H(p) = H \frac{(p - p_{01})(p - p_{02}) \dots (p - p_{0n})}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_m)},$$

где $p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0n}$ — нули передаточной функции; p_1, p_2, \dots, p_m — полюса передаточной функции; $H = a_n / b_m$.

Пример. Найдем коэффициент передачи по напряжению и квадрат АЧХ четырехполюсника, изображенного на рис. 12.18, а, в режиме ХХ на выходных зажимах.

Коэффициент передачи по напряжению нагруженного четырехполюсника согласно (12.39)

$$\underline{H}_u = \underline{U}_2 / \underline{U}_1 = \underline{Z}_H / (\underline{A}_{11} \underline{Z}_H + \underline{A}_{12}).$$

В режиме ХХ $\underline{Z}_H = \infty$ и согласно (12.41) и (12.8)

$$\underline{H}_{u_{xx}} = \frac{1}{\underline{A}_{11}} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_1 / \underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

Используя операторную форму записи, имеем

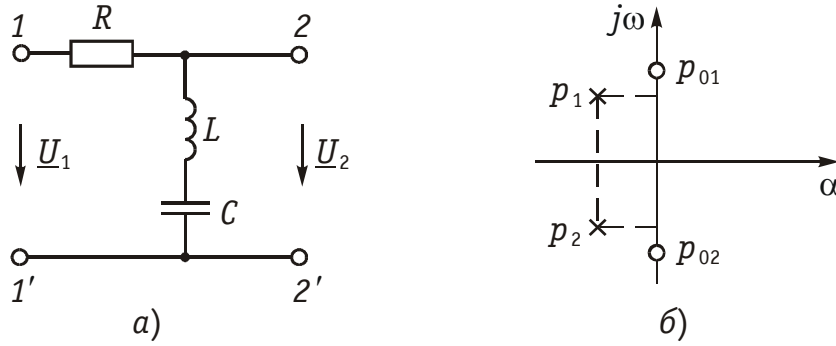


Рис. 12.18

$$\underline{H}_{u_{xx}}(p) = \frac{pL + 1/(pC)}{R + pL + 1/(pC)} = \frac{p^2 + 1/(LC)}{p^2 + pR/L + 1/(LC)} = H \frac{p^2 + a_0}{p^2 + b_1p + b_0},$$

где $H = 1$; $a_0 = b_0 = 1/LC$; $b_1 = R/L$.

Корни числителя этой рациональной дроби, т. е. нули передаточной функции,

$$p_{01,02} = \pm j \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Корни знаменателя, или полюсы передаточной функции,

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

На рис. 12.18, б показано расположение нулей и полюсов функции при $1/(LC) > R^2/(4L^2)$.

По теореме Виета

$$H_{u_{xx}}(p) = \frac{(p - p_{01})(p - p_{02})}{(p - p_1)(p - p_2)}.$$

Амплитудно-частотная характеристика в данном режиме работы определяется из $H_{u_{xx}}(p)$ путем замены p на $j\omega$ и вычисления модуля полученной функции

$$|H_{u_{xx}}(j\omega)| = H_{u_{xx}}(\omega) = \sqrt{\frac{(a_0 - \omega^2)^2}{(b_0 - \omega^2)^2 + (b_1\omega)^2}}.$$

Квадрат АЧХ запишется в виде

$$|H_{u_{xx}}(j\omega)|^2 = H_{u_{xx}}^2(\omega) = \frac{\omega^4 - 2a_0\omega^2 + a_0^2}{\omega^4 + (b_1^2 - 2b_0)\omega^2 + b_0^2} = \frac{\omega^4 + c_1\omega^2 + c_2}{\omega^4 + d_1\omega^2 + d_2},$$

где

$$c_1 = 2a_0 = 2/(LC); \quad c_2 = a_0^2 = 1/(L^2C^2); \\ d_1 = b_1^2 - 2b_0 = (R/C)^2 - 2/LC; \quad d_2 = b_0^2 = 1/(L^2C^2).$$

Вопросы и задания для самопроверки

1. Используя метод узловых напряжений, найти \mathbf{Y} -параметры Т-образного четырехполюсника, изображенного на рис. 12.19.

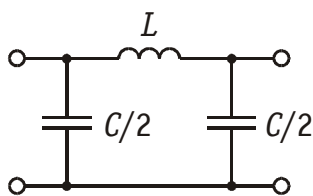


Рис. 12.19

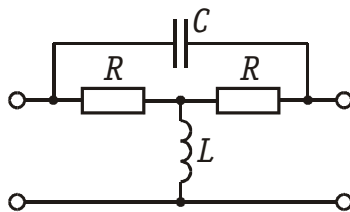


Рис. 12.20

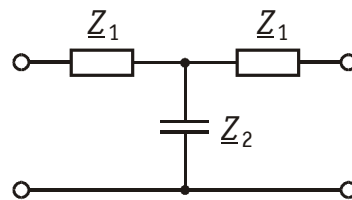


Рис. 12.21

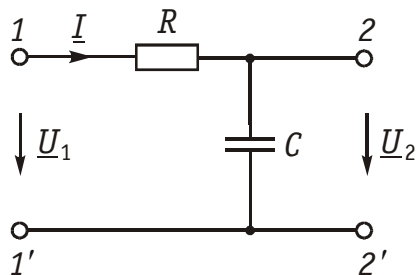


Рис. 12.22

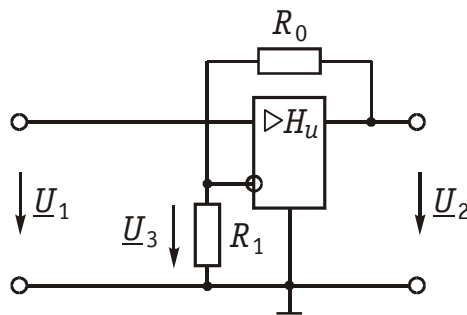


Рис. 12.23

2. Определить \mathbf{Y} -параметры Т-образного четырехполюсника, показанного на рис. 12.20, при $R = 100 \text{ Ом}$, $L = 0,1 \text{ Гн}$, $C = 10^{-5} \text{ Ф}$, $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$.

Ответ: $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22} = 0,01 j$;
 $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -1,26 \cdot 10^{-2} \exp(j1,25)$.

3. Объяснить, в каких случаях следует включать цепи согласованно?
4. Рассчитать характеристическое сопротивление четырехполюсника на рис. 12.21, если $\underline{Z}_1 = 1000 \text{ Ом}$, $\underline{Z}_2 = j500 \text{ Ом}$.

Ответ: $\underline{Z}_c = 1189 e^{-j22^\circ 30'} = 1098 - j455 \text{ Ом}$.

5. Чем отличается рабочее ослабление четырехполюсника от собственного (характеристического)?
6. Что такое комплексная передаточная функция? Какие виды комплексных передаточных функций четырехполюсника известны?
7. Определить коэффициент передачи по напряжению $H_u(j\omega)$, АЧХ и ФЧХ цепи, изображенной на рис. 1.22, если выходным напряжением является напряжение на резисторе R . Построить графики АЧХ и ФЧХ.

Ответ: $H_u(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$; $H_u(\omega) = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$;
 $\varphi(\omega) = 90^\circ - \arctg \omega RC$.

8. Рассчитать передаточную функцию каскадного соединения цепей, изображенных на рис. 1.22 и 1.23. Построить график АЧХ полученной цепи.

9. Определить коэффициент передачи по напряжению при холостом ходе и коэффициент передачи по току при коротком замыкании для П-образного четырехполюсника в продольную ветвь которого включена индуктивность L , а в поперечные ветви — емкость C .

Ответ: $H(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 LC}$.

10. Определить ослабление, вносимое цепью рис. 1.22, при $R = 31,8$ кОм и $X_c = 10$ кОм.

Ответ: 12 дБ.

11. Что такое операторная передаточная функция? Как она связана с комплексной передаточной функцией? Как определить нули и полюсы операторной передаточной функции?
12. Определить операторную передаточную функцию, комплексный коэффициент передачи по напряжению, АЧХ и квадрат АЧХ последовательного колебательного контура, изображенного на рис. 12.18, а, если выходным напряжением U_2 является напряжение на емкости C . Построить график АЧХ цепи.

Ответ: $H(p) = \frac{1}{p^2 LC + pRC + 1}$;

$$H_u^2(\omega) = \frac{1}{\omega^4 (LC)^2 + \omega^2 (R^2 C^2 - 2LC) + 1}.$$

13. Перечислить основные свойства операторных передаточных функций пассивных цепей.

ГЛАВА 13. ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

13.1. Общие положения

До сих пор рассматривались R , L , C электрические цепи в предположении, что параметры сосредоточены в определенных элементах цепи: индуктивность сосредоточена в катушке (энергия магнитного поля катушки локализована в ее магнитопроводе), емкость сосредоточена в конденсаторе (энергия электрического поля локализована между обкладками конденсатора); резистивное сопротивление сосредоточено в резисторе (преобразование электрической энергии в резисторе в тепловую осуществляется в токопроводящем слое резистора). Такие цепи получили название *цепей с сосредоточенными параметрами*.

Однако представление электрических цепей в виде цепей с сосредоточенными параметрами не всегда возможно. Например, рассматривая передачу электромагнитной энергии в линии связи, фидере, антенне, волноводе и т. д., следует учитывать, что магнитное и электрическое поля распределены по всей длине этих устройств и превращение электромагнитной энергии в тепло также происходит по всей длине устройств. В таких цепях приходится сталкиваться с распределенными по длине индуктивностями, емкостями, резистивными сопротивлениями, поэтому они называются *цепями с распределенными параметрами*.

Ток и напряжение на выходе сколь угодно малого участка (отрезка) цепи с распределенными параметрами не равны соответственно току и напряжению на его входе и отличаются как по величине, так и по фазе. Таким образом, ток и напряжение в любой точке цепи являются функциями не только времени t , но и пространственных координат (например, расстояния от одного из концов цепи).

Заметим, что деление цепей на два класса — с сосредоточенными и распределенными параметрами, достаточно условно. Одну и ту же цепь следует рассматривать как систему с сосредоточенными или распределенными параметрами в зависимости от частоты, на которой она работает. Действительно, если на входе цепи действует гармонический сигнал, то в силу конечной скорости распространения электромагнитных колебаний (близкой к скорости света) возмущение от источника за время, равное периоду колебания T , пройдет расстояние, равное длине волны электромагнитного колебания: $\lambda = cT = c/f$, где c — скорость света; f — частота колебания.

При длине цепи, совпадающей с длиной волны колебания, изменение мгновенного значения напряжения в конце цепи запаздывает на целый период по сравнению с изменением мгновенного значения напряжения источника. В цепях, длина которых $l > \lambda$, запаздывание может составлять большое число периодов. Следовательно, если длина цепи соизмерима или значительно превышает длину волны распространяющегося в ней электромагнитного колебания, то напряжение (ток) является функцией времени и расстояния от начала цепи. Цепь является системой с распределенными параметрами.

Если длина цепи намного меньше длины волны, то изменения напряжения в любой точке и в конце цепи происходят одновременно с изменением мгновенного значения напряжения источника. Никакого запаздывания в такой цепи нет: напряжение (ток) является только функцией времени. Эту цепь можно считать системой с сосредоточенными параметрами. Например, отрезок коаксиального кабеля длиной 30 см при передаче по нему телевизионных сигналов (с наивысшей частотой 8,5 МГц) может считаться цепью с сосредоточенными параметрами, поскольку $\lambda = c/f_{max} = 3 \cdot 10^8 / (8,5 \cdot 10^6) = 35 \text{ м} \gg 0,3 \text{ м}$. Наоборот, в области дециметровых волн (λ — десятки сантиметров) этот же отрезок кабеля должен рассматриваться как цепь с распределенными параметрами. Отрезок же коаксиального кабеля длиной, например, в 1 км является цепью с распределенными параметрами и для телевизионного сигнала.

В дальнейшем из обширного класса цепей с распределенными параметрами будем изучать так называемые *длинные линии*, пред-

назначенные для передачи электромагнитной энергии на расстояние и имеющие длину, превышающую длину волны электромагнитных колебаний. К ним относятся двухпроводные воздушные линии связи, симметричные и коаксиальные кабельные линии проводных систем связи, фидеры, связывающие радиопередатчики с антеннами и т. д. При этом будем полагать, что конструктивные данные длинной линии (материал и диаметр ее проводов, их взаимное расположение) и ее параметры сохраняются неизменными по длине линии. Такие длинные линии называются *однородными*.

Целью изучения однородных длинных линий является анализ распределений напряжений и токов вдоль линии. В основе анализа лежит представление о длинной линии как о цепи с бесконечно большим числом бесконечно малых по величине пассивных элементов, распределенных равномерно по ее длине.

13.2. Уравнения передачи однородной линии

Первичные параметры. Длинные линии могут иметь самую различную конструкцию. Так, двухпроводная воздушная линия (рис. 13.1, *а*) состоит из параллельных неизолированных проводов, укрепленных с помощью изоляторов на специальных опорах. Симметричная кабельная цепь представляет собой два изолированных скрученных друг с другом провода, образующих так называемую пару (рис. 13.1, *б*). Скрученные между собой пары (или четверки), заключенные в металлическую или пластмассовую защитную оболочку, образуют симметричный кабель.

Коаксиальная пара является основой коаксиального кабеля и состоит из внутреннего цилиндра — провода сплошного сечения, помещенного в полый цилиндр (рис. 13.1, *в*).

Электрические свойства длинной линии характеризуются *первичными параметрами*, т. е. параметрами, отнесенными к единице длины линии (1 км в линиях проводной связи и 1 м в линиях радиосвязи). Первичными параметрами являются: резистивное сопротивление единицы длины линии R , индуктивность единицы

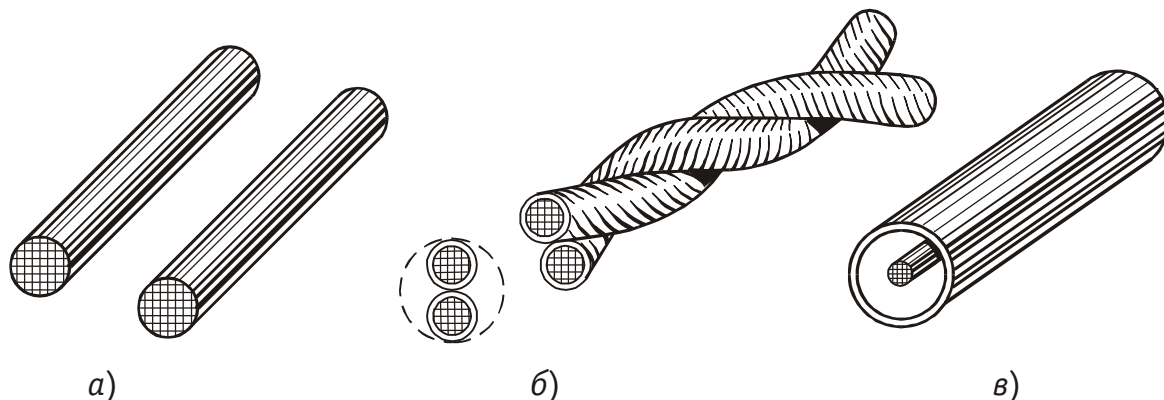


Рис. 13.1

длины линии L , емкость единицы длины линии C и проводимость изоляции единицы длины линии G .

Сопротивление R — это сопротивление проводов линии единичной длины. Например, для двухпроводной линии сопротивление (Ом/км)

$$R = \rho \frac{2l}{S} = \rho \frac{2000}{\pi r^2},$$

где ρ — удельное сопротивление материала проводов при температуре 20°C , Ом·мм²/м; l — длина линии, м; S — площадь поперечного сечения провода, мм²; r — радиус провода, мм.

При температурах, отличных от 20°C , сопротивление проводов вычисляется по формуле

$$R_T = R[1 + \sigma_T (T - 20^\circ)],$$

где σ_T — температурный коэффициент, 1/град; T — температура, $^\circ \text{C}$. Так, сопротивление двухпроводной медной линии длиной 1 км (километрическое сопротивление) из проводов диаметром 4 мм при температуре $T = 20^\circ \text{C}$ для частоты $f = 0$ составляет 2,84 Ом/км.

Наличие поверхностного эффекта (вытеснение тока из внутренних слоев проводника на его поверхность при увеличении частоты) приводит к увеличению сопротивления R с ростом частоты (см. § 1.2).

Индуктивность L определяется отношением магнитного потока, сцепляющегося с контуром единичной длины, к току, вызывающему этот поток. Индуктивность линии складывается из внешней и внутренней индуктивностей. Первая определяется геометрическими размерами линии и не зависит от частоты; вторая зависит от материала проводов, их диаметра и частоты.

Поверхностный эффект уменьшает внутреннюю индуктивность при возрастании частоты. Например, километрическая индуктивность двухпроводной медной цепи (Гн/км)

$$L = 4 \left[\left(4 \ln(l_{\text{пр}}/r) + k_{\text{пэ}} \right) \mu \right] \cdot 10^{-4},$$

с диаметром проводов $2r = 4$ мм и расстоянием между проводами $l_{\text{пр}} = 200$ мм составляет на частоте $f = 10$ кГц (с учетом магнитной проводимости $\mu = 1$ и коэффициента действия поверхностного эффекта $k_{\text{пэ}} = 1,8$) 1,89 мГн/км.

Емкость C определяется отношением заряда, приходящегося на единицу длины линии, к напряжению между проводами линии.

Для двухпроводной линии емкость (Ф/км) $C = \frac{\varepsilon \cdot 10^{-6}}{36 \ln(l_{\text{пр}}/r)}$, где

ε — диэлектрическая проницаемость вещества в пространстве между проводами. Например, километрическая емкость воздушной

двухпроводной медной цепи (для воздуха $\varepsilon = 1$) из проводов диаметром $2r = 4$ мм и расстоянием между проводами $l_{\text{пр}} = 200$ мм составляет $7,4$ нФ/км.

Проводимость G обусловлена несовершенством изоляции и представляет собой активную составляющую проводимости изоляции между проводами, отнесенную к единице длины линии. Для воздушной линии проводимость изоляции зависит от климатических условий (влажности, температуры и др.), чистоты поверхностей изоляторов и т. д.

Проводимость изоляции возрастает с ростом частоты (особенно для кабельных цепей) за счет увеличения потерь в диэлектрике. Для воздушных цепей проводимость (См/км) $G = G_0 + k_{\text{п}}f$, где G_0 — проводимость изоляции на постоянном токе; $k_{\text{п}}$ — коэффициент, учитывающий потери в диэлектрике при переменном токе; f — частота.

Для кабельных цепей $G = G_0 + \omega C \operatorname{tg} \delta$, где $\operatorname{tg} \delta$ — тангенс угла диэлектрических потерь.

После введения первичных параметров можно уточнить понятие однородной длинной линии. *Однородной* называется такая линия, первичные параметры которой неизменны на всей ее длине.

Уравнения передачи однородной линии. Найдем распределения напряжения и тока в линии по ее длине и во времени.

Выделим элементарный участок линии длиной Δx , находящийся на расстоянии x от начала линии (рис. 13.2). Его эквивалентную схему можно приближенно представить в виде последовательно включенных сопротивления $R\Delta x$ и индуктивности $L\Delta x$ и параллельно включенных активной проводимости $G\Delta x$ и емкости $C\Delta x$.

Таким образом, линия рассматривается как цепь с бесконечно большим числом звеньев, электрические параметры которых бесконечно малы. При стремлении Δx к нулю точность такого представления возрастает.

Напряжения и токи, их изменения на участке линии показаны на рис. 13.2. Уменьшение напряжения в конце участка линии Δx по сравнению с его началом вызвано падением напряжения на индуктивности $L\Delta x$ и сопротивлении $R\Delta x$. Поэтому

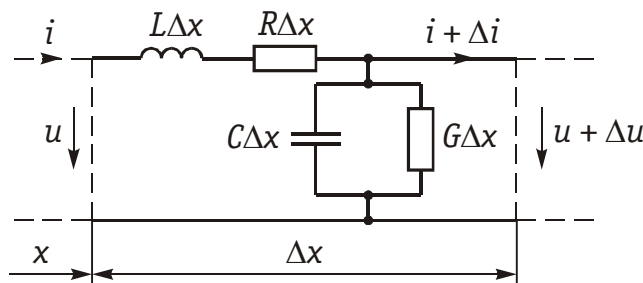


Рис. 13.2

$$-\Delta u = L\Delta x \frac{\partial i}{\partial t} + R\Delta x i. \quad (13.1 \text{ а})$$

Здесь и далее используются частные производные, так как напряжение и ток являются функциями переменных t и x .

Уменьшение тока на участке Δx происходит за счет ответвления тока через емкость $C\Delta x$ и проводимость изоляции $G\Delta x$. Пренебрегая изменением напряжения как величиной второго порядка малости, можно написать

$$-\Delta i = C\Delta x \frac{\partial u}{\partial t} + G\Delta x u. \quad (13.1 \text{ б})$$

Разделив обе части уравнений (13.1 а и б) на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим дифференциальные уравнения линии:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= C \frac{\partial u}{\partial t} + Gu. \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

Эти уравнения называются *телеграфными*, так как впервые были получены для линии телеграфной связи.

Будем считать, что в линии имеет место режим установившихся гармонических колебаний. Поскольку закон изменения напряжений и токов во времени известен, то из дифференциальных уравнений (13.2) остается найти лишь законы изменения амплитуд и фаз напряжений и токов с расстоянием x .

Используя символический метод анализа гармонических колебаний, в котором

$$u \doteq \underline{U}; \quad i \doteq \underline{I}; \quad \frac{du}{dt} \doteq j\omega \underline{U}; \quad \frac{di}{dt} \doteq j\omega \underline{I},$$

преобразуем уравнения (13.2) к виду

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d\underline{U}}{dx} &= (R + j\omega L) \underline{I}; \\ -\frac{d\underline{I}}{dx} &= (G + j\omega C) \underline{U}. \end{aligned} \right\} \quad (13.3)$$

Так как комплексные действующие значения \underline{U} и \underline{I} являются функциями только x , уравнения записываются не в частных, а в полных производных.

Продифференцировав первое уравнение из (13.3) по x и подставив в него второе уравнение, получим

$$d^2 \underline{U} / dx^2 = (R + j\omega L)(G + j\omega C) \underline{U}.$$

Введя обозначение

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}, \quad (13.4)$$

перепишем это уравнение в виде

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} - \underline{\gamma}^2 \underline{U} = 0. \quad (13.5)$$

Корни характеристического уравнения $p^2 - \underline{\gamma}^2 = 0$ равны $p_{1,2} = \pm \underline{\gamma}$. поэтому общее решение дифференциального уравнения (13.5) для напряжения в точке x ищем в виде

$$\underline{U}_x = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}. \quad (13.6 \text{ а})$$

Из первого уравнения системы (13.3) имеем

$$\underline{I}_x = -\frac{1}{R + j\omega L} \frac{d\underline{U}_x}{dx} = \frac{\underline{\gamma}}{R + j\omega L} (\underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}). \quad (13.6 \text{ б})$$

Введя еще одно обозначение

$$\underline{Z}_B = \frac{R + j\omega L}{\underline{\gamma}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}, \quad (13.7 \text{ а})$$

запишем решение для тока в точке x в форме

$$\underline{I}_x = \frac{1}{\underline{Z}_B} (\underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}). \quad (13.7 \text{ б})$$

Постоянные интегрирования \underline{A}_1 и \underline{A}_2 можно найти из начальных условий: при $x = 0$ $\underline{U}_x = \underline{U}_1$ и $\underline{I}_x = \underline{I}_1$, где \underline{U}_1 и \underline{I}_1 — напряжение и ток в начале линии. Тогда из (13.6 а и б) для $x = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_1 + \underline{A}_2; \\ \underline{I}_1 \underline{Z}_B &= \underline{A}_1 - \underline{A}_2. \end{aligned} \right\}$$

Откуда

$$\underline{A}_1 = (\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_B)/2; \quad \underline{A}_2 = (\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_B)/2.$$

Подстановка полученных значений постоянных интегрирования в (13.6) дает следующие уравнения для определения напряжения \underline{U}_x и тока \underline{I}_x в произвольной точке x длиной линии

$$\begin{aligned} \underline{U}_x &= \frac{\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_B}{2} e^{-\underline{\gamma}x} + \frac{\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_B}{2} e^{\underline{\gamma}x}; \\ \underline{I}_x &= \frac{\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_B}{2 \underline{Z}_B} e^{-\underline{\gamma}x} - \frac{\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_B}{2 \underline{Z}_B} e^{\underline{\gamma}x}. \end{aligned} \quad (13.8)$$

Это есть *уравнения передачи однородной длинной линии*.* Параметры $\underline{\gamma}$ и \underline{Z}_B получили название *коэффициента распростра-*

* При анализе работы длинной линии под \underline{U} и \underline{I} в дальнейшем будем понимать их комплексные амплитуды (без введения индекса: \underline{U}_m и \underline{I}_m).

нения и волнового сопротивления линии. Их физический смысл будет рассмотрен позже.

Если учесть, что

$$(e^{\underline{\gamma}x} + e^{-\underline{\gamma}x})/2 = \text{ch } \underline{\gamma}x \quad \text{и} \quad (e^{\underline{\gamma}x} - e^{-\underline{\gamma}x})/2 = \text{sh } \underline{\gamma}x,$$

то уравнения передачи (13.8) можно переписать в более компактной форме:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_x &= \underline{U}_1 \text{ch } \underline{\gamma}x - \underline{I}_1 \underline{Z}_B \text{sh } \underline{\gamma}x; \\ \underline{I}_x &= -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_B} \text{sh } \underline{\gamma}x + \underline{I}_1 \text{ch } \underline{\gamma}x. \end{aligned} \right\} \quad (13.9 \text{ а})$$

В конце линии $x = l$ и $\underline{U}_x = \underline{U}_2$, $\underline{I}_x = \underline{I}_2$. Уравнения (13.9 а) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{U}_1 \text{ch } \underline{\gamma}l - \underline{I}_1 \underline{Z}_B \text{sh } \underline{\gamma}l; \\ \underline{I}_2 &= -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_B} \text{sh } \underline{\gamma}l + \underline{I}_1 \text{ch } \underline{\gamma}l. \end{aligned} \right\} \quad (13.9 \text{ б})$$

Разрешая эту систему уравнений относительно напряжения \underline{U}_1 и тока \underline{I}_1 в начале линии, получаем

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \text{ch } \underline{\gamma}l + \underline{I}_2 \underline{Z}_B \text{sh } \underline{\gamma}l; \\ \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \text{sh } \underline{\gamma}l + \underline{I}_2 \text{ch } \underline{\gamma}l. \end{aligned} \right\} \quad (13.9 \text{ в})$$

Эти уравнения совпадают с известными нам уравнениями передачи (12.35) для симметричного четырехполюсника при $\underline{\gamma}l = \underline{\Gamma}_c$ и $\underline{Z}_B = \underline{Z}_c$, что вполне понятно, так как линия связи представляет собой симметричный четырехполюсник.

13.3. Падающие и отраженные волны

Обозначим в уравнениях передачи (13.8) $\underline{U}_\Pi = (\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_B)/2$ и $\underline{U}_0 = (\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_B)/2$. С учетом этих обозначений запись уравнений передачи однородной длинной линии упростится и будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_x &= \underline{U}_\Pi e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{U}_0 e^{\underline{\gamma}x} = \underline{U}_{x \text{ пад}} + \underline{U}_{x \text{ отр}}; \\ \underline{I}_x &= \frac{\underline{U}_\Pi}{\underline{Z}_B} e^{-\underline{\gamma}x} - \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_B} e^{\underline{\gamma}x} = \underline{I}_{x \text{ пад}} + \underline{I}_{x \text{ отр}}, \end{aligned} \right\} \quad (13.10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{x \text{ пад}} &= \underline{U}_\Pi e^{-\underline{\gamma}x}; \quad \underline{U}_{x \text{ отр}} = \underline{U}_0 e^{\underline{\gamma}x}; \\ \underline{I}_{x \text{ пад}} &= \frac{\underline{U}_\Pi}{\underline{Z}_B} e^{-\underline{\gamma}x}; \quad \underline{I}_{x \text{ отр}} = -\frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_B} e^{\underline{\gamma}x}. \end{aligned} \right\}$$

Напряжение и ток состоят из сумм двух слагаемых. Первые слагаемые уменьшаются с увеличением расстояния от начала линии x , вторые — возрастают. Создается впечатление о существовании в линии двух типов волн: падающей и отраженной. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим мгновенные значения напряжения и тока.

Помня, что в (13.10) все величины в общем случае комплексные

$$\begin{aligned}\underline{U}_{\Pi} &= |\underline{U}_{\Pi}| e^{j\varphi_{\Pi}}; \quad \underline{U}_0 = |\underline{U}_0| e^{j\varphi_0}; \\ \gamma &= \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta; \\ \underline{Z}_B &= \sqrt{(R + j\omega L)/(G + j\omega C)} = |\underline{Z}_B| e^{j\varphi_B},\end{aligned}$$

можно по известным правилам (см. § 3.2) перейти от (13.10) для комплексных значений к уравнениям передачи для мгновенных значений напряжений и токов. Для простоты положим $\varphi_{\Pi} = \varphi_0 = 0$.

Тогда

$$\begin{cases} u_x(t) = |\underline{U}_{\Pi}| e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x) + |\underline{U}_0| e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x), \\ i_x(t) = \left| \frac{\underline{U}_{\Pi}}{\underline{Z}_B} \right| e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x - \varphi_B) - \left| \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_B} \right| e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x - \varphi_B). \end{cases} \quad (13.11)$$

Проанализируем сначала первые слагаемые этих уравнений, которые обозначим

$$\begin{cases} u_{x \text{ пад}}(t) = |\underline{U}_{\Pi}| e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x), \\ i_{x \text{ пад}}(t) = \left| \frac{\underline{U}_{\Pi}}{\underline{Z}_B} \right| e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x - \varphi_B). \end{cases} \quad (13.12)$$

В каждом сечении линии (т. е. в каждой точке x) колебания напряжения и тока являются гармоническими. Амплитуда этих колебаний уменьшается по мере удаления от начала линии по закону $e^{-\alpha x}$. В каждой последующей точке линии колебания отстают по фазе от колебаний в предыдущей точке (на это указывает знак «минус» перед βx).

Если в момент времени t_1 сделать фотографию распределения, например, напряжения $u_{x \text{ пад}}$ вдоль линии, то она будет иметь вид кривой 1 (рис. 13.3). В следующий момент t_2 фаза напряжения в каждой точке линии изменится на величину $\omega(t_2 - t_1)$, и вся картина как бы сместится вдоль оси x вправо (кривая 2 на рис. 13.3). Аналогичная ситуация будет наблюдаться и в момент времени $t_3 > t_2$ (кривая 3 на рис. 13.3).

Если сделать последовательно ряд мгновенных фотографий и затем их проецировать на экран, то создается впечатление движущейся волны напряжения вдоль цепи. Фактически же вдоль цепи распространяется состояние равной фазы. Например, можно взять точку цепи x_1 , соответствующую максимуму напряжения в момент времени t_1 (точка A на рис. 13.3) и определить скорость ее пере-

мещения. Скорость распространения вдоль цепи состояния равной фазы называется *фазовой скоростью распространения*.

В момент времени t_1 в точке x_1 имеется определенное фазовое состояние $\omega t_1 - \beta x_1$. Это же фазовое состояние будет наблюдаться в точке x_2 , но уже в момент времени t_2 : $\omega t_2 - \beta x_2$. Приравнивая их получаем $\omega t_1 - \beta x_1 = \omega t_2 - \beta x_2$.

Фазовую скорость распространения (км/с) найдем как отношение расстояния $x_2 - x_1$, пройденного точкой A , ко времени $t_2 - t_1$:

$$v_{\phi} = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1) = \omega/\beta.$$

Таким образом, уравнения (13.12) описывают волны напряжения и тока, распространяющиеся от начала к концу линии. Такие волны называются *падающими*.

Обратимся ко вторым слагаемым выражений (13.11), которые обозначим

$$\left. \begin{aligned} u_{x \text{ отр}}(t) &= |\underline{U}_0| e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x), \\ i_{x \text{ отр}}(t) &= -\left| \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_B} \right| e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x - \varphi_B). \end{aligned} \right\}$$

Эти слагаемые описывают волны точно такого же характера, как и падающие, но распространяющиеся в обратном направлении, т. е. от конца линии к началу. Эти волны называются *отраженными волнами* напряжения и тока. Амплитуды отраженных волн убывают от конца линии к началу, наибольшая амплитуда наблюдается в конце линии.

В соответствии с рассмотренной картиной можно сказать, что в установившемся режиме гармонических колебаний напряжение и ток в любой точке линии складываются из падающих и отраженных волн напряжения и тока, т. е. $u_x = u_{x \text{ пад}} + u_{x \text{ отр}}$; $i_x = i_{x \text{ пад}} + i_{x \text{ отр}}$. Отраженные волны возникают в конце линии.

Определим соотношения между падающими и отраженными волнами в конце линии. Полагая в (13.10) $x = l$ и обозначая напряжение и ток в конце линии \underline{U}_2 и \underline{I}_2 , получаем $\underline{U}_2 = \underline{U}_{2 \text{ пад}} +$

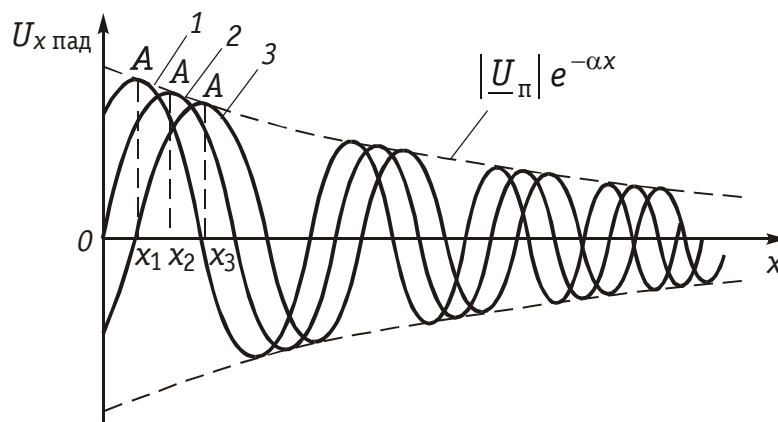


Рис. 13.3

+ $\underline{U}_{2\text{отр}}$; $\underline{I}_2 = \underline{I}_{2\text{пад}} + \underline{I}_{2\text{отр}}$. Эти равенства в соответствии с обозначениями, принятыми в (13.10), и с учетом того, что $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_\text{н}$ ($\underline{Z}_\text{н}$ — сопротивление нагрузки линии), можно переписать следующим образом:

$$\underline{I}_2 \underline{Z}_\text{н} = \underline{U}_{2\text{пад}} + \underline{U}_{2\text{отр}}; \quad \underline{I}_2 \underline{Z}_\text{в} = \underline{U}_{2\text{пад}} - \underline{U}_{2\text{отр}}.$$

Складывая эти равенства и вычитая из первого второе, имеем:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{2\text{пад}} &= \underline{I}_2 \frac{\underline{Z}_\text{н} + \underline{Z}_\text{в}}{2} \quad \text{и} \\ \underline{U}_{2\text{отр}} &= \underline{I}_2 \frac{\underline{Z}_\text{н} - \underline{Z}_\text{в}}{2}. \end{aligned}$$

Отношение комплексной амплитуды отраженной волны к комплексной амплитуде падающей волны называется *коэффициентом отражения по напряжению*:

$$\underline{\sigma}_u = \frac{\underline{U}_{2\text{отр}}}{\underline{U}_{2\text{пад}}} = \frac{\underline{Z}_\text{н} - \underline{Z}_\text{в}}{\underline{Z}_\text{н} + \underline{Z}_\text{в}}. \quad (13.13)$$

Отсюда

$$\underline{U}_{2\text{отр}} = \underline{\sigma}_u \underline{U}_{2\text{пад}}.$$

Коэффициент отражения по напряжению показывает, какую часть амплитуды падающей волны в конце линии составляет амплитуда отраженной волны. Амплитуда отраженной волны тока

$$\underline{I}_{2\text{отр}} = -\frac{\underline{U}_{2\text{отр}}}{\underline{Z}_\text{в}} = -\underline{\sigma}_u \frac{\underline{U}_{2\text{пад}}}{\underline{Z}_\text{в}} = -\underline{\sigma}_u \underline{I}_{2\text{пад}}.$$

В то же время $\underline{I}_{2\text{отр}} = \underline{\sigma}_i \underline{I}_{2\text{пад}}$, где $\underline{\sigma}_i$ — *коэффициент отражения по току*. Отсюда видно, что $\underline{\sigma}_i = -\underline{\sigma}_u$, т. е. коэффициент отражения по току равен по значению и противоположен по знаку коэффициенту отражения по напряжению.

Рассмотрим некоторые частные режимы работы линии. Если линия замкнута накоротко на конце (короткое замыкание (КЗ)), т. е. $\underline{Z}_\text{н} = 0$, то коэффициент $\underline{\sigma}_u = -1$, а коэффициент $\underline{\sigma}_i = 1$. Падающая и отраженная волны напряжения в конце линии имеют равные амплитуды и сдвинуты по отношению друг к другу на 180° . Амплитуда результирующей волны напряжения в конце линии будет равна нулю. В то же время падающая и отраженная волны тока будут иметь равные амплитуды, что приведет к увеличению тока в конце короткозамкнутой линии.

При холостом ходе (ХХ) в конце линии $\underline{Z}_\text{н} = \infty$ коэффициент $\underline{\sigma}_u = 1$ и $\underline{\sigma}_i = -1$, т. е. картина изменится на противоположную: ток в нагрузке будет равен нулю, а напряжение увеличится вдвое. Случай, когда $\underline{Z}_\text{н} = \underline{Z}_\text{в}$, рассмотрен ниже.

13.4. Вторичные параметры однородной линии

Волновое сопротивление. Одним из вторичных параметров однородной линии является волновое сопротивление линии, определяемое через первичные параметры формулой (13.7)

$$\underline{Z}_B = \sqrt{(R + j\omega L)/(G + j\omega C)}.$$

При $\omega = 0$ $\underline{Z}_B = \rho_B = \sqrt{R/G}$ и $\varphi_B = 0$, т. е. волновое сопротивление чисто активное. Точно такой же характер имеет \underline{Z}_B при $\omega \rightarrow \infty$: $\underline{Z}_B = \rho_B = \sqrt{L/C}$, $\varphi_B = 0$.

Для всех реально существующих цепей $R/G > L/C$, поэтому модуль волнового сопротивления с увеличением частоты уменьшается, стремясь к величине $\sqrt{L/C}$. Угол φ_B изменяется от нулевого значения при $\omega = 0$ до нулевого значения при $\omega \rightarrow \infty$. Следовательно, на какой-то частоте он будет иметь максимум. Можно показать, что угол φ_B на всех частотах является отрицательным. На рис. 13.4 показаны графики частотных зависимостей модуля и угла волнового сопротивления однородной линии.

Чтобы выяснить физический смысл волнового сопротивления, воспользуемся выражениями для комплексных амплитуд падающих волн напряжения и тока из (13.10):

$$\underline{U}_{x \text{ пад}} = \frac{\underline{U}_1 + \underline{Z}_B \underline{I}_1}{2} e^{-\gamma x} \quad (13.14)$$

и

$$\underline{I}_{x \text{ пад}} = \frac{\underline{U}_1 + \underline{Z}_B \underline{I}_1}{2 \underline{Z}_B} e^{-\gamma x}.$$

Из этих отношений следует, что $\underline{Z}_B = \underline{U}_{x \text{ пад}} / \underline{I}_{x \text{ пад}}$, т. е. *волновое сопротивление линии выражает соотношение между амплитудами и фазами напряжения и тока падающей волны в любой точке линии.* При этом

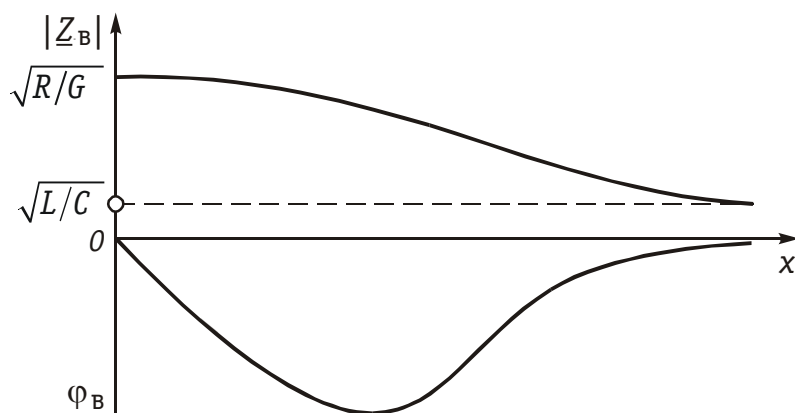


Рис. 13.4

$$\underline{Z}_B = \frac{\left| \underline{U}_{x \text{ пад}} \right| e^{j\varphi_{ux \text{ пад}}} }{\left| \underline{I}_{x \text{ пад}} \right| e^{j\varphi_{ix \text{ пад}}} } = \frac{\left| \underline{U}_{x \text{ пад}} \right| }{\left| \underline{I}_{x \text{ пад}} \right| } e^{j(\varphi_{ux \text{ пад}} - \varphi_{ix \text{ пад}})} = \left| \underline{Z}_B \right| e^{j\varphi_B},$$

откуда

$$\left| \underline{Z}_B \right| = \frac{\left| \underline{U}_{x \text{ пад}} \right| }{\left| \underline{I}_{x \text{ пад}} \right| } \text{ и } \varphi_B = \varphi_{ux \text{ пад}} - \varphi_{ix \text{ пад}}.$$

Аналогичным образом можно сказать, что $\underline{Z}_B = -\underline{U}_{x \text{ отр}} / \underline{I}_{x \text{ отр}}$. Волновое сопротивление не зависит от длины линии — оно постоянно в любой точке линии.

Пример. Определим волновое сопротивление воздушной медной линии из проводов диаметром $2r = 4$ мм и расстоянием между проводами $l_{\text{пр}} = 20$ см и кабельной линии с бумажной изоляцией жил диаметром $2r = 0,5$ мм на частотах $f = 0$; 0,8 и 10 кГц для воздушной цепи и $f = 0$ и 0,8 кГц для кабельной цепи.

Для воздушной линии первичные параметры, взятые из справочника: $R = 2,84$ Ом/км; $C = 6,3$ нФ/км; $L = 1,93$ мГн/км; $G = 0,57 \cdot 10^{-6}$ См/км.

При $f = 0$ $\underline{Z}_B = \sqrt{R/G} = 2,38$ кОм. При $f = 800$ Гц ($\omega = 2\pi \cdot 800$ рад/с)

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{2,84 + j2\pi \cdot 800 \cdot 1,93 \cdot 10^{-3}}{0,57 \cdot 10^{-6} + j2\pi \cdot 800 \cdot 6,3 \cdot 10^{-9}}} = 564e^{j7,4^\circ} \text{ Ом.}$$

На частоте $f = 10$ кГц $\omega L \gg R$ и $\omega C \gg G$, поэтому $\underline{Z}_B = \sqrt{L/C} = 548$ Ом.

Для кабельной линии: $R = 190$ Ом/км, $C = 50$ нФ/км, $L = 0,7$ мГн/км, $G = 5 \cdot 10^{-4}$ мСм/км. На частоте $f = 0$ $\underline{Z}_B = \sqrt{R/G} = 615$ кОм. Для частоты $f = 800$ Гц справедливо соотношение $R \gg \omega L$ и $\omega C \gg G$. Следовательно,

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{R}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{R}{\omega C}} e^{-j45^\circ} = 870e^{-j45^\circ} \text{ Ом.}$$

Согласованное включение линии. Рассмотрим режим работы линии, когда $\underline{Z}_H = \underline{Z}_B$. В этом случае коэффициенты отражения $\underline{\sigma}_u = \underline{\sigma}_i = 0$ и отраженные волны напряжения и тока будут отсутствовать ($\underline{U}_{x \text{ отр}} = 0$ и $\underline{I}_{x \text{ отр}} = 0$).

Напряжение и ток в любой точке линии, в том числе и на входе ($x = 0$), будут определяться только падающими волнами. Согласно (13.14) $\underline{Z}_B = \underline{U}_{1\text{пад}} / \underline{I}_{1\text{пад}} = \underline{U}_1 / \underline{I}_1 = \underline{Z}_{\text{вх}}$, т. е. входное сопротивление такой линии равно ее волновому сопротивлению. Таким образом, *волновое сопротивление линии является аналогом характеристического сопротивления симметричного четырехполюсника.*

Указанный режим работы линии является режимом согласованного включения. При этом вся энергия поглощается в конце линии нагрузочным сопротивлением. Этот режим работы наиболее выгоден для передачи сигналов связи, так как отражение энергии от нагрузки приводит помимо увеличения рабочего ослабления ли-

нии к появлению так называемых эхо-сигналов, накладывающихся на основной сигнал и искажающих его.

Уравнения передачи однородной линии в режиме согласованного включения могут быть легко получены из (13.9 б и в), если учесть, что при согласованном включении $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_B$, $\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_B$, а также что $\operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \operatorname{sh} \underline{\gamma} l = e^{\pm \underline{\gamma} l}$:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 e^{\underline{\gamma} l}, \\ \underline{I}_1 &= \underline{I}_2 e^{\underline{\gamma} l}, \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{U}_1 e^{-\underline{\gamma} l}, \\ \underline{I}_2 &= \underline{I}_1 e^{-\underline{\gamma} l}. \end{aligned} \right\} \quad (13.15 \text{ а})$$

Для любой точки линии

$$\underline{U}_x = \underline{U}_1 e^{-\underline{\gamma} x} \quad \text{и} \quad \underline{I}_x = \underline{I}_1 e^{-\underline{\gamma} x}. \quad (13.15 \text{ б})$$

Коэффициент распространения. Ко вторичным параметрам линии относится также коэффициент распространения, введенный в рассмотрение формулой (13.4):

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta.$$

В режиме согласованного включения линии из (13.15) имеем: $\underline{U}_1/\underline{U}_x = \underline{I}_1/\underline{I}_x = e^{\underline{\gamma} x}$ или

$$\left| \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_x} \right| e^{j(\varphi_{u1} - \varphi_{ux})} = \left| \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_x} \right| e^{j(\varphi_{i1} - \varphi_{ix})} = e^{\alpha x} \cdot e^{j\beta x}.$$

Отсюда

$$e^{\alpha x} = \left| \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_x} \right| = \left| \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_x} \right| \quad \text{и} \quad \beta x = \varphi_{u1} - \varphi_{ux} = \varphi_{i1} - \varphi_{ix}.$$

Для отрезка линии единичной длины (1 км, 1 м и т. д.) можно записать:

$$\alpha = \ln \left| \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_x} \right| = \ln \left| \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_x} \right|; \quad \beta = \varphi_{u1} - \varphi_{ux} = \varphi_{i1} - \varphi_{ix}.$$

Вещественная часть коэффициента распространения α характеризует изменение напряжения и тока по абсолютной величине при распространении энергии на расстояние, равное единице длины линии. Она называется *коэффициентом ослабления* линии и измеряется в неперах, отнесенных к единице длины линии (в проводной связи — Нп/км, в радиосвязи — Нп/м). При использовании десятичного логарифма вместо натурального

$$\alpha = 20 \lg |\underline{U}_1/\underline{U}_x| = 20 \lg |\underline{I}_1/\underline{I}_x|$$

измеряется в дБ/км или дБ/м.

Мнимая часть коэффициента распространения β характеризуется изменением напряжения и тока по фазе. Она называется *коэффициентом фазы* линии и измеряется в рад/км или рад/м. Вместо радиан могут использоваться градусы.

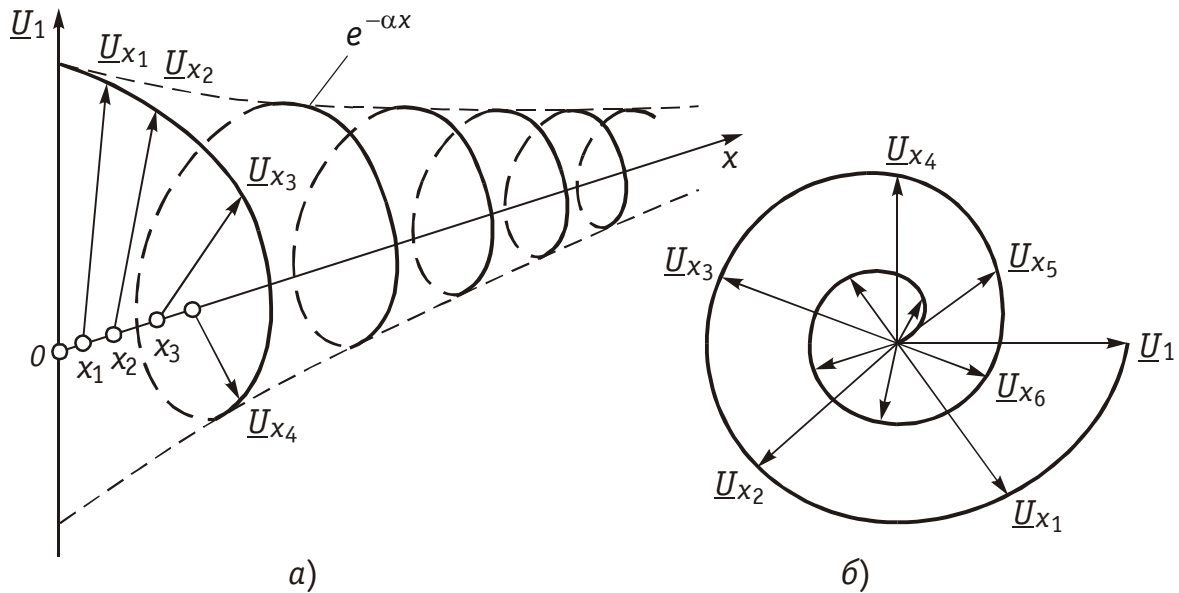


Рис. 13.5

Таким образом, коэффициент распространения линии $\underline{\gamma}$ характеризует изменение напряжения и тока по абсолютной величине и по фазе при распространении энергии на расстояние, равное единице длины линии (1 км или 1 м) в условиях согласованного включения линии.

Процесс изменения напряжения (тока) вдоль согласованно нагруженной линии можно проиллюстрировать векторной диаграммой, показанной на рис. 13.5, а или так называемой *спиральной диаграммой*, приведенной на рис. 13.5, б.

Численные значения коэффициентов α и β можно найти по первичным параметрам из общей формулы (13.4). Однако в ряде случаев можно получить более простые выражения. Так, на высоких частотах (для электрической цепи из меди, например, это частоты 10 кГц), где выполняются условия $\omega L > R$ и $\omega C > G$, пользуются упрощенными формулами:

$$\alpha \approx \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{и} \quad \beta \approx \omega \sqrt{LC}.$$

Вывод этих формул дан в специальной литературе и здесь не приводится. Для кабельных цепей в области низких частот (например, от 0 до 800 Гц) выполняются соотношения $R \gg \omega L$ и $\omega C \gg G$. В этом случае можно показать, что $\alpha = \beta = \sqrt{\omega CR/2}$. Вторичные параметры α и β зависят от частоты сложным образом. На рис. 13.6, а и б даны графики, качественно отражающие эту зависимость.

Пример. Определим коэффициент распространения воздушной медной линии с параметрами $2r = 4$ мм и $l_{\text{пр}} = 20$ см на частоте $f = 800$ Гц.

Значение коэффициента $\underline{\gamma}$ найдем по полной формуле (13.4), взяв первичные параметры из предыдущего примера:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} =$$

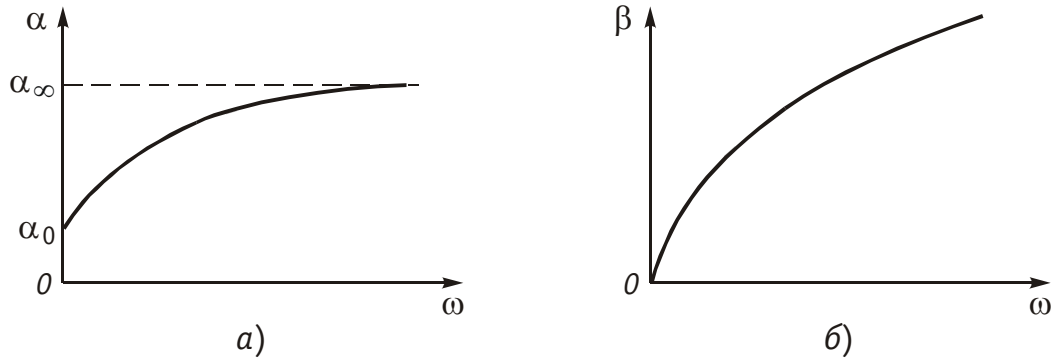


Рис. 13.6

$$= \sqrt{(2,87 + j2\pi \cdot 800 \cdot 1,93 \cdot 10^{-3})(0,57 \cdot 10^{-6} + j2\pi \cdot 800 \cdot 6,3 \cdot 10^{-9})} = \\ = 17,9 \cdot 10^{-3} e^{j81,3^\circ} = (2,86 + j17,6) \cdot 10^{-3}.$$

Отсюда коэффициент ослабления $\alpha = 2,86 \cdot 10^{-3}$ Нп/км = 2,86 мНп/км. Перевод непер в децибелы дает α (дБ) = α (Нп) $\times 8,7 = 24,9 \cdot 10^{-3}$ дБ/км. Коэффициент фазы $\beta = 17,6 \cdot 10^{-3}$ рад/км.

Постоянная передачи длинной линии. При распространении энергии по линии на расстояние l напряжение и ток уменьшаются в $e^{\alpha l}$ раз, а фазы напряжения и тока изменятся на величину βl .

Величина αl описывает ослабление напряжения и тока при распространении энергии по всей длине линии и называется *характеристической (собственной) постоянной ослабления линии*: $A_c = \alpha l$.

Из формул (13.15 а) следует, что

$$\left| \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right| = e^{\alpha l} = e^{A_c}; \quad \frac{S_1}{S_2} = \left| \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \right| = e^{2A_c},$$

где S_1 и S_2 — полные мощности на входе и выходе линии. Поэтому

$$A_c = \ln \left| \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right| = \ln \left| \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \right| = \frac{1}{2} \ln \frac{S_1}{S_2}.$$

Величина $B_c = \alpha l = \varphi_{u1} - \varphi_{u2} = \varphi_{i1} - \varphi_{i2}$ называется *характеристической (собственной) постоянной фазы линии*.

По аналогии с теорией четырехполюсников величина $\underline{\Gamma}_c = A_c + jB_c$ является *характеристической (собственной) постоянной передачи линии*.

Заметим, что при отсутствии согласования, т. е. при $\underline{Z}_H \neq \underline{Z}_B$ условия передачи энергии по линии следует оценивать величиной рабочей постоянной передачи $\underline{\Gamma}_p = A_p + jB_p$ по формулам, полученным в общей теории четырехполюсников (см. гл. 12).

13.5. Входное сопротивление линии

Входное сопротивление линии определяется отношением напряжения и тока в начале линии. Найдем выражение для $\underline{Z}_{\text{вх}}$, используя уравнения передачи линии в форме (13.9 в):

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \underline{I}_2 \underline{Z}_B \operatorname{sh} \underline{\gamma} l}{\underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + (\underline{U}_2 / \underline{Z}_B) \operatorname{sh} \underline{\gamma} l} = \underline{Z}_B \frac{\underline{Z}_H \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \underline{Z}_B \operatorname{sh} \underline{\gamma} l}{\underline{Z}_B \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \underline{Z}_H \operatorname{sh} \underline{\gamma} l}. \quad (13.16)$$

Рассмотрим некоторые частные режимы работы линии.

При согласованном включении линии ($\underline{Z}_H = \underline{Z}_B$) из (13.16) получим, что $\underline{Z}_{BX} = \underline{Z}_B$, как и было установлено ранее.

Если выходные зажимы линии замкнуты накоротко ($\underline{Z}_H = 0$), формула (13.16) упрощается и принимает вид

$$\underline{Z}_{BX \text{ КЗ}} = \underline{Z}_B \operatorname{th} \underline{\gamma} l. \quad (13.17 \text{ а})$$

В случае разомкнутых выходных зажимов ($\underline{Z}_H = \infty$)

$$\underline{Z}_{BX \text{ XX}} = \underline{Z}_B \operatorname{cth} \underline{\gamma} l. \quad (13.17 \text{ б})$$

Когда линия нагружена на произвольное сопротивление, не равное волновому ($\underline{Z}_H \neq \underline{Z}_B$), можно пользоваться для расчетов общей формулой (13.16). Однако иногда удобно выразить \underline{Z}_{BX} через параметры XX и КЗ. Для этого разделим числитель и знаменатель (13.16) на $\underline{Z}_B \operatorname{ch} \underline{\gamma} l$:

$$\underline{Z}_{BX} = \frac{\underline{Z}_H + \underline{Z}_B \operatorname{th} \underline{\gamma} l}{1 + (\underline{Z}_H / \underline{Z}_B) \operatorname{th} \underline{\gamma} l} = \frac{\underline{Z}_H + \underline{Z}_{BX \text{ КЗ}}}{1 + \underline{Z}_H / \underline{Z}_{BX \text{ XX}}} = \underline{Z}_{BX \text{ XX}} \frac{\underline{Z}_H + \underline{Z}_{BX \text{ КЗ}}}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_{BX \text{ XX}}}.$$

Данная формула позволяет по измеренным значениям сопротивлений XX и КЗ рассчитать входное сопротивление линии.

Существует еще одна форма представления входного сопротивления. Для получения ее перепишем выражение (13.16) после деления на $\underline{Z}_B \operatorname{ch} \underline{\gamma} l$ в другом виде:

$$\underline{Z}_{BX} = \underline{Z}_B \frac{\underline{Z}_H / \underline{Z}_B + \operatorname{th} \underline{\gamma} l}{1 + (\underline{Z}_H / \underline{Z}_B) \operatorname{th} \underline{\gamma} l}.$$

Обозначим $\operatorname{th} \underline{\chi} = \underline{Z}_H / \underline{Z}_B$. Тогда

$$\underline{Z}_{BX} = \underline{Z}_B \frac{\operatorname{th} \underline{\chi} + \operatorname{th} \underline{\gamma} l}{1 + \operatorname{th} \underline{\chi} \operatorname{th} \underline{\gamma} l} = \underline{Z}_B \operatorname{th} (\underline{\gamma} l + \underline{\chi}). \quad (13.18)$$

Эта формула дает возможность по заданным параметрам \underline{Z}_B и \underline{Z}_H определить

$$\underline{\chi} = \operatorname{Arth} \frac{\underline{Z}_H}{\underline{Z}_B} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\underline{Z}_B + \underline{Z}_H}{\underline{Z}_B - \underline{Z}_H} \right|$$

и затем найти входное сопротивление линии.

Во всех случаях, когда нагрузка на конце линии не равна ее волновому сопротивлению, входное сопротивление определяется гиперболическим тангенсом комплексного аргумента. Чтобы дать представление о характере изменения входного сопротивления линии, на рис. 13.7, а показаны зависимости модулей сопротивлений XX и КЗ от длины линии, построенные в соответствии с формулами (13.17), а на рис. 13.7, б изображена зависимость модуля \underline{Z}_{BX} от частоты из (13.18) при несогласованной нагрузке линии.

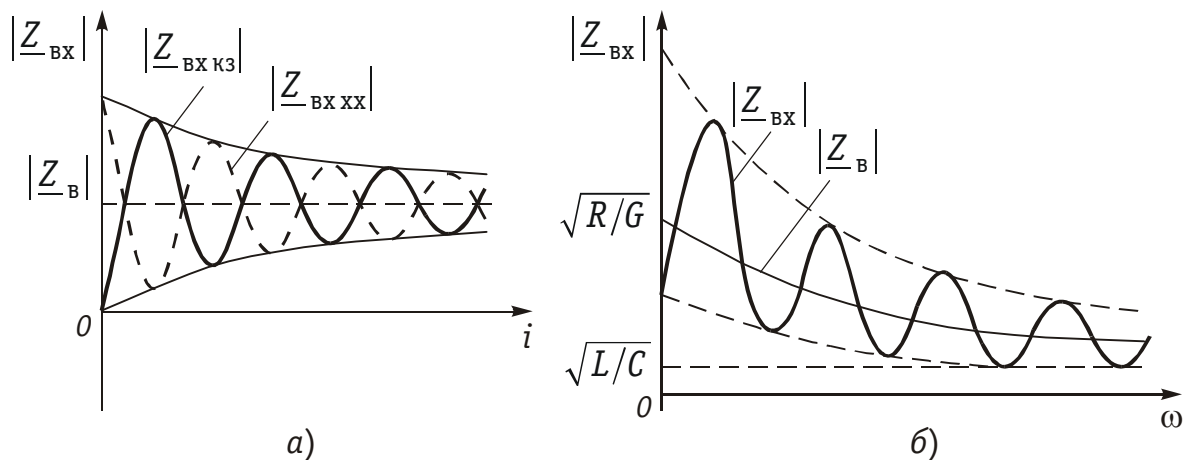


Рис. 13.7

Колебательный характер входного сопротивления при несогласованной нагрузке объясняется наличием в линии падающих и отраженных волн. Фаза отраженной волны в начале цепи зависит от величины βl , т. е. от частоты и длины линии. При изменении частоты или длины линии фаза отраженной волны напряжения то будет совпадать с фазой падающей волны напряжения, то будет противоположна фазе падающей волны. В то же время для тока все будет происходить наоборот: при совпадении фаз падающей и отраженной волн напряжения фазы падающей и отраженной волн тока будут противоположны, т. е. если результирующая волна напряжения максимальна по амплитуде, то результирующая волна тока имеет минимальную амплитуду. Таким образом,

$$|Z_{BX \text{ max}}| = \left| \frac{U_{1 \text{ max}}}{I_{1 \text{ min}}} \right|; \quad |Z_{BX \text{ min}}| = \left| \frac{U_{1 \text{ min}}}{I_{1 \text{ max}}} \right|.$$

13.6. Линия без потерь

Вторичные параметры и уравнения передачи. Реальная линия всегда обладает потерями. Однако в ряде случаев удобно считать линию идеальной, т. е. не имеющей потерь. Линия без потерь — это линия, у которой рассеяние энергии отсутствует, что имеет место при значениях первичных параметров $R = 0$ и $G = 0$.

Такая идеализация оправдана для коротких по длине линий, работающих на сверхвысоких частотах (фидеров, элементов радиотехнических устройств, полосковых линий, измерительных линий, согласующих СВЧ устройств и др.), где выполняются условия $R \ll \omega L$ и $G \ll \omega C$, и поэтому резистивным сопротивлением проводов и проводимостью изоляции можно пренебречь по сравнению с индуктивным сопротивлением и емкостной проводимостью линии.

Коэффициент распространения линии без потерь

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \sqrt{-\omega^2 LC} = j\omega\sqrt{LC}.$$

Отсюда коэффициент ослабления $\alpha = 0$, а коэффициент фазы $\beta = \omega\sqrt{LC}$ линейно зависит от частоты.

Волновое сопротивление линии без потерь

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho_B$$

является чисто активным (резистивным).

Коэффициент фазы β связан с длиной волны электромагнитного колебания. *Длиной волны* λ называется расстояние между двумя точками, взятыми в направлении распространения волны, фазы в которых отличаются на 2π . Следовательно, $\beta\lambda = 2\pi$ и $\lambda = 2\pi/\beta$.

Уравнения передачи линии без потерь получаются из (13.9 в), если учесть, что $\text{ch } \underline{\gamma}l = \text{ch } j\beta l = \cos \beta l$ и $\text{sh } \underline{\gamma}l = \text{sh } j\beta l = j \sin \beta l$:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \cos \beta l + j\underline{Z}_B \underline{I}_2 \sin \beta l; \\ \underline{I}_1 &= \underline{I}_2 \cos \beta l + j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \sin \beta l. \end{aligned} \right\}$$

При анализе процессов, происходящих в линии без потерь, общепринято расположение той или иной точки на линии характеризовать ее удалением не от начала линии, как это делали прежде, а от конца линии (рис. 13.8). В этом случае уравнения передачи линии без потерь, выражающие комплексные действующие значения напряжения и тока в произвольной точке линии x , отсчитанной от ее конца, записываются в виде:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_x &= \underline{U}_2 \cos \beta x + j\underline{Z}_B \underline{I}_2 \sin \beta x, \\ \underline{I}_x &= \underline{I}_2 \cos \beta x + j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \sin \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (13.19)$$

Рассмотрим различные режимы работы линии без потерь.

Согласованное включение линии. При нагрузке линии без потерь на резистивное сопротивление $\underline{Z}_H = R_H$, равное волновому $\underline{Z}_B = \rho_B$, ток $\underline{I}_2 = \underline{U}_2/R_H = \underline{U}_2/\rho_B$ и уравнения передачи (13.19)

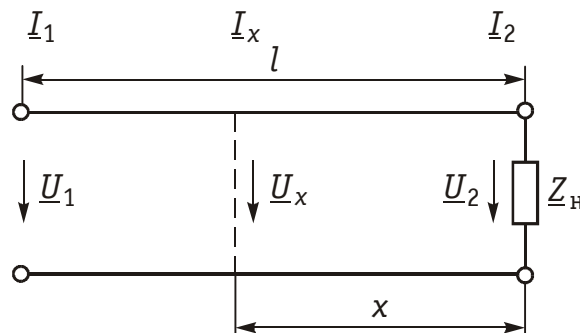


Рис. 13.8

преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}\underline{U}_x &= \underline{U}_2 (\cos \beta x + j \sin \beta x) = \underline{U}_2 e^{j\beta x} = \underline{U}_{x \text{ пад}}; \\ \underline{I}_x &= \underline{I}_2 (\cos \beta x + j \sin \beta x) = \underline{I}_2 e^{j\beta x} = \underline{I}_{x \text{ пад}}.\end{aligned}$$

Заменяя комплексные амплитуды их модулями и фазами, т. е. $\underline{U}_2 = |\underline{U}_2| e^{j\varphi_{u2}}$ и $\underline{I}_2 = |\underline{I}_2| e^{j\varphi_{i2}}$, и полагая для упрощения $\varphi_{u2} = \varphi_{i2} = 0$, перейдем к уравнениям передачи для мгновенных значений напряжений и токов. Тогда

$$\begin{aligned}u_x(t) &= |\underline{U}_2| \sin(\omega t + \beta x) = u_{x \text{ пад}}, \\ i_x(t) &= |\underline{I}_2| \sin(\omega t + \beta x) = i_{x \text{ пад}}.\end{aligned}$$

Эти уравнения описывают падающие волны, распространяющиеся в линии слева направо, т. е. от начала к концу линии (рис. 13.9, а). На направление распространения волн указывает знак «плюс» перед βx (напомним, что расстояние x отсчитывается от конца линии).

Таким образом, при согласованном включении линии без потерь в ней существуют только падающие, или *бегущие*, волны напряжения и тока. При этом амплитуды колебаний постоянны по всей длине линии (рис. 13.9, б). Данный режим работы линии называют также *режимом бегущей волны*. Сдвиг фаз между напряжением u_x и током i_x равен нулю, поэтому энергия бегущей волны носит активный характер.

Короткое замыкание линии. При $\underline{Z}_H = 0$ напряжение в конце линии $\underline{U}_2 = 0$. Уравнения передачи (13.19) для данного режима работы линии принимают вид:

$$\underline{U}_x = j\underline{Z}_B \underline{I}_2 \sin \beta x; \quad \underline{I}_x = \underline{I}_2 \cos \beta x. \quad (13.20)$$

Если положить для простоты начальную фазу φ_{i2} тока в конце линии равной нулю, то мгновенные значения напряжения и тока в любой точке линии описываются выражениями:

$$\left. \begin{aligned}u_x(t) &= |\underline{I}_2| \rho_B \sin \beta x \sin(\omega t + \pi/2); \\ i_x(t) &= |\underline{I}_2| \cos \beta x \sin \omega t.\end{aligned} \right\} \quad (13.21)$$

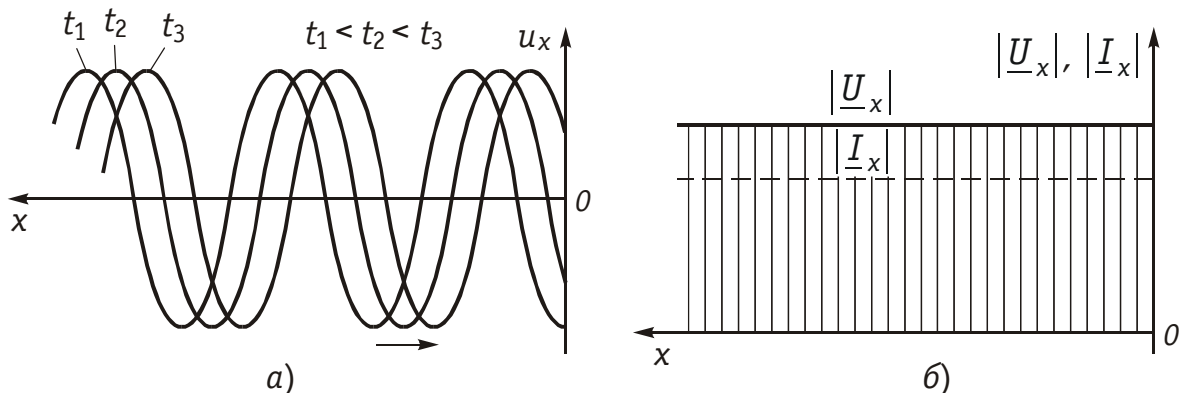


Рис. 13.9

Амплитуды напряжения $|\underline{I}_2| \rho_v \sin \beta x$ и тока $|\underline{I}_2| \cos \beta x$ являются функциями координаты x . В линии есть точки, в которых амплитуда напряжения (тока) в любой момент времени равна нулю. Это так называемые *узлы напряжения (тока)*. Имеются также точки, в которых амплитуда напряжения (тока) приобретает максимальное значение — *пучности напряжения (тока)*.

Узлы напряжения и пучности тока образуются в точках, в которых $\beta x = 0, \pi, 2\pi, \dots$, так как при этом $\sin \beta x = 0$ и $u_x = 0$, а $\cos \beta x = \pm 1$ и ток i_x имеет максимальную амплитуду. Пучности напряжения и узлы тока возникают в тех точках линии, где

$$\beta x = \frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi; \dots$$

При этих значениях $\beta x \sin \beta x = \pm 1$, в этом случае амплитуда напряжения u_x оказывается максимальной, а $\cos \beta x = 0$ и амплитуда тока i_x равной нулю. Рассмотрим причины появления узлов и пучностей напряжения и тока.

При КЗ линии коэффициенты отражения имеют значения

$$\underline{\sigma}_u = (\underline{Z}_H - \underline{Z}_B) / (\underline{Z}_H + \underline{Z}_B) = -1, \quad \underline{\sigma}_i = -\underline{\sigma}_u = 1,$$

т. е. происходит полное отражение энергии, в результате чего в любой точке цепи результирующее напряжение (ток) оказывается равным сумме падающих и отраженных волн. Действительно, из уравнений в комплексной форме (13.20) следует:

$$\begin{aligned} \underline{U}_x &= j\underline{Z}_B \underline{I}_2 \sin \beta x = \frac{\underline{Z}_B \underline{I}_2}{2} e^{j\beta x} - \frac{\underline{Z}_B \underline{I}_2}{2} e^{-j\beta x} = \\ &= \frac{\underline{Z}_B \underline{I}_2}{2} e^{j\beta x} + \frac{\underline{Z}_B \underline{I}_2}{2} e^{-j(\beta x - \pi)} = \underline{U}_{x \text{ пад}} + \underline{U}_{x \text{ отр}}; \\ \underline{I}_x &= \underline{I}_2 \cos \beta x = \frac{\underline{I}_2}{2} e^{j\beta x} + \frac{\underline{I}_2}{2} e^{-j\beta x} = \underline{I}_{x \text{ пад}} + \underline{I}_{x \text{ отр}}. \end{aligned}$$

Поскольку потерь в линии нет, амплитуды падающих и отраженных волн во всех точках линии одинаковы.

Сдвиг фаз между падающей и отраженной волнами напряжения в точке x

$$\varphi_u = \beta x - [-(\beta x - \pi)] = 2\beta x - \pi = \frac{4\pi}{\lambda} x - \pi,$$

а между падающей и отраженной волнами тока

$$\varphi_i = \beta x - (-\beta x) = 2\beta x = \frac{4\pi}{\lambda} x.$$

Удобно рассматривать в линии без потерь точки x , отстоящие от конца линии на расстояния, кратные четверти длины волны, т. е. кратные $\lambda/4$. В конце линии ($x = 0$) $\varphi_u = -\pi$ и $\varphi_i = 0$. Следовательно, падающая и отраженная волны напряжения находятся в

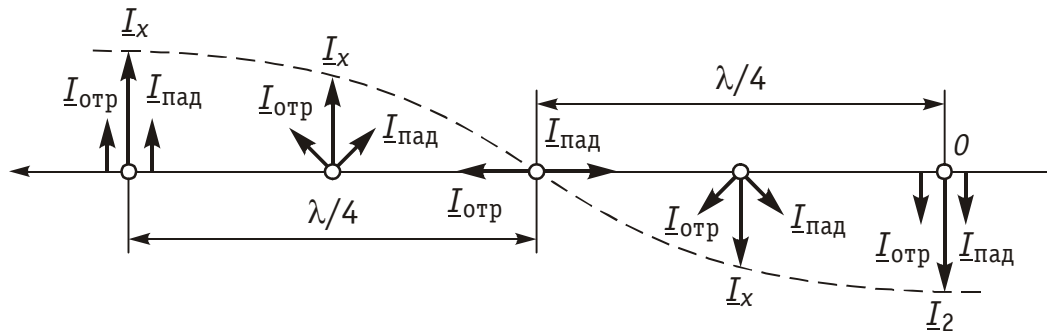


Рис. 13.10

противофазе, а падающая и отраженная волны тока — в фазе. Поэтому в конце линии наблюдается узел напряжения и пучность тока.

На расстоянии $\lambda/4$ от конца линии $\varphi_u = 0$ и $\varphi_i = \pi$, т. е. фазы падающей и отраженной волн напряжения совпадают, а волн тока — противоположны. В этой точке образуется пучность напряжения и узел тока. В точке $x = \lambda/2$ ($\varphi_u = \pi$, $\varphi_i = 2\pi$) возникают пучность тока и узел напряжения и т. д.

В промежуточных точках между узлами и пучностями фазовые соотношения отличны от 0, π , 2π и т. д. В них амплитуды напряжения и тока принимают промежуточные значения между нулем и максимальным значением.

Векторная диаграмма, приведенная на рис. 13.10, иллюстрирует соотношение фаз между падающей и отраженной волнами тока в различных точках КЗ линии.

Распределение модулей комплексных амплитуд напряжения $|\underline{U}_x|$ и тока $|\underline{I}_x|$ по длине линии представлено на рис. 13.11. Расстояние между соседними узлами (пучностями) равно $\lambda/2$.

Вернемся к рассмотрению мгновенных значений напряжения и тока, описываемых формулами (13.21). Делая моментальные фотографии распределения мгновенных значений, например напряжения вдоль линии в моменты времени t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 и т. д., и проецируя их затем на экран, получаем картину «пульсирующего» напряжения, в которой узлы напряжения остаются на месте, а напряжение между узлами пульсирует, достигая положительного и отрицательного амплитудных значений (рис. 13.12). Та же картина, но смещенная по оси x на значение $\lambda/4$, наблюдается и для тока i_x .

Таким образом, в КЗ линии возникают волны напряжения и тока, которые не распространяются вдоль линии, находятся на одном месте. Такие волны называются *стоячими*, а уравнения передачи (13.20) и (13.21) — уравнениями стоячих волн. Описываемый

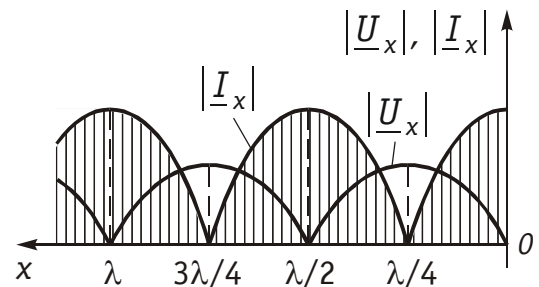


Рис. 13.11

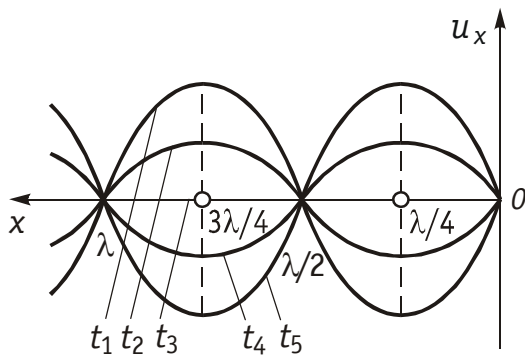


Рис. 13.12

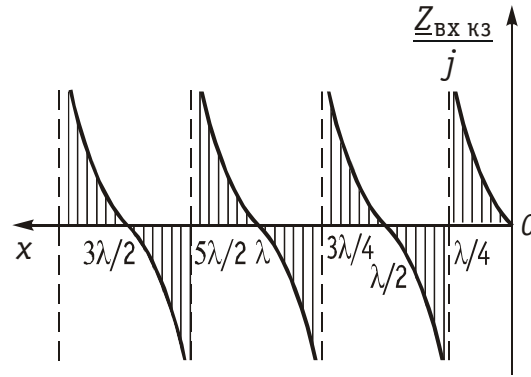


Рис. 13.13

режим работы линии получил также название *режима стоячих волн*.

Напряжение u_x и ток i_x в КЗ линии согласно (13.21) сдвинуты по фазе на 90° . Это свидетельствует о том, что энергия стоячей волны имеет реактивный характер.

Определим входное сопротивление КЗ линии в произвольной точке x . Из (13.20) следует, что

$$\underline{Z}_{\text{вх КЗ}} = \frac{U_x}{I_x} = \frac{j \underline{Z}_B I_2 \sin \beta x}{I_2 \cos \beta x} = j \underline{Z}_B \operatorname{tg} \beta x.$$

При $x = 0, \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2, \dots$ величина $\beta x = (2\pi/\lambda)x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ и входное сопротивление $\underline{Z}_{\text{вх КЗ}} = 0$. При $x = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4, \dots$ величина $\beta x = 2\pi/\lambda x = 0, \pi/2, \dots$ и входное сопротивление $\underline{Z}_{\text{вх КЗ}} = \pm j\infty$.

На рис. 13.13 приведена зависимость $\underline{Z}_{\text{вх КЗ}}/j$ от длины линии (расстояния x от конца линии).

Меняя длину КЗ линии без потерь, можем получить входное сопротивление, имеющее индуктивный характер (в диапазоне $x = 0 \dots \lambda/4$), емкостный характер ($x = \lambda/4 \dots \lambda/2$), затем опять индуктивный ($x = \lambda/2 \dots 3\lambda/4$) и т. д.

При длинах, кратных $\lambda/4$, входное сопротивление короткозамкнутой линии без потерь эквивалентно входному сопротивлению параллельного колебательного контура, а при длинах, кратных $\lambda/2$ — входному сопротивлению последовательного колебательного контура.

Учитывая, что в линиях, без потерь $\beta = \omega\sqrt{LC}$ и, следовательно, частота ω и длина линии l (или расстояние от конца линии x) входят в выражение $\underline{Z}_{\text{вх КЗ}}$ симметричным образом, приходим к выводу, что частотная зависимость $\underline{Z}_{\text{вх КЗ}}$ аналогична зависимости от длины линии (рис. 13.14). На тех частотах, где βl кратно $\pi/2$, $\underline{Z}_{\text{вх КЗ}} = \pm j\infty$, а где βl кратно π , $\underline{Z}_{\text{вх КЗ}} = 0$. При фиксированной длине КЗ линия представляет собой двухполюсник с бесконечным числом резонансов.

Размыкание линии. В режиме ХХ $\underline{Z}_H = \infty$ и $I_2 = 0$. Уравнения передачи получим из (13.19):

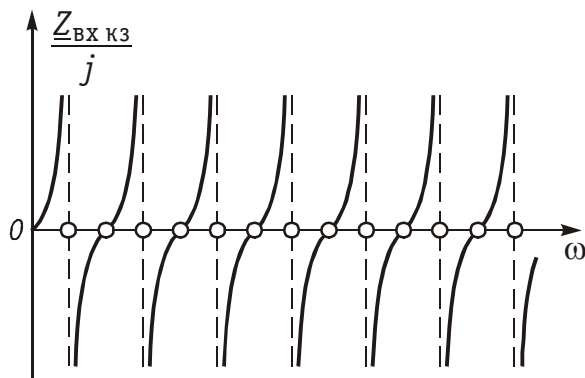


Рис. 13.14

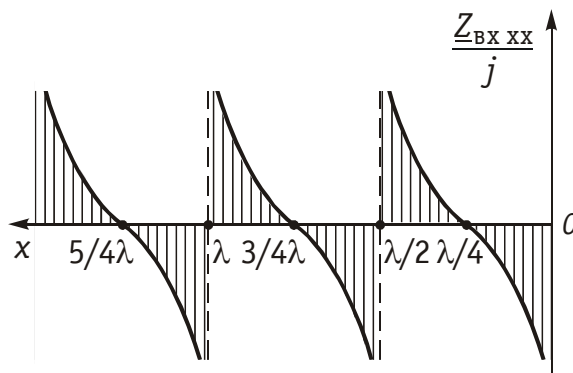


Рис. 13.15

$$\underline{U}_x = \underline{U}_2 \cos \beta x; \quad \underline{I}_x = j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \sin \beta x. \quad (13.22)$$

Для мгновенных значений имеем (при начальной фазе напряжения $\varphi_{u2} = 0$):

$$\begin{aligned} u_x(t) &= |\underline{U}_2| \cos \beta x \sin \omega t; \\ i_x(t) &= \left| \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \right| \sin \beta x \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (13.23)$$

Сравнивая уравнения передачи (13.22) и (13.23) с уравнениями КЗ линии (13.20) и (13.21), видим, что полученные уравнения также являются уравнениями стоячих волн. Разница состоит в том, что узлы и пучности напряжения при ХХ совпадают с узлами и пучностями тока при коротком замыкании, а узлы и пучности тока разомкнутой линии — с узлами и пучностями напряжения КЗ линии. В конце разомкнутой линии образуется пучность напряжения и узел тока.

Данный режим работы линии по аналогии с предыдущим называется *режимом стоячих волн*. Входное сопротивление разомкнутой линии без потерь определяется из (13.22):

$$\underline{Z}_{BX\ XX} = \frac{\underline{U}_x}{\underline{I}_x} = -j \underline{Z}_B \operatorname{ctg} \beta x.$$

Его график, отражающий зависимость от x , дан на рис. 13.15.

Включение линии на реактивное сопротивление. Пусть линия нагружена на индуктивность L_H (рис. 13.16, а). При заданной частоте ω сопротивление нагрузки $\underline{Z}_H = j\omega L_H$.

Из рис. 13.13 видно, что отрезок закороченной линии длиной меньше $\lambda/4$ имеет входное сопротивление индуктивного характера. Поэтому всегда можно подобрать такую длину отрезка l' , при которой его входное сопротивление равнялось бы заданному сопротивлению \underline{Z}_H . Заменим индуктивность L_H отрезком КЗ линии (рис. 13.16, б). Эта замена позволяет применить теорию КЗ линии и сразу же построить кривые распределения напряжения и тока в ли-

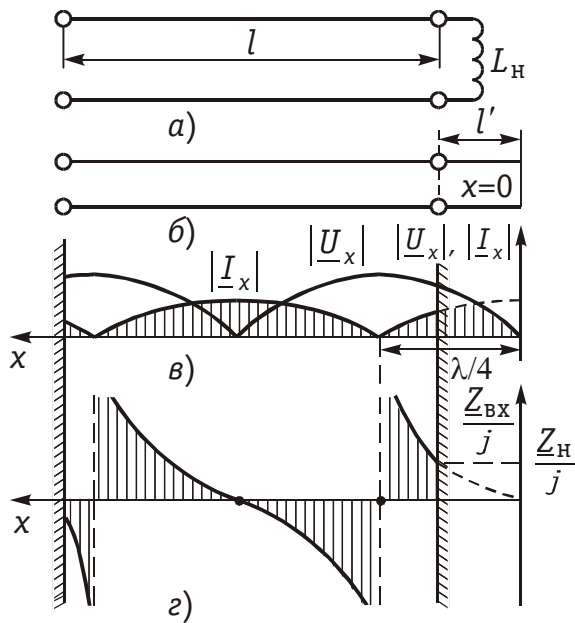


Рис. 13.16

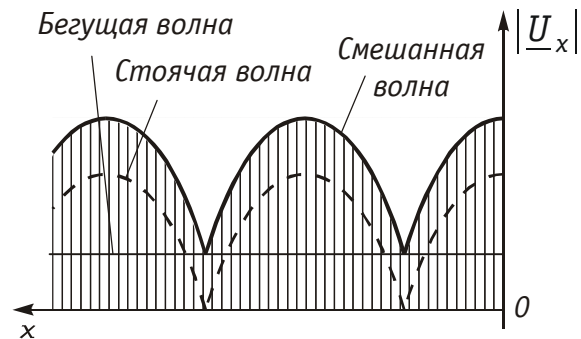


Рис. 13.17

нии, нагруженной на индуктивность (рис. 13.16, в). В рассматриваемой линии возникают стоячие волны. Этот режим отличается от режима КЗ замыкания тем, что ближайший узел и пучность сдвинуты от конца линии на некоторое расстояние.

На рис. 13.16, г приведен график входного сопротивления линии, включенной на индуктивность в зависимости от ее длины. Оно имеет реактивный характер в любом сечении линии.

В случае, когда линия нагружена на емкость C_n с сопротивлением $Z_n = 1/(j\omega C_n)$, можно заменить эту емкость отрезком разомкнутой линии длиной $l < \lambda/4$ (см. рис. 13.15), входное сопротивление которого равняется заданному $1/(j\omega C_n)$. Очевидно, и в этом случае в линии возникают стоячие волны. Предоставляем читателю возможность проанализировать данный режим работы линии самостоятельно.

Включение линии на резистивное сопротивление, не равное волновому. Положим для определенности, что сопротивление нагрузки $R_n > Z_v = \rho_v$, и рассмотрим распространение по линии волны напряжения.

Падающая волна не вся поглощается нагрузкой, часть ее отражается обратно в линию. Амплитуда отраженной волны меньше амплитуды падающей волны, поэтому падающую волну можно представить в виде суммы двух волн. Одна из них, равная по амплитуде отраженной волне, взаимодействуя с ней, образует стоячую волну. Отставшаяся падающая волна является бегущей. Таким образом, в линии возникает *смешанная волна*, состоящая из бегущей и падающей волн. Данный режим работы называется *режимом смешанных волн*.

На рис. 13.17 показано распределение по длине линии модуля комплексной амплитуды напряжения. В линии будут отсутствовать

узлы и пучности, а будут наблюдаться минимумы и максимумы амплитуды волн.

Чтобы оценить близость данного режима к режиму бегущей волны, вводят *коэффициент бегущей волны*:

$$k_{\text{бв}} = \left| \underline{U}_{x \min} \right| / \left| \underline{U}_{x \max} \right|.$$

Величина $k_{\text{бв}}$ изменяется в пределах от $0 \leq k_{\text{бв}} \leq 1$. При $k_{\text{бв}} = 0$ в линии имеет место стоячая волна, при $k_{\text{бв}} = 1$ — бегущая волна.

Коэффициент бегущей волны можно выразить через отношение волнового сопротивления и сопротивления нагрузки. Действительно, минимальное значение амплитуды смешанной волны $\left| \underline{U}_{x \min} \right|$ представляет собой амплитуду бегущей волны $\left| \underline{U}_{\text{бв}} \right|$, т. е. той волны, которая поглощается частью сопротивления нагрузки, равной волновому сопротивлению. Поэтому

$$\left| \underline{U}_{x \min} \right| = \left| \underline{U}_{\text{бв}} \right| = \left| \underline{I}_2 \right| \rho_{\text{в}}.$$

Максимальное значение амплитуды смешанной волны

$$\left| \underline{U}_{x \max} \right| = \left| \underline{U}_{\text{бв}} \right| + \left| \underline{U}_{\text{св}} \right| = \left| \underline{I}_2 \right| \cdot R_{\text{н}}.$$

где $\left| \underline{U}_{\text{св}} \right|$ — максимальная амплитуда стоячей волны. Отсюда находим

$$k_{\text{бв}} = \rho_{\text{в}} / R_{\text{н}}.$$

Часто используют обратную величину $k_{\text{св}} = 1/k_{\text{бв}}$, которую называют *коэффициентом стоячей волны*.

Из общих уравнений передачи линии без потерь (13.19) рассмотрим сначала уравнение для напряжения:

$$\underline{U}_x = \underline{U}_2 \cos \beta x + j \underline{Z}_{\text{в}} \underline{I}_2 \sin \beta x = \underline{U}_2 (\cos \beta x + j k_{\text{бв}} \sin \beta x).$$

Воспользуемся подстановкой в виде тождества

$$\cos \beta x = k_{\text{бв}} \cos \beta x + (1 - k_{\text{бв}}) \cos \beta x.$$

Тогда после несложных преобразований получим

$$\underline{U}_x = \underline{U}_2 k_{\text{бв}} e^{j\beta x} + \underline{U}_2 (1 - k_{\text{бв}}) \cos \beta x.$$

Уравнение передачи для мгновенных значений напряжения находим как обычно (полагая при этом $\varphi_{u2} = 0$):

$$u_x(t) = \left| \underline{U}_2 \right| k_{\text{бв}} \sin(\omega t + \beta x) + \left| \underline{U}_2 \right| (1 - k_{\text{бв}}) \cos \beta x \sin \omega t.$$

Первое слагаемое этого уравнения является бегущей волной, второе слагаемое — стоячей волной. При $k_{\text{бв}} = 0$ первое слагаемое обращается в нуль и в уравнении присутствует только стоячая волна. При $k_{\text{бв}} = 1$ обращается в нуль второе слагаемое и уравнение содержит только бегущую волну.

Рассматривая аналогичным образом уравнение для тока $i_x(t)$, имеем:

$$i_x(t) = \frac{|U_2|}{\rho_B} k_{\text{об}} \sin(\omega t + \beta x) + \frac{|U_2|}{\rho_B} (1 - k_{\text{об}}) \sin \beta x \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Можно сделать некоторые выводы:

если переносимая вдоль линии энергия полностью рассеивается на ее конце (линия нагружена на резистивное сопротивление, равное волновому), то отражение энергии отсутствует и в линии существуют только бегущие волны;

если энергия в конце линии не рассеивается (короткое замыкание, холостой ход, реактивная нагрузка), то происходит полное отражение волн, и, как следствие этого, в линии образуются только стоячие волны;

когда переносимая вдоль линии энергия лишь частично рассеивается на ее конце (линия замкнута на резистивное сопротивление, не равное волновому), в линии одновременно присутствуют как бегущие, так и стоячие волны.

13.7. Применение отрезков линий с пренебрежимо малыми потерями

Колебательный контур. В технике сверхвысоких частот вместо колебательных контуров на сосредоточенных реактивных элементах используют отрезки короткозамкнутых или разомкнутых линий с малыми потерями. Частотные характеристики входных сопротивлений таких отрезков (см. рис. 13.14) в области частот, прилегающих к резонансной, достаточно хорошо воспроизводят характеристики колебательных контуров. Значения добротностей отрезков линий достаточно велики и могут достигать, например, для короткозамкнутых четвертьволновых отрезков нескольких тысяч единиц. Это позволяет успешно использовать их для селекции колебаний весьма высоких частот.

Металлический изолятор. При $x = \lambda/4$ входное сопротивление короткозамкнутого отрезка линии обращается в бесконечность (см. рис. 13.13). Это дает возможность использовать четвертьволновой КЗ отрезок в качестве изолятора, например для подвески двухпроводных воздушных фидерных линий (рис. 13.18). Отрезок линии выполняется в виде жестких металлических прутьев или труб. Их

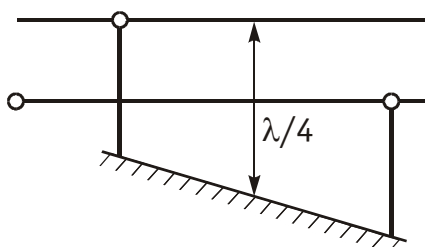


Рис. 13.18

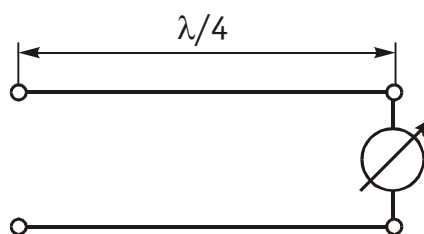


Рис. 13.19

нижние концы заземляются, в результате чего осуществляется КЗ. Верхние концы присоединяются непосредственно к линии. Такие изоляторы по своим электрическим и конструктивным данным превосходят изоляторы из диэлектрика.

Линейный вольтметр. Непосредственное включение в цепь обычного измерительного прибора при очень высокой частоте нарушает режим работы цепи, так как вносит в нее добавочное реактивное и резистивное сопротивления. Измерительный прибор с малым входным сопротивлением, включенный через четвертьволновый отрезок линии, называют *линейным вольтметром* (рис. 13.19). Подключение измерительного прибора к отрезку линии практически создает КЗ. Входное сопротивление линейного вольтметра оказывается очень большим, и он не оказывает заметного влияния на цепь, в которой измеряется напряжение. Измеряемое действующее значение напряжения связано с действующим значением тока, протекающего через измерительный прибор, зависимостью $U = \rho_{\text{в}} I$, что следует из уравнения (13.20) при $x = \lambda/4$.

Полосовой фильтр. На сверхвысоких частотах, где потери в линии пренебрежимо малы, КЗ отрезки линии могут быть использованы для построения фильтров. В качестве примера на рис. 13.20, а показана схема полосового фильтра, построенного на двух КЗ отрезках линии. В продольное плечо схемы включен полуволновый отрезок, в поперечное плечо — четвертьволновый. Первый отрезок имеет входное сопротивление, аналогичное входному сопротивлению последовательного колебательного контура. Второй, четвертьволновый, отрезок играет роль параллельного колебательного контура. Эквивалентная электрическая схема фильтра дана на рис. 13.20, б.

Четвертьволновой трансформатор сопротивлений. При длине отрезка $x = \lambda/4$ уравнения передачи (13.19) упрощаются и принимают вид:

$$\underline{U}_x = j\underline{Z}_{\text{в}} \underline{I}_2; \quad \underline{I}_x = j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{\text{в}}}.$$

Входное сопротивление четвертьволнового отрезка линии с пренебрежимо малыми потерями

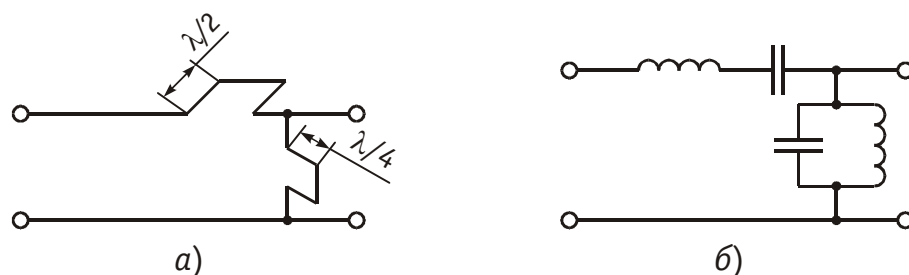


Рис. 13.20

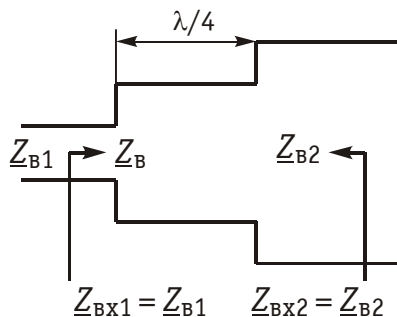


Рис. 13.21

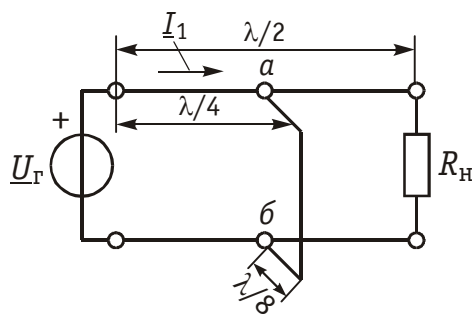


Рис. 13.22

$$\underline{Z}_{\text{BX}} = \frac{U_x}{I_x} = \underline{Z}_B^2 \frac{I_2}{U_2} = \frac{\underline{Z}_B^2}{\underline{Z}_H}; \quad \underline{Z}_B = \sqrt{\underline{Z}_{\text{BX}} \underline{Z}_H}.$$

Такой отрезок можно использовать в качестве согласующего трансформатора сопротивлений. Если включаемые каскадно линии имеют разные волновые сопротивления \underline{Z}_{B1} и \underline{Z}_{B2} , то у четвертьволнового согласующего трансформатора в качестве сопротивления нагрузки выступает волновое сопротивление \underline{Z}_{B2} . Входное сопротивление согласующего трансформатора должно быть равно \underline{Z}_{B1} . Для выполнения этого условия достаточно выбрать \underline{Z}_B трансформатора равным $\sqrt{\underline{Z}_{B1} \underline{Z}_{B2}}$.

Тогда

$$\underline{Z}_{\text{BX}} = \frac{\underline{Z}_B^2}{\underline{Z}_{B2}} = \frac{\underline{Z}_{B1} \underline{Z}_{B2}}{\underline{Z}_{B2}} = \underline{Z}_{B1}.$$

Такой согласующий трансформатор приведен на рис. 13.21.

Пример. На входе отрезка линии без потерь длиной $\lambda/2$, нагруженного на резистивное сопротивление $R_H = 37,5$ Ом, включен источник с $\underline{U}_G = 10$ В. Волновое сопротивление отрезка $\underline{Z}_B = \rho_B = 75$ Ом. На расстоянии $\lambda/4$ от конца отрезка к нему подключен короткозамкнутый шлейф длиной $l_{\text{ш}} = \lambda/8$ и волновым сопротивлением $\underline{Z}_B = \rho_B = 75$ Ом. Определим входное сопротивление отрезка и ток на его входе.

Отрезок линии с короткозамкнутым шлейфом изображен на рис. 13.22. Найдем сначала входное сопротивление части отрезка длиной $\lambda/4$ от сопротивления R_H , до точек $a-b$, рассматривая эту часть как трансформатор сопротивлений: $\underline{Z}'_{\text{BX}} = \underline{Z}_B^2 / R_H = 150$ Ом.

Входное сопротивление КЗ шлейфа длиной $\lambda/8$, определяется по формуле

$$\underline{Z}_{\text{BX ш}} = j \underline{Z}_B \operatorname{tg} \beta l_{\text{ш}} = j 75 \text{ Ом},$$

где

$$\beta l_{\text{ш}} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, левая часть отрезка длиной $\lambda/4$ оказалась нагруженной на параллельное соединение сопротивлений $\underline{Z}'_{\text{BX}}$ и $\underline{Z}_{\text{BX ш}}$, т. е. на сопротивление $\underline{Z} = \underline{Z}'_{\text{BX}} \underline{Z}_{\text{BX ш}} / (\underline{Z}'_{\text{BX}} + \underline{Z}_{\text{BX ш}}) = 67e^{j63^\circ 30'}$ Ом.

Входное сопротивление всего отрезка определим, рассматривая первую половину отрезка как трансформатор сопротивления. Поэтому $\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_{\text{в}}^2 / \underline{Z}_{\text{аб}} = 84e^{-j63^\circ 30'} \text{ Ом}$. Ток на входе отрезка линии $\underline{I}_1 = \underline{U} / \underline{Z}_{\text{вх}} = 0,119e^{j63^\circ 30'} \text{ А}$.

Вопросы и задания для самопроверки

1. Привести примеры применения длинных линий.
2. Как рассчитывается длина волны, излучаемой радиовещательной станцией?
3. Рассчитать и построить графики первичных параметров коаксиального кабеля 2,6/9,4 мм в диапазоне частот 812 ... 17569 кГц. При расчетах принять $\varepsilon = 1,1$; $\text{tg } \delta = 0,6 \cdot 10^{-4}$, длина кабеля $l = 1 \text{ км}$.

Ответ: $L = 2,57 \cdot 10^{-4} \text{ Гн/км}$, $C = 47,5 \text{ нФ/км}$,
 $R = 4,1 \cdot 10^{-2} \sqrt{f} \text{ Ом/км}$, $G = 1,8 \cdot 10^{-14} \text{ См/км}$.

4. Используя данные задачи 3, рассчитать волновое сопротивление кабеля $\underline{Z}_{\text{в}} = |\underline{Z}_{\text{в}}| e^{j\varphi_{\text{в}}}$, длину волны λ .

Ответ: $\underline{Z}_{\text{в}} = 73,5 \text{ Ом}$, $\lambda = 0,286 \cdot 10^9 / f$.

5. Первичные параметры линии на частоте $\omega = 10^4 \text{ с}^{-1}$ имеют значения: $R = 10 \text{ Ом/км}$, $L = 0,5 \text{ мГн/км}$, $C = 4 \cdot 10^{-8} \text{ Ф/км}$, $G = 10^{-6} \text{ См/км}$. Рассчитать волновое сопротивление, коэффициент распространения и длину волны.

Ответ: $\underline{Z}_{\text{в}} = 167,2 \text{ Ом}$, $\varphi_{\text{в}} = -0,552 \text{ рад}$, $\alpha = 0,0157$,
 $\beta = -0,065 \text{ (для } l = 1 \text{ км)}$.

6. Почему кабельные линии связи работают в режиме согласованной нагрузки? Что произойдет, если волновое сопротивление антенного фидера не будет согласовано с входным сопротивлением телевизионного приемника?
7. Запишите уравнения передачи линии без потерь. Чем они отличаются от уравнений передачи линии с потерями?
8. Чем отличаются напряжения и токи в различных сечениях согласованно нагруженной линии без потерь?
9. Укажите различия между следующими понятиями: падающие и отраженные волны; бегущие, стоячие и смешанные волны.
10. Линия без потерь с волновым сопротивлением $\rho = 90 \text{ Ом}$ нагружена на сопротивление $R_{\text{н}}$. Коэффициент бегущей волны равен 0,6. Определить сопротивление нагрузки $R_{\text{н}}$.

Ответ: $5,4 \text{ Ом}$.

11. Какой минимальной длины необходимо взять отрезок линии без потерь с параметрами $L = 0,49 \text{ мГн/м}$, $C = 25 \text{ мФ/м}$, чтобы на частоте $f = 10^8 \text{ Гц}$ получить из него индуктивность $0,223 \text{ мГн}$.

Ответ: короткозамкнутый отрезок длиной $0,347 \text{ м}$.

ГЛАВА 14. ЦЕПИ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

14.1. Определение и классификация обратных связей

В большинстве цепей с зависимыми источниками имеется по крайней мере два пути прохождения сигнала: прямой (от входа к выходу) и обратный (с выхода на вход). Обратный путь прохождения сигнала реализуется с помощью специальной цепи *обратной связи* (ОС). Таких путей, а значит, и цепей ОС может быть несколько. Наличие в цепях с зависимыми источниками ОС придает им новые ценные качества, которыми не обладают цепи без ОС. Например, с помощью цепей ОС можно осуществить температурную стабилизацию режима работы цепи, уменьшить нелинейные искажения, возникающие в цепях с нелинейными элементами, улучшить технические параметры усилителей и т. д.

Введение ОС позволяет создавать цепи, генерирующие колебания различной формы (гл. 15), моделирующие различные функции (суммирование, интегрирование, дифференцирование и др. (гл. 2, 3)).

Кроме положительных, ОС могут оказывать и отрицательные последствия на цепь. Так, ОС могут образовываться за счет различных «паразитных» связей, возникающих в результате неудачного монтажа элементов цепи или при нерациональном формировании элементов в подложке микросхемы и др. Подобные ОС могут возникать на высоких частотах за счет различных «паразитных» емкостей создающих цепи обратной связи с выхода на вход. «Паразитные» ОС могут оказывать неконтролируемые воздействия на работу цепи и поэтому должны учитываться в необходимых случаях при расчетах. Все вышеизложенное свидетельствует о важности изучения цепей с ОС.

Обратные связи могут быть классифицированы по различным признакам: по характеру связи — положительной (ПОС), отрицательной (ООС) и комплексной; по структуре — внешней и внутренней; по характеру реализующих ее элементов — активной и пассивной, линейной и нелинейной, частотно зависимой и частотно независимой и т. д.

С точки зрения анализа важным являются способы соединения четырехполюсников прямой передачи и цепи ОС. На рис. 14.1 представлены основные схемы соединения четырехполюсника каналов прямого усиления с передаточной функцией $H_y(p)$ и четырехполюсника цепи ОС с передаточной функцией $H_{oc}(p)$. Причем, в качестве четырехполюсника с $H_y(p)$ обычно используют активные цепи (усилитель), а в качестве цепи ОС с передаточной функцией $H_{oc}(p)$ пассивный четырехполюсник. В дальнейшем ограничимся случаем, когда усилитель и цепь ОС являются линейными четырехполюсниками.

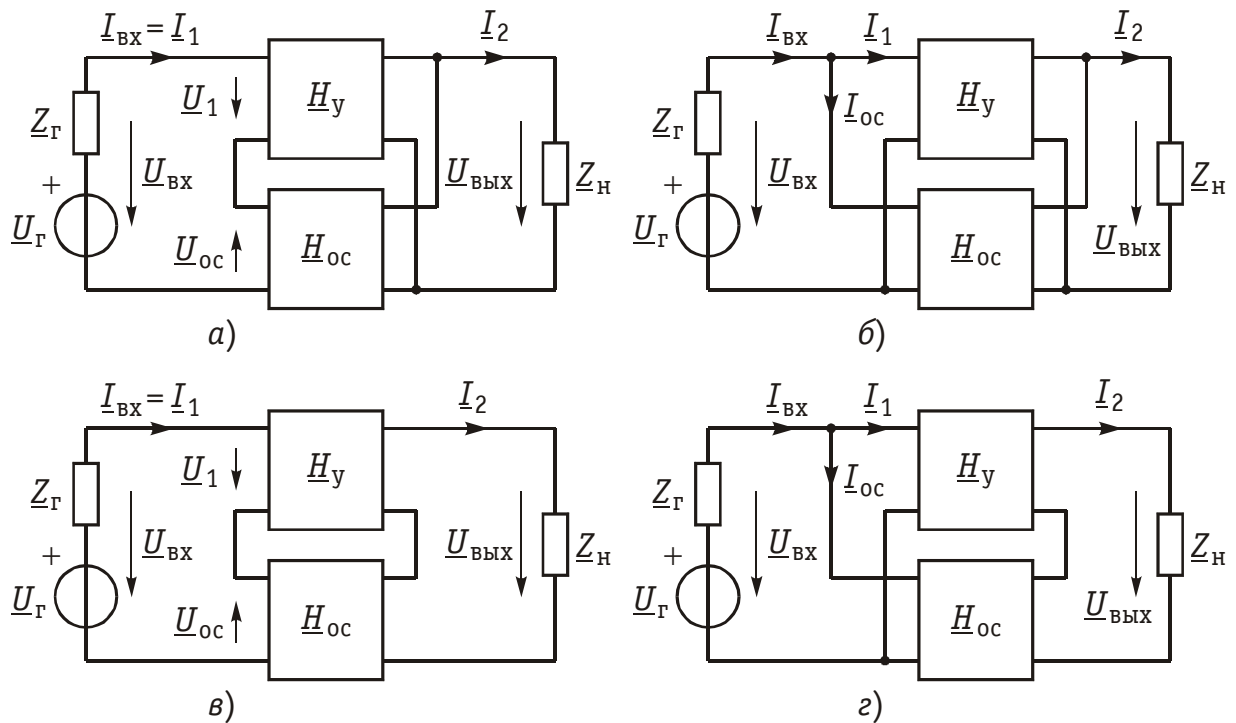


Рис. 14.1

Данные схемы соответствуют последовательно-параллельному (а), параллельному (б), последовательному (в) и параллельно-последовательному (г) соединению четырехполюсников (см. § 12.3). В соответствии с этим для анализа подобных сложных четырехполюсников могут использоваться \mathbf{H} , \mathbf{Y} , \mathbf{Z} , \mathbf{F} -параметры соответственно, поэтому в литературе иногда эти структуры называют ОС \mathbf{H} , \mathbf{Y} , \mathbf{Z} и \mathbf{F} -типа соответственно.

В соответствии со структурными схемами (рис. 14.1) различают следующие виды ОС: *последовательной по напряжению* (рис. 14.1, а), т. к. U_{oc} зависит от $U_{вх}$; *параллельной по напряжению* (рис. 14.1, б), поскольку ток I_{oc} является функцией выходного напряжения U_2 ; *последовательной по току* (рис. 14.1, в), т. к. U_{oc} в этой схеме зависит от выходного тока I_2 ; *параллельной по току* (рис. 14.1, г), потому что I_{oc} будет зависеть от выходного тока I_2 .

Для определения типа ОС (по току или напряжению) необходимо помнить, что ОС по напряжению будет максимальной при ХХ на выходе и минимальной при КЗ на выходе, а ОС по току будет максимальной при КЗ на выходе и минимальной (равной нулю) при ХХ на выходе.

14.2. Передаточная функция цепи с обратной связью

1. Передаточная функция цепи по напряжению.

Определим передаточную функцию по напряжению цепи с обратной связью на примере схемы, изображенной на рис. 14.1 а, и

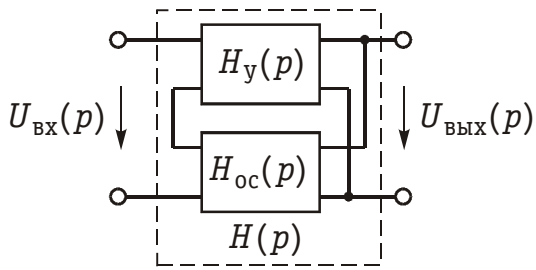


Рис. 14.2

проанализируем влияние ОС на основные параметры усилителя с ОС цепи как сложного четырехполюсника.

Для этого типа ОС можно записать следующее равенство согласно ЗНК в операторной форме (рис. 14.1, а):

$$U_{\text{вх}}(p) = U_1(p) - U_{\text{ос}}(p).$$

Тогда для изображения выходного напряжения можно согласно рис. 14.2 записать:

$$U_{\text{вых}}(p) = [U_1(p) - U_{\text{ос}}(p)]H(p),$$

где $H(p)$ — операторная передаточная функция по напряжению.

Операторное изображение $U_{\text{ос}}(p)$ можно записать через передаточную функцию $H_{\text{ос}}(p)$ цепи обратной связи

$$U_{\text{ос}}(p) = U_{\text{вых}}(p)H_{\text{ос}}(p), \quad (14.1)$$

а напряжение $U_1(p)$ через передаточную функцию усилителя $H_y(p)$:

$$U_1(p) = U_{\text{вых}}(p) \cdot 1/H_y(p). \quad (14.2)$$

Отсюда с учетом (14.1) и (14.2) операторная передаточная функция по напряжению цепи с ОС (см. рис. 14.2) будет равна

$$H(p) = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{H_y(p)}{1 - H_y(p) \cdot H_{\text{ос}}(p)}. \quad (14.3)$$

Переходя в (14.3) от оператора p к оператору $j\omega$, получаем комплексную передаточную функцию

$$H(j\omega) = \frac{U_{\text{вых}}(j\omega)}{U_{\text{вх}}(j\omega)} = \frac{H_y(j\omega)}{1 - H_y(j\omega) \cdot H_{\text{ос}}(j\omega)}. \quad (14.4)$$

Таким образом, частотные свойства цепи в равной мере зависят как от $H_y(j\omega)$ канала прямого усиления, так и от $H_{\text{ос}}(j\omega)$ цепи обратной связи. Поэтому можно, оставляя неизменным основной элемент системы, в широких пределах изменять частотную характеристику всей цепи, изменяя лишь параметры цепи обратной связи.

Произведение $H_y(j\omega) \cdot H_{\text{ос}}(j\omega) = H_p(j\omega)$ представляет собой комплексную передаточную функцию усилителя и цепи обратной связи при условии, что обратная связь разорвана (рис. 14.3, а). Функцию $H_p(j\omega)$ называют передаточной функцией по петле ОС или *петлевым усилением*. Введем понятия положительной и отрицательной обратной связи. Эти понятия играют заметную роль в теории цепей с обратной связью.

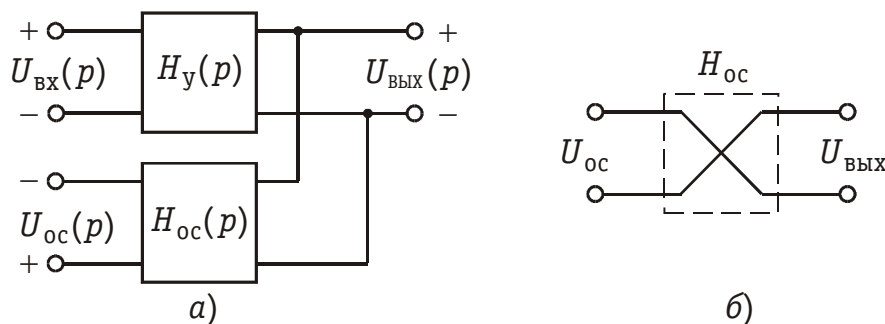


Рис. 14.3

Предположим вначале, что передаточные функции H_y , H_{oc} , H_p не зависят от частоты и являются вещественными числами. Такая ситуация возможна, когда в цепи отсутствуют LC -элементы. При этом H_p может быть как положительным, так и отрицательным числом. В первом случае сдвиг фаз между входным и выходным напряжениями, или другими словами, сдвиг фаз по петле обратной связи равен нулю или $2k\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Во втором случае, когда $H_p < 0$, сдвиг фаз по этой петле равен $\pm\pi$ или $\pm(2k - 1)\pi$. (Заметим, что сдвиг фаз на $\pm\pi$ можно легко получить путем перекрещивания проводов, например так, как показано на рис. 14.3, б).

Если в цепи с обратной связью сдвиг фаз по петле равен нулю, то обратная связь называется *положительной*, если же сдвиг фаз равен $\pm\pi$, то такая обратная связь называется *отрицательной*.

Передаточную функцию $H_p(j\omega)$ можно изобразить в виде векторов и показать их на комплексной плоскости. При положительной обратной связи вектор $H_p(j\omega)$ находится на положительной вещественной полуоси, а при отрицательной обратной связи — на отрицательной вещественной полуоси.

В § 4.1 было введено понятие годографа передаточной функции. Напомним, что *годографом* называется кривая, которую описывает конец вектора $H_p(j\omega)$ при изменении частоты ω (рис. 4.3, в и 14.4).

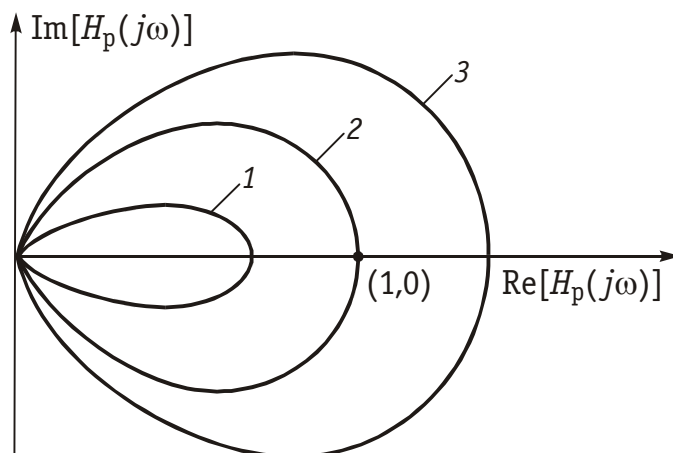


Рис. 14.4

Представление $H_p(j\omega)$ в виде годографа позволяет определить вид обратной связи в случае частотнозависимой обратной связи. Обратная связь называется *положительной*, если годограф $H_p(j\omega)$ лежит в правой, и *отрицательной* — если в левой полуплоскости комплексной плоскости. Отрицательная ОС применяется для стабилизации коэффициента усиления, подавления паразитных сигналов, коррекции частотных характеристик; положительная ОС может являться причиной неустойчивости цепи. Поясним это. Пусть H_{oc} и H_y — положительные вещественные числа. Тогда при $H_y \cdot H_{oc} = 1$, т. е. когда $H_{oc} = 1/H_y$, значение передаточной функции (14.4) стремится к бесконечности. Это означает, что даже при бесконечно малых значениях амплитуды входного напряжения $u_{вх}(t)$ амплитуда выходного напряжения $u_{вых}(t)$ будет неограниченно возрастать. Говорят, что в этом случае наступает *самовозбуждение* цепи с ОС. Поэтому при проектировании цепей с обратной связью одной из основных задач является исследование их устойчивости. Таким образом, термины неустойчивость и самовозбуждение являются синонимами.

2. Влияние ОС на параметры усилителя.

Обратная связь существенно влияет на результирующие параметры цепи с ОС; в частности ее входное и выходное сопротивления и коэффициенты передачи. Рассмотрим влияние ОС на пара-

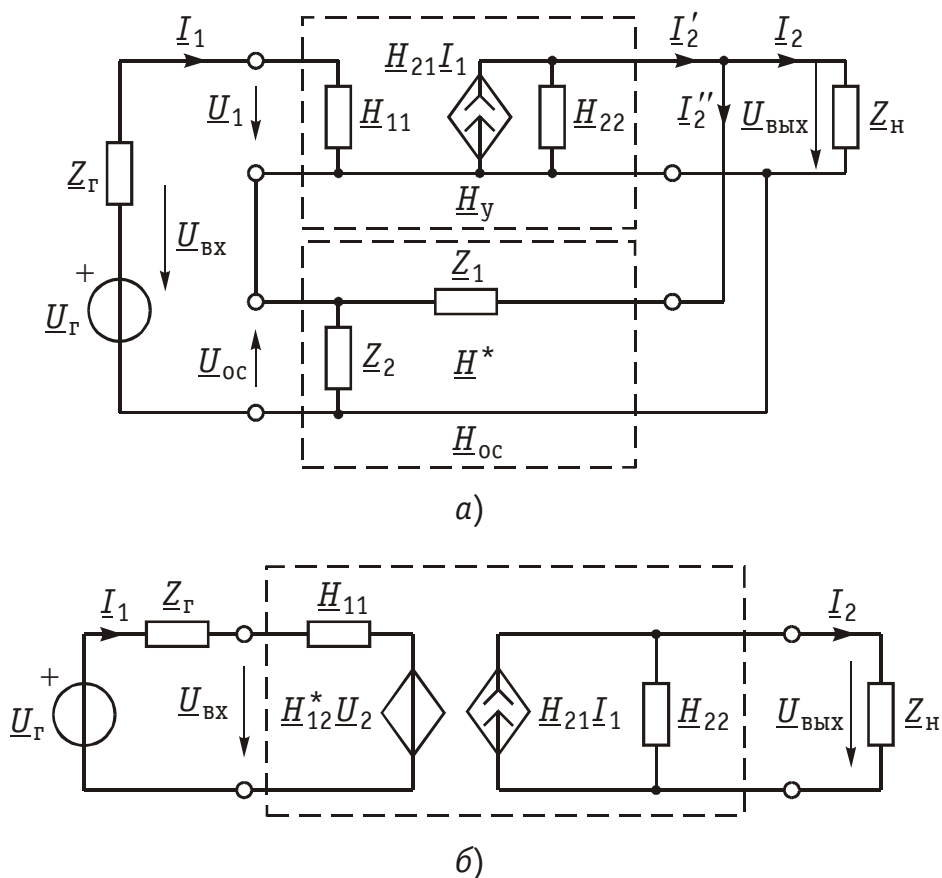


Рис. 14.5

метры усилителя на примере схемы, изображенной на рис. 14.2. На рис. 14.5 изображена эквивалентная схема с зависимым источником напряжения с **H**-параметрами при отсутствии внутренней ОС ($H_{12} = 0$);

$$\underline{\mathbf{H}}_y = \begin{Bmatrix} \underline{H}_{11} & 0 \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{Bmatrix}.$$

Четырехполюсник ОС представлен в виде четырехполюсника с матрицей **H**_{ос}-параметров

$$\underline{\mathbf{H}}_{\text{ос}} = \begin{Bmatrix} \underline{H}_{11\text{ос}} & \underline{H}_{12\text{ос}} \\ \underline{H}_{21\text{ос}} & \underline{H}_{22\text{ос}} \end{Bmatrix}.$$

Запишем согласно (12.5) уравнения активного и пассивного четырехполюсников в **H**-параметрах:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{H}_{11}\underline{I}_1 + 0 \cdot \underline{U}_{\text{ВЫХ}} \\ \underline{I}'_2 &= \underline{H}_{21}\underline{I}_1 + \underline{H}_{22}\underline{U}_{\text{ВЫХ}} \end{aligned} \right\}, \quad (14.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{\text{ос}} &= \underline{H}_{11\text{ос}}\underline{I}_1 + \underline{H}_{12\text{ос}}\underline{U}_{\text{ВЫХ}} \\ \underline{I}''_2 &= \underline{H}_{21\text{ос}}\underline{I}_1 + \underline{H}_{22\text{ос}}\underline{U}_{\text{ВЫХ}} \end{aligned} \right\}. \quad (14.6)$$

Матрица **H**-параметров сложного четырехполюсника определяется с учетом § 12.3 как

$$\underline{\mathbf{H}} = \begin{Bmatrix} \underline{H}_{11} + \underline{H}_{11\text{ос}} & 0 + \underline{H}_{12\text{ос}} \\ \underline{H}_{21} + \underline{H}_{21\text{ос}} & \underline{H}_{22} + \underline{H}_{22\text{ос}} \end{Bmatrix}. \quad (14.7)$$

Поскольку в данной схеме (рис. 14.5) ОС предназначена для получения на выходе четырехполюсника определенного напряжения $U_{\text{ос}}$, то основное значение на свойство усилителя должен играть коэффициент $\underline{H}_{12\text{ос}}$. Учитывая, что цепь ОС отбирает часть полезной энергии из нагрузки необходимо стремиться, чтобы $\underline{H}_{22\text{ос}} \ll \underline{H}_{22}$. Кроме того, для уменьшения потерь входного сигнала на входном сопротивлении цепи с ОС, необходимо выполнение условия $\underline{H}_{11} \gg \underline{H}_{11\text{ос}}$. Если при этом учесть, что обычно $\underline{H}_{21} \gg \underline{H}_{21\text{ос}}$ и для пассивной цепи $\underline{H}_{12\text{ос}} < 1$, то окончательно матрица **H**-параметров сложного четырехполюсника с цепью ОС примет вид

$$\underline{\mathbf{H}} = \begin{Bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12\text{ос}} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{Bmatrix}. \quad (14.8)$$

При этом уравнения передачи **H**-параметров примут вид (рис. 14.5, б)

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{\text{ВХ}} &= \underline{H}_{11}\underline{I}_1 + \underline{H}_{12\text{ос}}\underline{U}_{\text{ВЫХ}} \\ \underline{I}_2 &= \underline{H}_{21}\underline{I}_1 + \underline{H}_{22}\underline{U}_{\text{ВЫХ}} \end{aligned} \right\}. \quad (14.9)$$

С помощью системы уравнений (14.9) можно определить искомые зависимости токов и напряжений от параметров цепи ОС. Можно,

в частности показать, что отрицательная ОС (ООС) уменьшает коэффициент передачи по напряжению усилителя в k -раз, а входное сопротивление увеличивает в k -раз, где

$$k = 1 - \underline{H}_{12oc} \underline{H}_{21} / (\underline{H}_{11} + \underline{Z}_r)(\underline{H}_{22} + \underline{Y}_n). \quad (14.10)$$

Так как рассмотренный тип ОС (последовательной по напряжению) ведет к увеличению входного и уменьшению выходного сопротивлений усилителя, то это позволяет осуществить трансформацию сопротивлений, что используется для согласования отдельных каскадов усилителя.

Следует также отметить, что коэффициент передачи ОУ с последовательной ОС по напряжению при бесконечно большом коэффициенте усиления является функцией только параметров элементов цепи ОС.

В заключении рассмотрим влияние ОС на стабильность коэффициента усиления, как основного показателя усилителя.

Для отрицательной и вещественной ОС согласно уравнению (14.4) для коэффициента усиления усилителя можно записать

$$H = \frac{H_y}{1 + H_y \cdot H_{oc}}. \quad (14.11)$$

Продифференцируем (14.11) по H_y и H_{oc}

$$\frac{dH}{dH_y} = \frac{1}{(1 + H_y H_{oc})^2}; \quad \frac{dH}{dH_{oc}} = \frac{H_y^2}{(1 + H_y H_{oc})}. \quad (14.12)$$

Отсюда относительная нестабильность коэффициента усиления с учетом (14.11) будет равна

$$\frac{dH}{H} = \left[\frac{1}{(1 + H_y H_{oc})} \right] \frac{dH_y}{H_y}, \quad (14.13)$$

$$\frac{dH}{H} = \left[\frac{1}{(1 + 1/H_y H_{oc})} \right] \frac{dH_{oc}}{H_{oc}}. \quad (14.14)$$

Анализ (14.13) показывает, что нестабильность коэффициента усиления усилителя с ОС в $1/(1 + H_y \cdot H_{oc})$ раз меньше чем без ОС.

Равенство (14.14) показывает, что при $H_y \gg 1/H_{oc}$ $dH \approx \approx dH_{oc}/H_{oc}$, т. е. пропорционально нестабильности коэффициента передачи цепи ОС, поэтому стараются цепь ОС сделать достаточно стабильной.

Аналогичным образом можно найти коэффициент передачи и исследовать влияние ОС на параметры других схем с ОС (см. рис. 14.1 б)–г)). При этом надо иметь ввиду, что в соответствующих выражениях будут фигурировать не только комплексные коэффициенты передачи по напряжению, но и по току, а также пере-

даточные комплексные сопротивления и проводимости. Кроме того уравнения передачи соответствующих четырехполюсников в зависимости от типа соединения должны быть записаны в **Z** или **F**-параметрах (см. § 12.2).

14.3. Примеры цепей с обратной связью

Масштабный усилитель с неинвертирующим входом. На рис. 14.6, а изображена цепь на ОУ, предназначенная для масштабирования напряжения, а на рис. 14.6, б — ее схема замещения с зависимым источником типа ИНУН. В гл. 2 данная схема анализировалась методом узловых потенциалов. Получим передаточную функцию этой цепи как цепи с обратной связью, используя формулу (14.4).

Цепью обратной связи на схеме рис. 14.6 служит Г-образный делитель напряжения, составленный из резистивных сопротивлений R_0 и R_1 . Выходное напряжение усилителя \underline{U}_2 поступает на вход цепи ОС (узлы 2–4); напряжение ОС \underline{U}_3 снимается с резистора R_1 (узлы 3–4). Передаточная функция по напряжению цепи ОС

$$\underline{H}_{\text{ос}} = \underline{U}_3 / \underline{U}_2 = R_1 / (R_0 + R_1).$$

Воспользуемся формулой (14.4) и учтем, что входное напряжение \underline{U}_1 и напряжение обратной связи \underline{U}_3 не суммируются, а вычитаются. Тогда получим передаточную функцию масштабного усилителя:

$$\underline{H} = \frac{H_u}{1 + H_u \underline{H}_{\text{ос}}} = 1 / \left(\frac{1}{H_u} + \frac{R_1}{R_0 + R_1} \right).$$

Учитывая, что в реальных ОУ значение $H_u \gg 1$, окончательно имеем:

$$\underline{H} = 1 + \frac{R_0}{R_1},$$

что, естественно, совпадает с результатом, полученным в гл. 2 методом узловых напряжений.

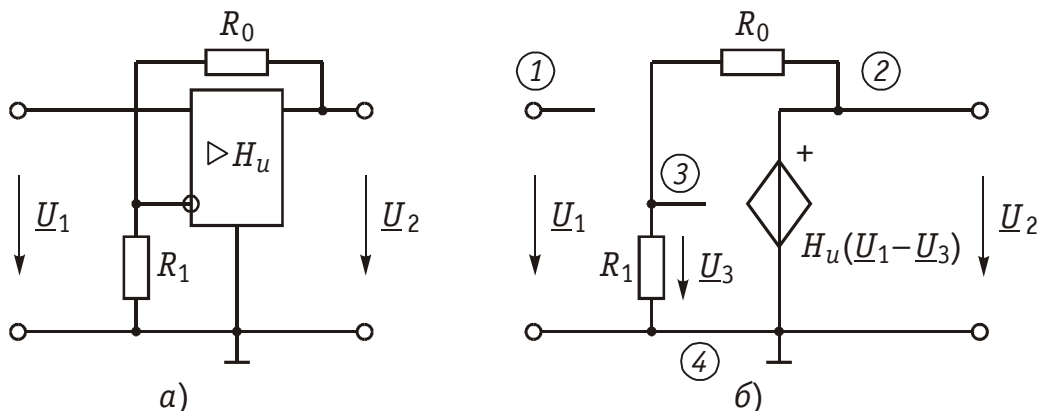


Рис. 14.6

Звено на ОУ с частотно-зависимой ОС. Звено такого вида представлено на рис. 14.7, а, а его схема замещения — на рис. 14.7, б. Чтобы проанализировать прямой путь прохождения сигнала и путь прохождения сигнала ОС, необходимо воспользоваться методом наложения (см. § 2.3). Для этого следует поочередно исключать источники входного напряжения и напряжения обратной связи, заменяя их внутренним сопротивлением. В случае идеальных источников напряжения (рис. 14.17, б) их внутреннее сопротивление равно нулю. Из схемы замещения следует, что напряжение \underline{U}_1 , приложенное к звену, ослабляется входной цепью, представляющей собой Г-образный делитель напряжения с сопротивлениями \underline{Z}_1 и \underline{Z}_0 в плечах (рис. 14.7, в). Передаточная функция по напряжению такого делителя равна

$$\underline{H}_{\text{вх}} = \underline{U}_3 / \underline{U}_1 = \underline{Z}_0 / (\underline{Z}_0 + \underline{Z}_1).$$

Цепь обратной связи (рис. 14.7, г) также является Г-образным четырехполюсником с передаточной функцией

$$\underline{H}_{\text{ос}} = \underline{U}_2 / \underline{U}_3 = \underline{Z}_1 / (\underline{Z}_0 + \underline{Z}_1).$$

Коэффициент усиления ОУ $\underline{H}_y = -H_u$.

В соответствии с формулой (14.4) получаем, передаточную функцию звена:

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \underline{H}_{\text{вх}} \frac{\underline{H}_y}{1 - \underline{H}_y \underline{H}_{\text{ос}}} = \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_1} \cdot \frac{-H_u}{1 + H_u \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_1}} = \\ &= \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_1} \cdot (-1) / \left(\frac{1}{H_u} + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_1} \right). \end{aligned}$$

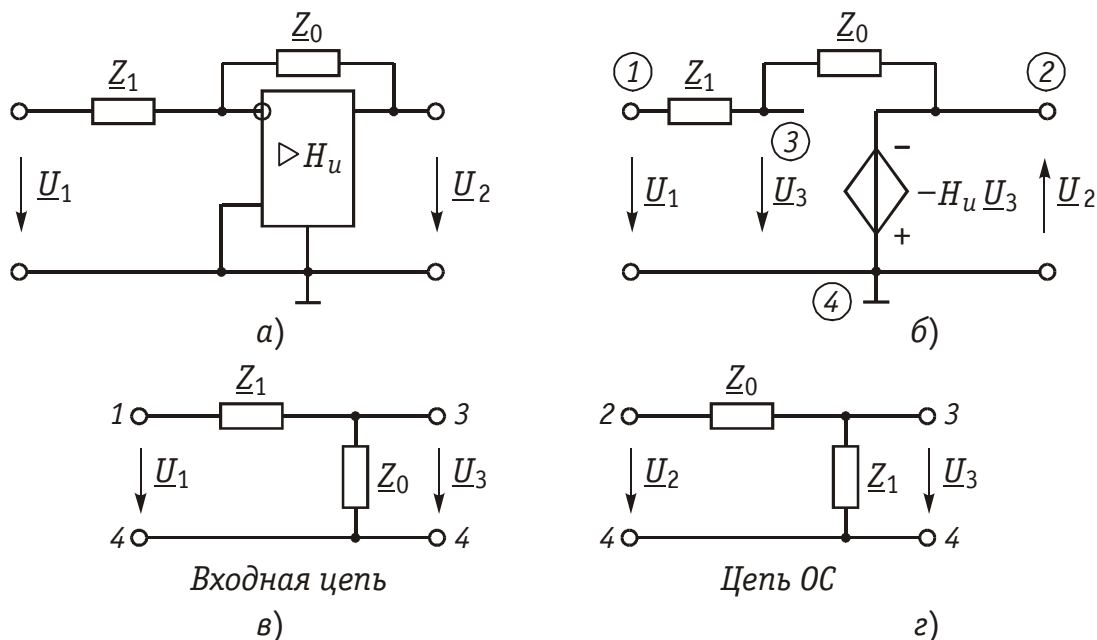


Рис. 14.7

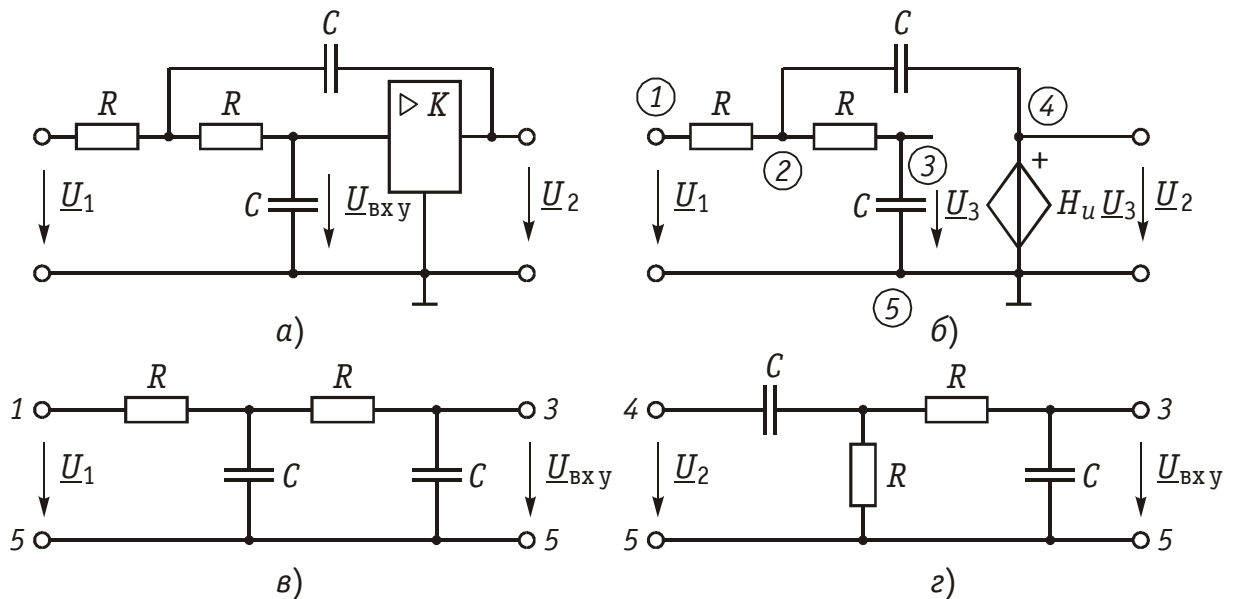


Рис. 14.8

Учитывая, что $H_u \gg 1$, получаем:

$$\underline{H} = -\underline{Z}_0 / \underline{Z}_1. \quad (14.15)$$

Данное звено может выполнять различные функции в зависимости от вида сопротивлений \underline{Z}_0 и \underline{Z}_1 . При $\underline{Z}_0 = R_0$ и $\underline{Z}_1 = R_1$ звено превращается в инвертирующий масштабный усилитель (см. гл. 2); при $\underline{Z}_0 = 1/j\omega C$ и $\underline{Z}_1 = R$ — в интегратор; при $\underline{Z}_0 = R$ и $\underline{Z}_1 = 1/j\omega C$ — в дифференциатор (см. гл. 3).

Звено второго порядка с регулируемым коэффициентом усиления. Схема звена показана на рис. 14.8, а. Усилитель с регулируемым коэффициентом усиления K может быть выполнен либо на транзисторных каскадах, либо на ОУ по схеме рис. 14.6, а, либо на других активных элементах. В схеме замещения на рис. 14.8, б он представлен идеальным ИНУН.

Анализ прохождения входного сигнала и сигнала в цепи ОС показывает, что звено имеет входную цепь, изображенную на рис. 14.8, в и цепь ОС, показанную на рис. 14.8, г. Передаточные функции этих цепей можно получить матричным методом (см. гл. 12), например, рассматривая каждую цепь как каскадное соединение соответствующих Г-образных четырехполюсников.

Для входной цепи (см. § 3.11)

$$H_{\text{вх}}(p) = 1 / (p^2 R^2 C^2 + 3pRC + 1). \quad (14.16)$$

Для цепи ОС

$$H_{\text{ос}}(p) = \frac{pRC}{p^2 R^2 C^2 + 3pRC + 1}. \quad (14.17)$$

С учетом (14.3) получим передаточную функцию звена

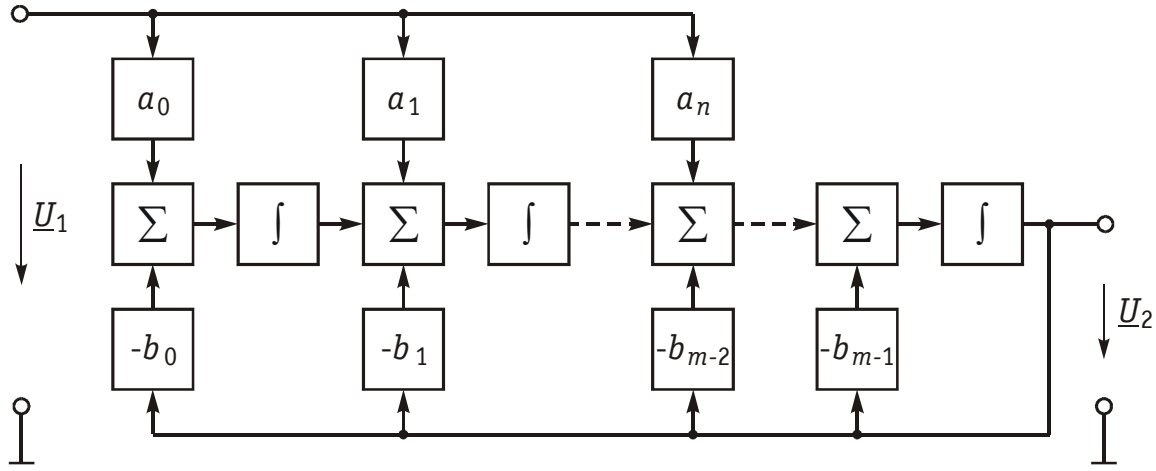


Рис. 14.9

$$H(p) = H_{\text{вх}}(p) \cdot \frac{H_y(p)}{1 - H_y(p)H_{\text{ос}}(p)}. \quad (14.18)$$

Коэффициент передачи усилителя $H_y(p) = K$. Тогда, подставляя (14.6) и (14.7) в (14.8), после преобразований имеем

$$H(p) = K / (p^2 R^2 C^2 + pRC(3 - K) + 1).$$

Моделирование передаточных функций общего вида. Передаточная функция линейной цепи представляется согласно (7.41) в виде рациональной дроби:

$$H_u(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}. \quad (14.19)$$

Приведя (14.9) к общему знаменателю, получим:

$$\begin{aligned} U_2(p)(p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) = \\ = U_1(p)(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0). \end{aligned}$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} U_2(p) = U_1(p) a_n \frac{1}{p^{m-n}} + \dots + U_1(p) a_0 \frac{1}{p^m} - \\ - U_2(p) b_{m-1} \frac{1}{p} - \dots - U_2(p) b_1 \frac{1}{p^{m-1}} - U_2(p) b_0 \frac{1}{p^m}. \end{aligned}$$

Так как операции $1/p^m$ соответствует m -кратное интегрирование, то последнему уравнению соответствует структурная схема, изображенная на рис. 14.9.

Таким образом, с помощью интеграторов, сумматоров, масштабных усилителей, умножителей может быть реализована передаточная функция $H(p)$ достаточно общего вида.

14.4. Устойчивость цепи с обратной связью

Введем понятия устойчивой и неустойчивой цепи. Цепь называется *устойчивой*, если свободные колебания с течением времени стремятся к нулю. В противном случае цепь называется *неустойчивой*. Из теории переходных процессов (гл. 6, 7) следует, что цепь является устойчивой, если корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости комплексной переменной p . Если корни такого уравнения лежат в правой полуплоскости, то цепь является неустойчивой, т. е. она находится в режиме самовозбуждения. Таким образом, для определения условий устойчивости цепи достаточно найти характеристическое уравнение и его корни. Как видим, условия устойчивости можно определить и не вводя понятие обратной связи. Однако здесь возникает ряд проблем. Дело в том, что вывод характеристического уравнения и определение его корней являются громоздкой процедурой особенно для цепей высокого порядка. Введение понятия обратной связи облегчает получение характеристического уравнения или даже дает возможность обойтись без него. Крайне важно и то, что понятие обратной связи адекватно физическим процессам, возникающим в цепи, поэтому они становятся более наглядными. Глубокое понимание физических процессов облегчает работу по созданию автогенераторов, усилителей и т. д.

Рассмотрим цепь (см. рис. 14.2) и выведем ее характеристическое уравнение. Пусть $u_{\text{вх}}(t) = 0$ и, значит, $U_{\text{вх}}(p) = 0$. Тогда из (14.2) следует:

$$U_{\text{вых}}(p)[1 - H_{\text{ос}}(p) \cdot H_y(p)] = 0. \quad (14.20)$$

Здесь $U_{\text{вых}}(p) \neq 0$ (в противном случае цепь нельзя считать возбужденной) и поэтому равенство (14.20) выполняется при условии

$$1 - H_{\text{ос}}(p)H_y(p) = 0. \quad (14.21)$$

Если записать передаточную функцию основной цепи в виде (7.41): $H_y(p) = w_1(p)/v_1(p)$, а цепи ОС — $H_{\text{ос}}(p) = w_2(p)/v_2(p)$, то уравнение (14.11) перепишется следующим образом:

$$\frac{v_1(p)v_2(p) - w_1(p)w_2(p)}{v_1(p)v_2(p)} = 0.$$

Это равенство выполняется при

$$v_1(p)v_2(p) - w_1(p)w_2(p) = 0. \quad (14.22)$$

Выражение в левой части этого равенства является полиномом, поэтому (14.22) можно записать в общем виде:

$$b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0 = 0. \quad (14.23)$$

Это и есть характеристическое уравнение цепи.

Заметим еще раз, что точно такое же уравнение мы бы получили, составляя дифференциальное уравнение по законам Кирхгофа, как мы это делали при изучении переходных процессов.

Корни уравнения (14.23) в общем случае являются комплексными величинами

$$p_1, p_2, \dots, p_k, \dots, p_m,$$

где $p_k = \alpha_k + j\omega_k$. Зная корни характеристического уравнения, можно записать выходное напряжение (см. § 6.2):

$$u_{\text{вых}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_m e^{p_m t}. \quad (14.24)$$

Чтобы напряжение $u_{\text{вых}}(t)$ не возрастало безгранично, всем корням p_1, p_2, \dots, p_m характеристического уравнения необходимо иметь отрицательные вещественные части, т. е. корни должны располагаться в левой полуплоскости комплексной переменной $p = \alpha + j\omega$. Цепь с ОС, обладающая такими свойствами, называется абсолютно устойчивой.

При исследовании цепей с обратной связью могут возникать две проблемы. Если проектируемая цепь должна быть устойчивой, то необходимо располагать критерием, который по виду функций $H_y(p)$ и $H_{oc}(p)$ позволял бы судить об отсутствии корней характеристического уравнения в правой полуплоскости p . Если обратная связь используется для создания неустойчивой автоколебательной цепи, то следует убедиться, что корни уравнения (14.23) расположены, наоборот, в правой полуплоскости. При этом необходимо иметь такое расположение корней, при котором самовозбуждение происходило бы на требуемой частоте.

Рассмотрим критерии устойчивости цепи с обратной связью.

Критерий устойчивости Рауса — Гурвица. Он относится к алгебраическим критериям устойчивости и позволяет по значениям коэффициентов b_m, b_{m-1}, \dots, b_0 характеристического уравнения (14.23), без определения его корней, узнать является ли исследуемая цепь устойчивой.

Критерий формулируется следующим образом: *цепь с обратной связью является устойчивой, если полином характеристического уравнения, является полиномом Гурвица.* При этом используется основное свойство полинома Гурвица: все его корни находятся в левой полуплоскости комплексной переменной p .

Для того, чтобы многочлен $b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0$ являлся полиномом Гурвица, необходимо и достаточно, чтобы были положительными определитель Рауса — Гурвица:

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} b_{m-1} & b_{m-3} & b_{m-5} & \cdots & 0 \\ b_m & b_{m-2} & b_{m-4} & \cdots & 0 \\ 0 & b_{m-1} & b_{m-3} & \cdots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-2} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{vmatrix};$$

и все главные миноры этого определителя.

При составлении определителя Гурвица можно руководствоваться следующим правилом. В первой строке записываются коэффициенты полинома Гурвица через один, начиная со второго. Во второй строке записываются коэффициенты полинома через один, начиная с первого. Вторая пара строк формируется путем смещения первой пары строк на одну позицию. Третья пара — смещением второй пары строк еще на одну вправо и т. д.

Пример. Проверим с помощью критерия Рауса—Гурвица устойчивость цепи с обратной связью, характеристическое уравнение которой имеет вид

$$p^4 + 3p^3 + 4p^2 + 6p + 2 = 0.$$

1. Составляем определитель Рауса—Гурвица

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Главные миноры получаем вычеркиванием правого столбца и нижней строки из определителя или предыдущего минора:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \quad D_0 = |3|.$$

2. Вычисляем определитель Рауса—Гурвица и его главные миноры. Расчет удобно проводить в следующем порядке:

$$\begin{aligned} D_0 &= |3| = 3, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 6 \cdot 1 = 6, \\ D_2 &= \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 6(-1)^{3+3} D_1 + 2(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 6 - 2 \cdot 9 = 18, \\ D_3 &= \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2(-1)^{4+4} D_2 = 2 \cdot 18 = 36. \end{aligned}$$

Определитель Рауса—Гурвица и его главные миноры положительны. Таким образом, цепь с ОС устойчива.

Критерий устойчивости Найквиста. Критерий Найквиста позволяет судить об устойчивости цепи с обратной связью по свойствам разомкнутой цепи (рис. 14.3, а).

Передаточная функция разомкнутой цепи, или петлевое усиление, $H_p(j\omega) = H_y(j\omega) \cdot H_{oc}(j\omega)$ входит в характеристическое уравнение (14.21):

$$1 - H_p(j\omega) = 0. \quad (14.25)$$

Если найдется такая частота ω , для которой конец вектора $H_p(j\omega)$ попадает в точку с координатами $(1, j0)$, то это будет означать, что выполняется условие (14.25), т. е. на этой частоте в цепи произойдет самовозбуждение. Значит, по годографу можно определить, устойчива цепь или нет. Для этого используется критерий Найквиста, который формулируется следующим образом: *если годограф передаточной функции разомкнутой цепи не охватывает точку с координатами $(1, j0)$, то при замкнутой цепи обратной связи цепь является устойчивой*. В том случае, когда годограф $H_p(\omega)$ охватывает точку $(1, j0)$, цепь неустойчива. На рис. 14.4 показаны годографы трех цепей с положительной обратной связью (цифра 1 соответствует годографу устойчивой цепи).

Пользуясь критерием Найквиста, легко получить условия самовозбуждения цепи с ОС. Запишем выражение для $H_p(j\omega)$ в виде

$$H_p(j\omega) = |H_y(j\omega) \cdot H_{oc}(j\omega)| e^{j[\varphi_y(\omega) + \varphi_{oc}(\omega)]},$$

где $|H_y(j\omega)|$, $|H_{oc}(j\omega)|$ — модули передаточных функций; $\varphi_y(\omega)$, $\varphi_{oc}(\omega)$ — фазовые сдвиги соответственно в основном элементе и в цепи ОС.

Условия пересечения годографом оси абсцисс $\text{Re}[H_p(j\omega)]$ при $|H_p(j\omega)| \geq 1$ можно записать в виде двух условий:

1) условие (уравнение) *баланса фаз* $\varphi_y(\omega) + \varphi_{oc}(\omega) = 2\pi n$, где $n = 0, 1, 2, \dots$;

2) амплитудное условие

$$|H_y(j\omega)| |H_{oc}(j\omega)| \geq 1, \text{ или } H_y(\omega) H_{oc}(\omega) \geq 1.$$

Выполнение неравенства соответствует режиму возникновения колебаний с нарастающей амплитудой, что характерно для начального этапа самовозбуждения. Выполнение равенства $H_y(\omega) \times H_{oc}(\omega) = 1$ соответствует режиму генерации гармонического напряжения на частоте ω с постоянной амплитудой и носит название *баланса амплитуд*.

Как будет показано ниже, уравнение баланса фаз позволяет определить частоту, на которой происходит самовозбуждение цепи с ОС, а уравнение баланса амплитуд дает возможность определить

величину амплитуды $u_{\text{вых}}(t)$ генерируемого колебания в стационарном режиме.

Пример. Исследуем устойчивость цепи, изображенной на рис. 14.8, а, в ней можно выделить усилительный элемент с передаточной функцией $H_y = K$ и цепь обратной связи (рис. 14.8, з) с передаточной функцией (14.17)

$$H_{\text{ос}}(p) = \frac{p\tau}{p^2\tau^2 + 3p\tau + 1},$$

где $\tau = RC$.

Кроме того, напомним, что на усилитель сигнал поступает через входную цепь (рис. 14.8, в), передаточная функция которой (см. (14.16))

$$H_{\text{вх}}(p) = 1/(p^2\tau^2 + 3p\tau + 1).$$

Получим характеристическое уравнение цепи:

$$1 - H_y(p)H_{\text{ос}}(p) = 0$$

или

$$1 - K \frac{p\tau}{p^2\tau^2 + 3p\tau + 1} = 0.$$

Откуда окончательно получаем

$$p^2\tau^2 + (3 - K)p\tau + 1 = 0. \quad (14.26)$$

Корни характеристического уравнения (14.16)

$$p_{1,2} = \frac{-(3 - K)\tau \pm \sqrt{(3 - K)^2\tau^2 - 4\tau^2}}{2\tau^2} = -\alpha \pm j\omega_c$$

зависят от коэффициента усиления усилителя K . Расположение корней p_1 и p_2 на плоскости комплексного переменного p для разных коэффициентов усиления и соответствующие этому графики свободных колебаний в цепи показаны на рис. 14.10.

Устойчивость данной цепи можно исследовать и с помощью критерия Найквиста. Комплексная передаточная функция разомкнутой цепи равна

$$\begin{aligned} H_p(j\omega) &= H_y(j\omega)H_{\text{ос}}(j\omega) = Kj\omega\tau/(-\omega^2\tau^2 + j3\omega\tau + 1) = \\ &= \frac{K\omega\tau}{\sqrt{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + 9\omega^2\tau^2}} e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{3\omega\tau}{1 - \omega^2\tau^2}\right)}. \end{aligned}$$

На рис. 14.4 приведены годографы $H_p(j\omega)$ устойчивой ($K = 2$, кривая 1) и неустойчивой ($K = 3$, кривая 2; $K = 4$, кривая 3) цепи.

Критерий устойчивости Михайлова. Этот простой и эффективный критерий был предложен в 1938 г. А.В. Михайловым и базируется он на характере поведения аргументов полинома Гурвица $v(j\omega)$ при изменении частоты ω от нуля до бесконечности.

Положим, что полином Гурвица степени m

$$v(p) = p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0 \quad (14.27)$$

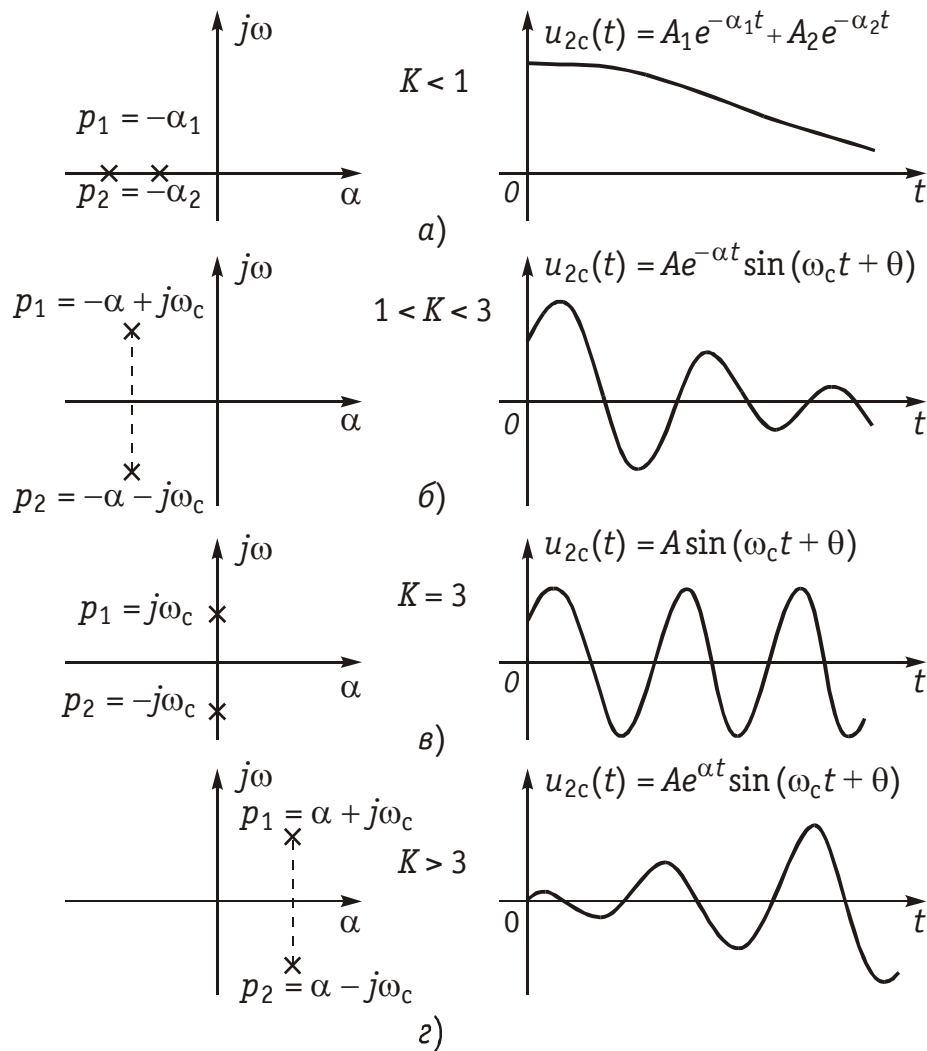


Рис. 14.10

имеет l пар комплексно-сопряженных корней с отрицательной вещественной частью $p_k = -\alpha_k \pm j\omega_k$. Остальные $m - 2l$ корней — вещественные отрицательные числа: $p_s = -\alpha_s$. Если учесть при этом, что произведение линейных множителей двух комплексно-сопряженных корней равно

$$\begin{aligned} (p - p_{k1})(p - p_{k2}) &= [p - (-\alpha_k + j\omega_k)][p - (-\alpha_k - j\omega_k)] = \\ &= (p + \alpha_k)^2 + \omega_k^2 = p^2 + 2\alpha_k p + \alpha_k^2 + \omega_k^2 = p^2 + c_1 p + d_1, \end{aligned}$$

где $c_1 = 2\alpha_k$; $d_1 = \alpha_k^2 + \omega_k^2$, то полином Гурвица (14.27) можно разложить на следующие линейные множители

$$\begin{aligned} v(p) &= (p + \alpha_1)(p + \alpha_2) \dots (p + \alpha_{m-2l})(p^2 + c_1 p + d_1) \cdot \\ &\cdot (p^2 + c_2 p + d_2) \dots (p^2 + c_l p + d_l) \end{aligned}$$

или далее полагая, что $p = j\omega$, получим

$$\begin{aligned} v(j\omega) &= (j\omega + \alpha_1)(j\omega + \alpha_2) \dots (j\omega + \alpha_{m-2l})(-\omega^2 + j\omega c_1 + d_1) \cdot \\ &\cdot (-\omega^2 + j\omega c_2 + d_2) \dots (-\omega^2 + j\omega c_l + d_l). \end{aligned} \quad (14.28)$$

Как комплексную величину (14.28) можно представить в показательной форме

$$v(j\omega) = |v(j\omega)| e^{j\varphi_v(\omega)}, \quad (14.29)$$

где

$$\varphi_v(\omega) = \arg v(j\omega) = \sum_{k=1}^{m-2l} \varphi_k(\omega) + \sum_{s=1}^l \varphi_s(\omega), \quad (14.30)$$

$$\varphi_k(\omega) = \arctg \frac{\omega}{\alpha_k}, \quad (14.31)$$

$$\varphi_s(\omega) = \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{\sqrt{d_s}}{c_s} \left(\frac{\omega}{\sqrt{d_s}} - \frac{\sqrt{d_s}}{\omega} \right). \quad (14.32)$$

Как следует из (14.29), (14.30), (14.31) с увеличением ω от 0 до ∞ $\varphi_v(\omega)$ монотонно возрастает от 0 до $m\pi/2$. Это свойство аргумента полинома Гурвица и лежит в основе критерия Михайлова, который формулируется следующим образом: *если при изменении частоты ω от 0 до ∞ аргумент полинома Гурвица $\varphi_v(\omega)$ возрастает на угол $m\pi/2$ (где m — степень полинома), то цепь будет устойчивой.*

Действительно, если среди корней $v(p)$ есть хотя бы один вещественный положительный корень, то в слагаемом типа (14.30) появится слагаемое $\varphi_k(\omega) < 0$ и поэтому согласно (14.30) $\varphi_v(\omega) < m\pi/2$.

Критерий Михайлова имеет простой геометрический смысл: годограф $v(j\omega)$ устойчивой цепи при изменении ω от 0 до ∞ будет последовательно обходить в положительном направлении (против часовой стрелки) m квадрантов комплексной плоскости. На рис. 14.11 получены годографы устойчивой — *a* и неустойчивой — *б* цепи 4-го порядка:

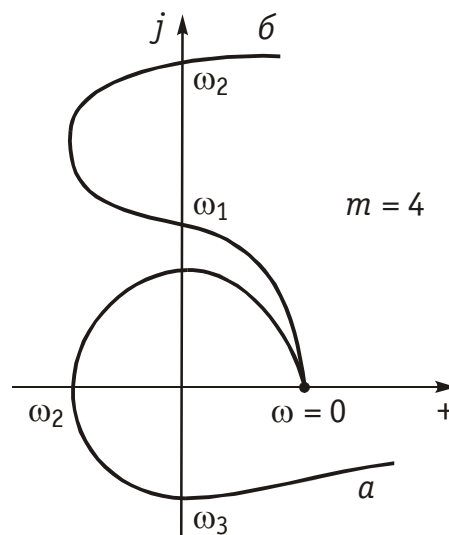


Рис. 4.11

В первом случае годограф $v(j\omega)$ обходит 4 квадранта монотонно (последовательно) против часовой стрелки, при этом аргумент возрастает до величины $\varphi_v(\omega) = 4\pi/2 = 2\pi$.

Во втором случае неустойчивой цепи $\varphi_v(\omega)$ изменяется скачком от 2-го квадранта в 4-й, при этом $\varphi_k(\omega) < 2\pi$.

Вопросы и задания для самопроверки

1. Как рассчитывается передаточная функция цепи с обратной связью?
2. Записать уравнение передачи для цепи, изображенной на рис. 14.1, в.

Ответ:
$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_r &= (\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_r) \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12oc} \underline{I}_2 \\ \underline{U}_{вых} &= \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 + (\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_н) \underline{I}_2 \end{aligned} \right\}.$$

3. Доказать, что операторная передаточная функция дифференциатора на операционном усилителе равна $(-pRC)$. Построить график АЧХ такого дифференциатора.
4. Определить передаточную функцию цепи, изображенной на рис. 14.9.

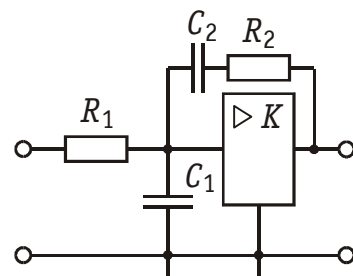


Рис. 14.9

Ответ:
$$H(p) = \frac{K(1 + pR_2C_2)}{[p^2C_1C_2R_1R_2 + p(R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2 - KR_1C_2) + 1]}.$$

5. Что такое годограф петлевого усиления? Как по годографу определить тип обратной связи?
6. Как формулируется критерий устойчивости Найквиста? Для каких цепей он используется?
7. Сформулируйте критерий устойчивости Рауса-Гурвица. Как составить определитель Гурвица? Приведите примеры.
8. Определить комплексную передаточную функцию $H_p(j\omega)$ цепи на рис. 14.9 разомкнутой обратной связью. Исследуйте зависимость устойчивости цепи от величины коэффициента усиления K .

Ответ:
$$H_p(j\omega) = \frac{Kj\omega R_1C_2}{-\omega^2 R_1R_2C_1C_2 + j\omega(R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2) + 1}.$$

9. В чем геометрический смысл критерия устойчивости Михайлова?
10. Определить относительные изменения коэффициентов усиления трех усилителей, охваченных ООС с коэффициентом передачи $H_{oc} = 0,01$, если их коэффициенты усиления без ОС равны $H_{1y} = 5 \cdot 10^2$; $H_{2y} = 5 \cdot 10^3$; $H_{3y} = 5 \cdot 10^4$, а относительная стабильность коэффициента усиления составляет 1%.

Ответ:
$$\begin{aligned} dH_1/H_1 &= 1,66\%; & dH_2/H_2 &= 0,0196\%; \\ dH_3/H_3 &= 0,002\%. \end{aligned}$$

ГЛАВА 15. АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ЦЕПИ

15.1. Физические процессы в автоколебательных цепях

Автоколебательными называются активные электрические цепи, в которых без посторонних воздействий самостоятельно возникают электрические колебания. Такие колебания называются *автоколебаниями*, а сами электрические цепи, в которых возникают автоколебания, — *автогенераторами* (или, чаще, генераторами).

Автогенераторы используются в радиотехнике и связи для получения электромагнитных колебаний. В зависимости от формы вырабатываемых колебаний различают генераторы гармонических и негармонических колебаний. По принципу работы генераторы делятся на генераторы с внешней обратной связью и с внутренней обратной связью, т. е. с отрицательным сопротивлением. Наконец, различие в элементной базе пассивной части схемы генератора позволяет вести речь об LC -генераторах или о RC -генераторах. В качестве активных элементов в генераторах применяются электронные лампы, биполярные и полевые транзисторы, туннельные диоды и др.

В данной главе наибольшее внимание будет уделено LC -генераторам гармонических колебаний с внешней ОС, использующим в качестве активного элемента биполярные транзисторы. Однако следует указать, что, хотя изучение свойств автогенераторов производится на примере конкретных схем, результаты исследования носят достаточно общий характер.

Затем будут рассмотрены особенности построения RC -генераторов и генераторов с внутренней ОС.

Физические процессы в автоколебательных цепях. На рис. 15.1, а показан параллельный колебательный контур, состоящий из элементов L , C и G . Если контуру сообщить некоторое количество энергии, то в нем возникнут свободные колебания.

По первому закону Кирхгофа (ЗТК):

$$i_C + i_G + i_L = 0.$$

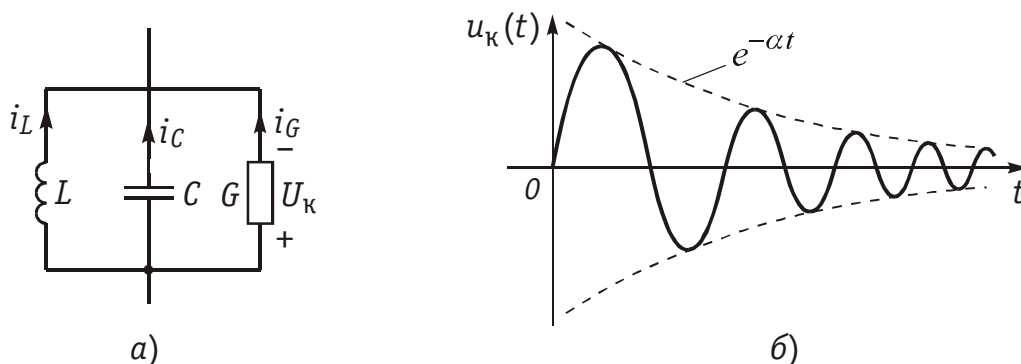


Рис. 15.1

Каждое из слагаемых этого уравнения можно выразить через напряжение u_k на элементах контура. Тогда

$$C \frac{du_k}{dt} + Gu_k + \frac{1}{L} \int u_k dt = 0.$$

Дифференцируя данное уравнение по времени и деля обе его части на C , получаем

$$\frac{d^2 u_k}{dt^2} + \frac{G}{C} \cdot \frac{du_k}{dt} + \frac{1}{LC} u_k = 0. \quad (15.1)$$

Напомним, что при сопротивлении контура $R = 1/G > 2\rho$ или $G < 1/(2\rho)$ переходный процесс имеет колебательный характер.

Величина $\alpha = G/(2C)$ является коэффициентом затухания контура, а величина $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — резонансной частотой контура. В этих обозначениях (15.1) переписывается в виде

$$\frac{d^2 u_k}{dt^2} + 2\alpha \frac{du_k}{dt} + \omega_0^2 u_k = 0. \quad (15.2)$$

Дифференциальное уравнение (15.2) имеет следующее решение:

$$u_k(t) = U_{mk} e^{-\alpha t} \sin(\omega_c t + \theta), \quad (15.3)$$

где U_{mk} — начальная амплитуда напряжения на контуре, зависящая от введенной в контур энергии; $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ — частота свободных собственных колебаний; θ — начальная фаза.

Так как $\alpha = G/(2C) > 0$, то колебание (15.3) имеют затухающий характер (см. рис. 15.1, б, при $\theta = 0$), что объясняется потерями в контуре из-за наличия резистивной проводимости G . Чтобы превратить такой генератор в генератор незатухающих колебаний, нужно возмещать в нем потери, т. е. пополнять контур энергией.

Причем, если энергии в контур вводится ровно столько, сколько необходимо для компенсации потерь, то это эквивалентно внесению в контур отрицательной проводимости $G_{вн}$, при этом результирующая проводимость контура обращается в нуль. Тогда $\alpha = 0$ и в контуре возникают незатухающие колебания.

В случае же, когда энергии в контур вводится больше, чем это необходимо для компенсации потерь (т. е. отрицательная проводимость $G_{вн}$ больше G и, следовательно, $G_{вн} + G < 0$), в контуре возникают нарастающие по амплитуде колебания, так как коэффициент затухания становится отрицательным.

Энергию в контуре можно пополнять, например, за счет собственных колебаний, снятых с контура и усиленных усилителем. Работающая на таком принципе схема автогенератора показана на рис. 15.2.

Рассмотрим процесс возникновения колебаний в автогенераторе, или механизм *самовозбуждения* генератора, и установление

колебаний определенной амплитуды, т. е. *стационарный режим* работы генератора.

Причиной возникновения колебаний в автогенераторе являются флуктуации (случайные возмущения) тока в элементах реальной схемы (за счет теплового движения электронов в активных элементах и резисторах, дробового эффекта и т. д.), а также за счет внешних помех. Флуктуации тока i_K , протекающего через контур, вызывают флуктуации напряжения на контуре u_K . Спектр этих случайных возмущений весьма широк и содержит составляющие всех частот.

Составляющие напряжения u_K с частотами, близкими к резонансной частоте контура ω_0 , имеют наибольшую амплитуду, так как модуль комплексного эквивалентного сопротивления контура является наибольшим и равным $R_{0Э}$ именно на резонансной частоте ω_0 . Выделенное на контуре гармоническое с частотой ω_0 напряжение через цепь ОС, образованную вторичной обмоткой трансформатора, передается на вход транзистора, создавая напряжение u_K . Это напряжение вызовет увеличение коллекторного тока i_K , что, в свою очередь, приведет к увеличению напряжения на контуре u_K . Как следствие этого увеличатся напряжение обратной связи u_{OC} и напряжение u_K и, значит, вновь увеличатся коллекторный ток и напряжение на контуре u_K и т. д. Таким образом, в замкнутой системе автогенератора самовозбуждаются колебания частоты, близкой к резонансной частоте контура ω_0 .

Очевидно, важным условием возникновения колебаний является то, что фаза напряжения $u_{БЭ}$ должна быть такой, при которой увеличение напряжения u_K вызывает увеличение коллекторного тока i_K и, тем самым, порождает новое увеличение u_K . Данное условие и есть условие баланса фаз. Баланс фаз достигается правильным включением вторичной обмотки трансформатора. При другом ее включении возрастание напряжения на контуре u_K приведет к уменьшению коллекторного тока, т. е. баланс фаз нарушится и самовозбуждения не произойдет.

Обратная связь, при которой выполняется баланс фаз, является *положительной* ОС. В противном случае ОС *отрицательная*. Самовозбуждение автогенератора возможно только при наличии положительной ОС.

Процесс самовозбуждения колебаний в контуре с энергетической точки зрения объясняется тем, что от источника питания с

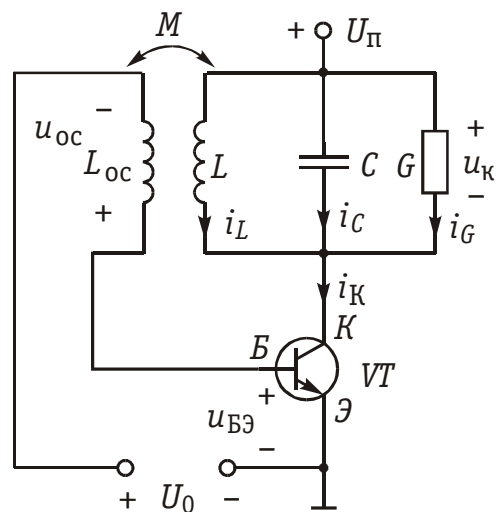


Рис. 15.2

помощью транзистора в контур за один период колебания поступает энергии больше, чем расходуется ее в резистивном сопротивлении контура. Это эквивалентно, как уже отмечалось ранее, внесению в контур отрицательной проводимости $G_{\text{вн}}$, превышающей по величине эквивалентную проводимость контура G , что приводит к отрицательному значению коэффициента затухания контура α и, следовательно, к возникновению в контуре нарастающих колебаний.

Пока амплитуда напряжения $u_{\text{БЭ}}$ была мала, работа происходила на линейном участке ВАХ транзистора. С увеличением амплитуды колебаний в контуре возрастает напряжение ОС $u_{\text{ос}}$ и, следовательно, входное напряжение транзистора $u_{\text{БЭ}}$. При этом все сильнее сказывается нелинейность ВАХ транзистора. Наконец, при достаточно больших амплитудах колебаний ток коллектора $i_{\text{К}}$ перестает увеличиваться, значения напряжения на контуре $u_{\text{к}}$, обратной связи $u_{\text{ос}}$ и входное $u_{\text{БЭ}}$ стабилизируются, в автогенераторе установится стационарный динамический режим с постоянной амплитудой колебаний и частотой генерации, близкой к резонансной частоте колебательного контура ω_0 . Таким образом, стационарные колебания в автогенераторе устанавливаются только благодаря наличию нелинейности ВАХ транзистора.

В стационарном режиме энергия, поступающая в контур, вся рассеивается в эквивалентной резистивной проводимости контура, т. е. вносимая в контур отрицательная проводимость $G_{\text{вн}}$ оказывается равной эквивалентной проводимости G и полностью компенсирует ее; коэффициент затухания контура α обращается в нуль. В контуре существуют незатухающие гармонические колебания.

15.2. Обобщенная схема автогенератора

Из предыдущего рассмотрения следует, что схема автогенератора должна содержать активный элемент с нелинейной вольт-амперной характеристикой, колебательную систему (в данном случае контур), внешнюю цепь положительной ОС, по которой колебание с выхода колебательной системы подается на вход активного элемента. Такие автогенераторы являются генераторами с *внешней* ОС; структурная схема построения таких генераторов приведена на рис. 15.3.

Заметим, что нелинейный активный элемент с колебательной системой образуют нелинейный резонансный усилитель. Поэтому можно представить обобщенную структурную схему автогенератора с разомкнутой цепью обратной связи (рис. 14.17, *а*). Комплексная передаточная функция всей цепи

$$H_{\text{р}}(j\omega) = U_{\text{ос}}(j\omega)/U_{\text{вх}}(j\omega) = H_{\text{у}}(j\omega)H_{\text{ос}}(j\omega).$$

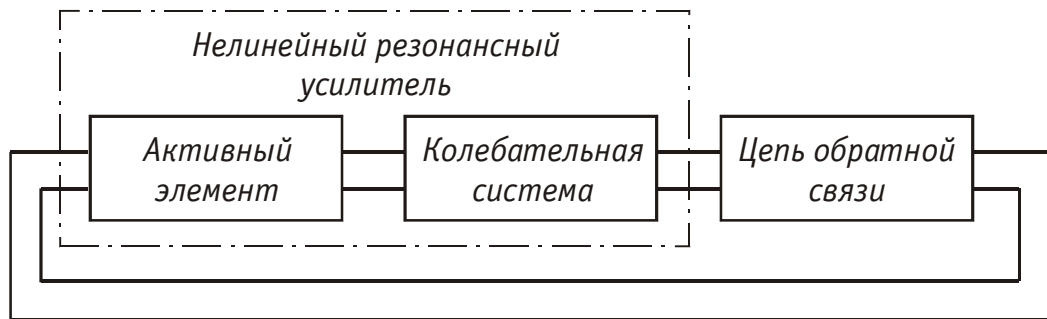


Рис. 15.3

Для того, чтобы в генераторе происходило самовозбуждение колебаний, необходимо, чтобы модуль комплексного напряжения $|U_{oc}(j\omega)|$ на выходе схемы был больше модуля комплексного напряжения $|U_{вх}(j\omega)|$ на входе схемы, откуда

$$|H_p(j\omega)| = |H_y(j\omega)| \cdot |H_{oc}(j\omega)| > 1.$$

При приближении к стационарному режиму модуль комплексного коэффициента передачи усилителя $|H_y(j\omega)|$ за счет влияния нелинейности начинает уменьшаться до тех пор, пока не наступит динамическое равновесие (см. § 14.3):

$$|H_p(j\omega)| = |H_y(j\omega)| \cdot |H_{oc}(j\omega)| = 1.$$

Это условие соответствует стационарному режиму и известно под названием *баланса амплитуд*. Учитывая, что

$$\begin{aligned} H_p(j\omega) &= |H_p(j\omega)| e^{j\varphi_p(\omega)}; \\ H_y(j\omega) &= |H_y(j\omega)| e^{j\varphi_y(\omega)}; \\ H_{oc}(j\omega) &= |H_{oc}(j\omega)| e^{j\varphi_{oc}(\omega)}, \end{aligned}$$

получаем фазовый сдвиг в разомкнутой цепи автогенератора

$$\varphi_p(\omega) = \varphi_y(\omega) + \varphi_{oc}(\omega).$$

Баланс фаз, т. е. совпадение фаз напряжений на входе и выходе схемы рис. 14.17, а, наступает при $\varphi_p(\omega) = 2\pi$. Таким образом, сдвиг фаз в цепи обратной связи зависит от сдвига фаз в усилителе и дополняет его до 2π . Если на частоте генерируемых колебаний усилитель вносит сдвиг фаз $\varphi_y = \pi$ (как, например, в схеме рис. 15.2), то цепь обратной связи должна на этой же частоте вносить сдвиг фаз $\varphi_{oc}(\omega) = \pi$. В схеме автогенератора рис. 15.2 поворот фазы напряжения $u_{oc}(t)$ на 180° достигается, как ранее отмечалось, соответствующим включением обмоток катушки индуктивности L_{oc} .

15.3. LC-генератор с трансформаторной обратной связью. Классический метод анализа

Дифференциальное уравнение генератора. Обратимся вновь к схеме рис. 15.2. По первому закону Кирхгофа

$$i_C + i_G + i_L = i_K.$$

или

$$C \frac{du_K}{dt} + Gu_K + \frac{1}{L} \int u_K dt = i_K. \quad (15.4)$$

Эти уравнения отличаются от соответствующих уравнений одиночного колебательного контура, полученных в § 15.1, тем, что в правой части записан коллекторный ток i_K .

Вольт-амперная характеристика транзистора $i_K = F(u_{БЭ} - U_0)$ в окрестности рабочей точки U_0 является, вообще говоря, нелинейной, так как ток коллектора i_K нелинейно зависит от напряжения $u_{БЭ} - U_0$. Из рис. 15.2 следует, что напряжение ОС, снимаемое с катушки индуктивности обратной связи $L_{ос}$, равно $u_{ос} = u_{БЭ} - U_0$, поэтому в дальнейшем удобно рассматривать ВАХ $i_K = F(u_{ос}) = i_K(u_{ос})$.

Заметим далее, что напряжение ОС $u_{ос}$ вычисляется через коэффициент взаимной индуктивности M и ток в катушке L (см. §3.7)

$$u_{ос} = -M di_L / dt.$$

В свою очередь, ток в катушке i_L и напряжение на ней u_K связаны соотношением $u_K = L di_L / dt$, поэтому напряжение ОС $u_{ос}$ можно выразить через напряжение на контуре u_K :

$$u_{ос} = -Mu_K / L. \quad (15.5)$$

Вернемся к уравнению (15.4). Продифференцируем его по времени и разделим обе части на C :

$$\frac{d^2 u_K}{dt^2} + \frac{G}{C} \cdot \frac{du_K}{dt} + \frac{1}{LC} u_K = \frac{1}{C} \frac{di_K(u_{ос})}{dt}. \quad (15.6)$$

В отличие от уравнения (15.1) для одиночного колебательного контура в правой части уравнения (15.6) присутствует вынуждающая составляющая $di_K(u_{ос})/dt$. Производную функции $i_K(u_{ос})$ будем искать как производную сложной функции:

$$\frac{di_K(u_{ос})}{dt} = \frac{di_K(u_{ос})}{du_{ос}} \cdot \frac{du_{ос}}{dt} = \frac{S(u_{ос})M}{L} \cdot \frac{du_K}{dt}, \quad (15.7)$$

где $S(u_{ос}) = di_K(u_{ос})/du_{ос}$ — дифференциальная крутизна ВАХ транзистора, нелинейно зависящая от напряжения $u_{ос}$.

При дифференцировании напряжения $u_{ос}$ по времени учтено соотношение (15.5).

Подставив (15.7) в (15.6), получим дифференциальное уравнение автогенератора

$$\frac{d^2 u_K}{dt^2} + \left[\frac{G}{C} - \frac{S(u_{oc})M}{LC} \right] \frac{du_K}{dt} + \omega_0^2 u_K = 0, \quad (15.8)$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — резонансная частота контура.

Это дифференциальное уравнение является нелинейным, так как коэффициент при первой производной напряжения u_K , в который входит крутизна $S(u_{oc})$, нелинейно зависит от напряжения обратной связи u_{oc} (или, что то же, от искомой переменной — напряжения на контуре). Уравнение (15.8) определяет все свойства автогенератора и позволяет установить условия самовозбуждения колебаний, особенности стационарного режима и характер переходных процессов в автогенераторе.

Условие возникновения колебаний. При определении условий самовозбуждения следует учесть, что амплитуда нарастающих колебаний в автогенераторе достаточно мала и работа автогенератора происходит на линейном участке ВАХ транзистора $i_K = F(u_{oc})$. Иными словами, для малых амплитуд колебаний ВАХ можно аппроксимировать линейно-ломаной функцией, крутизна которой в рабочем диапазоне амплитуд напряжения является постоянной, не зависящей от напряжения u_{oc} , т. е. $S(u_{oc}) = S$. В этом случае дифференциальное уравнение автогенератора (15.8) становится линейным:

$$\frac{d^2 u_K}{dt^2} + \left(\frac{G}{C} - \frac{SM}{LC} \right) \frac{du_K}{dt} + \omega_0^2 u_K = 0.$$

Перепишем его в виде

$$\frac{d^2 u_K}{dt^2} + 2\alpha_{\varepsilon} \frac{du_K}{dt} + \omega_0^2 u_K = 0, \quad (15.9)$$

где $\alpha_{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\frac{G}{C} - \frac{SM}{LC} \right)$ — эквивалентный коэффициент затухания колебательного контура, включенного в цепь коллектора транзистора.

Сопоставление уравнения (15.9) с уравнением (15.2) для одиночного колебательного контура показывает, что при включении колебательного контура в коллекторную цепь транзистора коэффициент затухания контура α_{ε} уменьшится на величину $SM/2LC$, зависящую от взаимной индукции M , т. е. от ОС:

$$\alpha_{\varepsilon} = \alpha - \frac{SM}{2LC},$$

где $\alpha = G/2C$ — коэффициент затухания свободных колебаний контура.

Чтобы в контуре возникли нарастающие по амплитуде колебания, необходимо сделать коэффициент $\alpha_{\text{э}} < 0$. Это возможно при условии $SM/LC > G/C$. Отсюда получаем значение коэффициента взаимной индукции M при котором в колебательном контуре возникнут нарастающие по амплитуде колебания:

$$M > LG/S. \quad (15.10)$$

Условие (15.10) называется *условием самовозбуждения LC-автогенератора*. Величина $M_{\text{кр}} = LG/S$ называется *критическим коэффициентом взаимной индукции*. Колебания в автогенераторе могут возникнуть только при обратной связи с $M > M_{\text{кр}}$. При $M < M_{\text{кр}}$ коэффициент затухания контура $\alpha_{\text{э}} > 0$ и колебание в контуре становится затухающим. Коэффициент $\alpha_{\text{э}}$ в (15.9) можно представить в следующем виде:

$$\alpha_{\text{э}} = (G + G_{\text{вн}})/2C, \quad (15.11)$$

где $G_{\text{вн}} = -(SM/L)$ — проводимость, вносимая в контур за счет действия обратной связи. Знак коэффициента M может меняться в зависимости от направления включения (согласно или встречно) вторичной обмотки трансформатора. При $M > 0$ вносимая проводимость оказывается отрицательной и если ее величина $|G_{\text{вн}}| > G$, что имеет место при $M > M_{\text{кр}}$, то $\alpha_{\text{э}} < 0$ и в контуре возникнут нарастающие по амплитуде колебания. Положительные значения M соответствуют положительной ОС, отрицательные — отрицательной ОС.

Эквивалентная схема колебательного контура, соответствующая уравнению (15.9) с $\alpha_{\text{э}}$ из (15.11), приведена на рис. 15.4. Отрицательная общая проводимость контура $G + G_{\text{вн}} < 0$ при $M > M_{\text{кр}}$ свидетельствует о том, что в контур поступает энергии больше, чем расходуется ее на активной проводимости контура G .

Стационарный режим работы. При больших амплитудах сигнала нелинейностью ВАХ транзистора $i_{\text{к}} = F(u_{\text{ос}})$ пренебречь уже нельзя: в общем случае она должна аппроксимироваться степенным полиномом высокого порядка.

Ток в цепи коллектора в стационарном режиме будет из-за нелинейности ВАХ несинусоидальной периодической функцией времени и может быть представлен рядом Фурье

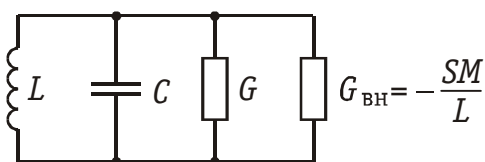


Рис. 15.4

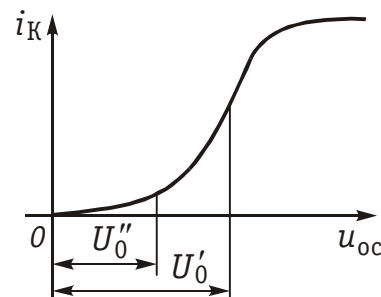


Рис. 15.5

$$i_K = I_0 + I_{m1} \cos \omega_0 t + I_{m2} \cos 2\omega_0 t + \dots$$

Падение напряжения u_K на колебательном контуре, настроенном на частоту ω_0 , определяется в основном первой гармоникой коллекторного тока, так как сопротивление контура для тока этой гармоники является наибольшим (равным $R_{03} = 1/G$), а для остальных гармоник — достаточно малым. Напряжение ОС u_{oc} , определяемое (15.5), вследствие этого также будет гармоническим; его можно записать в виде

$$u_{oc} = U_{moc} \cos \omega_0 t.$$

Введем понятие *средней крутизны ВАХ*

$$S_{cp}(U_{moc}) = I_{m1}/U_{moc}.$$

Она определяется отношением амплитуды I_{m1} первой гармоники тока i_K , протекающего через нелинейный элемент, к амплитуде U_{moc} , действующего на нелинейный элемент напряжения u_{oc} . Среднюю крутизну часто поэтому называют крутизной ВАХ по первой гармонике. Средняя крутизна $S_{cp}(U_{moc})$ зависит от амплитуды напряжения обратной связи U_{moc} и от положения рабочей точки U_0 . На рис. 15.5 показана типичная ВАХ транзистора $i_K = F(u_{oc})$. Пусть рабочая точка выбрана на середине линейного участка характеристики ($U_0 = U_0'$). При увеличении амплитуды напряжения U_{moc} средняя крутизна, пока мы находимся в пределах линейного участка характеристики, остается неизменной. Затем средняя крутизна ВАХ падает (рис. 15.6, а). Если выбрать рабочую точку ($U_0 = U_0''$) на нижнем загибе характеристики $i_K = F(u_{oc})$, где средняя крутизна мала, то по мере увеличения амплитуды U_{moc} будут охватываться участки характеристики с большей крутизной и, следовательно, $S_{cp}(U_{moc})$ станет расти. После прохождения участка с наибольшей крутизной дальнейшее увеличение U_{moc} приводит к уменьшению средней крутизны (рис. 15.6, б).

Дифференциальное уравнение (15.8) при работе генератора в режиме больших амплитуд является, вообще говоря, нелинейным, поскольку в коэффициент при du_K/dt входит средняя крутизна $S_{cp}(U_{moc})$, зависящая от амплитуды U_{moc} напряжения ОС. Однако

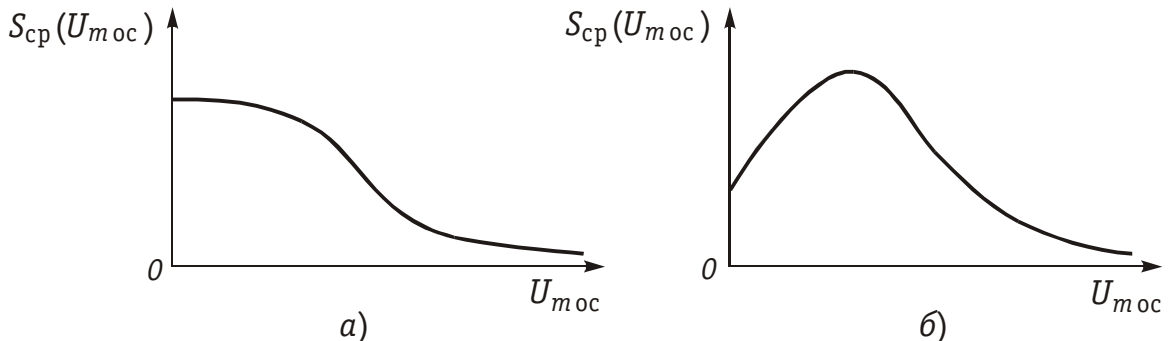


Рис. 15.6

в стационарном режиме, когда гармоническое напряжение на контуре u_k характеризуется установившейся (стационарной) амплитудой U_{mk} , гармоническое напряжение обратной связи u_{oc} также описывается установившейся (стационарной) амплитудой U_{moc} . При этом средняя крутизна $S_{cp}(U_{moc})$ является постоянной величиной и дифференциальное уравнение (15.8) можно считать линейным:

$$\frac{d^2 u_k}{dt^2} + \left[\frac{G}{C} - \frac{S_{cp}(U_{moc})M}{LC} \right] \cdot \frac{du_k}{dt} + \omega_0^2 u_k = 0. \quad (15.12)$$

В стационарном режиме генерируются незатухающие гармонические колебания. Это имеет место, когда

$$\alpha_{\partial} = \frac{1}{2} \left[\frac{G}{C} - \frac{S_{cp}(U_{moc})M}{LC} \right] = \frac{M}{2LC} \left[\frac{LG}{M} - S_{cp}(U_{moc}) \right] = 0.$$

Отсюда установившееся (стационарное) значение средней крутизны равно

$$S_{cp}(U_{moc}) = (LG/M) = S_{cp}^*.$$

С учетом этого обозначения коэффициент затухания контура перепишем в виде

$$\alpha_{\partial} = \frac{M}{2LC} [S_{cp}^* - S_{cp}(U_{moc})]. \quad (15.13)$$

Из формулы (15.13) при $\alpha_{\partial} = 0$ можно определить стационарную амплитуду U_{moc}^* , которая соответствует точке пересечения кривой $S_{cp}(U_{moc})$ и прямой линии S_{cp}^* . Рис. 15.7 иллюстрирует процесс нахождения стационарной амплитуды для двух зависимостей средней крутизны, соответствующих различным положениям рабочей точки на ВАХ (см. рис. 15.5).

Частота генерируемых колебаний, определяемая как $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha_{\partial}^2}$, в стационарном режиме при $\alpha_{\partial} = 0$ совпадает с резонансной частотой колебательного контура ω_0 .

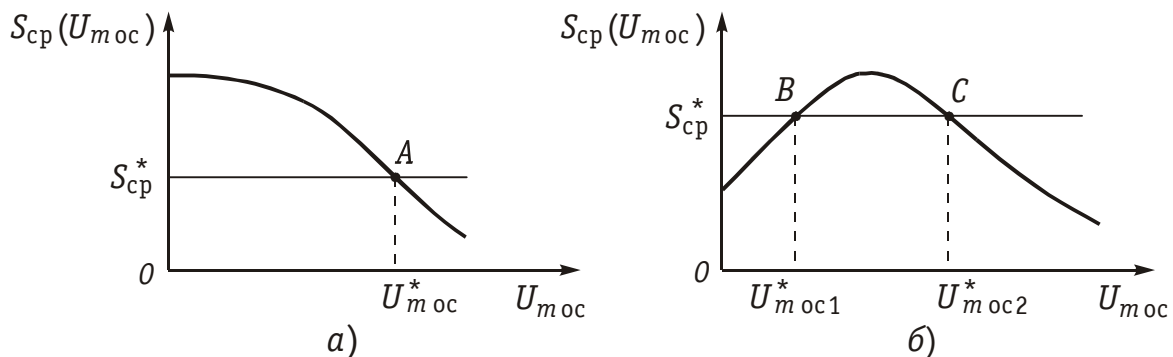


Рис. 15.7

Устойчивость стационарного режима. Стационарный режим называется *устойчивым*, если отклонение $\Delta U_{m\text{ос}}$ от стационарной амплитуды $U_{m\text{ос}}^*$ с течением времени будет уменьшаться.

Рассмотрим стационарный режим в точке A на рис. 15.7, *а*. Отклонение $-\Delta U_{m\text{ос}}$ от амплитуды $U_{m\text{ос}}^*$ приведет к $S_{\text{ср}}(U_{m\text{ос}}) > S_{\text{ср}}^*$ и, в соответствии с (15.13), к $\alpha_{\text{э}} < 0$, т. е. амплитуда колебаний будет увеличиваться и приближаться к стационарному значению. При отклонении $+\Delta U_{m\text{ос}}$ средняя крутизна $S_{\text{ср}}(U_{m\text{ос}}) < S_{\text{ср}}^*$, т. е. коэффициент затухания $\alpha_{\text{э}}$, станет положительным и амплитуда уменьшится, вновь приближаясь к стационарной. Таким образом, точка A соответствует устойчивому стационарному режиму.

Точка B на рис. 15.7, *б* соответствует неустойчивому режиму, так как отклонение амплитуды $U_{m\text{ос}}$ от стационарного значения $U_{m\text{ос}}^*$ в сторону уменьшения ведет к $S_{\text{ср}}(U_{m\text{ос}}) < S_{\text{ср}}^*$ и $\alpha_{\text{э}} > 0$, т. е. к дальнейшему уменьшению амплитуды $U_{m\text{ос}}$, а отклонение амплитуды $U_{m\text{ос}}$ от стационарной в сторону увеличения вызовет дальнейший ее рост и переход в следующее стационарное состояние, отмеченное точкой C .

Стационарное состояние в точке C является устойчивым, в чем легко убедиться с помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше.

Можно заметить, что справедливо следующее утверждение: пересечение прямой линии $S_{\text{ср}}^*$ с кривой средней крутизны $S_{\text{ср}}(U_{m\text{ос}})$ дает устойчивые значения стационарной амплитуды $U_{m\text{ос}}^*$, если на этом участке $dS_{\text{ср}}(U_{m\text{ос}})/dU_{m\text{ос}} < 0$ и неустойчивые значения — если $dS_{\text{ср}}(U_{m\text{ос}})/dU_{m\text{ос}} > 0$. Поэтому условие $dS_{\text{ср}}(U_{m\text{ос}})/dU_{m\text{ос}} < 0$ можно считать условием устойчивости стационарного режима.

Режим самовозбуждения. Будем менять коэффициент взаимной индукции M и наблюдать за процессом возникновения колебаний.

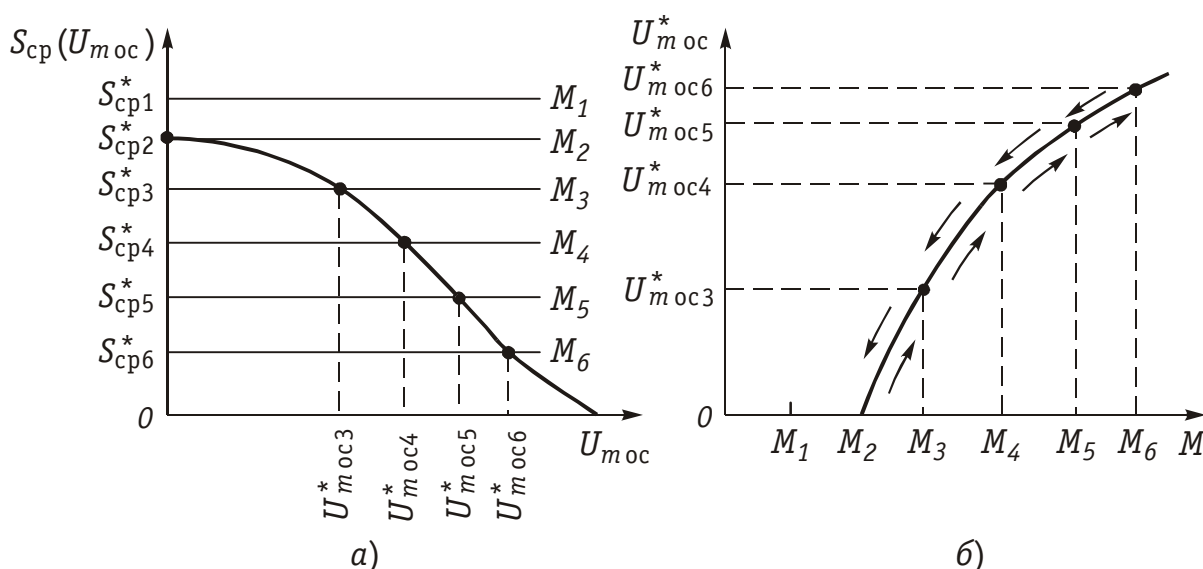


Рис. 15.8

Этот процесс зависит также от выбора рабочей точки на ВАХ (напряжения смещения U_0).

Выбору рабочей точки в области наибольшей крутизны (напряжение смещения U_0' на рис. 15.5) соответствует график средней крутизны $S_{\text{ср}}(U_{\text{м ос}})$, показанный на рис. 15.8, а.

При изменении параметра M меняется значение средней крутизны $S_{\text{ср}}^* = LG/M$. На рис. 15.8, а изображены несколько прямых $S_{\text{ср}}^*$, соответствующих различным M .

При $M = M_1$ колебания в автогенераторе возникнуть не могут, поскольку $S_{\text{ср}1}^* > S_{\text{ср}}(U_{\text{м ос}})$ и коэффициент затухания контура $\alpha_{\text{э}} > 0$, значит, любые случайные флуктуации напряжения $U_{\text{м ос}}$ будут быстро затухать.

Увеличение M до значения M_2 приводит к $S_{\text{ср}2}^* = S_{\text{ср}}(U_{\text{м ос}})$ и $\alpha_{\text{э}} = 0$. Дальнейший рост M снижает значение $S_{\text{ср}}^*$; при этом коэффициент $\alpha_{\text{э}}$ становится отрицательным, т. е. $\alpha_{\text{э}} < 0$. Таким образом, начиная с $M \geq M_2$, в автогенераторе возникают незатухающие колебания с соответствующими стационарными амплитудами $U_{\text{м ос}}^*$. С увеличением M стационарная амплитуда колебаний $U_{\text{м ос}}^*$ плавно нарастает. Уменьшение M вызовет плавное уменьшение значений стационарной амплитуды $U_{\text{м ос}}^*$. График зависимости стационарной амплитуды $U_{\text{м ос}}^*$ генерируемых в автогенераторе колебаний от коэффициента взаимной индукции M приведен на рис. 15.8, б. Такой режим самовозбуждения генератора, при котором амплитуда колебаний плавно нарастает с увеличением M , называется *мягким режимом самовозбуждения*.

Если рабочую точку выбрать на нижнем загибе ВАХ, как это показано на рис. 15.5 при $U_0 = U_0''$, то график средней крутизны $S_{\text{ср}}(U_{\text{м ос}})$ имеет вид, показанный на рисунке 15.9, а.

При M , равном M_1 , M_2 и M_3 , наличие малых флуктуаций напряжения $U_{\text{м ос}}$ не приведет к установлению стационарной ампли-

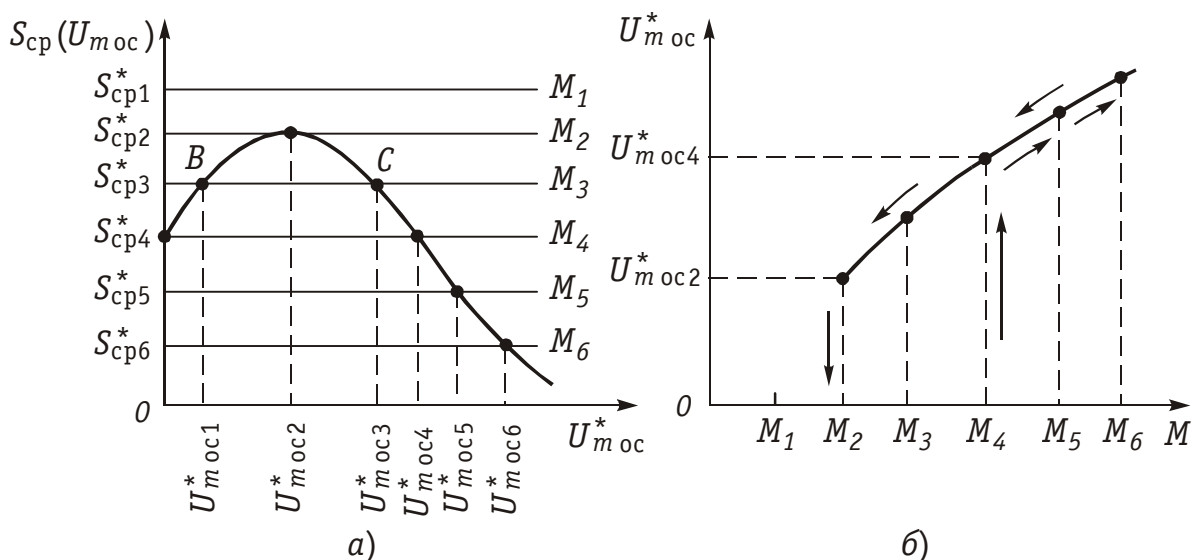


Рис. 15.9

туды, поскольку при значениях $S_{\text{ср}}^*$, равных $S_{\text{ср}1}^*$, $S_{\text{ср}2}^*$ и $S_{\text{ср}3}^*$, коэффициент затухания контура $\alpha_{\text{э}}$ будет положительным.

Только начиная с $M = M_4$, когда $S_{\text{ср}}(U_{\text{мос}}) = S_{\text{ср}4}^*$ и $\alpha_{\text{э}} = 0$, малые флуктуации амплитуды напряжения обратной связи начинают быстро расти, пока не установится устойчивое стационарное значение амплитуды $U_{\text{мос}}^*$. Дальнейшее увеличение M ведет к плавному росту стационарной амплитуды.

При плавном уменьшении обратной связи (коэффициента M) стационарная амплитуда $U_{\text{мос}}^*$ будет также плавно уменьшаться. Колебания сорвутся при значении $M = M_2$, меньшем M_4 , когда перестанет выполняться условие стационарности $S_{\text{ср}}(U_{\text{мос}}) = S_{\text{ср}}^*$. На рис. 15.9, б дан график изменения амплитуды $U_{\text{мос}}^*$ в зависимости от M . Такой режим, когда колебания возбуждаются при большем значении M , а срываются при меньшем значении M , называется *жестким режимом самовозбуждения*.

Достоинством мягкого режима самовозбуждения является плавное изменение амплитуды $U_{\text{мос}}^*$ при изменении коэффициента M ; достоинством жесткого режима является высокий КПД за счет работы с отсечкой коллекторного тока.

Можно объединить достоинства мягкого и жесткого режимов самовозбуждения, если ввести в автогенератор цепь автоматического смещения $R_{\text{Б}}$ $C_{\text{Б}}$ (рис. 15.10, а). Исходное смещение U_0 выбирают таким, при котором рабочая точка находится на участке наибольшей крутизны ВАХ, что соответствует мягкому режиму. При нарастании амплитуды колебаний $u_{\text{ос}}$ в цепи базы за счет нелинейности ВАХ $i_{\text{Б}} = F(u_{\text{БЭ}})$ произойдет детектирование колебаний. Возрастание постоянной составляющей тока базы $I_{\text{Б}0}$, которая на резистивном сопротивлении $R_{\text{Б}}$ создает напряжение

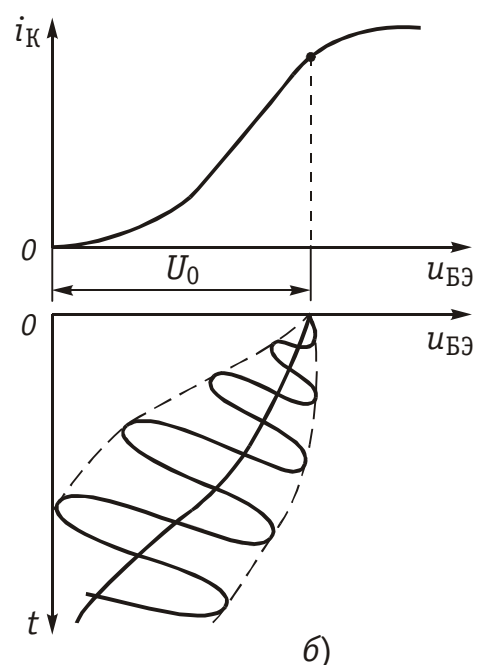
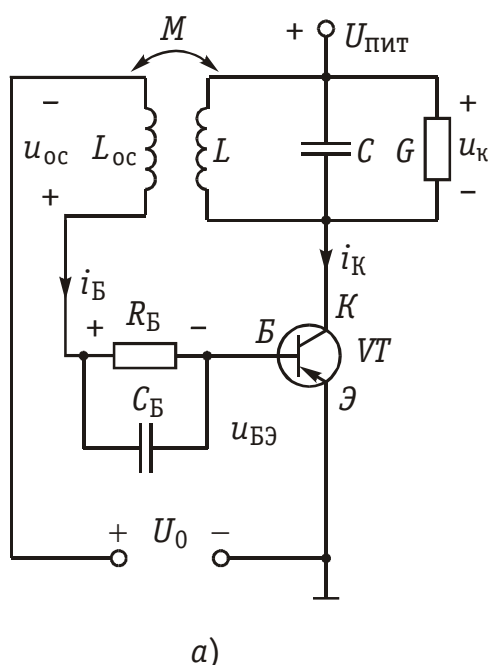


Рис. 15.10

$I_{\text{БЭ}} \cdot R_{\text{Б}}$, приводит к уменьшению результирующего напряжения смещения $U_0 - I_{\text{БЭ}} \cdot R_{\text{Б}}$ и, как результат, к сдвигу рабочей точки влево (рис. 15.10, б) к нижнему загибу ВАХ $i_{\text{К}} = F(u_{\text{БЭ}})$. Переходный процесс заканчивается (при соответствующем значении $R_{\text{Б}}$) установлением жесткого стационарного режима с более высоким КПД.

15.4. LC-генератор с трансформаторной обратной связью. Операторный и частотный методы анализа

Характеристическое уравнение. Операторный метод анализа автогенератора состоит в исследовании характеристического уравнения (14.11) цепи с ОС и выявлении из этого уравнения условий самовозбуждения. Записать характеристическое уравнение генератора можно было бы непосредственно по дифференциальному уравнению (15.9), однако это можно сделать и не прибегая к составлению дифференциального уравнения. Генератор как цепь с ОС описывается характеристическим уравнением (см. гл. 14):

$$1 - H_y(p) H_{\text{ос}}(p) = 0. \quad (15.14)$$

Схема замещения усилителя на транзисторе дана на рис. 15.11 (см. § 3.11). Здесь $R_{\text{вх}}$ и $R_{\text{вых}}$ — входное и выходное сопротивления транзистора; $Z_{\text{к}}$ — комплексное сопротивление параллельного контура.

Операторная передаточная функция такого усилителя равна:

$$H_y(p) = -\frac{U_{\text{к}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)}.$$

В свою очередь, из рис. 15.11 следует, что

$$U_{\text{к}}(p) = S \cdot U_{\text{вх}}(p) \frac{R_{\text{вых}} Z_{\text{к}}(p)}{R_{\text{вых}} + Z_{\text{к}}(p)}.$$

Поэтому

$$H_y(p) = -\frac{S R_{\text{вых}} Z_{\text{к}}(p)}{R_{\text{вых}} + Z_{\text{к}}(p)}.$$

На практике в качестве усилительного элемента используют такой транзистор, у которого $R_{\text{вых}}$ достаточно велико. В этом случае

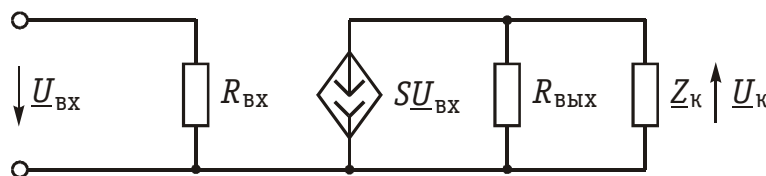


Рис. 15.11

$$H_y(p) = -SZ_k(p). \quad (15.15)$$

Учитывая, что сопротивление параллельного контура

$$Z_k(p) = \frac{p(1/C)}{p^2 + p\frac{G}{C} + \frac{1}{LC}},$$

получаем окончательное выражение передаточной функции усилителя

$$H_y(p) = -\frac{Sp(1/C)}{p^2 + p\frac{G}{C} + \frac{1}{LC}},$$

Передаточную функцию цепи ОС легко найти, если вспомнить (см. § 15.5), что

$$u_{oc}(t) = -\frac{M}{L}u_k(t),$$

или для изображений по Лапласу

$$U_{oc}(p) = -\frac{M}{L}U_k(p).$$

Отсюда

$$H_{oc}(p) = \frac{U_k(p)}{U_{oc}(p)} = -\frac{M}{L}.$$

После того, как получены выражения для $H_y(p)$ и $H_{oc}(p)$, характеристическое уравнение (15.14) можно записать в следующем виде:

$$1 - \frac{Sp\frac{M}{LC}}{p^2 + p\frac{G}{C} + \frac{1}{LC}} = 0.$$

После простейших преобразований получим:

$$p^2 + p\left(\frac{G}{C} - \frac{SM}{LC}\right) + \frac{1}{LC} = 0, \quad (15.16)$$

или

$$p^2 + 2\alpha_{\varphi}p + \omega_0^2 = 0.$$

В режиме самовозбуждения рабочая точка располагается на линейном участке ВАХ и, следовательно, крутизна S является постоянной величиной.

Корни характеристического уравнения (15.16)

$$p_{1,2} = -\alpha_{\varphi} \pm j\omega_c,$$

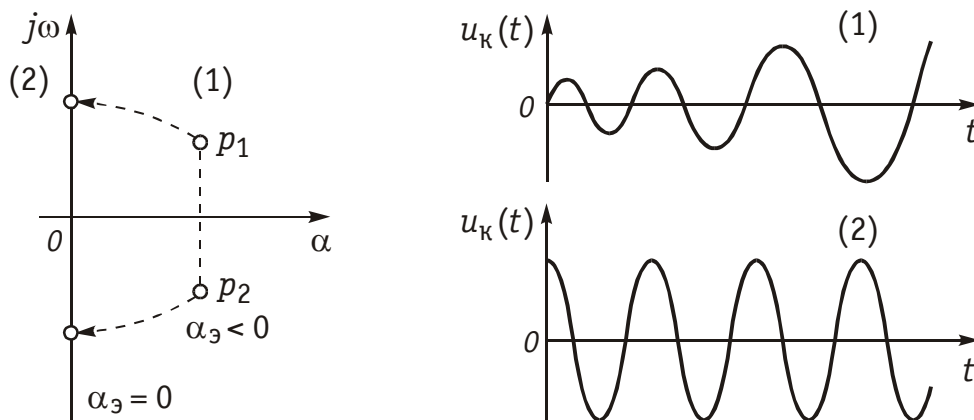


Рис. 15.12

где $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha_3^2}$ — частота свободных колебаний в контуре.

Чтобы в генераторе возникли незатухающие колебания корни должны лежать в правой полуплоскости комплексной переменной p (рис. 15.12, случай 1), т. е. $\alpha_3 < 0$. Таким образом, условие самовозбуждения примет вид $M > LG/S$, что совпадает с выражением (15.10).

В стационарном режиме работы генератора корни перемещаются на мнимую ось комплексной плоскости p (рис. 15.12, случай 2). Из условия $\alpha_3 = 0$ можно найти стационарное значение средней крутизны:

$$S_{\text{ср}}^* = LG/M.$$

Анализ в частотной области. Заменяя в выражениях для операторных передаточных функций оператор p на оператор $j\omega$, запишем передаточную функцию цепи с разомкнутой ОС:

$$\begin{aligned} H_p(j\omega) &= H_y(j\omega)H_{\text{ос}}(j\omega) = \frac{j\omega S \frac{M}{LC}}{-\omega^2 + j\omega \frac{G}{C} + \frac{1}{LC}} = \\ &= \frac{\omega S \frac{M}{LC}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \frac{G^2}{C^2}}} e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\omega \frac{G}{C}}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)}. \end{aligned}$$

Из условия баланса фаз на частоте генерации

$$\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\omega_r G/C}{\omega_0^2 - \omega_r^2} = 0$$

убеждаемся, что генератор возбуждается на частоте $\omega_r = \omega_0$.

Из условия баланса амплитуд, которое должно выполняться на частоте генерации

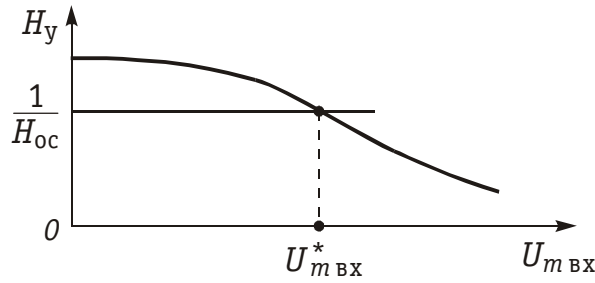


Рис. 15.13

$$H_y(\omega_r) H_{oc}(\omega_r) = SM/GL > 1.$$

находим, что самовозбуждение происходит при $M > LG/S$, что совпадает с полученными ранее результатами.

Баланс амплитуд на частоте генерации $H_y(\omega_r) H_{oc}(\omega_r) = 1$ позволяет определить стационарное значение средней крутизны

$$S_{cp}^* = LG/M.$$

Можно построить зависимость H_y на частоте генерации от стационарной амплитуды колебаний $U_{m_{BX}}$ (рис. 15.13). Функцию $H_y(U_{m_{BX}})$ легко получить из формулы (15.15), зная среднюю крутизну $S_{cp}(U_{m_{BX}})$ и сопротивление контура на частоте генерации $Z_K(\omega_r) = 1/G$:

$$H_y(U_{m_{BX}}, \omega_r) = S_{cp}(U_{m_{BX}})/G.$$

В стационарном режиме выполняется условие

$$H_y^*(\omega_r) = 1/H_{oc}^*(\omega_r) = L/M.$$

Воспользовавшись этим условием, можно найти стационарную амплитуду колебаний на входе усилителя, как это сделано на рис. 15.13. Стационарная амплитуда колебаний на выходе генератора определяется по формуле

$$U_{m_{ВЫХ}}^* = U_{m_{BX}}^* H_y^*(\omega_r).$$

15.5. Трехточечные схемы генераторов

Индуктивная трехточка. Недостатком схем LC -генераторов с трансформаторной обратной связью является наличие двух индуктивно связанных катушек. Поэтому на практике чаще используют схемы LC -генераторов с автотрансформаторной ОС, в которых напряжение ОС снимается с части колебательного контура. Такая схема изображена на рис. 15.14, *а*. Она известна также под названием схемы *индуктивной трехточки*. Элементы C , L_1 и L_2 образуют колебательный контур; резистор R_B является элементом цепи

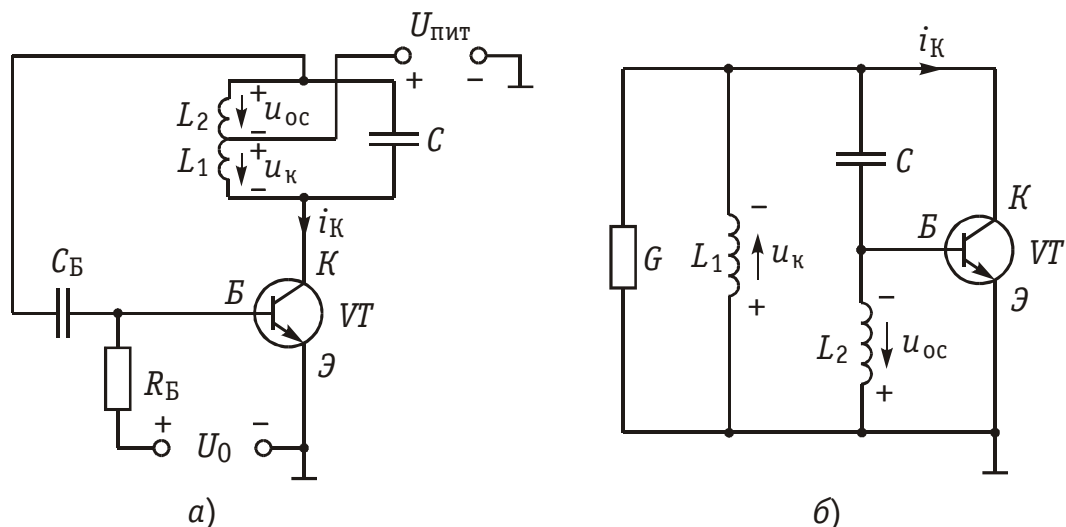


Рис. 15.14

автоматического смещения, через который протекает постоянная составляющая тока базы; конденсатор C_B предотвращает попадание напряжения питания $U_{\text{пит}}$ на базу и влияет на постоянную времени цепи автосмещения. На рис. 15.14, б приведена эквивалентная схема индуктивной трехточки по переменному току, т. е. цепи питания и смещения на рисунке не показаны.

Обычно полагают, что входное сопротивление транзистора настолько велико, что током базы можно пренебречь. В этом случае, как видно из рис. 15.14, б, элементы C , L_1 и L_2 образуют трехэлементный реактивный двухполюсник, в котором сначала происходит резонанс токов, а затем резонанс напряжений в контуре CL_2 . Частотные характеристики реактивного и полного сопротивлений колебательного контура показаны на рис. 15.15, а и б.

Генерация колебаний происходит на частоте резонанса токов

$$\omega_r = \omega_1 = 1/\sqrt{(L_1 + L_2)C}.$$

Сопротивление контура на этой частоте является чисто резистивным и принимает максимальное значение, равное $1/G$.

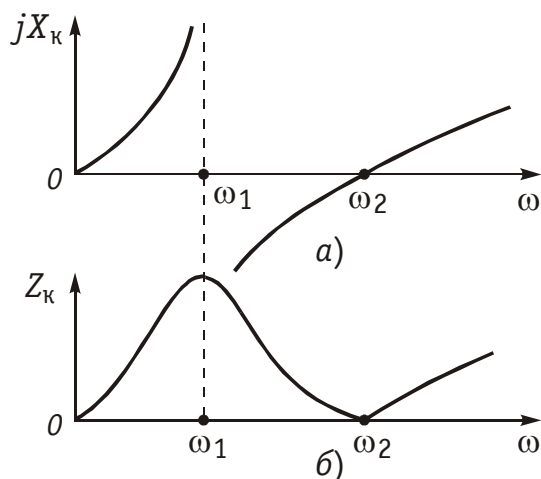


Рис. 15.15

Цепью ОС в этой схеме служит делитель напряжения, образованный емкостью C и индуктивностью L_2 . Действительно, напряжение, снимаемое с выхода усилительного элемента (транзистора), приложено к колебательному контуру или, что то же, к ветви CL_2 . Напряжение ОС снимается с индуктивности L_2 и подается на вход усилительного элемента. Усилительный каскад на одном транзисторе пово-

рачивает фазу сигнала на 180° . Для соблюдения баланса фаз цепь обратной связи также должна вносить фазовый сдвиг 180° . Это и происходит в действительности. Ток в ветви CL_2 из-за емкостного характера ее сопротивления опережает напряжение на контуре $u_k(t)$ на 90° . В свою очередь, напряжение $u_{oc}(t)$ на индуктивности L_2 опережает этот ток еще на 90° . Таким образом, сдвиг фаз между напряжениями $u_k(t)$ и $u_{oc}(t)$ составляет 180° .

Перейдем к анализу работы генератора. Для определения условий самовозбуждения составим характеристическое уравнение генератора:

$$1 - H_y(p)H_{oc}(p) = 0. \quad (15.17)$$

Передаточная функция усилителя, как и в случае LC -генератора с трансформаторной обратной связью, равна

$$H_y(p) = -SZ_k(p), \quad (15.18)$$

где $Z_k(p)$ — операторное сопротивление контура:

$$Z(p) = \frac{1}{\frac{1}{pL_1} + G + \frac{1}{pL_2 + \frac{1}{pC}}}.$$

После несложных преобразований выражения для $Z_k(p)$ и подстановки его в (15.18) получим

$$H_y(p) = \frac{-SpL_1(p^2L_2C + 1)/G}{p^3L_1L_2C + p^2(L_1 + L_2)C/G + pL_1 + 1/G}.$$

Передаточная функция цепи ОС имеет вид

$$H_{oc}(p) = \frac{pL_2}{pL_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{p^2L_2C}{p^2L_2C + 1}.$$

Запишем передаточную функцию цепи с разомкнутой ОС

$$H_y(p)H_{oc}(p) = \frac{-p^3L_1L_2CS/G}{p^3L_1L_2C + p^2(L_1 + L_2)C/G + pL_1 + 1/G}.$$

Теперь легко получить характеристическое уравнение. С учетом (15.17) имеем

$$p^3L_1L_2C(1 - S/G) + p^2(L_1 + L_2)C/G + pL_1 + 1/G = 0. \quad (15.19)$$

Заметим попутно, что данному характеристическому уравнению соответствует дифференциальное уравнение генератора — индуктивной трехточки

$$L_1 L_2 C \left(1 - \frac{S}{G} \right) \frac{d^3 u_{\text{к}}}{dt^3} + (L_1 + L_2) C/G \frac{d^2 u_{\text{к}}}{dt^2} + L_1 \frac{du_{\text{к}}}{dt} + \frac{1}{G} u_{\text{к}} = 0.$$

Для анализа устойчивости воспользуемся критерием Рауса — Гурвица и составим определитель Гурвица (см. гл. 14):

$$D_2 = \begin{vmatrix} (L_1 + L_2)C/G & 1/G & 0 \\ L_1 L_2 C(1 - S/G) & L_1 & 0 \\ 0 & (L_1 + L_2)C/G & 1/G \end{vmatrix}.$$

Цепь будет неустойчивой и в генераторе произойдет самовозбуждение, если хотя бы один минор этого определителя является отрицательным, например,

$$D_1 = \begin{vmatrix} (L_1 + L_2)C/G & 1/G \\ L_1 L_2 C(1 - S/G) & L_1 \end{vmatrix} < 0.$$

Раскрывая определитель, получаем

$$L_1 (L_1 + L_2) C/G - L_1 L_2 C(1 - S/G) G < 0$$

или

$$L_1 + L_2 < L_2 + L_2 S/G.$$

Отсюда условие самовозбуждения имеет вид

$$L_1/L_2 < S/G. \quad (15.20)$$

Для анализа работы генератора в частотной области необходимо использовать соотношения баланса амплитуд и баланса фаз

$$H_y(\omega_{\text{г}}) H_{\text{ос}}(\omega_{\text{г}}) \geq 1 \quad \text{и} \quad \varphi_y(\omega_{\text{г}}) + \varphi_{\text{ос}}(\omega_{\text{г}}) = 2\pi.$$

Поскольку на частоте генерации $\omega_{\text{г}}$ сопротивления контура $Z_{\text{к}}(\omega) = 1/G$, комплексная передаточная функция усилителя принимает в соответствии с (15.18) простой вид

$$H_y(\omega_{\text{г}}) = -S/G = (S/G) e^{j\pi}.$$

Комплексная передаточная функция цепи ОС

$$H_{\text{ос}}(j\omega) = \frac{j\omega L_2}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{-\omega^2 L_2 C}{1 - \omega^2 L_2 C},$$

после подстановки значения частоты генерации $\omega_{\text{г}} = 1/\sqrt{(L_1 + L_2)C}$ она будет иметь вид

$$H_{\text{ос}}(j\omega_{\text{г}}) = \frac{L_2 C / (L_1 + L_2) C}{1 - L_2 C / (L_1 + L_2) C} = -\frac{L_2}{L_1} = \frac{L_2}{L_1} e^{j\pi}.$$

В режиме самовозбуждения, т. е. когда

$$H_y(\omega_r)H_{oc}(\omega_r) > 1,$$

имеем:

$$\frac{L_2}{L_1} \cdot \frac{S}{G} > 1 \quad \text{или} \quad \frac{L_1}{L_2} < \frac{S}{G},$$

что совпадает с выражением (15.20).

Для стационарного режима, когда выполняется баланс амплитуд

$$H_y(\omega_r)H_{oc}(\omega_r) = 1,$$

можно определить стационарное значение средней крутизны:

$$\frac{L_2}{L_1} \cdot \frac{S_{cp}^*}{G} = 1 \quad \text{или} \quad S_{cp}^* = \frac{L_1 G}{L_2}.$$

Из анализа выражений $H_y(j\omega_r)$ и $H_{oc}(j\omega_r)$ видно, что $\varphi_y(\omega_r) + \varphi_{oc}(\omega_r) = 2\pi$, т. е. баланс фаз выполняется.

Емкостная трехточка. Если в предыдущей схеме использовать реактивный двухполюсник с обратной частотной зависимостью сопротивления, то полученная схема будет называться *емкостной трехточкой* (рис. 15.16). Генерация колебаний в этой схеме будет происходить на частоте резонанса токов

$$\omega_r = \omega_2 = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2}},$$

когда сопротивление колебательного контура будет активным $Z_k(\omega) = 1/G$ и максимальным по величине.

Анализ данной схемы практически ничем не отличается от анализа индуктивной трехточки. Для иллюстрации проведем анализ в частотной области. Исследование характеристического уравнения генератора предлагаем провести самостоятельно.

Комплексная передаточная функция усилителя на частоте генерации была получена ранее:

$$H_y(\omega_r) = (S/G)e^{j\pi}.$$

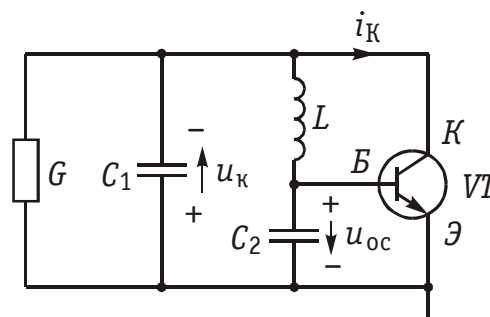


Рис. 15.16

Цепь обратной связи представляет собой делитель напряжения, образованный индуктивностью L и емкостью C_2 . Комплексная передаточная функция цепи обратной связи

$$H_{oc}(j\omega) = \frac{1/j\omega C_2}{j\omega L + 1/j\omega C_2} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC_2}$$

на частоте генерации ω_r принимает вид

$$H_{oc}(j\omega_r) = -\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_1}{C_2} e^{j\pi}.$$

Из неравенства $H_y(\omega_r)H_{oc}(\omega_r) > 1$ определим условия самовозбуждения емкостной трехточки

$$\frac{S}{G} \cdot \frac{C_1}{C_2} > 1 \quad \text{или} \quad \frac{C_2}{C_1} < \frac{S}{G}.$$

Из баланса амплитуд определяется стационарное значение средней крутизны

$$S_{cp}^* = \frac{C_2 G}{C_1}.$$

15.6. RC-генераторы

RC-генератор с мостом Вина. На сравнительно низких частотах, где реализация LC -контуров становится затруднительной из-за больших габаритов и массы, низкой добротности и невозможности перестройки, используют RC -автогенераторы. Они представляют собой комбинацию активных четырехполюсников (усилителей) и пассивных RC -цепей для создания ОС.

На рис. 15.17, а показана одна из таких схем (RC -генератор с мостом Вина), которая представляет собой усилитель с коэффициентом передачи K , между входом и выходом которого включена RC -цепь. Усилитель с заданным коэффициентом передачи можно реализовать на ОУ (см. рис. 2.17) по схеме неинвертирующего масштабного усилителя.

Для составления характеристического уравнения (15.14) достаточно найти $H_{oc}(p)$, так как $H_y(p) = K$. Схема генератора с разомкнутой ОС приведена на рис. 15.17, б. Передаточную функцию цепи ОС, являющейся Γ -образным четырехполюсником, будем искать в виде

$$H_{oc}(p) = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}, \quad (15.21)$$

где $Z_1(p)$ — операторное сопротивление последовательно соединенных емкости C_1 и сопротивления R_1 :

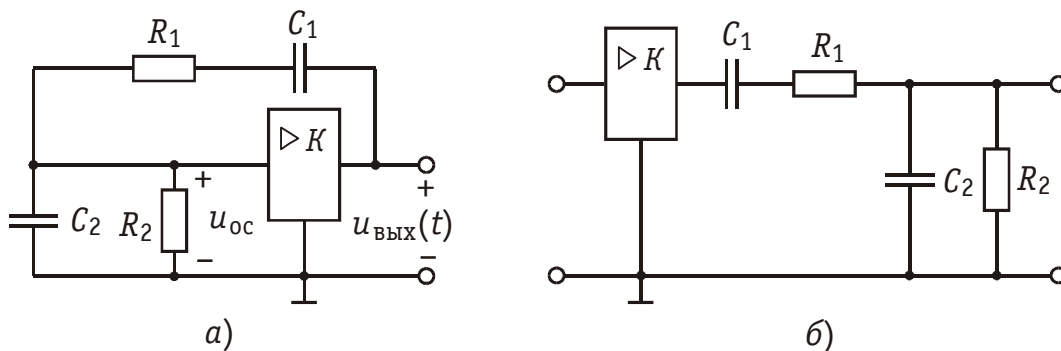


Рис. 15.17

$$Z_1(p) = \frac{pR_1C_1 + 1}{pC_1};$$

$Z_2(p)$ — операторное сопротивление соединенных параллельно емкости C_2 и сопротивления R_2

$$Z_2(p) = \frac{R_2}{pR_2C_2 + 1}.$$

После подстановки в формулу (15.21) выражений $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$ получим

$$H_{oc}(p) = \frac{pR_2C_1}{p^2R_1R_2C_1C_2 + p(R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1) + 1}. \quad (15.22)$$

Характеристическое уравнение (15.14) примет вид:

$$p^2R_1C_1R_2C_2 + p[R_1C_1 + R_2C_2 + (1 - K)R_2C_1] + 1 = 0, \quad (15.23)$$

или

$$p^2 + 2\alpha_3 p + \omega_0^2 = 0,$$

где $\alpha_3 = \frac{R_1C_1 + R_2C_2 + (1 - K)R_2C_1}{2R_1R_2C_1C_2}; \quad \omega_0 = 1/\sqrt{R_1R_2C_1C_2}.$

Режиму самовозбуждения соответствует расположение корней характеристического уравнения (15.14) в правой полуплоскости, что имеет место при $\alpha_3 < 0$, т. е. при

$$R_1C_1 + R_2C_2 + (1 - K)R_2C_1 < 0.$$

Из данного условия следует, что самовозбуждение генератора наступает при коэффициенте передачи усилителя

$$K > \frac{R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1}{R_2C_1},$$

или

$$K > 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}.$$

Если выбрать $R_1 = R_2$ и $C_1 = C_2$, то колебания на выходе генератора появятся при $K > 3$.

В стационарном режиме $\alpha_\varepsilon = 0$. Характеристическое уравнение (15.14) в этом случае принимает вид

$$p^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + 1 = 0.$$

Его корни лежат на мнимой оси плоскости p и равны

$$p_{1,2} = \pm j \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} = \pm j \omega_0$$

Таким образом, генерация происходит на частоте $\omega_r = \omega_0$.

Анализ работы RC -генератора с мостом Вина можно провести также в частотной области. Про усилитель известно, что $H_y(\omega) = K$ и $\varphi_y(\omega) = 0$ на всех частотах. Комплексную передаточную функцию цепи ОС $H_{oc}(j\omega)$ получим из (15.22) заменой оператора p на $j\omega$, преобразовав предварительно (15.22) к виду

$$H_{oc}(p) = \frac{1}{pR_1C_2 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} + 1 + \frac{1}{pR_2C_1}}.$$

Откуда после замены p на $j\omega$, имеем

$$H_{oc}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} + j \left(\omega C_2 R_1 - \frac{1}{\omega C_1 R_2} \right)}.$$

Поскольку усилитель не вносит фазового сдвига, для выполнения баланса фаз требуется обеспечить условие $\varphi_{oc}(\omega_r) = 0$. Оно выполняется тогда, когда передаточная функция цепи ОС является вещественной, т. е. ее мнимая часть обращается в нуль. Таким образом, на частоте генерации

$$\omega_r C_2 R_1 - \frac{1}{\omega_r C_1 R_2} = 0.$$

Из этого условия определяется частота генерации

$$\omega_r = 1/\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}.$$

Значение передаточной функции на этой частоте

$$H_{oc}(\omega_r) = 1/(1 + R_1/R_2 + C_2/C_1).$$

Из условия самовозбуждения $H_y(\omega_r)H_{oc}(\omega_r) > 1$ находим коэффициент усиления K , при котором на выходе генератора возникают незатухающие гармонические колебания:

$$K > 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}.$$

Стационарное значение коэффициента усиления усилителя определяется балансом амплитуд:

$$K^* = 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}.$$

RC-генератор с лестничной схемой обратной связи. На рис 15.18, а показана схема такого генератора, представляющая собой однокаскадный транзисторный усилитель, между входом и выходом которого включен лестничный пассивный RC четырехполюсник (для упрощения рисунка цепь смещения на нем не приведена).

Для возникновения генерации колебаний необходимо, чтобы напряжение обратной связи, подаваемое на вход генератора, непрерывно возрастало. Это возможно только тогда, когда усиление усилительного каскада больше ослабления, вносимого цепью обратной связи. Кроме того, должно выполняться условие баланса фаз. Последнее означает, что поскольку один каскад транзисторного усилителя вносит сдвиг фаз, равный 180° , то цепь обратной связи также должна вносить сдвиг фаз 180° , чтобы общий сдвиг фаз равнялся 0° (или 360°).

Однако простейшее RC-звено вносит сдвиг фаз, не превышающий 90° . Поэтому необходимо взять число звеньев не меньше трех. Зависимость сдвига фаз от частоты RC-цепи из трех звеньев показана на рис. 15.18, б. Элементы RC-цепи рассчитывают так, чтобы на частоте генерации получить сдвиг фаз 180° .

В стационарном режиме, кроме баланса фаз, выполняется также и баланс амплитуд. При этом усиление усилительного каскада становится равным ослаблению цепи ОС, амплитуда напряжения цепи обратной связи, а значит и выходного, остается постоянной.

Если выбрать сопротивление коллекторной цепи транзистора $R_K \ll R$, чтобы избежать влияния на работу транзистора цепи ОС,

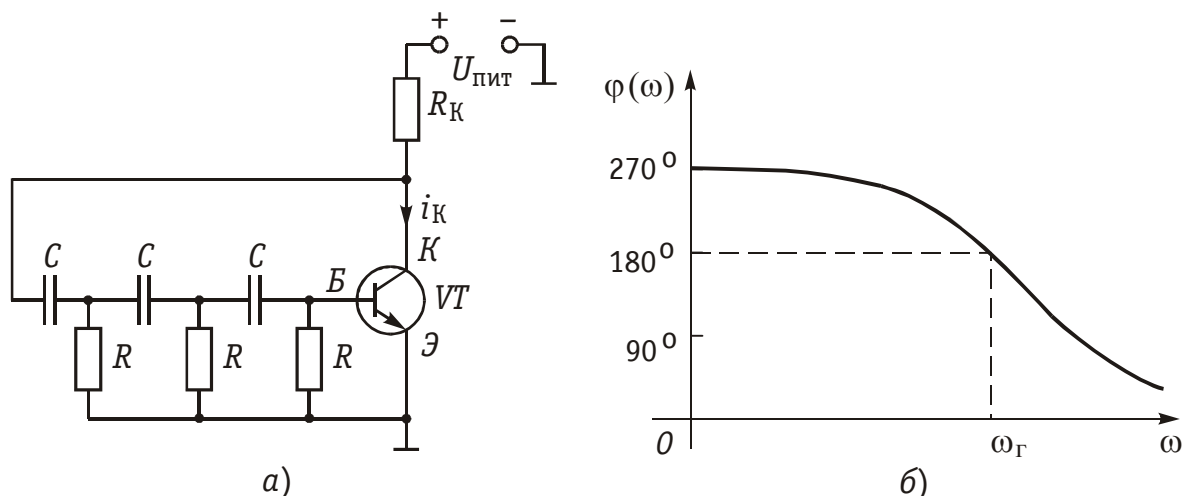


Рис. 15.18

то операторная передаточная функция усилительного каскада определится, как и в LC -генераторах, следующей формулой:

$$H_y(p) = -SR_K.$$

Операторную передаточную функцию лестничной цепи обратной связи, нагруженной на транзистор с большим входным сопротивлением, т. е. работающей практически на холостом ходу, получим из условия $H(p) = 1/A_{11}$. Параметр A_{11} лестничной схемы найдем, воспользовавшись матричным методом расчета четырехполюсников (гл. 12). Представим лестничную схему как каскадное соединение Т-образного и П-образного четырехполюсников.

Тогда матрица A лестничной схемы запишется в виде

$$A = \|A\|_T \times \|A\|_П.$$

Предлагаем читателям самостоятельно получить элементы A -матриц четырехполюсников. Они имеют вид:

$$A = \left\| \begin{array}{cc} 1 + pRC & 2R + pR^2C \\ pC & 1 + pRC \end{array} \right\|_T \times \left\| \begin{array}{cc} 1 + pRC & R \\ 2pC + p^2RC^2 & 1 + pRC \end{array} \right\|_П.$$

При этом нет необходимости осуществлять полностью перемножение матриц. Для получения коэффициента A_{11} результирующей A -матрицы лестничной цепи ОС достаточно перемножить первую строку и первый столбец данных матриц. В итоге будем иметь

$$A_{11}(p) = (1 + pRC)^2 + pRC(2 + pRC)^2$$

и

$$H_{oc}(p) = 1/A_{11} = 1/(p^3R^3C^3 + 5p^2R^2C^2 + 6pRC + 1). \quad (15.24)$$

Для нахождения условий возникновения генерации исследуем характеристическое уравнение генератора

$$1 - H_y(p)H_{oc}(p) = 0.$$

После подстановки в него $H_y(p)$ и $H_{oc}(p)$ получим следующее уравнение:

$$p^3R^3C^3 + 5p^2R^2C^2 + 6pRC + 1 + SR_K = 0.$$

Цепь является неустойчивой, если

$$D_2 = \begin{vmatrix} 5R^2C^2 & 1 + SR_K & 0 \\ R^3C^3 & 6RC & 0 \\ 0 & 5R^2C^2 & 1 + SR_K \end{vmatrix} < 0,$$

или

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5R^2C^2 & 1 + SR_K \\ R^3C^3 & 6RC \end{vmatrix} < 0.$$

Раскрывая определитель D_1 , приходим к неравенству

$$30R^3C^3 - R^3C^3 - SR_K R^3C^3 < 0,$$

или $SR_K > 29$. Поскольку произведение SR_K есть ни что иное как усиление транзисторного усилительного каскада, то это условие означает, что для самовозбуждения генератора усиление транзисторного каскада должно превышать 29 единиц.

Переход из комплексной плоскости p в частотную область осуществляется заменой p на $j\omega$.

Усилитель имеет комплексную передаточную функцию

$$H_y(j\omega) = -SR_K = SR_K e^{j\pi}.$$

Цепь обратной связи описывается комплексной передаточной функцией $H_{oc}(j\omega)$, полученной из (15.24):

$$H_{oc}(j\omega) = 1/(1 - 5\omega^2 R^2 C^2 + j\omega RC(6 - \omega^2 R^2 C^2)).$$

Из баланса фаз $\varphi_y(\omega_r) + \varphi_{oc}(\omega_r) = 2\pi$ следует, что $\varphi_{oc}(\omega_r) = \pi$. Это будет иметь место при

$$6 - \omega_r R^2 C^2 = 0,$$

откуда находится частота генерации $\omega_r = \sqrt{6}/RC$.

Передаточная функция $H_{oc}(j\omega_r)$ равна

$$H_{oc}(j\omega_r) = \frac{1}{1 - 5\omega_r^2 R^2 C^2} = -\frac{1}{29} = \frac{1}{29} e^{j\pi},$$

или

$$H_{oc}(\omega_r) = 1/29; \quad \varphi_{oc}(\omega_r) = \pi.$$

Подстановка полученных значений $H_y(\omega_r)$ и $H_{oc}(\omega_r)$ в условие амплитуд

$$H_y(\omega_r) H_{oc}(\omega_r) > 1$$

даст $SR_K > 29$, что совпадает с полученным ранее результатом.

В стационарном режиме можно рассчитать значение средней крутизны

$$S_{cp}^* = 29/R_K.$$

Недостатком RC -генераторов является то, что в стационарном режиме за счет нелинейности ВАХ (благодаря которой и устанавливается амплитуда колебаний) происходит искажение формы тока i_K в цепи коллектора. Выходное напряжение в RC -автогенераторе снимается с резистора R_K и имеет ту же форму, что и ток i_K , т. е. является несинусоидальным.

Для получения формы колебаний, близкой к синусоидальной, нужно, чтобы колебания не выходили за пределы линейного участ-

ка ВАХ. Поэтому на практике рост колебаний ограничивается не нелинейностью транзистора, а специальным нелинейным элементом (НЭ), в качестве которого используются полупроводниковые или металлические терморезисторы.

15.7. Автогенераторы с внутренней обратной связью

Ранее была получена одна из форм дифференциального уравнения автогенератора с внешней ОС (15.9)

$$\frac{d^2 u_K}{dt^2} + 2\alpha_{\text{э}} \frac{du_K}{dt} + \omega_0^2 u_K = 0$$

с коэффициентом $\alpha_{\text{э}}$, определяемым формулой (15.11):

$$\alpha_{\text{э}} = \frac{1}{2C}(G + G_{\text{вн}}).$$

Здесь $G_{\text{вн}}$ — проводимость, вносимая в колебательный контур за счет действия внешней ОС. Стационарному режиму соответствует равенство $G_{\text{вн}} = -G$. Условие возникновения колебаний удовлетворяется при $G_{\text{вн}} < 0$ и $|G_{\text{вн}}| > G$.

Сравнение данного дифференциального уравнения с дифференциальным уравнением одиночного колебательного контура (15.2) позволяет составить эквивалентную схему генератора. Она дана на рис. 15.4 и отличается от схемы обычного контура наличием в ней отрицательной проводимости.

Отрицательную проводимость можно получать не только за счет действия внешней ОС, но и с помощью НЭ с ВАХ, имеющей падающий участок. Электронные приборы, являющиеся резистивными нелинейными элементами с падающими участками ВАХ $i = F(u)$, называются приборами с отрицательным сопротивлением. В частности, таким прибором является туннельный диод.

Генераторы, построенные на приборах с отрицательным сопротивлением, не содержат внешней цепи ОС и называются поэтому генераторами с внутренней ОС.

На рис. 15.19, а приведена ВАХ туннельного диода. На участке

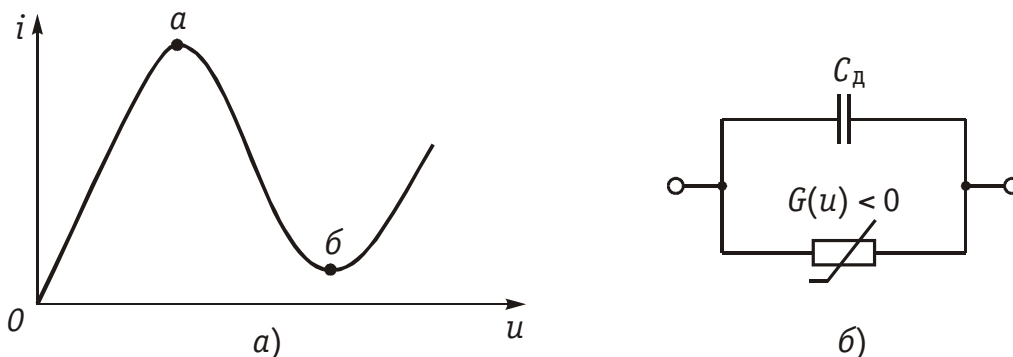


Рис. 15.19

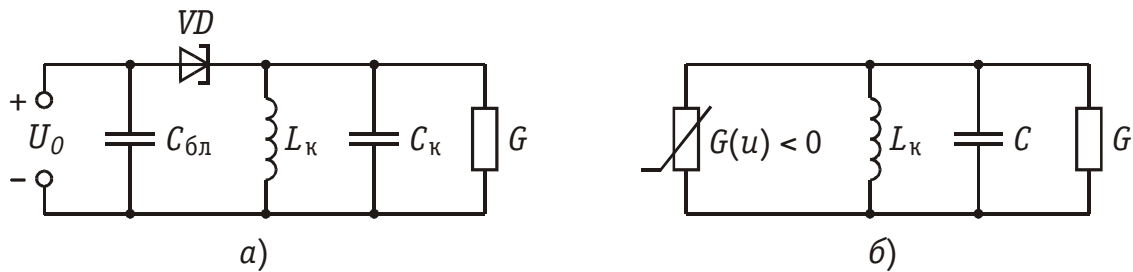


Рис. 15.20

a – $б$ дифференциальная проводимость $G(u) = di/du < 0$.

Эквивалентная схема туннельного диода, соответствующая падающему участку характеристики, представляет собой параллельное соединение нелинейной отрицательной проводимости диода $G(u)$, зависящей от приложенного к нему напряжения u , и емкости C_d p - n перехода (рис. 15.19, б).

Схема генератора с внутренней ОС, выполненного на туннельном диоде, изображена на рис. 15.20, а. При помощи напряжения смещения U_0 рабочая точка устанавливается примерно в середине падающего участка ВАХ диода. Блокировочная емкость $C_{бл}$ образует путь для переменного тока генерируемой частоты. Заменив туннельный диод параллельным соединением отрицательной проводимости $G(u)$ и емкости C_d перейдем к эквивалентной схеме генератора по переменному току. Она дана на рис. 15.20, б. Емкость эквивалентной схемы $C = C_k + C_d$. Данная эквивалентная схема полностью удовлетворяет приведенному в начале раздела дифференциальному уравнению.

Генератор на туннельном диоде является генератором почти гармонических колебаний, и анализ его работы можно провести так же, как и анализ работы генератора с внешней ОС.

Введем понятие средней проводимости НЭ $G_{cp}(U_{m1}) < 0$ по первой гармонике с амплитудой U_{m1} . Графики зависимостей, $|G_{cp}(U_{m1})|$ от амплитуды U_{m1} при различных напряжениях смещения U_0 приведены на рис. 15.21. На нем же показаны различные значения эквивалентной проводимости контура G .

Возбуждаются колебания при $|G_{cp}(U_{m1})| > G$. Стационарные амплитуды колебаний U_{m1}^* устанавливаются при $|G_{cp}(U_{m1})| = G$.

Проводя анализ зависимостей рис. 15.21 (подобный анализ зависимостей выполнен с помощью рис. 15.8 и 15.9 для генераторов с внешней ОС), можно убедиться, что в генераторах с внутренней ОС возможны мягкий и жесткий режимы самовозбуждения (рис. 15.22).

Мягкий режим самовозбуждения происходит при напряжениях смещения $0,15 \text{ В} < U_0 < 0,3 \text{ В}$, жесткий режим — при $U_0 > 0,3 \text{ В}$. На рис. 15.21 на кривой средней проводимости $|G_{cp}(U_{m1})|$, полученной при $U_0 = 0,4 \text{ В}$ показаны стационарные точки A' , A'' и A''' . Колебания возникают при значении эквивалентной проводимости

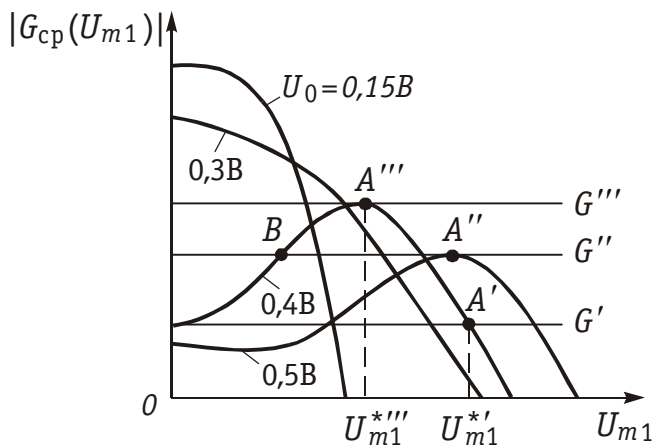


Рис. 15.21

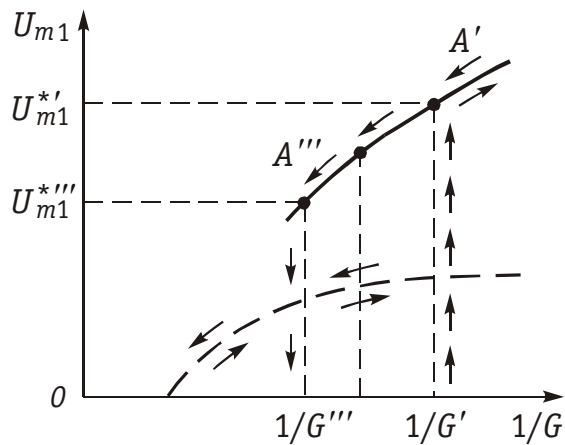


Рис. 15.22

контура G' (точка A'). Амплитуда колебаний равна U_{m1}^* . При увеличении проводимости G стационарная амплитуда U_{m1}^* уменьшается, срыв колебаний происходит при G''' (точка A'''). Поэтому жесткому режиму самовозбуждения соответствует сплошная кривая на рис. 15.22. Мягкому режиму возбуждения соответствует пунктирная кривая, полученная для средней проводимости при $U_0 = 0,3$ В.

15.8. Анализ переходных процессов в автогенераторе методом медленно меняющихся амплитуд

При исследовании условий самовозбуждения и стационарного режима работы автогенератора принимались во внимание следующие обстоятельства. При самовозбуждении амплитуда нарастающих колебаний в автогенераторе мала и работа генератора происходит на линейном участке ВАХ транзистора $i_k = F(u_k)$, на котором крутизна транзистора $S(u_{oc}) = di_k(u_{oc})/du_{oc}$ является постоянной величиной, не зависящей от напряжения u_{oc} , т. е. $S(u_{oc}) = S$. В этом случае дифференциальное уравнение автогенератора (15.8) становится линейным.

В стационарном режиме, когда амплитуды гармонического колебания на контуре автогенератора U_{mk} и гармонического колебания обратной связи U_{moc} являются установившимися, средняя крутизна $S_{cp}(u_{oc})$ в уравнении (15.8) является также постоянной величиной и дифференциальное уравнение автогенератора снова можно считать линейным:

$$\frac{d^2 u_k}{dt^2} + \left[\frac{G}{C} - \frac{MS}{LC} \right] \frac{du_k}{dt} + \omega_0^2 u_k = 0.$$

Из решения этого уравнения определялись условия самовозбуждения, амплитуда и частота генерируемых колебаний.

При анализе переходного режима автогенератора, когда амплитуды колебаний напряжения на контуре и напряжения обратной связи изменяются от очень малых величин $U_{mk}(0)$ и $U_{moc}(0)$, вызванных флуктуационными процессами в автогенераторе, до установившихся значений, считать крутизну $S(u_{oc})$ постоянной уже невозможно; дифференциальное уравнение автогенератора (15.8) является нелинейным. Поскольку способов точного аналитического решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка не существует воспользуемся для его решения приближенным *методом медленно меняющихся амплитуд* (ММА).

Метод ММА применяется для решения нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Этот метод введен в радиотехнику впервые Ван-дер-Подем, который рассмотрел ряд задач, связанных с установлением колебаний в ламповых генераторах и других колебательных системах. В дальнейшем этот метод получил обоснование в работах академиков Л.И. Мандельштама, Н.Д. Папалекси, А.А. Андропова и их учеников. Особо следует отметить работы академиков Н.Н. Боголюбова, Н.М. Крылова, а также Ю.А. Митропольского, посвященные развитию и метода ММА (или, как он часто называется, *метода укороченных уравнений*).

Поскольку в автогенераторах для повышения стабильности частоты генерируемых колебаний и подавления высших гармоник тока коллектора, являющихся продуктом нелинейности ВАХ транзистора, используется высокодобротный контур ($Q \gg 1$), то амплитуда напряжения на контуре, а также амплитуда напряжения обратной связи, изменяются так медленно, что их приращение ΔU_m за время периода колебаний T много меньше самой амплитуды колебаний $\Delta U_m \ll U_m$. Это условие «малости» изменения амплитуды колебаний и будет использовано для анализа переходных процессов в автогенераторе.

Покажем, что указанное условие «малости» изменения амплитуды колебаний в автогенераторе, $\Delta U_m \ll U_m$, действительно выполняется при больших добротностях контура Q . Напряжение на колебательном контуре автогенератора изменяется по закону

$$u_k(t) = U_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t,$$

где $\alpha = G/2C$ — коэффициент затухания контура; U_0 — начальное значение амплитуды колебаний, вызванное флуктуациями тока в транзисторе; ω_0 — частота свободных колебаний в контуре.

Введем обозначение

$$U_{mk}(t) = U_0 e^{-\alpha t} \quad (15.25)$$

и перепишем выражение для $u(t)$:

$$u_k(t) = U_{mk}(t) \sin \omega_0 t,$$

где $U_m(t)$ — описывает закон изменения амплитуды автоколебаний во времени.

Продифференцировав (15.25), найдем скорость изменения амплитуды

$$\frac{dU_{mк}(t)}{dt} = -\alpha U_0 e^{-\alpha t} = -\alpha U_{mк}(t). \quad (15.26)$$

Перепишем (15.26) в приращениях

$$\Delta U_{mк}(t) = -\alpha U_{mк}(t) \Delta t. \quad (15.27)$$

Пусть отрезок времени $\Delta t = T$, тогда $\Delta U_{mк}(t) = -\alpha T U_{mк}(t)$. Если $\alpha T \ll 1$, то условие $\Delta U_m \ll U_m$ выполняется. Чтобы убедиться в этом, выразим декремент затухания αT параллельного контура через добротность Q :

$$\alpha T = \frac{G}{2C} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{G\pi\sqrt{LC}}{C} = \pi G \sqrt{\frac{L}{C}} = \pi G \rho = \frac{\pi}{Q}, \quad (15.28)$$

где $Q = 1/(G\rho)$ — добротность контура; ρ — характеристическое сопротивление контура.

Для контура высокой добротности ($Q \gg 1$) декремент затухания $\alpha T \ll 1$, поэтому

$$\Delta U_{mк} \ll U_{mк}, \quad (15.29)$$

в чем и требовалось убедиться.

Воспользуемся условием (15.29) для перехода от полного дифференциального уравнения автогенератора (15.8) к укороченному.

Перепишем (15.29), разделив правую и левую части неравенства на период колебаний

$$\frac{\Delta U_{mк}}{T} \ll \frac{U_{mк}}{T} = \frac{U_{mк}\omega_0}{2\pi}.$$

Перейдем снова к бесконечно малым приращениям амплитуды колебаний, полагая, что период колебаний достаточно мал по сравнению со временем изменения амплитуды

$$\frac{dU_{mк}}{dt} \ll \frac{U_{mк}\omega_0}{2\pi}. \quad (15.30)$$

Неравенство (15.30) еще более усилится, если правую часть умножим на 2π :

$$\frac{dU_{mк}}{dt} \ll \omega_0 U_{mк}. \quad (15.31)$$

Продифференцировав (15.31), получим неравенство для 2-ой производной

$$\frac{d^2 U_{mк}}{dt^2} \ll \omega_0 \frac{dU_{mк}}{dt}. \quad (15.32)$$

Воспользуемся (15.31) и (15.32) для перехода от дифференциального уравнения автогенератора (15.8), составленного относительно напряжения на контуре $u_k(t)$, к дифференциальному уравнению, составленному относительно огибающей амплитуды этого напряжения $U_{mk}(t)$. Тем самым удастся понизить порядок дифференциального уравнения.

Вычислим первую и вторую производные выражения $u_k(t) = U_{mk}(t) \sin \omega_0 t$ и учтем неравенства (15.31) и (15.32):

$$\begin{aligned} \frac{du_k(t)}{dt} &= \frac{dU_{mk}(t)}{dt} \sin \omega_0 t + U_{mk}(t) \omega_0 \cos \omega_0 t \approx \\ &\approx U_{mk}(t) \omega_0 \cos \omega_0 t; \end{aligned} \quad (15.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_k(t)}{dt^2} &= \frac{d^2 U_{mk}(t)}{dt^2} \sin \omega_0 t + \frac{dU_{mk}(t)}{dt} \omega_0 \cos \omega_0 t + \\ &+ \frac{dU_{mk}(t)}{dt} \omega_0 \cos \omega_0 t - U_{mk}(t) \omega_0^2 \sin \omega_0 t \approx \\ &\approx 2 \frac{dU_{mk}(t)}{dt} \omega_0 \cos \omega_0 t - U_{mk}(t) \omega_0^2 \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (15.34)$$

Подставим (15.33) и (15.34) в уравнение автогенератора (15.8):

$$\begin{aligned} &2 \frac{dU_{mk}(t)}{dt} \omega_0 \cos \omega_0 t - U_{mk}(t) \omega_0^2 \sin \omega_0 t + \\ &+ \left(2\alpha - \frac{MS(u_{oc})}{LC} \right) U_{mk}(t) \omega_0 \cos \omega_0 t + U_{mk}(t) \omega_0^2 \sin \omega_0 t = 0. \end{aligned}$$

После преобразования этого выражения имеем окончательно:

$$\frac{dU_{mk}(t)}{dt} + \left(\alpha - \frac{MS(u_{oc})}{2LC} \right) U_{mk}(t) = 0. \quad (15.35)$$

Получили так называемое «укороченное» нелинейное дифференциальное уравнение 1-го порядка для медленно меняющейся амплитуды колебаний, или *уравнение Ван-дер-Поля*.

Таким образом, использование условий медленности изменения амплитуды позволило перейти от мгновенных значений напряжения на контуре u_k к амплитудным U_{mk} и понизить порядок уравнения. Заметим, что уравнение (15.35) по-прежнему остается нелинейным, так как в него входят мгновенная крутизна ВАХ, зависящая от мгновенного напряжения u_{oc} . Однако, от мгновенной крутизны можно перейти к средней крутизне в силу того, что в высокочастотном контуре можно пренебречь высшими гармониками. Тогда уравнения (15.35) можно переписать в виде

$$\frac{dU_{mk}(t)}{dt} + \left(\alpha - \frac{MS_{cp}}{2LC} \right) U_{mk} = 0. \quad (15.36)$$

Это уравнение, строго говоря, также является нелинейным (так как средняя крутизна зависит от амплитуды); однако в таком уравнении первого порядка можно разделить переменные и получить его решение.

Для решения уравнения (15.36) прежде всего нужно выбрать выражение для средней крутизны. Если аппроксимировать ВАХ транзистора полиномом

$$i_k = a_0 + a_1(u_{oc} - U_0) + a_2(u_{oc} - U_0)^2 + \dots$$

и считать, что $u_{oc} = U_0 + U_{moc} \cos \omega t$, то можно найти амплитуду первой гармоники тока

$$I_{m1}(U_{moc}) = a_1 U_{moc} + \frac{3}{4} a_3 U_{moc}^3 + \frac{5}{8} a_5 U_{moc}^5 + \dots$$

и среднюю крутизну по первой гармонике

$$S_{cp}(U_{moc}) = \frac{I_{m1}}{U_{moc}} = a_1 + \frac{3}{4} a_3 U_{moc}^2 + \frac{5}{8} a_5 U_{moc}^4 + \dots$$

Это общее выражение для средней крутизны пригодно для расчета переходных процессов в автогенераторе как в мягком, так и в жестком режимах, но сложность расчетов при этом резко возрастает. Поэтому для практических расчетов используют не полиномиальную аппроксимацию, а аппроксимацию гиперболическим тангенсом.

Среднюю крутизну транзистора для мягкого режима самовозбуждения с достаточной для практических расчетов степенью точности можно аппроксимировать функцией

$$S_{cp} = S_0 \frac{\operatorname{th} a U_{mk}}{a U_{mk}}, \quad (15.37)$$

где S_0 — начальное значение крутизны $S(0)$; $a = S/I_n$, S — значение крутизны в рабочей точке, I_n — ток насыщения транзистора.

Подставив выражение для крутизны (15.37) в укороченное уравнение для огибающей амплитуды колебаний автогенератора (15.36) и вынося коэффициент затухания α за скобки, получим:

$$\frac{dU_{mk}(t)}{dt} + \alpha \left(1 - m \frac{\operatorname{th} a U_{mk}(t)}{a U_{mk}(t)} \right) U_{mk}(t) = 0, \quad (15.38)$$

где $m = M/M_{кр}$; $M_{кр} = LG/S_0$.

Получим решение уравнения (15.38) для двух отрезков времени:

$0 \leq t \leq t_1$ — режим малых амплитуд, когда аргумент $a U_{mk} \leq 0,5$. В это случае $\operatorname{th} a U_{mk} \approx a U_{mk}$ и уравнение (15.38) будет линейным однородным дифференциальным уравнением 1-го порядка:

$$\frac{dU_{mk}(t)}{dt} + \alpha(1 - m)U_{mk}(t) = 0; \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (15.39)$$

$t_1 \leq t \leq t_{\text{уст}}$ — режим больших амплитуд $aU_{m\kappa} \geq 1,5$, тогда $aU_{m\kappa} \approx 1$ и (15.38) будет линейным неоднородным дифференциальным уравнением 1-го порядка

$$\frac{dU_{m\kappa}(t)}{dt} + \alpha \left(U_{m\kappa}(t) - \frac{m}{a} \right) = 0; \quad t_1 \leq t \leq t_{\text{уст}}. \quad (15.40)$$

Решение уравнения (15.39) имеет вид:

$$U_{m\kappa}(t) = U_{m\kappa}(0)e^{-\alpha(1-m)t}; \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad (15.41)$$

где $U_{m\kappa}(0)$ — начальное значение амплитуды колебаний в момент $t = 0$ (на первом интервале времени $0 \leq t \leq t_1$), обусловленное флуктуациями в транзисторе. Из (15.41) видно, что амплитуда колебаний будет увеличиваться, если $m > 1$, т. е. $M > M_{\text{кр}}$ или $M_{\text{кр}}/L > G/S$.

Для решения (15.40) проведем разделение переменных и проинтегрируем

$$\int_{U(t_1)}^{U(t)} \frac{d \left(U_{m\kappa}(t) - \frac{m}{a} \right)}{U_{m\kappa}(t) - \frac{m}{a}} = - \int_{t_1}^t \alpha dt; \quad t_1 \leq t \leq t_{\text{уст}},$$

$$\ln \frac{U_{m\kappa}(t) - \frac{m}{a}}{U_{m\kappa}(t_1) - \frac{m}{a}} = -\alpha(t - t_1); \quad t_1 \leq t \leq t_{\text{уст}},$$

$$U_{m\kappa}(t) = \left(U_{m\kappa}(t_1) - \frac{m}{a} \right) e^{-\alpha(t-t_1)} + \frac{m}{a}; \quad t_1 \leq t \leq t_{\text{уст}}, \quad (15.42)$$

где $U_{m\kappa}(t_1)$ — начальное значение амплитуды колебаний на втором интервале $t_1 \leq t \leq t_{\text{уст}}$, равное конечному значению амплитуды на первом интервале $U_{m\kappa}(t_1) = U_{m\kappa}(0)e^{-\alpha(1-m)t_1}$.

При $t \rightarrow \infty$ получим установившееся решение для амплитуды колебаний

$$U_{m\kappa}(t_{\text{уст}}) = \frac{m}{a} = \frac{M}{M_{\text{кр}}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{M}{L} S_0 \frac{I_{\text{н}}}{SG}. \quad (15.43)$$

Из (15.43) видно, что установившееся колебание $U_{m\kappa}(t_{\text{уст}})$ не зависит от начальных условий, а зависит от величины обратной связи M/L , проводимости контура G и характеристик транзистора.

Время установления колебаний в автогенераторе находится из условия, что амплитуда колебаний изменяется от $U_{m\kappa}(0)$ до 0,95 от установившегося решения, т. е. $U_{m\kappa}(t_{\text{уст}}) = 0,95 m/a$. Откуда имеем

$$0,95 \frac{m}{a} = \left(U_{mк}(t_1) - \frac{m}{a} \right) e^{-\alpha(t_{уст}-t_1)} + \frac{m}{a}. \quad (15.44)$$

Начальное значение амплитуды колебаний $U_{mк}(t_1)$ найдем из выражения средней крутизны на первом интервале $S_{ср} = S$ и на втором интервале $S_{ср} = S/(aU_{mк}(t_1))$. Отсюда:

$$U_{mк}(t_1) = U_{mк}(0) e^{-\alpha(1-m)t_1} = \frac{1}{a}. \quad (15.45)$$

Из (15.45) находим

$$t_1 = \frac{\ln a U_{mк}(0)}{\alpha(1-m)}. \quad (15.46)$$

Подставив (15.46) в (15.44), получим

$$0,95 \frac{m}{a} = \left(\frac{1}{a} - \frac{m}{a} \right) e^{-\alpha(t_{уст}-t_1)} + \frac{m}{a};$$

$$\ln \frac{0,05m}{1-m} = -\alpha(t_{уст} - t_1).$$

Откуда находим

$$t_{уст} - t_1 = \frac{1}{\alpha} \ln 20 \frac{m-1}{m};$$

$$t_{уст} = \frac{1}{\alpha} \ln 20 \frac{m-1}{m} - \frac{1}{\alpha(m-1)} \ln a U_{mк}(0). \quad (15.47)$$

Из (15.47) видно, что длительность установления колебаний $t_{уст}$ зависит от начальной амплитуды $U_{mк}(0)$, коэффициента затухания α , величины обратной связи m и параметра транзистора a . С увеличением начальной амплитуды колебаний $U_{mк}(0)$ время установления уменьшается.

Пример. Рассчитать время установления колебаний в автогенераторе для следующих условий: величина взаимной индукции в два раза больше критической $m = M/M_{кр} = 2$; начальное значение амплитуды колебаний в 100 раз меньше амплитуды колебаний в середине переходного процесса $U_{mк}(0) = 0,01/a$, добротность контура $Q = 100$.

Выразим в (15.47) коэффициент затухания α контура через добротность Q : $\alpha = \omega_0/(2Q)$, тогда из (15.47) получим

$$t_{уст} = \frac{2Q}{\omega_0} \left(\ln 10 - \ln a \frac{0,01}{a} \right) = \frac{2Q}{\omega_0} (\ln 10 - \ln 0,01) =$$

$$= \frac{2Q}{\omega_0} \ln \frac{10}{0,01} = \frac{2Q}{\omega_0} \cdot 3 \ln 10 = \frac{2QT}{2\pi} \cdot 6,9 \approx 2QT \quad \text{или} \quad \frac{t_{уст}}{T} \approx 2Q.$$

При $Q = 100$ установление колебаний происходит за 200 периодов.

Вопросы и задания для самопроверки

1. Каким образом в автогенераторе (рис. 15.2) возникают стационарные гармонические колебания?
2. Пояснить принцип работы автогенератора по рис. 15.3.
3. Какие типы автогенераторов существуют? Как работают эти генераторы?
4. Сформулировать условия самовозбуждения автогенераторов:
а) с трансформаторной обратной связью; б) индуктивной трех-
точки; в) RC -генератора с лестничной цепью обратной связи;
г) RC -генератора с мостом Вина.
5. Проверить, произойдет ли самовозбуждение автогенератора (рис. 15.2), если $L = 200$ мкГн, $M = 50$ мкГн, $R_p = 10$ кОм, $S_{cp} = 1$ мА/В.
Ответ: да.
6. Является ли цепь на рис. 15.4, б автогенератором, если $H_y = 2,5$; $L_1 = 30$ мкГн; $L_2 = 10$ мкГн?
Ответ: нет.
7. Рассчитать значение крутизны характеристики транзистора, при котором произойдет самовозбуждение RC -автогенератора с лестничной цепью обратной связи, если $R_K = 0,5$ кОм.
Ответ: $S_{cp} > 58$ мА/В.
8. Как рассчитывается частота генерируемых колебаний в автогенераторах разных типов?
9. Рассчитать частоту генерации колебаний в RC -генераторе с мостом Вина, если $C_1 = C_2 = 7$ нФ, $R_1 = R_2 = 10$ кОм.
Ответ: $f_r = 2,27$ кГц.
10. Какими будут графики зависимости средней крутизны (или коэффициента передачи усилителя) от амплитуды напряжения на входе усилителя при разных положениях рабочей точки на ВАХ (в середине линейного участка и на нижнем загибе)?

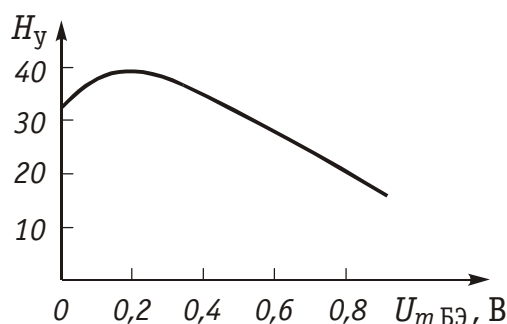


Рис. 15.23

11. Сформулировать условия баланса амплитуд и баланса фаз в установившемся режиме.
12. Каким образом по колебательной характеристике (рис. 15.13) определяется амплитуда стационарных колебаний?
13. Определить амплитуду стационарного колебания на выходе RC-генератора с лестничной цепью обратной связи, если $S_{\text{ср}} = 14,5 \text{ мА/В}$, $R_{\text{К}} = 2 \text{ кОм}$, колебательная характеристика изображена на рис. 15.23.

Ответ: $U_{m \text{ вых}} = 11,6 \text{ В}$.

14. При каких условиях режим самовозбуждения автогенератора является мягким (жестким)?
15. В чем отличие мягкого режима самовозбуждения автогенератора от жесткого режима? Пояснить по графикам рис. 15.8 и рис. 15.9.
16. Каким образом объединить достоинства мягкого и жесткого режимов самовозбуждения?

ГЛАВА 16. ПРОБЛЕМА СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

16.1. Постановка задачи синтеза

Линейные устройства систем передачи информации. Предыдущие главы посвящены в основном проблеме анализа электрических цепей. В них рассматривались методы анализа и на их основе изучались свойства электрических цепей. Другой проблемой является создание устройств и систем, обладающих заданными свойствами, что составляет содержание *задачи синтеза электрических цепей*. В последующих главах речь пойдет о синтезе конкретных линей-

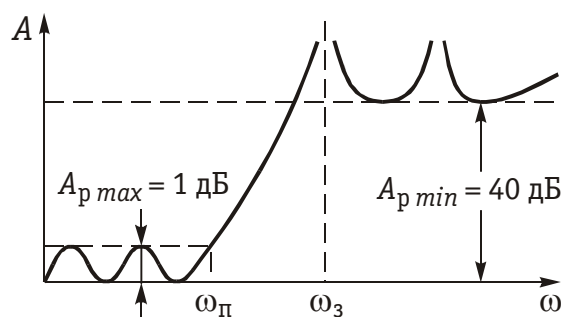


Рис. 16.1

ных устройств, являющихся составной частью систем передачи информации.

Электрические фильтры это четырехполюсники, которые с пренебрежимо малым ослаблением пропускают колебания в определенном диапазоне (диапазонах) частот и практически не пропускают колебаний в других диапазонах. На рис. 16.1 приведена типичная характеристика рабочего ослабления ФНЧ. Для данного примера ослабление в полосе частот $0 \dots \omega_n$ не превышает 1 дБ, а в полосе частот $\omega_z \dots \infty$ ослабление превышает 40 дБ. Полоса частот, в которой ослабление относительно мало, называется *полосой пропускания*; полоса частот, в которой ослабление относительно велико, называется *полосой задерживания*. Между полосами пропускания и задерживания находится полоса расфильтровки (переходная полоса). В этой полосе требования на ослабление не задаются. Электрические фильтры служат для выделения колебаний в необходимой полосе частот. Например, в антенне существуют колебания, вызванные работой многих радиостанций. Каждая радиостанция работает в своей полосе частот. Радиоприемник с помощью фильтров выделяет колебания в желаемом диапазоне частот. Для того, чтобы была возможность последовательно принимать различные радиостанции, фильтр необходимо перестраивать. Вращение ручки настройки радиоприемника приводит к смещению полос пропускания и задерживания. Та же идея положена в основу разделения телефонных каналов в аналоговых многоканальных системах передачи. Фильтрами можно формировать сигналы сложной формы, уменьшать пульсации напряжения или тока в источниках питания.

Корректоры линейных искажений или просто корректоры — это четырехполюсники, служащие для компенсации линейных искажений. В § 9.6 приведены условия безыскаженной передачи. На практике эти условия выполняются далеко не всегда, вследствие чего возникают амплитудно-частотные и фазо-частотные искажения. Для того чтобы обеспечить условия безыскаженной передачи и применяются корректоры. Линейные искажения часто корректируются отдельно. Амплитудными корректорами компенсируются амплитудно-частотные искажения, а фазовыми — фазо-частотные. Корректоры могут быть постоянными, когда их характеристики не меняются в процессе работы или автоматическими (адаптивными), когда при изменении параметров среды передачи (например линий) характеристики корректора автоматически также изменяются.

Линии задержки — это четырехполюсники, которые в некотором диапазоне частот имеют с заданной степенью точности линейную фазо-частотную характеристику или постоянное групповое

время пробега. Линии задержки применяются как элемент устройств, например, гармонических корректоров.

Требования к цепи, этапы синтеза. Требования к электрической цепи можно разделить на основные и дополнительные. Основные требования определяют целевое назначение синтезируемой цепи. Электрические свойства линейной цепи полностью описываются во временной области переходной $g(t)$ или импульсной $h(t)$ характеристиками, а в частотной области — амплитудно- и фазочастотными характеристиками. Поэтому основные требования предъявляются либо к частотным, либо к временным характеристикам будущей цепи.

Дополнительные требования зависят от условий работы создаваемых устройств. К ним относятся ограничения на массу и габариты, чувствительность характеристик к изменению элементов, температурную нестабильность, элементный базис (например, в ряде случаев нежелательно применение катушек индуктивности), а также требования простоты процесса настройки в условиях производства и т. д. Часть дополнительных требований носит обязательный характер, а часть подлежат оптимизации (минимизации или максимизации) при прочих равных условиях. Так, возможен случай, когда требования по чувствительности должны выполняться безусловно, а габариты и масса минимизируются.

В классической постановке задача синтеза разбивается на два этапа: задачу аппроксимации и задачу реализации.

Решение *задачи аппроксимации* заключается в нахождении такой функции, которая, с одной стороны, удовлетворяет поставленным требованиям, а с другой — удовлетворяет условиям физической реализуемости характеристик (временных или частотных) электрических цепей.

Решение *задачи реализации* заключается в нахождении электрической цепи, временная или частотная характеристика которой совпадает с функцией, найденной в результате решения задачи аппроксимации.

16.2. Условия физической реализуемости

Синтез электрических цепей можно выполнить во временной области, когда требования задаются к переходной или импульсной характеристике, и в частотной области, когда требования задаются к амплитудно-частотной характеристике (АЧХ) и ФЧХ цепи. При этом требования часто задаются только к АЧХ цепи, а ФЧХ не контролируется. Очевидно, не любая вещественная функция может быть реализована в виде временной характеристики цепи и не любая комплексная функция может быть реализована в виде входной или передаточной функции.

Условия, при выполнении которых заданная функция может быть реализована как характеристика цепи, называются *условиями физической реализуемости* (УФР). Данные условия зависят от того, из каких элементов предполагается синтезировать цепь, т. е. УФР зависят от элементного базиса. Ниже будут рассматриваться линейные активные и пассивные *RLC*-цепи с сосредоточенными и независимыми от времени параметрами. Рассмотрим УФР данных цепей.

Условия физической реализуемости передаточных функций. В гл. 7 показано, что входные или передаточные функции являются дробно-рациональными функциями с вещественными коэффициентами (7.41):

$$H(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}.$$

Для того, чтобы дробно-рациональная функция с вещественными коэффициентами являлась с точностью до постоянного множителя передаточной функцией четырехполюсника, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условиям, описанным в § 7.4:

- 1) полином знаменателя должен быть полиномом Гурвица;
- 2) степень полинома числителя не должна превышать степени полинома знаменателя.

В терминах нулей и полюсов эти два условия могут быть сформулированы следующим образом:

- 1) полюсы передаточной функции должны находиться в левой полуплоскости;
- 2) отсутствуют полюсы в нуле и бесконечности.

На положение нулей никаких ограничений не накладывается. Эти два условия определяют условия устойчивой цепи.

Если некоторая дробно-рациональная функция удовлетворяет приведенным условиям, то говорят, что она удовлетворяет условиям физической реализуемости.

Структура четырехполюсника может накладывать дополнительные ограничения. Так часто представляют интерес четырехполюсники, не содержащие взаимных индуктивностей и имеющие общий провод между входным и выходным зажимами, т. е. трехполюсники или неуравновешенные четырехполюсники. Такие цепи должны дополнительно удовлетворять условиям *Фиалкова—Герста*, формулируемым следующим образом: *для трехполюсных цепей без взаимной индуктивности коэффициенты числителя передаточной функции не отрицательны и не превышают соответствующих коэффициентов знаменателя.* Это означает, что отсутствуют нули на положительной вещественной полуоси.

Дальнейшие ограничения, накладываемые на структуру четырехполюсника, приводят к дополнительным ограничениям на положение нулей. Так, нули лестничных схем могут находиться только в левой полуплоскости комплексной переменной p . Ограничения на свойства передаточных функций вызываются также видом элементов. Так, в RC -цепях полюсы могут располагаться только на отрицательной вещественной полуоси. В лестничных RC -цепях на отрицательной вещественной полуоси располагаются как полюсы так и нули.

Условия физической реализуемости модуля и аргумента комплексной передаточной функции. Если переменная p принимает только мнимые значения $p = j\omega$, то операторные функции превращаются в комплексные функции вида:

$$H(j\omega) = \frac{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega)^1 + a_0}{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega)^1 + b_0},$$

Учитывая, что $j^2 = -1$, $j^3 = -j$, $j^4 = 1$ и т. д., комплексную передаточную функцию можно записать следующим образом (см. § 7.4):

$$H(j\omega) = \frac{P_1(\omega) + jP_2(\omega)}{Q_1(\omega) + jQ_2(\omega)}, \quad (16.1)$$

где

$$P_1(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots; \quad (16.2)$$

$$P_2(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots; \quad (16.3)$$

$$Q_1(\omega) = b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \dots; \quad (16.4)$$

$$Q_2(\omega) = b_1\omega - b_3\omega^3 + b_5\omega^5 - \dots; \quad (16.5)$$

Любая комплексная функция может быть представлена в виде (см. § 7.4)

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)},$$

где $|H(j\omega)|$ — АЧХ, а $\varphi(\omega)$ — ФЧХ цепи.

Модуль передаточной функции $H(j\omega)$ согласно (7.43)

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\frac{P_1^2(\omega) + P_2^2(\omega)}{Q_1^2(\omega) + Q_2^2(\omega)}}. \quad (16.6)$$

В синтезе цепей часто пользуются понятием квадрата модуля передаточной функции $|H(j\omega)|^2$. Это позволяет избавиться от иррациональных функций. На основании формул (16.1)–(16.4) легко показать, что квадрат модуля передаточной функции в общем виде может быть представлен следующим образом (7.45):

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{P_1^2(\omega) + P_2^2(\omega)}{Q_1^2(\omega) + Q_2^2(\omega)} = \frac{c_n + c_{n-1}\omega^2 + c_{n-2}\omega^4 + \dots + c_0\omega^{2n}}{d_m + d_{m-1}\omega^2 + d_{m-2}\omega^4 + \dots + d_0\omega^{2m}}.$$

Из УФР операторных функций следует *УФР квадрата модуля передаточной функции*:

1) $|H(j\omega)|^2$ — четная, дробно-рациональная функция;

2) $n \leq m$;

3) полиномы числителя и знаменателя неотрицательны на вещественной полуоси.

Найдем аргумент комплексной передаточной функции. Из (16.1) следует, что

$$H(j\omega) = \frac{(P_1Q_1 + P_2Q_2) + j(P_2Q_1 - P_1Q_2)}{P_1^2 + Q_2^2},$$

тогда

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} D(\omega),$$

где $D(\omega) = \frac{P_2Q_1 - Q_2P_1}{P_1Q_1 + P_2Q_2}.$

Функция $D(\omega)$ называется функцией угла или тангенс-функцией. *УФР тангенс-функции* следует из УФР операторных функций. Тангенс-функция должна удовлетворять следующим условиям:

1) $D(\omega)$ — нечетная дробно-рациональная функция;

2) коэффициенты $D(\omega)$ должны быть вещественными.

Условия физической реализуемости временных функций цепи.

Как уже отмечалось, в зависимости от конкретно решаемой задачи, электрические цепи удобно описывать либо частотными характеристиками, либо временными. Так, при построении многоканальных систем передачи с частотным разделением каналов удобно пользоваться частотными характеристиками, а в цифровых системах связи, где применяется временное разделение каналов, удобно описывать электрические цепи временными характеристиками. К временным характеристикам относятся (см. § 8.1) переходная $g(t)$ и импульсная $h(t)$ характеристики. Напомним, что переходная характеристика численно равна отклику (реакции) цепи на единичное воздействие $1(t)$, в качестве которого может быть либо ток, либо напряжение. Отклик также может быть либо током, либо напряжением, поэтому, как и в случае передаточных функций существует четыре типа переходных характеристик (гл. 8) $g_u(t)$, $g_i(t)$, $g_V(t)$, $g_z(t)$. Первые две характеристики являются безразмерными, третья имеет размерность проводимости, а четвертая — сопротивления.

Импульсная характеристика численно равна отклику цепи на δ -функцию. Существует также четыре типа импульсных харак-

теристик (гл. 8): $h_u(t)$, $h_i(t)$, $h_Y(t)$, $h_z(t)$. Как показано в гл. 8. импульсная и переходная характеристики выражаются одна через другую, поэтому они не являются независимыми (см. § 8.1). Для описания цепи достаточно знать одну из них. Применение того или другого описания цепи зависит от конкретной задачи.

Условия физической реализуемости данных характеристик следует из свойств операторных передаточных функций. Действительно, так как изображение по Лапласу переходной и импульсной характеристик имеет соответственно вид

$$g(t) \doteq \frac{1}{p} H(p); \quad h(t) \doteq H(p),$$

то $g(t)$ и $h(t)$ легко найти с помощью теоремы разложения (§ 7.2). Из этой теоремы следует, что $g(t)$ состоит из слагаемых вида

$$\left. \begin{aligned} & Ae^{-\alpha t}; \\ & A_1 e^{-\alpha t} \cos \omega t + A_2 e^{-\alpha t} \sin \omega t; \\ & (B_1 + B_2 t + \dots + B_s t^{s-1}) e^{-\alpha t}; \\ & (C'_1 \cos \omega t + C''_1 \sin \omega t + \dots + C'_s t^{s-1} \cos \omega t + C''_s t^{s-1} \sin \omega t) e^{-\alpha t}. \end{aligned} \right\} \quad (16.7)$$

Функция $h(t)$, кроме перечисленных слагаемых, может содержать слагаемое $\delta(t)$ (см. (8.3)).

Слагаемое, приведенное в первой строке (16.7) соответствует простым вещественным, во второй строке — простым комплексно-сопряженным, в третьей кратным вещественным, а в четвертой — кратным комплексно-сопряженным полюсам передаточной функции $H(p)$.

На основании изложенного легко сформулировать УФР переходных и импульсных характеристик: *если $h(t)$ и $g(t)$ могут быть представлены в виде суммы перечисленных выше слагаемых и при этом все коэффициенты являются вещественными, а $\alpha > 0$, то $h(t)$ и $g(t)$ будут удовлетворять УФР.*

Условия физической реализуемости входных функций (входных сопротивлений $Z(p)$ и проводимостей $Y(p)$).

Возникает вопрос: всякому ли выражению $Z(p)$ можно сопоставить реальный, т. е. физически осуществимый двухполюсник. Очевидно, если синтезируется реактивный двухполюсник, то функция $Z(p)$ должна отвечать свойствам входного сопротивления реактивных двухполюсников: быть дробно-рациональной с вещественными коэффициентами и степенями числителя и знаменателя, отличающимися не более чем на единицу; нули и полюсы этой функции должны чередоваться на мнимой оси плоскости p (см. § 4.5).

При синтезе RLC -двухполюсников функция $Z(p)$ должна обладать свойствами входного сопротивления этих двухполюсников. Входные функции таких четырехполюсников относятся к классу так называемых *положительных вещественных функций* (ПВФ), которые удовлетворяют следующему дополнительному условию: $\operatorname{Re}[Z(p)] \geq 0$ или $\operatorname{Re}[Y(p)] \geq 0$ при $\alpha > 0$.

Можно показать, что положительные вещественные функции всегда представляют собой отношение двух полиномов Гурвица, степени которых отличаются не более, чем на единицу, т. е. нули и полюсы расположены в левой полуплоскости. Кроме того, если ПВФ имеет полюсы или нули на мнимой оси (включая $p = 0$ и $p = \infty$), то эти полюсы и нули являются вещественными и положительными.

Часто рассматриваются цепи, содержащие элементы только двух видов: LC -, RC - и RL -цепи. Ограничения на вид используемых элементов накладывают дополнительные ограничения на входные функции. Так, нули и полюсы входных функций LC -цепей находятся на мнимой оси и чередуются. Аналогичным свойством обладают входные функции RC - и RL -цепей с той лишь разницей, что их нули и полюсы находятся на отрицательной вещественной полуоси.

16.3. Нормирование элементов и частоты

В синтезе электрических цепей часто прибегают к нормированию элементов и частоты. Нормирование частоты уже встречалось ранее, когда рассматривались частотные характеристики колебательных контуров (гл. 4). Целесообразность применения нормирования ясна из следующего примера. Пусть необходимо рассчитать частотную характеристику сопротивления последовательного RLC -контра с параметрами элементов $L = 10^{-5}$ Гн, $C = 10^{-9}$ Ф, $R = 5$ Ом. Данный контур имеет добротность $Q = 20$, характеристическое сопротивление $\rho = 100$ Ом и резонансную частоту $\omega_r = 10^7$ с⁻¹. При расчете сопротивления данного контура приходится оперировать с величинами от 10^{-9} до 10^7 , что не всегда удобно. Выполним нормирование сопротивлений и частоты. Для этого запишем выражение сопротивления данного контура:

$$\underline{Z} = R + j(\omega L - 1/\omega C).$$

Разделим левую и правую часть равенства на некоторое нормирующее значение сопротивления R_H , а второе и третье слагаемое умножим и разделим на некоторое нормирующее значение частоты ω_H :

$$\frac{\underline{Z}}{R_H} = \frac{R}{R_H} + j \frac{\omega \omega_H L}{\omega_H R_H} - j \frac{\omega_H}{\omega \omega_H C R_H}.$$

Введем следующие названия и обозначения:

$\underline{Z}/R_H = \hat{Z}$ — нормированное комплексное сопротивление,
 $\omega/\omega_H = \hat{\Omega}$ — нормированная частота;

$$\omega_H L / R_H = \hat{L} \quad (16.8)$$

— нормированная индуктивность;

$$\omega_H C R_H = \hat{C} \quad (16.9)$$

— нормированная емкость;

$$R / R_H = \hat{R} \quad (16.10)$$

— нормированное резистивное сопротивление.

Величины ω_H и R_H , вообще говоря, можно выбирать произвольно. В данном случае удобно положить $\omega_H = \omega_p$ и $R_H = \rho$. Тогда параметры нормированных элементов принимают следующие значения:

$$\hat{R} = 1, \quad \Omega_p = 1, \quad \hat{L} = 1, \quad \hat{C} = 1.$$

Выполнение расчетов с такими числовыми значениями удобней, чем с ненормированными величинами.

Существует вторая, более важная причина, по которой применяют нормирование. Она проявляется в синтезе цепей. Допустим, что в результате сложных процедур получена некоторая цепь с нормированными значениями элементов. Истинные значения элементов определяются из формул (16.8)–(16.10) следующим образом:

$$L = \hat{L} R_H / \omega_H; \quad (16.11)$$

$$C = \hat{C} / \omega_H R_H; \quad (16.12)$$

$$R = \hat{R} R_H. \quad (16.13)$$

Изменяя ω_H и R_H можно без выполнения сложных процедур получить схемы устройств, работающих в различных диапазонах частот и при различных нагрузках. Введение нормирования позволило создать каталоги фильтров, что во многих случаях сводит сложную проблему синтеза фильтра к элементарным действиям.

16.4. Чувствительность характеристик электрических цепей

Предположим, что каким-то образом синтезирован четырехполюсник. Его характеристики (частотные, или временные) выражаются через его элементы. Например, на рис. 16.2 показана простейшая схема фильтра. Его операторная передаточная функция имеет вид

$$H(p) = 1 / (LCp^2 + RCp + 1). \quad (16.14)$$

Квадрат модуля передаточной функции

$$|H(j\omega)|^2 = 1 / ((1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2).$$

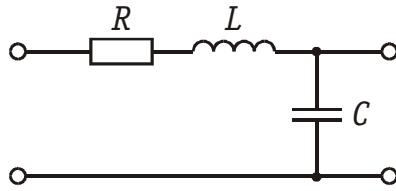


Рис. 16.2

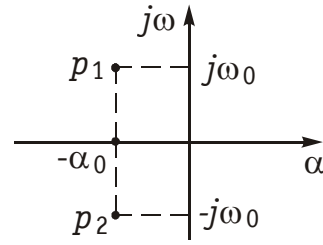


Рис. 16.3

Как видно, характеристики цепи зависят от параметров ее элементов. В процессе производства и эксплуатации радиоэлектронных устройств значения параметров элементов неизбежно отличаются от расчетных значений, что приводит к изменению их характеристик. Изменения характеристик должны быть такими, при которых работа устройства не нарушается. Поэтому, чем меньше изменения характеристик при одном и том же отклонении величин параметров элементов, тем лучше это устройство. Для оценки влияния изменений характеристик устройств к изменению параметров элементов вводится понятие чувствительности. Пусть x_i i -й элемент (параметр) цепи, а $F(x_i)$ — характеристика, зависящая от этого элемента. *Чувствительностью* некоторой характеристики $F(x_i)$ к изменению некоторого параметра x_i называется предел отношения относительного изменения функции к относительному изменению параметра:

$$S_{x_i}^{F(x_i)} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x_i)/F(x_i)}{\Delta x_i/x_i} = \frac{\partial F(x_i)}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{F(x_i)}.$$

Например, чувствительность АЧХ цепи $|H(j\omega)|$ к изменению какого-либо параметра цепи x_i имеет вид

$$S_{x_i} = \frac{\partial |H|/|H|}{\partial x_i/x_i} = \frac{\partial |H|}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{|H|}.$$

Кроме чувствительности временных и частотных характеристик в теории цепей рассматриваются также чувствительность полюса и добротности полюса к изменению (параметров) элементов. Для операторной передаточной функции (16.14) полюсы определяются выражением

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = -\alpha_0 \pm j\omega_0.$$

Здесь предполагается, что полюсы являются комплексно-сопряженными числами. На рис. 16.3 показано положение этих полюсов на комплексной плоскости.

Добротностью полюса называют отношение его модуля (расстояние от полюса до начала координат) к удвоенной вещественной части:

$$Q = \frac{\sqrt{\alpha_0^2 + \omega_0^2}}{2\alpha_0} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}.$$

Интересно, что добротность полюса совпадает с добротностью контура на резонансной частоте (см. (4.25)). В предельных случаях, когда полюс находится на мнимой оси, то $Q = \infty$, а когда на вещественной оси — $Q = 0,5$.

Чувствительность k -го полюса определяется как

$$S_{x_i}^{p_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i},$$

где p_k — полюс передаточной функции цепи. Эта чувствительность показывает приращение полюса при изменении параметров элементов цепи. В данном случае S — это не функция, а комплексное число.

Чувствительность добротности полюса вычисляется по формуле

$$S_{x_i}^Q = \frac{\partial Q/Q}{\partial x_i/x_i} = \frac{\partial Q}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{Q}.$$

Исследование чувствительности при синтезе цепей помогает создать цепь, характеристики которой наименее подвержены воздействию различных дестабилизирующих факторов (например, температуры, влажности, старения элементов и др.).

16.5. Задача аппроксимации в синтезе электрических цепей

Аппроксимация функций является одним из разделов математики и широко используется в различных областях знаний. В § 10.2 мы сталкивались с аппроксимацией ВАХ нелинейных элементов. И в данном случае подход к решению задачи остается прежним. Прежде всего это касается критериев близости функций. Напомним, что наиболее распространенными являются два критерия. Во-первых, это среднеквадратический критерий, когда минимизируется интеграл от квадрата модуля разности функций. Другим критерием является минимаксный критерий, когда минимизируется максимум модуля разности двух функций. Если достигается такой минимум, то говорят, что аппроксимация выполнена по Чебышеву или оптимально равномерно. Однако в решении задачи аппроксимации при синтезе цепей имеются и отличия. Во-первых, существуют ограничения на вид аппроксимирующих функций и, во-вторых, должны контролироваться УФР.

Действительно, если выполняется аппроксимация квадрата модуля передаточной функции, то в качестве аппроксимирующей необходимо выбрать дробно-рациональную функцию, которая представляет собой отношение двух четных полиномов с вещественными коэффициентами. При этом степень полинома числителя не должна превышать степени полинома знаменателя и свободный член полинома знаменателя не может равняться нулю. Таким выбором аппроксимирующей функции удовлетворяются первые два УФР квадрата модуля передаточной функции. Третье условие должно контролироваться в процессе решения аппроксимационной задачи.

Когда рассматриваются временные характеристики, то выбор аппроксимирующей функции осуществляется в соответствии с выражениями (16.7).

Методы аппроксимации. Обозначим заданную функцию $\xi(x)$. Как уже говорилось, это может быть: АЧХ $|H(j\omega)|$ или ее квадрат $|H(j\omega)|^2$; ФЧХ $\varphi(\omega)$ или ее тангенс $D = \operatorname{tg} \varphi(\omega)$; характеристика группового времени прохождения (ГВП) $t_{\text{гр}}(\omega) = d\varphi(\omega)/d\omega$; импульсная характеристика $h(t)$; переходная характеристика $g(t)$ и т. д.

В качестве аппроксимирующей функции выбирают соответствующую частотную или временную функцию цепи $F(x)$. Например, если задан квадрат АЧХ, т. е. $\xi(x) = |H(j\omega)|^2$, то функция цепи, аппроксимирующая заданную, ищется в общем случае в виде

$$F(\omega) = \frac{c_0\omega^{2n} + c_1\omega^{2n-2} + c_2\omega^{2n-4} + \dots + c_{n-1}\omega^2 + c_n}{d_0\omega^{2m} + d_1\omega^{2m-2} + d_2\omega^{2m-4} + \dots + d_{m-1}\omega^2 + d_m},$$

где подлежат определению значения коэффициентов $c_0, \dots, c_n, d_0, \dots, d_m$.

Для заданной переходной функции $\xi(x) = g(t)$ аппроксимирующая функция может описываться выражением $F(t) = \sum_{k=1}^m A_k e^{p_k t}$,

где в результате аппроксимации определяются значения коэффициентов A_k и корней характеристического уравнения $p_k = \alpha_k \pm j\omega_k$ и т. д.

Из рассмотренных примеров видно, что аппроксимирующая функция $F(x)$ зависит от некоторых параметров цепи (в первом случае от $c_0, \dots, c_n, d_0, \dots, d_m$, во втором — от A_k и p_k и др.). Обозначим параметры цепи в общем виде буквами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$, т. е. $F(x) = F(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$. Решением задачи аппроксимации считается нахождение *наилучших* значений коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$, при которых функция $F(x)$ будет наиболее «близка» к функции $\xi(x)$.

Различные аппроксимации (приближения одной функции к другой) отличаются, прежде всего, понятиями «близости» двух функций. Наиболее широкое распространение в радиотехнике и связи получили такие методы аппроксимации, как интерполяция, приближение по Тейлору, приближение по Чебышеву, среднеквадратическое приближение.

При приближении функции $F(x)$ и $\xi(x)$ методом *интерполяции* наилучшей «близостью» этих функций считается совпадение их значений в выбранных точках — узлах интерполяции — x_1, x_2, \dots, x_N , т. е.

$$F(x_i, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = \xi(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Решение этой системы уравнений позволяет найти искомые значения коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$.

Решение задачи аппроксимации данным методом (см. § 10.2) имеет следующие недостатки:

клонения равны между собой, а также равны величинам отклонений на границах интервала и достигаются не менее, чем в $N + 1$ точках, причем знаки отклонений чередуются.

Эта теорема отвечает на вопрос: данная аппроксимация выполнена оптимально или нет.

При *среднеквадратическом* приближении наилучшая «близость» двух функций достигается при выполнении условия

$$\Lambda = \sum_{i=1}^M |F(x_i) - \xi(x_i)|^2 \rightarrow \min_{\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}},$$

т.е. при таких значениях коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$, при которых сумма квадратов отклонений $F(x)$ от $\xi(x)$ в точках x_1, x_2, \dots, x_M ($M > N$) является минимально возможной.

Минимизация достигается путем составления и решения системы алгебраических уравнений:

$$\partial \Lambda / \partial \alpha_k = 0; \quad (k = 1, \dots, N).$$

Отметим, что заданная и аппроксимирующие функции могут быть не только вещественными, но и комплексными, что позволяет одновременно аппроксимировать как АЧХ, так и ФЧХ.

При решении задач среднеквадратических приближений разработано большое количество численных методов, предназначенных для использования их на ЭВМ.

Заметим, что не существует четких рекомендаций по применению того или иного метода аппроксимации. Зачастую выбор метода зависит от сложности решения задачи аппроксимации (аналитического или численного), от конкретного применения синтезированной цепи и т. п.

16.6. Задача реализации в синтезе электрических цепей.

Синтез реактивных двухполюсников

Идея любого метода синтеза двухполюсников заключается в том, что находится способ разложения заданной операторной функции на более простые функции, по которым уже легко восстановить схему. Например, пусть входное сопротивление выражается формулой

$$Z(p) = \frac{a_1 p + a_0}{b_1 p}.$$

Разделив почленно числитель на знаменатель, получим:

$$Z(p) = \frac{a_1}{b_1} + \frac{1}{p(b_1/a_0)}.$$

Из этой записи очевидно, что соответствующая схема состоит из последовательного соединения резистора a_1/b_1 в емкости b_1/a_0 .

Напомним общие свойства реактивных двухполюсников (см. § 4.5). Эти свойства вытекают из того факта, что LC -двухполюсники не могут рассеивать энергию, поэтому при $p = j\omega$ вещественная часть функции сопротивления и проводимости равна нулю

$$\operatorname{Re}[Z(j\omega)] = 0; \quad \operatorname{Re}[Y(j\omega)] = 0.$$

Таким образом, сопротивление (проводимость) двухполюсника является мнимой функцией частоты, а нули и полюсы соответствующей операторной функции лежат на мнимой оси, чередуются и являются простыми, а вычеты в полюсах — положительными. Так как коэффициенты операторной входной функции являются вещественными, то нули и полюсы составляют комплексно-сопряженные пары. Учитывая сказанное, операторное сопротивление реактивного двухполюсника можно записать в виде

$$Z(p) = \frac{H(p - j\omega_1)(p + j\omega_1)(p - j\omega_3)(p + j\omega_3) \dots (p - j\omega_{2n-1})(p + j\omega_{2n-1})}{p(p - j\omega_2)(p + j\omega_2)(p - j\omega_4)(p + j\omega_4) \dots (p - j\omega_{2n-2})(p + j\omega_{2n-2})}.$$

Объединяя попарно комплексно-сопряженные нули и полюсы получаем (см. табл. 4.1):

$$Z(p) = \frac{H(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_3^2) \dots (p^2 + \omega_{2n-1}^2)}{p(p^2 + \omega_2^2)(p^2 + \omega_4^2) \dots (p^2 + \omega_{2n-2}^2)}. \quad (16.15)$$

Напомним, что чередование нулей и полюсов отображается неравенством

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_{2n-2} < \omega_{2n-1}. \quad (16.16)$$

Если заданная функция $Z(p)$ обладает свойствами входного сопротивления реактивных двухполюсников, то говорят, что она удовлетворяет *условиям физической реализуемости*. Это означает, что существуют схемы двухполюсников с реальными значениями элементов, входное сопротивление которых описывается заданной функцией $Z(p)$.

В результате синтеза часто получают двухполюсники в виде канонических схем Фостера или Кауэра (подобные схемы существуют и для RLC -двухполюсников).

Для иллюстрации идеи синтеза ограничимся рассмотрением только реактивных двухполюсников.

Метод Фостера. Рассмотрим метод синтеза LC -двухполюсников, предложенный Фостером. Согласно этому методу функцию сопротивления либо функцию проводимости, как любую дробно-рациональную функцию, можно представить в виде суммы дробей (вспомним, например, теорему разложения).

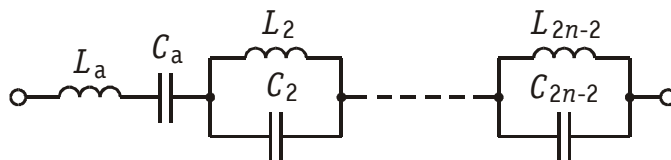


Рис. 16.4

Для двухполюсников, построенных по первой форме Фостера, наиболее общей является схема, изображенная на рис. 16.4. Остальные схемы могут быть получены из нее путем «удаления» соответствующих элементов L_a и C_a .

Можно составить выражение для входного сопротивления $Z(p)$, отражающее структуру рис. 16.4:

$$Z(p) = pL_a + \frac{1}{pC_a} + \frac{p}{(p^2 + \omega_2^2)C_2} + \frac{p}{(p^2 + \omega_4^2)C_4} + \dots + \frac{p}{(p^2 + \omega_{2k}^2)C_{2k}}. \quad (16.17)$$

Первые два слагаемые соответствуют последовательному соединению элементов L_a и C_a , остальные — последовательному соединению параллельных контуров с элементами L_2 и C_2 , L_4 и C_4 и т. п. Существуют формулы для расчета элементов этой схемы. Приведем их без доказательства:

$$L_a = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Z(p)}{p}; \quad \frac{1}{C_a} = \lim_{p \rightarrow 0} Z(p) \cdot p; \quad \frac{1}{C_{2k}} = \lim_{p^2 \rightarrow \omega_{2k}^2} \frac{(p^2 + \omega_{2k}^2)Z(p)}{p}. \quad (16.18)$$

Процедура синтеза двухполюсников по первой форме Фостера сводится, таким образом, к представлению заданной рациональной дроби $Z(p)$ в виде (16.17) и расчету элементов по формулам (16.18). Заметим, что первое слагаемое будет существовать в выражении (16.17) тогда, когда заданная дробь $Z(p)$ неправильная, т. е. степень числителя будет на единицу превышать степень знаменателя. Число элементов двухполюсника соответствует наивысшей из степеней числителя и знаменателя заданной дроби $Z(p)$. При четных степенях знаменателя из (16.17) исчезает второе слагаемое $1/(pC_a)$.

Пример. Дано выражение

$$Z(p) = \frac{10^6 \cdot p^3 + 1,5 \cdot 10^{14} p}{p^4 + 2 \cdot 10^8 p^2 + 0,51 \cdot 10^{16}}.$$

Осуществим синтез двухполюсника по первой форме Фостера. Можно показать, что заданная функция $Z(p)$ является физически реализуемой. Представим $Z(p)$ в виде (16.17):

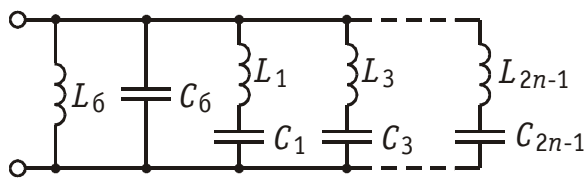


Рис. 16.5

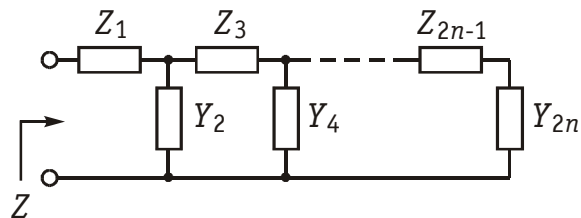


Рис. 16.6

$$Z(p) = \frac{p}{(p^2 + \omega_1^2)C_1} + \frac{p}{(p^2 + \omega_3^2)C_3}. \quad (16.17 \text{ а})$$

Расчет элементов произведем по формулам (16.18): $C_1 = 1,165$ мкФ; $C_3 = 7,0$ мкФ; $L_1 = 1/(\omega_2^2 C_1) = 28,6$ мГн; $L_3 = 1/(\omega_4^2 C_3) = 0,84$ мГн.

Схема двухполюсника состоит из четырех элементов (наивысшая степень дроби — 4): последовательно соединенных двух параллельных колебательных контуров с элементами L_1, C_1 и L_3, C_3 . Отсутствие в схеме катушки индуктивности L_a обусловлено тем фактом, что дробь $Z(p)$ правильная. Вследствие четности степени знаменателя в схеме отсутствует конденсатор C_a .

Аналогичным образом осуществляется синтез двухполюсников по второй форме Фостера. В этом случае наиболее общей является схема на рис. 16.5. Входная проводимость $Y(p)$ такого двухполюсника представляется суммой слагаемых, описывающих проводимости последовательных контуров и элементов L_6 и C_6 . При синтезе двухполюсников заданная проводимость $Y(p)$ раскладывается на сумму указанных слагаемых.

Метод Кауэра. В теории электрических фильтров (см. гл. 17) находит применение синтез реактивных двухполюсников по схемам Кауэра. Наиболее общими являются схемы на рис. 16.6. Из них получаются остальные разновидности двухполюсников. Выражения входных сопротивлений для этих схем можно записать в виде так называемых лестничных дробей. Так, в первой схеме Кауэра (левая схема на рис. 16.7, а) катушка индуктивности L_1 соединена последовательно с остальной частью схемы, поэтому $Z(p) = pL_1 + Z_2(p)$. Оставшаяся справа от катушки часть схемы представляет собой параллельное соединение конденсатора и части схемы правее точек а—б. Поэтому $Y_2(p) = 1/Z_2(p) = pC_2 + Y_3(p)$. Рассуждая подобным образом, можно прийти в итоге к следующей записи:

$$Z(p) = pL_1 + \frac{1}{pC_2 + \frac{1}{pL_3 + \frac{1}{pC_4 + 1/\dots}}}. \quad (16.18)$$

Дробь вида (8.19) называется лестничной. Синтез двухполюсников по первой схеме Кауэра состоит в разложении заданной функции $Z(p)$ в лестничную дробь (16.18). Коэффициенты при p являются значениями элементов схемы.

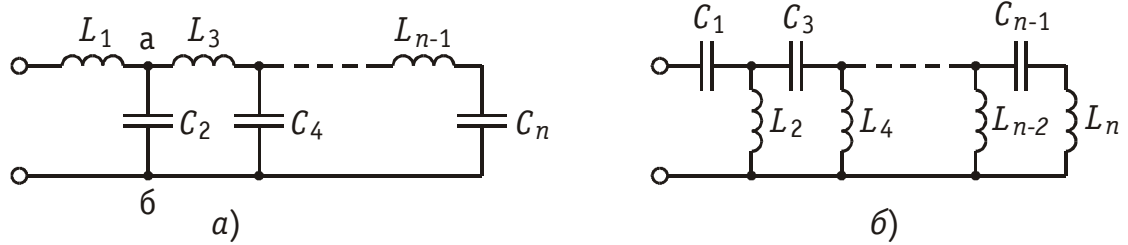


Рис. 16.7

В виде лестничной дроби можно представить и входное сопротивление второй схемы Кауэра (правая схема на рис. 16.7, б). В этой дроби первый и остальные элементы будут следующего вида: $1/(pC_1)$, $1/(pL_2)$, $1/(pC_3)$ и т. д.

Пример. Осуществим синтез двухполюсника по выражению $Z(p)$ из предыдущего примера в виде первой схемы Кауэра. Заданная дробь имеет четвертый порядок (наивысшая из степеней числителя и знаменателя равна 4). Разложение ее в цепную дробь осуществляется последовательным делением полинома знаменателя на полином числителя*, последнего — на остаток от первого деления, остатка от первого деления — на остаток от второго деления и т.д.:

$$\begin{array}{l}
 1) \quad \begin{array}{l} p^4 + 2 \cdot 10^8 p^2 + 0,51 \cdot 10^{16} \\ - \quad p^4 + 1,5 \cdot 10^8 p^2 \\ \hline 0,5 \cdot 10^8 p^2 + 0,51 \cdot 10^{16} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 10^6 p^3 + 1,5 \cdot 10^{14} p \\ \hline 10^{-6} p \end{array} \right. \\
 2) \quad \begin{array}{l} 10^6 p^3 + 1,5 \cdot 10^{14} p \\ - \quad 10^6 p^3 + 1,02 \cdot 10^{14} p \\ \hline 0,48 \cdot 10^{14} p \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 0,5 \cdot 10^8 p^2 + 0,51 \cdot 10^{18} \\ \hline 2 \cdot 10^{-2} p \end{array} \right. \\
 3) \quad \begin{array}{l} 0,5 \cdot 10^8 p^2 + 0,51 \cdot 10^{16} \\ - \quad 0,5 \cdot 10^8 p^2 \\ \hline 0,51 \cdot 10^{16} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 0,48 \cdot 10^{14} p \\ \hline 1,04 \cdot 10^{-6} p \end{array} \right. \\
 4) \quad \begin{array}{l} 0,48 \cdot 10^{14} p \\ - \quad 0,48 \cdot 10^{14} p \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 0,51 \cdot 10^{16} \\ \hline 0,94 \cdot 10^{-2} p \end{array} \right.
 \end{array}$$

В результате находится цепная дробь:

$$Z(p) = \frac{1}{10^{-6} p + \frac{1}{2 \cdot 10^{-2} p + \frac{1}{1,04 \cdot 10^{-6} p + 1/0,94 \cdot 10^{-2} p}}}$$

* В случае неправильной дроби начинают с деления полинома числителя на полином знаменателя, в результате чего выделяется первый член разложения pL_1 .

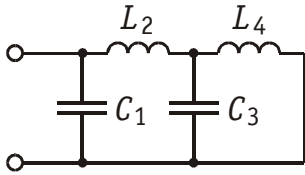


Рис.16.8

Этой дроби соответствует реактивный двухполюсник, схема которого приведена на рис. 16.8; она содержит четыре элемента $C_1 = 1,0$ мкФ; $L_2 = 20$ мГн; $C_3 = 1,04$ мкФ; $L_4 = 9,4$ мГн.

Пример. Найти лестничную схему, рассчитать значения параметров элементов, если ее нормированное сопротивление равно

$$Z(p) = \frac{4p^5 + 9p^3 + 4p}{4p^4 + 5p^2 + 1}.$$

Так как степень полинома числителя больше степени знаменателя, то можно выполнить деление данных полиномов:

$$- \frac{4p^5 + 9p^3 + 4p}{4p^5 + 5p^3 + p} \left| \frac{4p^4 + 5p^2 + 1}{p} \right.$$

В результате такого деления получаем формулу

$$Z(p) = p + \frac{4p^3 + 3p}{4p^4 + 5p^2 + 1}.$$

Дальнейшее деление невозможно, так как степень полинома остатка меньше степени полинома знаменателя. Для продолжения деления преобразуем последнее выражение:

$$Z(p) = p + \frac{1}{\frac{4p^4 + 5p^2 + 1}{4p^3 + 3p}}. \quad (16.19)$$

Числитель полученной в остатке дроби имеет степень числителя больше степени знаменателя и деление возможно:

$$- \frac{4p^4 + 5p^2 + 1}{4p^4 + 3p^2} \left| \frac{4p^3 + 3p}{p} \right.$$

С учетом данного шага формула (16.19) принимает вид

$$Z(p) = p + \frac{1}{p + \frac{2p^2 + 1}{4p^3 + 3p}}.$$

Преобразуем полученное выражение так, чтобы имелась возможность дальнейшего деления:

$$Z(p) = p + \frac{1}{p + \frac{1}{\frac{4p^3 + 3p}{2p^2 + 1}}}.$$

Продолжая данную процедуру, в конечном итоге получаем следующее выражение:

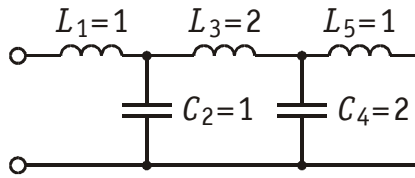


Рис. 16.9

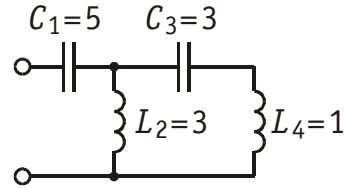


Рис. 16.10

$$Z(p) = p + \frac{1}{p + \frac{1}{2p + \frac{1}{p + \frac{1}{p}}}}$$

Первое слагаемое представляет собой сопротивление индуктивности с $L_1 = 1$, второе — проводимость емкости с $C_2 = 1$, третье — сопротивление индуктивности с $L_3 = 2$, четвертое — сопротивление емкости с $C_4 = 2$ и пятое — сопротивление индуктивности с $L_5 = 1$. Подстановка данных элементов в схему рис. 16.6 дает окончательный результат синтеза двухполюсника (рис. 16.9).

Пример. По функции нормированного сопротивления

$$Z(p) = \frac{45p^4 + 27p^2 + 1}{60p^3 + 5p}$$

синтезировать схему двухполюсника в виде лестничной структуры. Будем осуществлять деление относительно p^{-1} , т. е. на каждом шаге исключать слагаемое минимальной степени. Процесс деления покажем в компактном виде:

$$\begin{array}{r} \frac{45p^4 + 27p^2 + 1}{60p^3 + 5p} \left| \frac{60p^3 + 5p}{12p^2 + 1} \right| \frac{1}{5p} = Z_1 \\ \frac{60p^3 + 5p}{15p^3 + 5p} \left| \frac{45p^4 + 15p^2}{45p} \right| \frac{1}{3p} = Y_2 \\ \frac{45p^4 + 15p^2}{15p^2} \left| \frac{45p^3}{45p^4} \right| \frac{1}{3p} = Z_3 \\ \frac{45p^3}{45p^3} \left| \frac{1}{p} \right| \frac{1}{p} = Y_1 \end{array}$$

Соответствующая данному разложению схема показана на рис. 16.10.

Таким образом, согласно методу Кауэра можно синтезировать два вида лестничных схем:

- 1) с индуктивностями в продольных и с емкостями в поперечных ветвях (первая схема Кауэра);
- 2) с емкостями в продольных и с индуктивностями в поперечных ветвях (вторая схема Кауэра).

Представляют определенный интерес двухполюсники, состоящие из элементов R и C , а также из элементов R и L . Подход к синтезу таких двухполюсников остается такой же, как и в случае

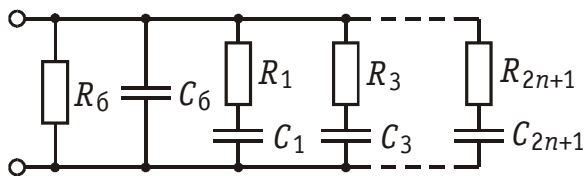


Рис. 16.11

реактивных двухполюсников. Конечно, имеются свои особенности, но вид канонических схем остается прежним. Так RL -двухполюсники получаются из реактивных канонических схем путем замены емкостей на резисторы, а RC -двухполюсники — путем замены индуктивностей на резисторы. Одна из возможных канонических схем RC -двухполюсников показана на рис. 16.11.

16.7. Задача реализации в синтезе электрических цепей. Синтез четырехполюсников

Полученная в результате аппроксимации функция цепи $F(x)$ подлежит в дальнейшем реализации в виде конкретной схемы. Существует большое число методов реализации цепи по функции квадрата АЧХ $|H(j\omega)|^2$, ФЧХ $\varphi(\omega)$ или характеристике ГВП $t_{\text{гр}}(\omega)$, по переходной $g(t)$ и импульсной $h(t)$ характеристикам. Даже краткое упоминание обо всех методах привело бы к чрезмерному увеличению объема книги. В § 17.4 приведены примеры реализации электрических фильтров по функции квадрата АЧХ в виде пассивных лестничных LC -схем и активных RC -схем.

Существуют общие методы синтеза операторных передаточных функций. Остановимся лишь на методах, имеющих в настоящее время практическое значение:

- 1) синтез скрещенных (мостовых) схем с постоянным входным сопротивлением;
- 2) синтез симметричных Т-перекрытых схем с постоянным характеристическим сопротивлением;
- 3) синтез реактивных лестничных четырехполюсников, нагруженных резистивным сопротивлением;
- 4) синтез ARC -цепей.

Нахождение операторной передаточной функции по квадрату модуля комплексной передаточной функции. Предположим, что в результате решения задачи аппроксимации найден квадрат модуля комплексной передаточной функции (квадрат АЧХ). Далее необходимо знать операторную передаточную функцию. Определение квадрата модуля комплексной передаточной функции по соответствующей операторной функции осуществляется при помощи замены переменной p на $j\omega$, и решается однозначно, т. е. операторной передаточной функции соответствует только один квадрат модуля комплексной передаточной функции.

Обратная задача решается несколько сложнее и неоднозначно. Вначале сформулируем теорему о квадрате модуля передаточной функции.

Теорема. Квадрат модуля комплексной передаточной функции не изменится, если изменить знак у всех или у некоторой части нулей и полюсов соответствующей операторной передаточной функции, а также если у комплексных нулей и полюсов знак изменяется одновременно у каждой комплексно сопряженной пары.

Докажем утверждение, что если в формуле для квадрата модуля выполнить обратную подстановку $\omega = -jp$, то полученная функция обладает следующими свойствами:

1) функция $|H(p)|^2$ содержит в 2 раза больше нулей и полюсов, чем функция $H(p)$;

2) если функция $H(p)$ имеет нуль, равный p_{0i} , то $|H(p)|^2$, кроме p_{0i} , имеет нуль $-p_{0i}$. Это означает, что при наличии нуля $H(p)$ в левой полуплоскости, в $|H(p)|^2$ появляется дополнительный нуль в правой полуплоскости и наоборот. Сказанное полностью относится к полюсам. Действительно, квадрат модуля передаточной функции представим в виде

$$|H(j\omega)|^2 = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} |H(j\omega)| e^{-j\varphi(\omega)} = H(j\omega) H(-j\omega). \quad (16.20)$$

Выполним замену $j\omega = p$ или $\omega = -jp$. Из формулы (16.7) видно, что

$$|H(p)|^2 = H(p) H(-p).$$

Пусть функция $H(p)$ имеет n нулей и m полюсов, тогда ее можно представить в виде (7.42):

$$H(p) = H \frac{(p - p_{01})(p - p_{02}) \dots (p - p_{0n})}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_m)}.$$

т. е. $H(-p)$ содержит все нули и полюсы, что и $H(p)$, но с противоположными знаками. Это и требовалось доказать.

Проведенный анализ позволяет сформулировать порядок определения операторной передаточной функции по квадрату ее модуля:

1. В выражении для $|H(j\omega)|^2$ выполняем замену $\omega = -jp$.

2. Находим все нули и полюсы функции $|H(p)|^2$, половина из которых принадлежит функции $H(p)$. Полюсы, лежащие в левой полуплоскости относим к $H(p)$. Они составляют как раз половину всех полюсов. Остальные полюсы относятся к $H(-p)$. Такое распределение полюсов вызвано необходимостью получения устойчивых цепей (см. гл. 14). Таким образом, выбор полюсов передаточной функции осуществляется однозначно.

3. Распределение нулей функции $|H(p)|^2$ между $H(p)$ и $H(-p)$ не может быть выполнено однозначно. Согласно теореме о квадрате модуля передаточной функции здесь имеется определенная свобода в выборе числителя передаточной функции. Если на ФЧХ

никаких ограничений не накладывается, то обычно и нули выбирают в левой полуплоскости.

4. Постоянный множитель функции $H(p)$ равен квадратному корню из постоянного множителя функции $|H(p)|^2$.

Пример. Определить операторную передаточную функцию, если квадрат ее модуля имеет вид

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{25}{4} \cdot \frac{\omega^4 + 25\omega^2 + 144}{\omega^4 + 61\omega^2 + 900}.$$

1. Записываем $|H(p)|^2$ путем замены $\omega = -jp$ в выражении для $|H(j\omega)|^2$

$$|H(p)|^2 = \frac{25}{4} \cdot \frac{p^4 - 25p^2 + 144}{p^4 - 61p^2 + 900}.$$

2. Находим нули и полюсы $|H(p)|^2$:

$$\begin{aligned} p_{01} = 3, \quad p_{02} = -3, \quad p_{03} = 4, \quad p_{04} = -4 & \text{ — нули,} \\ p_5 = 5, \quad p_6 = -5, \quad p_7 = 6, \quad p_8 = -6 & \text{ — полюсы.} \end{aligned}$$

Функция $H(p)$: будет иметь полюсы p_6 и p_8 , так как они находятся в левой полуплоскости.

3. Что касается нулей, то возможны следующие сочетания:

$$p_{01} \text{ и } p_{03}, \quad p_{01} \text{ и } p_{04}, \quad p_{02} \text{ и } p_{03}, \quad p_{02} \text{ и } p_{04}.$$

4. Постоянный множитель $H = 5/2$.

Запишем передаточную функцию для второго возможного сочетания нулей

$$H(p) = \frac{5}{2} \cdot \frac{(p - p_{01})(p - p_{04})}{(p - p_6)(p - p_8)} = \frac{5}{2} \cdot \frac{(p - 3)(p + 4)}{(p + 5)(p + 6)}.$$

Рассмотрим перечисленные выше методы синтеза передаточных функций.

Синтез скрещенных (мостовых) схем с постоянным входным сопротивлением. Этот метод является общим, т. е. любую операторную функцию, удовлетворяющую УФР, можно с точностью до постоянного множителя реализовать мостовой схемой с постоянным входным сопротивлением. Метод имеет важное теоретическое значение, так как доказывает достаточность УФР. В практическом плане этот метод применяется при синтезе фазовых корректоров и линий задержки. Мостовая схема четырехполюсника, нагруженная с обеих сторон на сопротивление R_0 показана на рис. 16.12. Если двухполюсники Z_a и Z_b являются обратными, т. е. $Z_a Z_b = R_0^2$, то передаточная функция имеет вид

$$H(p) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{R_0 - Z_a(p)}{R_0 + Z_a(p)}. \quad (16.21 \text{ а})$$

Пусть задана передаточная функция $H(p)$, удовлетворяющая УФР. Тогда для ее реализации мостовой схемой необходимо синтезировать двухполюсники с входными функциями:

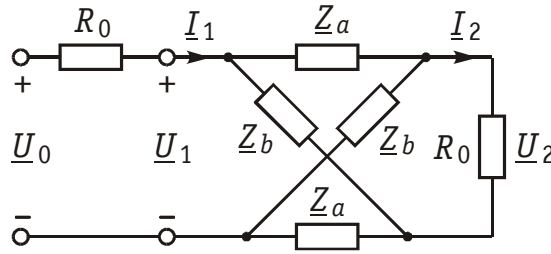


Рис. 16.12

$$Z_a(p) = R_0 \frac{1 - H(p)}{1 + H(p)} \quad \text{и} \quad Z_b(p) = R_0 \frac{1 + H(p)}{1 - H(p)}. \quad (16.21 \text{ б, в})$$

Синтез таких двухполюсников возможен, если доказать, что функции (16.21 б, в) являются ПВФ (на самом деле достаточно доказать, что ПВФ является Z_a , тогда функция сопротивления обратного двухполюсника также является ПВФ). Чтобы это доказать, вспомним, что ПВФ — это дробно-рациональная функция, вещественная часть которой неотрицательная в правой полуплоскости. То что Z_a является дробно-рациональной, вытекает из того, что $H(p)$ — дробно-рациональная функция. Для определения условий, при которых $\operatorname{Re}[Z_a(p)] \geq 0$, представим операторную передаточную функцию в виде суммы вещественной и мнимой частей:

$$H(\alpha + j\omega) = x(\alpha, \omega) + jy(\alpha, \omega).$$

Тогда

$$Z_a(\alpha + j\omega) = R_0 \frac{1 - x - jy}{1 + x + jy} = \frac{1 + x^2 - y^2 - j2y}{(1 + x)^2 + y^2}.$$

Вещественная часть Z_a будет неотрицательной, если $x^2 + y^2 = |H(p)|^2 \leq 1$. Данное неравенство и является условием того, что $Z_a(p)$ — ПВФ, а значит и условием физической реализуемости операторных передаточных функций в виде мостовой схемы с постоянным входным сопротивлением. Так как $H(p)$ удовлетворяет УФР, то она аналитическая (отсутствуют полюсы) в правой полуплоскости комплексной переменной p , а значит и ограничена по модулю $|H(p)| \leq M$. Выбрав постоянный множитель $H = 1/M$, получим функцию, реализуемую с точностью до постоянного множителя в виде мостовой схемы. Таким образом, реализация передаточной функции сводится к синтезу двухполюсников Z_a и Z_b . Отметим, что на практике заданную передаточную функцию реализуют не в виде одной сложной мостовой схемы, а в виде каскадного соединения более простых мостовых схем. Для этого заданную функцию представляют в виде произведения более простых функций:

$$H(p) = H_1(p)H_2(p)\dots H_n(p).$$

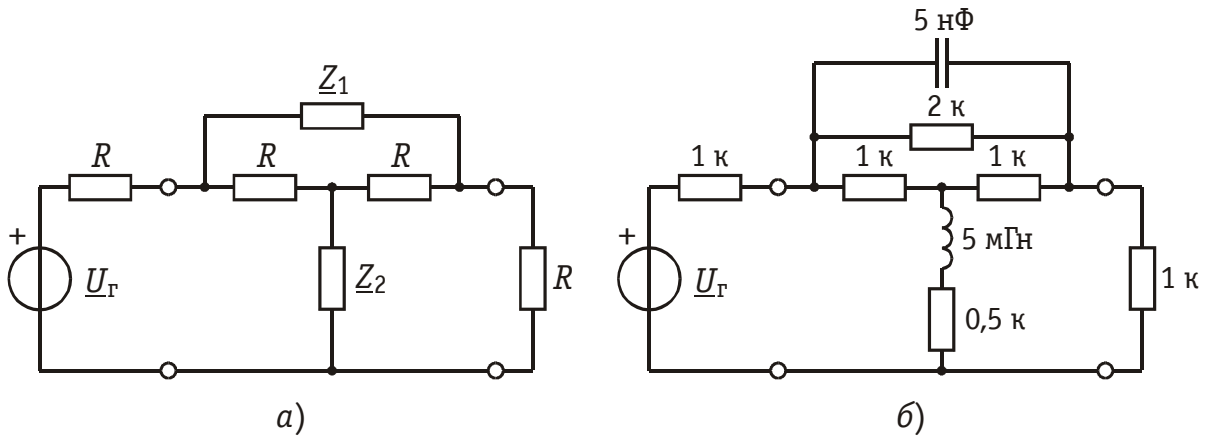


Рис. 16.13

Каждая функция реализуется в виде мостовой схемы. Если сопротивление выбрано для всех схем одинаковым, то получается каскадное соединение согласованных четырехполюсников, и переданная функция каскадного соединения как раз и является произведением передаточных функций четырехполюсников, составляющих это каскадное соединение.

Синтез симметричных Т-перекрытых схем с постоянным характеристическим сопротивлением. Для симметричного Т-перекрытого четырехполюсника, показанного на рис. 16.13, а, характеристические сопротивления

$$\underline{Z}_{c1} = \underline{Z}_{c2} = \sqrt{\underline{A}_{12}/\underline{A}_{21}} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}$$

при взаимно-обратных двухполюсниках $\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = R^2$ равны R , т. е. четырехполюсник включен согласованно. Следовательно, его собственная постоянная передачи непосредственно связана с рабочей передаточной функцией $e^{-\underline{\Gamma}_c} = H_p$ или

$$\underline{\Gamma}_c = \ln \left(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} \right) = \ln \left(1 + \underline{Z}_1/R \right) = \ln \frac{1}{H_p(j\omega)}.$$

Отсюда

$$H_p(j\omega) = 1/(1 + \underline{Z}_1/R) \text{ или } H_p(p) = 1/(1 + \underline{Z}_1(p)/R).$$

Из последнего равенства и условия $\underline{Z}_1(p)\underline{Z}_2(p) = R^2$ находим

$$\underline{Z}_1(p) = R \frac{1 - H_p(p)}{H_p(p)}; \quad \underline{Z}_2(p) = R \frac{H_p(p)}{1 - H_p(p)}.$$

Двухполюсники $\underline{Z}_1(p)$ и $\underline{Z}_2(p)$ в плечах схемы рис. 16.13, а могут быть реализованы известными способами.

Пример. В результате аппроксимации получена функция $|H_p(j\omega)|^2 = (\omega^2 + 10^{10})/(\omega^2 + 9 \cdot 10^{10})$. Осуществим ее реализацию в виде симметричного Т-перекрытого четырехполюсника (см. рис. 16.13, а) при нагрузке на сопротивление $R = 1$ кОм.

Заменим оператор $j\omega$ на p :

$$|H_p(p)|^2 = \frac{10^{10} - p^2}{9 \cdot 10^{10} - p^2} = \frac{(10^5 - p)(10^5 + p)}{(3 \cdot 10^5 - p)(3 \cdot 10^5 + p)}.$$

Очевидно, что $H_p(p) = (p + 10^5)/(p + 3 \cdot 10^5)$. Сопротивление $Z_1(p)$ в схеме на рис. 16.13, а определяется по формуле:

$$Z_1(p) = R \frac{1 - H_p(p)}{H_p(p)} = \frac{2 \cdot 10^8}{p + 10^5}.$$

Разложение $Z_1(p)$ в цепную дробь:

$$Z_1(p) = \frac{1}{pC + 1/R_1} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-9}p + 1/2 \cdot 10^3}$$

приводит к схеме параллельного RC -контура с элементами $C = 5$ нФ и $R_1 = 2$ кОм.

Двухполюсник $Z_2(p)$ является обратным, т. е. последовательным RL -контуром с элементами $L = 5$ мГн и $R_2 = 0,5$ кОм.

Схема реализованного четырехполюсника приведена на рис. 16.13, б.

Синтез реактивных лестничных четырехполюсников, нагруженных резистивными сопротивлениями (рис. 16.14) основан на том очевидном факте, что активная мощность, отдаваемая генератором $I_1^2 \operatorname{Re}[\underline{Z}_{\text{вх}}(j\omega)]$, равна мощности, потребляемой нагрузкой U_2^2/R_2 , т. е.

$$I_1^2 \operatorname{Re}[\underline{Z}_{\text{вх}}(j\omega)] = U_2^2/R_2.$$

Ток I_1 выразим через задающее напряжение генератора U_0

$$I_1 = U_0 / |\underline{Z}_{\text{вх}} + R_1|$$

и подставим в предыдущее равенство. После алгебраических преобразований, получим:

$$\frac{4U_2^2 R_1}{U_0^2 R_2} = \frac{4R_1 \operatorname{Re}[\underline{Z}_{\text{вх}}(j\omega)]}{|\underline{R}_1 + \underline{Z}_{\text{вх}}(j\omega)|^2}. \quad (16.22)$$

Левая часть данного уравнения представляет собой квадрат модуля рабочей передаточной функции (12.44), а числитель правой части можно представить следующим образом:

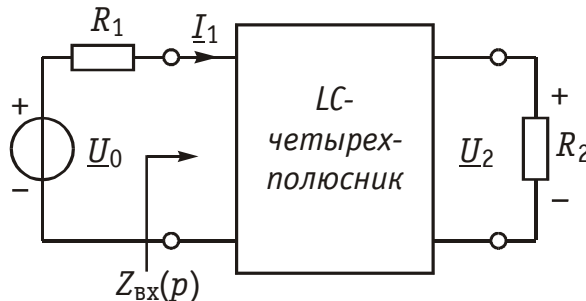


Рис. 16.14

$$4R_1 \operatorname{Re}[\underline{Z}_{\text{BX}}] = |R_1 + \underline{Z}_{\text{BX}}|^2 - |R_1 - \underline{Z}_{\text{BX}}|^2. \quad (16.23)$$

Убедиться в справедливости уравнения (16.23) можно путем элементарных преобразований его правой части. С учетом сказанного уравнения (16,23) преобразуется к виду:

$$\left| \frac{R_1 - \underline{Z}_{\text{BX}}}{R_1 + \underline{Z}_{\text{BX}}} \right|^2 = 1 - |H(j\omega)|^2. \quad (16.24)$$

Из последней формулы можно найти операторное входное сопротивление $Z_{\text{BX}}(p)$. Реализуя $Z_{\text{BX}}(p)$ в виде лестничной структуры, получаем цепь с заданной передаточной функцией $H(p)$. При этом, конечно, нужно следить, чтобы реализовывались нули передаточной функции.

Обозначая

$$\sigma(j\omega) = \frac{R_1 - \underline{Z}_{\text{BX}}(j\omega)}{R_1 + \underline{Z}_{\text{BX}}(j\omega)}, \quad (16.25)$$

где σ — коэффициент отражения мощности на входе четырехполюсника, получим из (16.24) связь между квадратом частотной характеристики коэффициента отражения и квадратом АЧХ четырехполюсника:

$$|\sigma(j\omega)|^2 = 1 - |H(j\omega)|^2. \quad (16.26)$$

Практические аспекты применения данного метода будут рассмотрены при синтезе фильтров.

Синтез ARC-цепей. Активные RC-цепи возникли как альтернатива RLC-цепям. Дело в том, что катушки индуктивности, а значит и в целом RLC-цепи плохо поддаются микроминиатюризации и обладают значительной массой и габаритами. Активные RC-цепи в принципе допускают микроминиатюризацию, что является их явным достоинством. Существенным же недостатком ARC-цепей является их относительно низкая стабильность, относительно высокий уровень собственных шумов и нелинейных искажений. Поэтому ARC-цепи применяются в основном в области низких частот приблизительно до 100 кГц. На более высоких частотах применяются ARC-цепи невысоких порядков. Ниже кратко описаны методы синтеза ARC-цепей, которые нашли применение на практике.

Имитация в RLC-цепях индуктивностей их электронными эквивалентами. Существуют активные многополюсники, называемые обобщенными преобразователями сопротивлений, которые, будучи нагруженными на емкости или резисторы, реализуют на своих входных зажимах некоторую цепь, состоящую из индуктивностей. В простейшем случае индуктивность можно реализовать нагруженным на емкость *гиратором* (см. § 3.11). Данный метод син-

теза ARC -цепи сводится к синтезу пассивной RLC -цепи с последующей заменой всех индуктивностей их электронными эквивалентами.

Синтез ARC -цепей по моделям. Этот метод заключается в том, что рассматривается ARC -схема, состоящая из одного или нескольких активных элементов и некоторого RC -многополюсника. Методами анализа электрических цепей находится операторная передаточная функция, выраженная через параметры RC -многополюсника и активного элемента. Сравнивая заданную передаточную функцию с полученной, определяют параметры синтезируемой схемы (*метод выравнивания коэффициентов*). Чаще всего в качестве активного элемента выбирают ОУ с бесконечным коэффициентом усиления и задаются структурой многополюсника.

Анализ цепей с ОУ рассмотрен ранее (п. 14.1) и основывается на замене ОУ зависимым источником. Согласно этому методу сформулируем алгоритм нахождения операторных передаточных функций цепей с ОУ. Он состоит из следующих шагов:

1. Ко входу цепи подключить какой-либо источник.
2. Заменить все ОУ их схемами замещения (зависимыми источниками) с конечным коэффициентом усиления H_y .
3. Любым методом анализа цепей определить изображение по Лапласу входных ($U_1(p)$ или $I_1(p)$) и выходных ($U_2(p)$ или $I_2(p)$) напряжений и токов.
4. Взять отношение найденных изображений и в этом отношении сделать предельный переход при $H_y \rightarrow \infty$.

Пример. Зададимся моделью, показанной на рис. 16.15. При коэффициенте усиления ОУ, стремящемся к бесконечности, операторная передаточная функция примет вид (см. § 3.11 и гл. 14):

$$H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{-Y_1 Y_2}{Y_3(Y_1 + Y_5 + Y_2 + Y_4) + Y_2 Y_4}.$$

Пусть $Y_1 = G_1$, $Y_2 = G_2$, $Y_4 = G_4$, $Y_5 = pC_5$, $Y_3 = pC_3$, тогда

$$H(p) = \frac{-G_2 G_1}{p^2 C_3 C_5 + p C_3 (G_2 + G_4 + G_1) + G_2 G_4}. \quad (16.27)$$

Таким образом, данной схемой можно реализовать передаточную функцию вида

$$H(p) = H / (p^2 + \alpha p + \beta). \quad (16.28)$$

Из сравнения выражений (16.27) и (16.28) следует, что

$$H = G_2 G_1 / C_3 C_5, \quad \alpha = (G_2 + G_4 + G_1) / C_5, \quad \beta = G_2 G_4 / C_4 C_5.$$

Полученная система из трех уравнений содержит шесть неизвестных. Она имеет множество решений. Наложим дополнительные ограничения на неизвестные. Пусть $G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = G$, тогда система уравнений преобразуется к виду

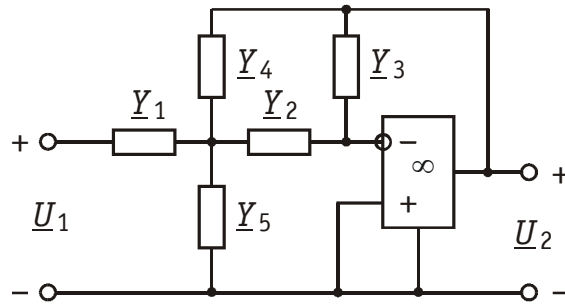


Рис. 16.15

$$H = G^2/C_3C_5, \quad \alpha = 3G/C_5, \quad \beta = G/C_4C_5.$$

Отсюда следует, что $C_5 = 3G/\alpha$, $C_3 = \alpha/3\beta$, $H = \beta$. Задавшись конкретным значением G , найдем C_3 и C_5 .

Если проводимостям исходной схемы приписать другие значения, то можно реализовать множество различных функций.

Каскадная реализация заключается в представлении заданной передаточной функции в виде произведения множителей обычно второго, а иногда первого порядков. Такие функции в силу их простоты несложно реализовать в виде активной схемы, которую называют звеном. Затем полученные четырехполюсники включают каскадно, причем так, чтобы взаимное влияние звеньев было пренебрежимо мало. Это достигается двумя способами: либо включением между звеньями специальных буферных (развязывающих) активных четырехполюсников (например, повторителей напряжений), или таким выбором звеньев, при котором отношение выходного и входного сопротивлений звеньев в месте соединения стремилось либо к нулю, либо к бесконечности. Другими словами, данные сопротивления должны резко отличаться друг от друга. Например, если выходное сопротивление предыдущего звена стремится к нулю, то входное сопротивление последующего звена должно стремиться к бесконечности и наоборот.

Вопросы и задания для самопроверки

1. Из каких этапов состоит синтез электрических цепей?
2. Сформулируйте условия физической реализуемости передаточных функций, АЧХ и ФЧХ, временных функций и входных функций электрических цепей.
3. В чем состоит отличие методов аппроксимации по различным критериям близости: интерполяции, по Тейлору, по Чебышеву и среднеквадратической аппроксимации?
4. Аппроксимировать методом интерполяции зависимость $\xi(x) = e^{-0,5x}$ на интервале $0,5 \leq x \leq 2$ полиномом второй степени

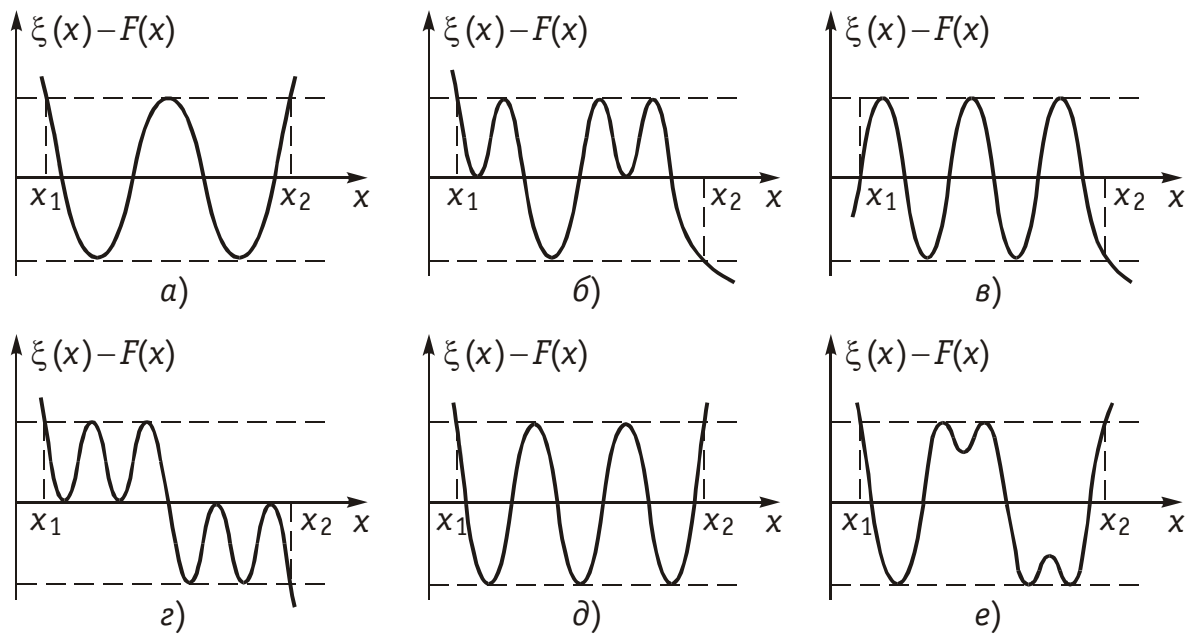


Рис. 16.16

$F(x) = x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2$. Оценить точность аппроксимации для различных узлов интерполяции.

5. Какой из вариантов аппроксимации (рис. 16.16, *a–e*) заданной на интервале (x_1, x_2) функции $\xi(x)$ полиномом пятой степени $F(x)$ соответствует наилучшему приближению по критерию Чебышева?

Ответ: *д*).

6. Какие из перечисленных функций удовлетворяют условиям физической реализуемости операторных передаточных функций и почему:

$$\begin{aligned}
 &1) \frac{p^2}{p^2 + 0,5p + 1}, \quad 2) \frac{1}{p^2 + 3p + 1}, \quad 3) \frac{1}{p^2 - p + 1}, \\
 &4) \frac{j5p}{p^2 + p + 1}, \quad 5) \frac{5p}{p^2 + j5p + 1}, \quad 6) \frac{p^2 - p + 1}{p^2 + p + 1}, \\
 &7) \frac{p^2 - 3p + 1}{p^2 + p - 1}.
 \end{aligned}$$

Ответ: 1), 2), 6) и 7).

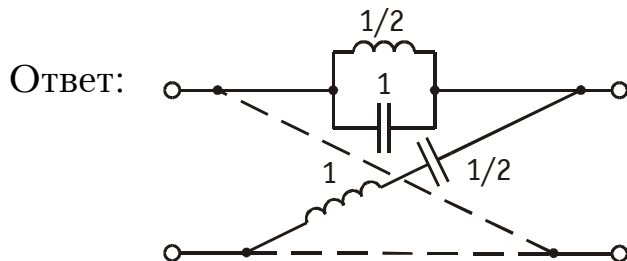
7. По заданным квадратам модуля передаточных функций цепей найти их операторные передаточные функции:

$$1) \frac{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}{\omega^4 + 25\omega^2 + 144}, \quad 2) \frac{0,5\omega^4 + 5\omega^2 + 4,5}{\omega^4 + 20\omega^2 + 64}.$$

Ответ: 1) $\frac{p^2 + 3p + 2}{p^2 + 7p + 12}, \quad 2) \frac{p^2 + 4p + 3}{p^2 + 6p + 8}.$

8. Найти схему и величины элементов мостового четырехполюсника постоянного характеристического сопротивления, реализующего передаточную функцию (при $R = 1$)

$$H(p) = \frac{p^2 - p + 1}{p^2 + p + 1}.$$



9. В результате синтеза цепи получены нормированные значения элементов $\hat{R}_1 = 0,25$, $\hat{R}_2 = 0,75$, $\hat{L}_1 = 1$, $\hat{L}_2 = 0,5$, $\hat{C}_1 = 2$, $\hat{C}_2 = 0,5$. Определить истинные параметры элементов, если сопротивление нормирования $R_H = 10^3$ Ом, а частота нормирования $\omega_H = 10^6$ с⁻¹.

Ответ: $R_1 = 250$ Ом, $R_2 = 750$ Ом, $L_1 = 1$ мГн,
 $L_2 = 0,5$ мГн, $C_1 = 2 \cdot 10^{-9}$ Ф, $C_2 = 0,5 \cdot 10^{-9}$ Ф.

10. Операторная передаточная функция цепи имеет вид:

$$H(p) = \frac{10^{12}}{p^3 + 2 \cdot 10^4 p^2 + 2 \cdot 10^8 p + 10^{12}}.$$

Выполнить нормирование данной функции, если частота нормирования $\omega_H = 10^4$ с⁻¹.

Ответ: $H(\hat{p}) = \frac{1}{\hat{p}^3 + 2\hat{p}^2 + 2\hat{p} + 1}.$

11. Что такое положительно-вещественные функции (ПВФ)?
 12. Какие из приведенных дробно-рациональных функций являются ПФВ:

1) $\frac{p^2}{p^2 + p + 1}$, 2) $\frac{p^2 + p + 1}{p + 1}$, 3) $\frac{p^2 + 1}{p^2 + p + 1}.$

Ответ: 2) и 3).

13. Какими свойствами обладают входные функции реактивных двухполюсников?
 14. Опишите процедуры синтеза реактивных двухполюсников по методам Фостера и Кауэра.

ГЛАВА 17. ФИЛЬТРУЮЩИЕ ЦЕПИ И ИХ СИНТЕЗ

17.1. Классификация фильтров

Электрический фильтр — это устройство, которое практически не ослабляет спектральные составляющие сигнала в заданной полосе частот и значительно ослабляет (подавляет) все спектральные составляющие вне этой полосы.

Полоса частот, в которой ослабление мало, называется *полосой пропускания*. Полоса частот, в которой ослабление велико, называется *полосой непропускания (задерживания)*. Между этими полосами находится переходная область.

По расположению полосы пропускания на шкале частот различают следующие фильтры:

нижних частот (ФНЧ), в которых полоса пропускания располагается на шкале частот от $\omega = 0$ до некоторой граничной частоты $\omega = \omega_{\Pi}$, а полоса непропускания (задерживания) — от частоты $\omega = \omega_{\Sigma}$ до бесконечно больших частот (рис. 17.1, а);

верхних частот (ФВЧ) с полосой пропускания от частоты $\omega = \omega_{\Pi}$ до бесконечно больших частот и полосой непропускания от частоты $\omega = 0$ до $\omega = \omega_{\Sigma}$ (рис. 17.1, б);

полосовые (ПФ), в которых полоса пропускания $\omega_{\Pi 1} \dots \omega_{\Pi 2}$ располагается между полосами непропускания $0 \dots \omega_{\Sigma 1}$ и $\omega_{\Sigma 2} \dots \infty$ (рис. 17.1, в);

заграждающие (режекторные) (ЗФ или РФ), в которых между полосами пропускания $0 \dots \omega_{\Pi 1}$ и $\omega_{\Pi 2} \dots \infty$ находится полоса непро-

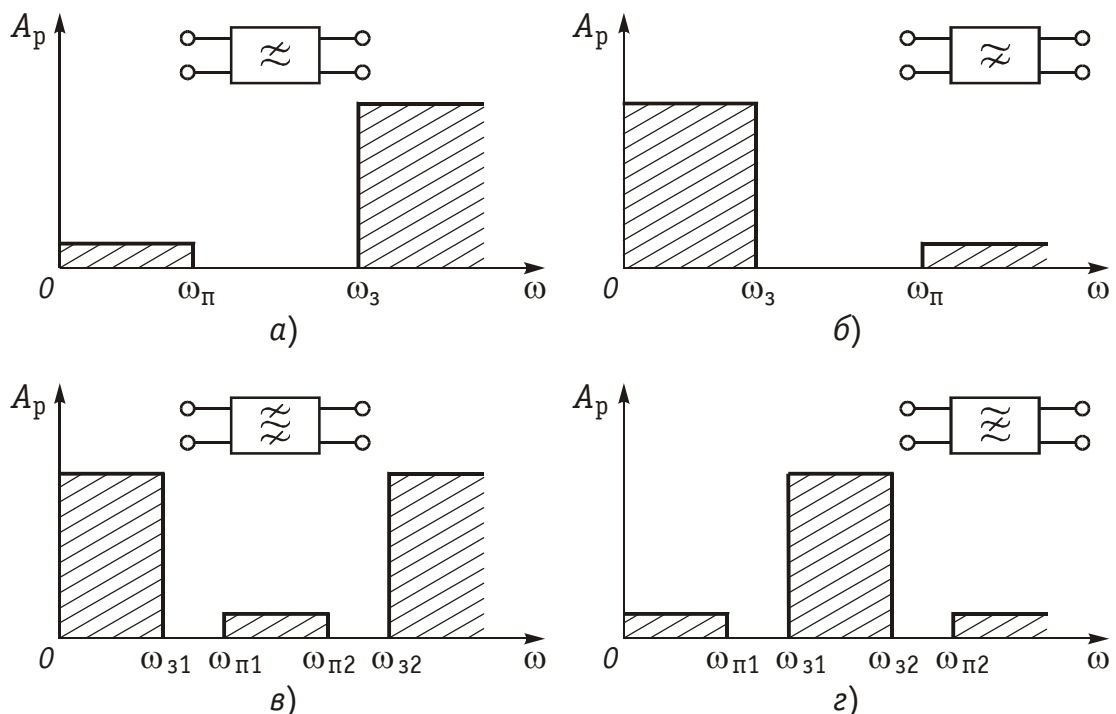


Рис. 17.1

пускания $\omega_{з1} \dots \omega_{з2}$ (рис. 17.1, з);

многополосные, имеющие несколько полос пропускания.

На рис. 17.1, а—г показаны также условные обозначения фильтров каждого типа в соответствии с ГОСТ.

В соответствии с используемой элементной базой к настоящему моменту выделились несколько классов фильтров. Исторически первыми (и все еще широко применяемыми) являются пассивные фильтры, содержащие элементы L и C . Они носят название LC -фильтров.

Во многих случаях на практике требовалась крайне высокая избирательность (различие ослаблений в полосах пропускания и не пропускания в десятки тысяч раз). Это привело к появлению фильтров с механическими резонаторами: кварцевых, магнитострикционных, электромеханических.

По-видимому, самые значительные достижения в области теории и проектирования фильтров связаны с успехами микроэлектроники. Требования микроминиатюризации радиоэлектронной аппаратуры заставили отказаться от использования индуктивностей, которые имеют большие габаритные размеры, особенно на низких частотах, и не поддаются исполнению в микроминиатюрном виде. Появились активные RC -фильтры, состоящие из резисторов, конденсаторов и активных приборов (например, транзисторов). Эти фильтры могут быть выполнены в виде микромодульной конструкции или интегральной схемы. Применение активных RC -фильтров ограничивается пока сравнительно небольшим диапазоном частот до десятков (иногда сотен) килогерц.

Разработка цифровых систем связи и достижения в области цифровых вычислительных машин стимулировали создание фильтров на базе элементов цифровой и вычислительной техники — цифровых фильтров. В силу специфики элементной базы цифровых фильтров не будем далее упоминать о них, хотя расчет таких фильтров производится методами теории электрических цепей. Заинтересованные читатели могут обратиться к специальной литературе по цифровым фильтрам.

В идеальном случае (идеальный фильтр) характеристика рабочего ослабления, например для ФНЧ, имеет вид, показанный на рис. 17.2, а. С рабочим ослаблением связана рабочая амплитудно-частотная характеристика

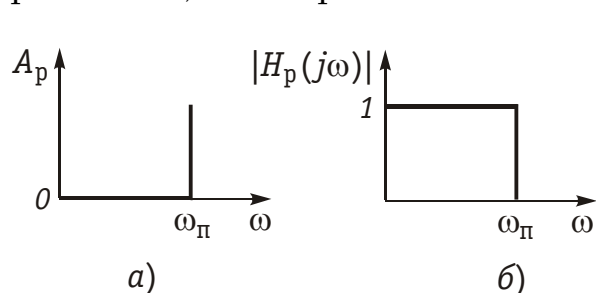


Рис. 17.2

но-частотная характеристика (АЧХ): $|H_p(j\omega)| = e^{-A_p(\omega)}$. На рис. 17.2, б изображена АЧХ идеального фильтра нижних частот.

Реальные фильтры (т. е. фильтры, состоящие из реальных элементов) имеют харак-

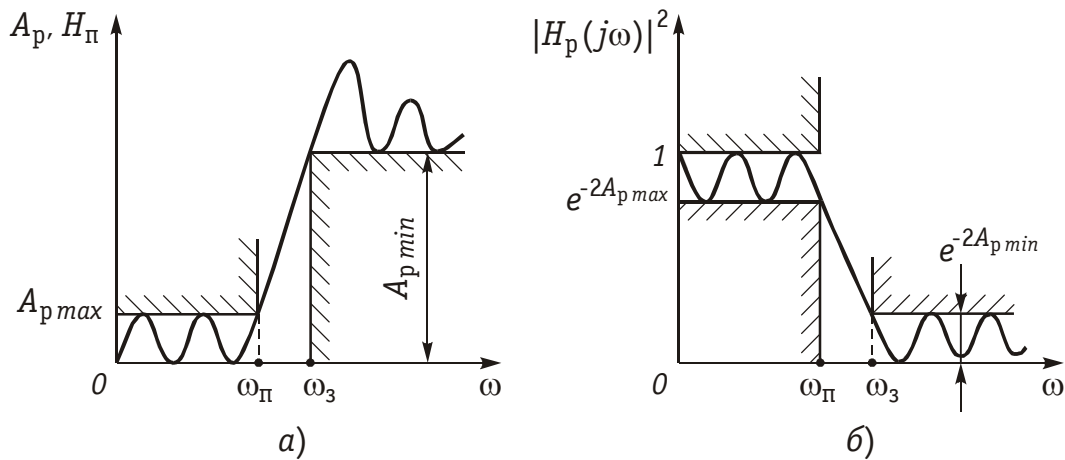


Рис. 17.3

теристики рабочего ослабления и амплитудно-частотную, отличные от идеальных.

Требования к электрическим характеристикам фильтров задаются в виде допустимых пределов изменения этих характеристик. Так, рабочее ослабление в полосе пропускания не должно превышать некоторого максимального допустимого значения $A_{p\max}$, а в полосе непропускания не должно быть ниже некоторого минимально допустимого значения $A_{p\min}$. Нетрудно изобразить эти требования графически, как это сделано на рис. 17.3, а для ФНЧ. На этом рисунке ω_{Π} и ω_3 — граничные частоты полос пропускания и непропускания.

Зная требования к A_p , можно пересчитать их в требования к АЧХ или, как это принято в теории фильтров, в требования к квадрату АЧХ (рис. 17.3, б):

$$|H_p(j\omega)|^2 = \begin{cases} e^{-2A_{p\max}}, & 0 < \omega < \omega_{\Pi}, \\ e^{-2A_{p\min}}, & \omega > \omega_3. \end{cases}$$

Характеристики проектируемых фильтров должны «укладываться» в эти требования (рис. 17.3, а и б).

Помимо требований к частотной зависимости рабочего ослабления (а значит, и к АЧХ) могут задаваться также требования к фазочастотной характеристике фильтра (скажем, допустимые отклонения от линейного закона) и величине нелинейных искажений (обусловленных, например, наличием железа в катушках индуктивности). Могут предъявляться требования и к другим характеристикам и параметрам фильтра. Ниже будем учитывать только требования к рабочему ослаблению и АЧХ.

Идеальные частотные характеристики фильтра (см. рис. 17.2, а) заведомо нереализуемы. Частотные характеристики реальных фильтров могут лишь приближаться к ним с той или иной степенью точности в зависимости от сложности схемы фильтра.

17.2. Аппроксимация характеристик фильтров нижних частот

Функция фильтрации. В общем виде электрические фильтры описываются передаточной функцией вида:

$$H_p(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}. \quad (17.1)$$

Квадрат амплитудно-частотной характеристики таких фильтров

$$|H_p(j\omega)|^2 = \frac{c_0 \omega^{2n} + c_1 \omega^{2n-2} + \dots + c_{n-1} \omega^2 + c_n}{d_0 \omega^{2m} + d_1 \omega^{2m-2} + \dots + d_{m-1} \omega^2 + d_m} \quad (17.2)$$

и, следовательно, рабочее ослабление

$$A_p = 10 \lg \left(\frac{d_0 \omega^{2m} + d_1 \omega^{2m-2} + \dots + d_{m-1} \omega^2 + d_m}{c_0 \omega^{2n} + c_1 \omega^{2n-2} + \dots + c_{n-1} \omega^2 + c_n} \right) \quad (17.3)$$

могут при надлежащем выборе степени полинома (порядка фильтра) и коэффициентов d_k удовлетворить заданным требованиям (см. рис. 17.3).

В теории фильтров принято иметь дело не с обычной угловой частотой ω , а с *нормированной частотой* $\Omega = \omega/\omega_n$, где ω_n — нормирующая частота. Обычно в качестве нормирующей частоты выбирают граничную частоту полосы пропускания ω_n , так что $\Omega_n = \omega_n/\omega_n = \omega_n/\omega_n = 1$.

В теории электрических фильтров вместо формул (17.2) и (17.3) используют другие, также универсальные для любого типа фильтра:

$$|H_p(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \psi^2(\Omega)}; \quad (17.4)$$

$$A_p(\Omega) = 10 \lg [1 + \varepsilon^2 \psi^2(\Omega)]. \quad (17.5)$$

Функция $\psi^2(\Omega)$ называется функцией фильтрации, а ε — коэффициентом неравномерности ослабления. В общем случае $\psi(\Omega)$ — это дробно-рациональная функция с вещественными коэффициентами (в частности полином), удовлетворяющая условиям: $-1 \leq |\psi(\Omega)| \leq 1$ в полосе пропускания и $|\psi(\Omega)| \gg 1$ в полосе непропускания фильтра.

В зависимости от вида функции фильтрации получают различные типы фильтров. Если в качестве функции фильтрации используют полиномы, то фильтры называются полиномиальными. Среди полиномиальных фильтров широкое использование нашли *фильтры Баттерворта и Чебышева*. Если $\psi(\Omega)$ — дробно-рациональная функция, например, дробь Золотарева, то получают *фильтр Золотарева*. Все эти три типа фильтров будут рассмотрены в этой главе.

Следует отметить, что имеет смысл подробно изучать только фильтры нижних частот, т. к. другие типы фильтров (верхних частот, полосовые и заграждающие) могут быть легко получены из ФНЧ с помощью замены переменной (частоты). Для этого во всех выражениях, содержащих переменную Ω , нужно произвести замену переменной таким образом, чтобы характеристики ФНЧ $A_p(\Omega)$ и $|H_p(j\Omega)|^2$ преобразовались в характеристики соответствующего фильтра. Подобная замена переменной Ω называется *преобразованием частоты*, а исходный ФНЧ — *фильтром НЧ-прототипа*.

Преобразование частоты позволяет установить соответствие между частотами полос пропускания и непропускания НЧ-прототипа и частотами фильтров верхних частот, полосового или заграждающего, а также преобразовать схему ФНЧ в схемы ФВЧ, ПФ или ЗФ. Более подробно вопросы, связанные с преобразованием частоты, будут рассматриваться в § 17.5.

Фильтры Баттерворта. Если в выражениях, описывающих квадрат АЧХ фильтра (17.4) и его рабочее ослабление (17.5), в качестве функции фильтрации используются *полиномы Баттерворта* $\psi(\Omega) = B_m(\Omega) = \Omega^m$ (по имени автора, предложившего использовать их для «конструирования» частотных характеристик фильтра), то такие фильтры называются *фильтрами Баттерворта*.

Из формул (17.4) и (17.5) следует, что для фильтров Баттерворта на частоте $\Omega = 0$ значение квадрата АЧХ равно единице, а рабочего ослабления — нулю. С ростом частоты квадрат АЧХ фильтра Баттерворта уменьшается и падает до нуля на бесконечно большой частоте. Рабочее ослабление плавно растет до бесконечно большого значения. Таким образом, выражения (17.4) и (17.5) приближенно воспроизводят характеристики идеального фильтра.

Чтобы эти характеристики «вписывались» в предъявляемые к фильтру требования (см. рис. 17.3), необходимо иметь рабочее ослабление (17.5) в полосе пропускания меньше $A_{p\max}$, а в полосе непропускания большее $A_{p\min}$. Первому условию можно удовлетворить, если потребовать на граничной частоте полосы пропускания ($\Omega = 1$) выполнения равенства $A_p(\Omega)_{\Omega=1} = A_{p\max}$ или $|H_p(j\Omega)|_{\Omega=1}^2 = e^{-2A_{p\max}}$. Отсюда с учетом (17.5) или (17.4) имеем $1 + \varepsilon^2 = e^{2A_{p\max}}$ и $\varepsilon^2 = e^{2A_{p\max}} - 1$. Вычисленный таким способом коэффициент ε :

$$\varepsilon = \sqrt{e^{2A_{p\max}} - 1} \quad (17.6)$$

называется *коэффициентом неравномерности ослабления* в полосе пропускания фильтра.

В формуле (17.6) величина $A_{p\max}$ имеет размерность непер. Если воспользоваться значениями $A_{p\max}$ в децибелах, то

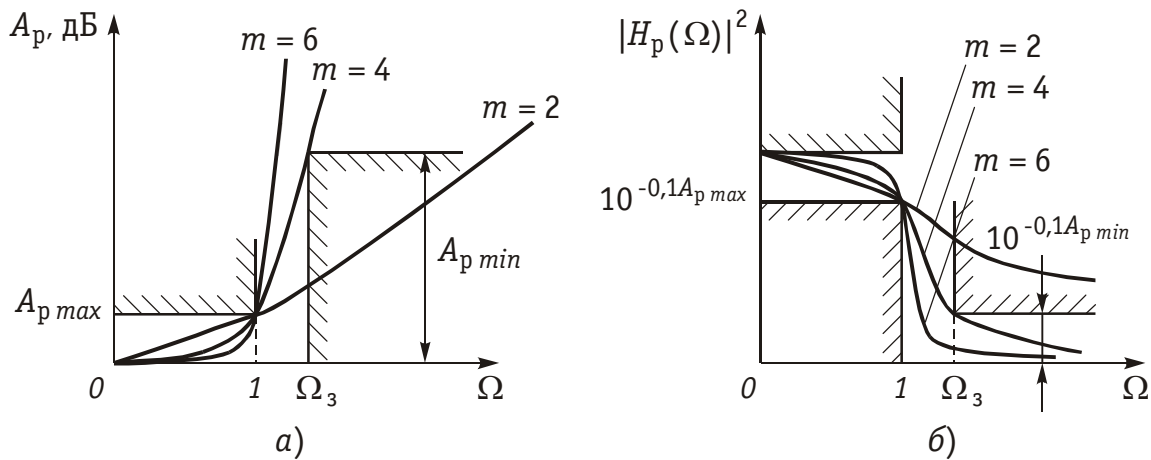


Рис. 17.4

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1A_{p \max}} - 1}. \quad (17.7)$$

С учетом введенных обозначений квадрат АЧХ фильтра Баттерворта запишется в виде

$$|H_p(j\Omega)|^2 = 1/(1 + \varepsilon^2 \Omega^{2m}). \quad (17.8)$$

Эта функция удовлетворяет свойствам квадрата АЧХ реальных четырехполюсников, и поэтому ей можно сопоставить физически осуществимый электрический фильтр.

Рабочее ослабление фильтра Баттерворта:

$$A_p = \frac{1}{2} \ln(1 + \varepsilon^2 \Omega^{2m}) \text{ [Нп]}; \quad A_p = 10 \lg(1 + \varepsilon^2 \Omega^{2m}) \text{ [дБ]}. \quad (17.9)$$

Крутизна частотных характеристик (17.8) и (17.9) зависит от степени m (порядка фильтра). Чем больше степень m , тем выше крутизна характеристик. На рис. 17.4, а, и б показаны графики рабочего ослабления и квадрата АЧХ фильтра Баттерворта для различных m . Таким образом, для удовлетворения требований в полосе непропускания необходимо выбрать соответствующий порядок фильтра m . Его легко определить из условия: на граничной частоте полосы непропускания: $\Omega_3 A_p(\Omega_3) \geq A_{p \min}$ или $|H_p(j\Omega)|_{\Omega=\Omega_3}^2 \leq e^{2A_{p \min}}$. С учетом этого условия получим $1 + \varepsilon^2 \Omega_3^{2m} > e^{2A_{p \min}}$, откуда $\Omega_3^{2m} \geq 1/\varepsilon^2 (e^{2A_{p \min}} - 1)$. Логарифмируя обе части неравенства, придем к выражению

$$2m \ln \Omega_3 \geq \ln \frac{e^{2A_{p \min}} - 1}{\varepsilon^2}.$$

Из него находим окончательно

$$m \geq \ln \left(\frac{e^{2A_{p \min}} - 1}{\varepsilon^2} \right) / 2 \ln \Omega_3. \quad (17.10)$$

Величина $A_{p \min}$ входит в формулу в неперах. Если вычислять ее в децибелах, то:

$$m \geq \lg \left(\frac{10^{0,1 A_{p \min}} - 1}{\varepsilon^2} \right) / 2 \lg \Omega_3. \quad (17.11)$$

Передаточную функцию фильтра Баттерворта можно получить из (17.8), если положить $j\Omega = p$:

$$|H_p(p)|^2 = H_p(p) H_p(-p) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 (-p^2)^m}. \quad (17.12)$$

и разложить знаменатель полученной функции на произведение сомножителей.

Вычислим корни знаменателя, т. е. полюсы функции $H_p(p) \times H_p(-p)$, отдельно для четных и нечетных значений m . Для четных значений m :

$$1 - \varepsilon^2 p^{2m} = 0 \quad \text{и} \quad p_k = \frac{1}{\sqrt[m]{\varepsilon}} 2m \sqrt{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, 2m.$$

Так как:

$$-1 = e^{j(2k-1)\pi} = \cos(2k-1)\pi + j \sin(2k-1)\pi,$$

имеем:

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{1}{\sqrt[m]{\varepsilon}} 2m \sqrt{e^{j(2k-1)\pi}} = \frac{1}{\sqrt[m]{\varepsilon}} e^{j \frac{(2k-1)\pi}{2m}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt[m]{\varepsilon}} \left(\cos \frac{2k-1}{2m} \pi + j \sin \frac{2k-1}{2m} \pi \right), \quad k = 1, 2, \dots, 2m. \end{aligned} \quad (17.13)$$

Для нечетных значений m :

$$p_k = \frac{1}{\sqrt[m]{\varepsilon}} \left(\cos \frac{k}{m} \pi + j \sin \frac{k}{m} \pi \right), \quad k = 1, 2, \dots, 2m.$$

Выражение (17.12) примет вид:

$$H_p(p) H_p(-p) = \frac{1}{\varepsilon^2 (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_{2m})}.$$

Половина полюсов функции $H_p(p) H_p(-p)$ лежит в левой полуплоскости комплексной переменной p и может быть отнесена к передаточной функции реализуемого фильтра $H_p(p)$. Другая половина полюсов, являясь зеркальным отражением первой, располагается в правой полуплоскости и относится к $H_p(-p)$.

Построенная из полюсов, лежащих в левой полуплоскости, передаточная функция фильтра Баттерворта является полиномиальной передаточной функцией типа (17.1):

$$H_p(p) = H \frac{1}{p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0},$$

где $H = 1/\varepsilon$.

Пример. Найти выражения для частотной характеристики и передаточной функции фильтра нижних частот Баттерворта, удовлетворяющего следующим требованиям: $A_{p\max} = 3$ дБ; $A_{p\min} = 12,2$ дБ; $f_{\Pi} = 159$ кГц; $f_{\Sigma} = 318$ кГц.

Определим нормированную частоту $\Omega_3 = f_3/f_{\Pi} = 2$ и по формуле (17.7) коэффициент неравномерности ослабления $\varepsilon^2 = 10^{0,1 \cdot 3} - 1 = 1$. Порядок фильтра найдем согласно (17.11):

$$m \geq \lg(10^{0,1 \cdot 12,2} - 1) / (2 \lg 2) = 2.$$

Выберем $m = 2$. Тогда в соответствии с (17.8) и (17.9):

$$|H_p(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \Omega^4}; \quad A_p = 10 \lg(1 + \Omega^4).$$

Найдем передаточную функцию фильтра $H_p(p)$. Значения полюсов функции $|H_p(p)|^2 = H_p(p)H_p(-p) = 1/(1 + p^4)$ вычислим из формулы (17.13): $p_1 = 0,707 + j0,707$; $p_2 = -0,707 + j0,707$; $p_3 = -0,707 - j0,707$; $p_4 = 0,707 - j0,707$. Расположение полюсов в комплексной плоскости показано на рис. 17.5, а.

По теореме Виета из полюсов в левой полуплоскости p_2 и p_3 формируем передаточную функцию:

$$H_p(p) = \frac{1}{\varepsilon(p - p_2)(p - p_3)} = \frac{1}{p^2 + 1,41p + 1}.$$

Используя введенное ранее обозначение $B_m(\Omega) = \Omega^m$ полинома Баттерворта, можно представить частотные характеристики (17.8) и (17.9) фильтра Баттерворта в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} |H_p(j\Omega)|^2 &= 1/[1 + \varepsilon^2 B_m^2(\Omega)]; \\ A_p(\Omega) &= \frac{1}{2} \ln[1 + \varepsilon^2 B_m^2(\Omega)] [\text{Нп}], \\ A_p(\Omega) &= 10 \lg[1 + \varepsilon^2 B_m^2(\Omega)] [\text{дБ}]. \end{aligned} \right\} \quad (17.14)$$

Фильтры Баттерворта называют также фильтрами с максимально плоским ослаблением в полосе пропускания (см. рис. 17.4, а).

Полиномиальные фильтры Чебышева. Если в качестве функции фильтрации в (17.4) и (17.5) использовать полином Чебышева, обозначаемый $\psi(\Omega) = T_m(\Omega)$, то формулы (17.14) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} |H_p(j\Omega)|^2 &= 1/[1 + \varepsilon^2 T_m^2(\Omega)]; \\ A_p(\Omega) &= \frac{1}{2} \ln[1 + \varepsilon^2 T_m^2(\Omega)] [\text{Нп}]; \\ A_p(\Omega) &= 10 \lg[1 + \varepsilon^2 T_m^2(\Omega)] [\text{дБ}], \end{aligned} \right\} \quad (17.15)$$

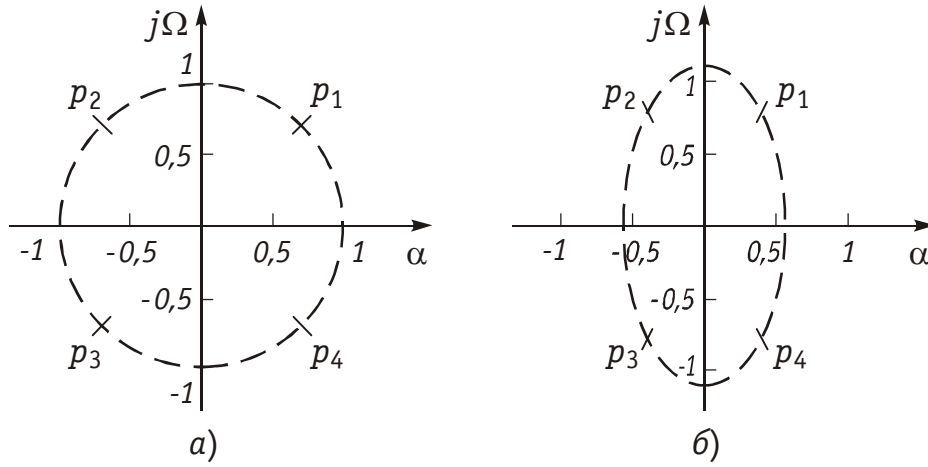


Рис. 17.5

где $T_m(\Omega)$ — полином Чебышева степени (порядка) m ; ε — коэффициент неравномерности, определяемый (17.6) или (17.7).

Фильтры с частотными характеристиками (17.15) называются *фильтрами Чебышева*. Проанализируем частотные характеристики фильтра Чебышева. Для этого вначале рассмотрим свойства полиномов $T_m(\Omega)$. Ниже приведены шесть первых полиномов Чебышева:

$$\begin{aligned} T_0(\Omega) &= 1; & T_3(\Omega) &= 4\Omega^3 - 3\Omega; \\ T_1(\Omega) &= \Omega; & T_4(\Omega) &= 8\Omega^4 - 8\Omega^2 + 1; \\ T_2(\Omega) &= 2\Omega^2 - 1; & T_5(\Omega) &= 16\Omega^5 - 20\Omega^3 + 5\Omega. \end{aligned} \quad (17.16 \text{ а})$$

Любой полином Чебышева при $m \geq 2$ может быть вычислен по рекуррентной формуле $T_m(\Omega) = 2\Omega T_{m-1}(\Omega) - T_{m-2}(\Omega)$. Таким образом, выражения (17.15) удовлетворяют общим выражениям (17.1) — (17.3) характеристик полиномиальных фильтров.

Существует единая тригонометрическая форма записи полиномов Чебышева в интервале $-1 \leq \Omega \leq 1$:

$$T_m(\Omega) = \cos m \arccos \Omega. \quad (17.16 \text{ б})$$

Действительно, $T_0(\Omega) = \cos 0 \arccos \Omega = 1$; $T_1(\Omega) = \cos 1 \arccos \Omega = \Omega$; $T_2(\Omega) = \cos 2 \arccos \Omega = 2\cos^2 \arccos \Omega - 1 = 2\Omega^2 - 1$. Вне интервала $-1 \leq \Omega \leq 1$ полиномы $T_m(\Omega)$ также представляются в тригонометрической форме:

$$T_m(\Omega) = \operatorname{ch} m \operatorname{Arch} \Omega. \quad (17.16 \text{ в})$$

Анализ поведения полиномов Чебышева показывает, что в интервале $-1 \leq \Omega \leq 1$ угол $\Theta = \arccos \Omega$ изменяется от $-\pi$ (при $\Omega = -1$) до 0 (при $\Omega = 1$), поэтому полином $T_m(\Omega) = \cos m\Theta$ ровно m раз принимает значения, равные нулю, и $m + 1$ раз достигает значений, равных $+1$ или -1 и чередующихся друг с другом. Вне интервала $-1 \leq \Omega \leq 1$ полином $T_m(\Omega)$ согласно формуле (17.16 в) моно-

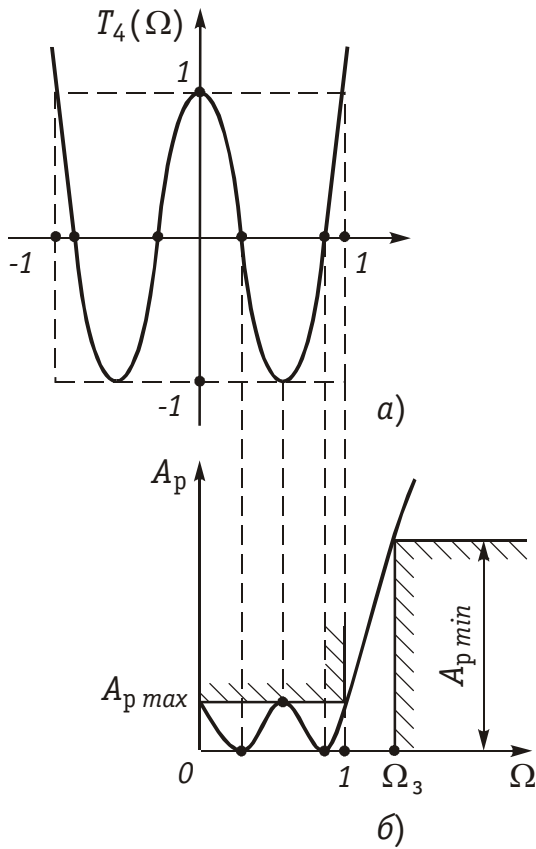


Рис. 17.6

тонно возрастает. В качестве примера на рис. 17.6, а изображен график полинома Чебышева $T_4(\Omega)$, т. е. полинома четвертого порядка.

В соответствии с (17.15) рабочее ослабление $A_p(\Omega)$ фильтра Чебышева на тех частотах Ω , где полином $T_m(\Omega)$ обращается в нуль, также обращается в нуль. На частотах, на которых $T_m(\Omega)$ равен ± 1 , рабочее ослабление достигает величины:

$$\begin{aligned} A_p &= 10 \lg(1 + \varepsilon^2) = \\ &= 10 \lg(1 + 10^{0,1A_{pmax}} - 1) = A_{pmax}. \end{aligned}$$

С ростом значений полинома $T_m(\Omega)$ на частотах $\Omega > 1$ рабочее ослабление $A_p(\Omega)$ также монотонно растет. На рис. 17.6, б приведен график рабочего ослабления

фильтра Чебышева четвертого порядка.

Фильтры Чебышева называют также фильтрами с равноволновой характеристикой ослабления в полосе пропускания.

На рис. 17.7 показаны частотные зависимости квадрата АЧХ фильтра Чебышева для различных значений m , полученные для $|H_p(j\Omega)|^2$ из (17.15). Подобные зависимости могут быть построены для рабочего ослабления фильтра.

Чтобы характеристики фильтра отвечали требованиям в полосе непропускания, необходимо выбрать порядок фильтра m из условия $|H_p(j\Omega)|_{\Omega=\Omega_3}^2 \leq e^{-2A_{pmin}}$. Для полосы непропускания $T_m(\Omega)$ определяется формулой (17.16 в), следовательно, $1 + \varepsilon^2 \text{ch}^2 m \times \text{Arch } \Omega_3 \geq e^{-2A_{pmin}}$. Отсюда $\text{ch } m \text{ Arch } \Omega_3 \geq \sqrt{(e^{2A_{pmin}} - 1)/\varepsilon^2}$. Далее $m \text{ Arch } \Omega_3 \geq \sqrt{(e^{-2A_{pmin}} - 1)/\varepsilon^2}$ и $m \geq \text{Arch } \sqrt{(e^{-2A_{pmin}} - 1)/\varepsilon^2} / \text{Arch } \Omega_3$.

В этой формуле величина A_{pmin} измеряется в неперах. При использовании единицы децибел порядок фильтра вычисляется из выражения:

$$m \geq \text{Arch} \sqrt{\frac{10^{0,1A_{pmin}} - 1}{\varepsilon^2}} / \text{Arch } \Omega_3. \quad (17.17 \text{ а})$$

Сравнивая частотные характеристики фильтров Баттерворта и Чебышева, следует указать, что полиномы Чебышева являются по-

линомами наилучшего приближения. Это означает, что при одинаковом значении m из всех полиномиальных фильтров, ослабления которых в полосе пропускания не превышают $A_{p\max}$, наибольшие значения ослабления в полосе непропускания имеет фильтр Чебышева. В частности, рабочее ослабление фильтра Чебышева в полосе непропускания может превышать (и весьма значительно) рабочее ослабление фильтра Баттерворта при равных значениях m и $A_{p\max}$. Однако характеристика рабочего ослабления фильтра Баттерворта имеет в полосе пропускания монотонный характер и легче поддается корректированию для устранения искажений передаваемых сигналов.

Выбор типа полиномиальных фильтров определяется конкретными условиями их применения в аппаратуре связи и радиотехнических устройствах.

Для получения передаточной функции фильтра Чебышева поступим аналогично тому, как делали это для фильтров Баттерворта. Заменим оператор $j\Omega$ на оператор p и перейдем от функции $|H_p(j\Omega)|^2$ к функции:

$$|H_p(p)|^2 = H_p(p)H_p(-p) = 1/[1 + \varepsilon^2 T_m^2(p/j)].$$

Представим полином $T_m(\Omega)$ в виде (17.16 б) и найдем полюсы функции $|H_p(p)|^2$, решив уравнение:

$$\varepsilon^2 \cos^2 m \arccos(p/j) + 1 = 0. \quad (17.17 \text{ б})$$

Поскольку согласно (17.16 а) коэффициент при старшем члене полинома Чебышева $T_m(\Omega)$ равен 2^{m-1} , то коэффициент при старшем члене полинома в левой части приведенного выше уравнения равен $\varepsilon^2 2^{2(m-1)}$.

Корни уравнения (17.17 б), как можно доказать, определяются аналитически следующим выражением:

$$p_k = \operatorname{sh} \gamma \sin \frac{2k-1}{2m} \pi + j \operatorname{ch} \gamma \cos \frac{2k-1}{2m} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, 2m, \quad (17.18)$$

где $\gamma = (1/m) \operatorname{Arsh}(1/\varepsilon)$.

Из корней в левой полуплоскости составляются сомножители $(p - p_i)$, и по теореме Виета строится передаточная функция фильтра:

$$H_p(p) = H \frac{1}{p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0},$$

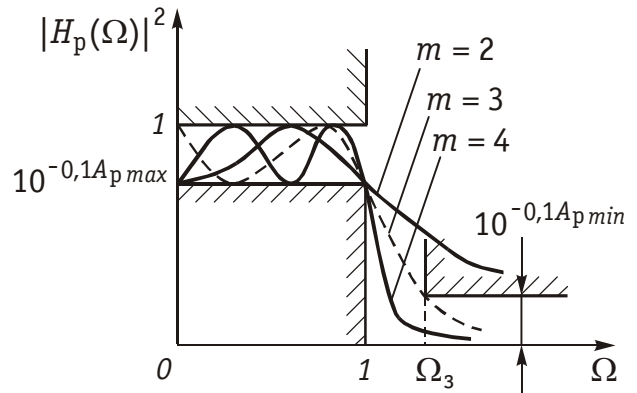


Рис. 17.7

где $H = 1/(\varepsilon \cdot 2^{m-1})$.

Пример. Построить передаточную функцию фильтра Чебышева второго порядка ($m = 2$), рабочее ослабление в полосе пропускания (от 0 до 159 кГц) которого не превышает величину $A_{p\max} = 3$ дБ. Граничная частота полосы не пропускания 318 кГц.

Коэффициент неравномерности ε такого фильтра согласно (17.7) равен 1. Рабочее ослабление на частоте $\Omega_3 = 318/159 = 2$ составляет $A_p(\Omega)_{\Omega=2} = 10 \lg(1 + \operatorname{ch}^2 2 \operatorname{Arch} 2) = 17$ дБ, что почти на 5 дБ превышает рабочее ослабление на этой же частоте фильтра Баттерворта второго порядка (см. предыдущий пример).

Расчет полюсов функции $H_p(p)H_p(-p)$ по формулам (17.18) дает величины: $p_1 = 0,322 + j0,777$; $p_2 = 0,322 - j0,777$; $p_3 = -0,322 - j0,777$; $p_4 = -0,322 + j0,777$. Расположение полюсов в комплексной плоскости показано на рис. 17.5, б.

Передаточная функция фильтра:

$$|H_p(p)| = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{2}(p - p_4)(p - p_3)} = \frac{0,707}{p^2 + 0,645p + 0,707}.$$

В заключение отметим, что для полиномиальных фильтров в справочниках составлены весьма полные таблицы полюсов и коэффициентов передаточных функций для различных величин $A_{p\max}$ и m . Порядок же фильтров m определяется по специальным графикам, исходя из заданных величин $A_{p\max}$, $A_{p\min}$ и Ω_3 .

Фильтры со всплесками ослабления (на основе дробей Чебышева и Золотарева). Частотные характеристики полиномиальных фильтров, описываемые выражениями (17.1)–(17.3), имеют монотонный характер в полосе не пропускания. В частности, рабочее ослабление таких фильтров монотонно возрастает по мере удаления от полосы пропускания (рис. 17.4, а и 17.6, б).

При «жестких» требованиях к частотным характеристикам (малая переходная область между полосами пропускания и не пропускания и большая величина рабочего ослабления в полосе не пропускания) порядок фильтра m может получиться очень большим даже в случае применения полинома Чебышева. Это приведет к существенному усложнению фильтра и к излишнему «расходу» элементов.

В таких случаях целесообразно применять *фильтры со всплесками рабочего ослабления* в полосе не пропускания (рис. 17.8, а). На частотах всплеска $\Omega_{\infty 1}$, $\Omega_{\infty 2}$ и т. д. рабочее ослабление фильтра стремится к бесконечности; за счет этого возрастает крутизна характеристики ослабления в переходной области. Соответственно АЧХ фильтра на частотах $\Omega_{\infty 1}$, $\Omega_{\infty 2}$ и т. д. будет обращаться в нуль (рис. 17.8, б).

Для выполнения указанных условий в выражениях (17.2)–(17.3) используют рациональные дроби вида:

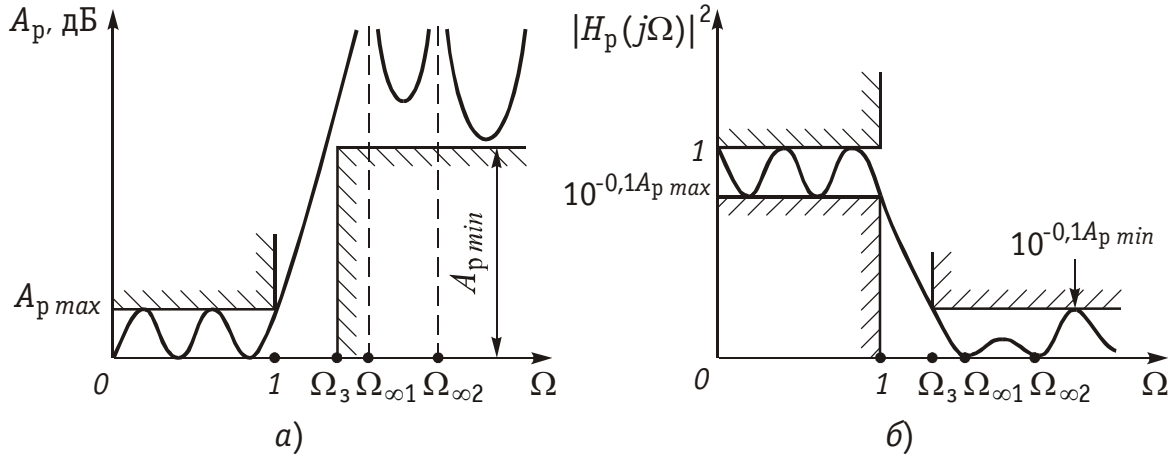


Рис. 17.8

$$|H_p(j\Omega)|^2 = \frac{(\Omega_{\infty 1}^2 - \Omega^2)(\Omega_{\infty 2}^2 - \Omega^2) \dots (\Omega_{\infty n}^2 - \Omega^2)}{d_0 \Omega^{2m} + d_1 \Omega^{2m-2} + \dots + d_{m-1} \Omega^2 + d_m}; \quad (17.19)$$

$$A_p(\Omega) = \frac{1}{2} \ln \frac{d_0 \Omega^{2m} + d_1 \Omega^{2m-2} + \dots + d_{m-1} \Omega^2 + d_m}{(\Omega_{\infty 1}^2 - \Omega^2)(\Omega_{\infty 2}^2 - \Omega^2) \dots (\Omega_{\infty n}^2 - \Omega^2)}. \quad (17.20)$$

Действительно, когда Ω принимает значения $\Omega_{\infty 1}, \Omega_{\infty 2}, \dots, \Omega_{\infty n}$, $|H_p(j\Omega)|^2 = 0$ и $A_p(\Omega) \rightarrow \infty$.

Передаточная функция таких фильтров является дробно-рациональной:

$$H_p(p) = \frac{(p^2 + \Omega_{\infty 1}^2)(p^2 + \Omega_{\infty 2}^2) \dots (p^2 + \Omega_{\infty n}^2)}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0} \quad (17.21)$$

и кроме полюсов p_1, p_2, \dots, p_m имеет нули:

$$p_{01} = \pm j\Omega_{\infty 1}; \quad p_{02} = \pm j\Omega_{\infty 2}; \quad \dots; \quad p_{0n} = \pm j\Omega_{\infty n}.$$

Фильтры со всплесками рабочего ослабления называют еще фильтрами с нулями передачи.

Среди фильтров со всплесками ослабления наиболее широкое распространение получили фильтры, построенные на основе дробей Чебышева и Золотарева. Чтобы получить частотные характеристики фильтра на основе дробей Чебышева, нужно в формулах (17.14) или (17.15) использовать в качестве функции фильтрации дробь Чебышева. Обозначая ее $\Phi_m(\Omega)$, получим:

$$\left. \begin{aligned} |H_p(j\Omega)|^2 &= 1/[1 + \varepsilon^2 \Phi_m^2(\Omega)]; \\ A_p(\Omega) &= \frac{1}{2} \ln [1 + \varepsilon^2 \Phi_m^2(\Omega)] \text{ [Нп]}, \\ A_p(\Omega) &= 10 \lg [1 + \varepsilon^2 \Phi_m^2(\Omega)] \text{ [дБ]}. \end{aligned} \right\} \quad (17.22)$$

В качестве примера укажем дробь Чебышева пятого порядка, для которой построены графики $A_p(\Omega)$ и $|H_p(j\Omega)|^2$ на рис. 17.8, а и б:

$$\Phi_5(\Omega) = \frac{\alpha_0 \Omega^5 + \alpha_1 \Omega^3 + \alpha_2 \Omega}{(\Omega_{\infty 1}^2 - \Omega^2)(\Omega_{\infty 2}^2 - \Omega^2)},$$

где α_0 , α_1 и α_2 — коэффициенты, связанные с частотами всплеска $\Omega_{\infty 1}$ и $\Omega_{\infty 2}$.

Очевидно, что подстановка этой дроби в (17.22) приведет после некоторых преобразований к выражениям общего вида (17.19) и (17.20).

В полосе пропускания дробь Чебышева ведет себя так же, как и полином Чебышева, т. е. рабочее ослабление фильтра носит равноволновый характер. На частотах всплеска $\Omega_{\infty 1}$ и $\Omega_{\infty 2}$ дробь Чебышева обращается в бесконечность, что приводит к бесконечно большому рабочему ослаблению.

Следует отметить, что дробь Чебышева является дробью наилучшего приближения. Это означает, что фильтр на основе дроби Чебышева на любой частоте полосы непропускания имеет большее значение рабочего ослабления по сравнению с фильтрами на основе других дробей (и полиномов, как частных случаев дробей) при прочих равных условиях (при одинаковых порядках m , при таком же количестве и расположении частот всплеска и тех же величинах $A_{p \max}$).

Частным случаем дробей Чебышева являются дроби Золотарева:

$$R_m(\Omega) = a_1 \Omega^S \prod_V \left[(\Omega_{0V}^2 - \Omega^2) / (\Omega_{\infty V}^2 - \Omega^2) \right], \quad (17.23)$$

где $a_1 = \prod_V \left[(\Omega_{\infty V}^2 - 1) / (\Omega_{0V}^2 - 1) \right]$, $V = 1, 2, \dots, (m - S)/2$, значение S равно 0 для четных m и равно 1 для нечетных m ; m — порядок дроби; Ω_{0V} , $\Omega_{\infty V}$ — нули и полюсы дроби, связанные соотношением $\Omega_{\infty V} = \Omega_3 / \Omega_{0V}$.

Используя в качестве функции фильтрации в (17.14) и (17.15) дроби Золотарева, получим:

$$\left. \begin{aligned} |H_p(j\Omega)|^2 &= 1 / [1 + \varepsilon^2 R_m^2(\Omega)]; \\ A_p(\Omega) &= \frac{1}{2} \ln [1 + \varepsilon^2 R_m^2(\Omega)] [\text{Нп}], \\ A_p(\Omega) &= 10 \lg [1 + \varepsilon^2 R_m^2(\Omega)] [\text{дБ}]. \end{aligned} \right\} \quad (17.24)$$

Из формул (17.23) и (17.24) следует, что нули функции $A_p(\Omega)$ совпадают с нулями дроби Золотарева, а всплески функции $A_p(\Omega)$ — с полюсами этой же дроби. Нули и полюсы дроби Золотарева можно рассчитывать, однако обычно их определяют по ка-

талограм для операторных передаточных функций ФНЧ. На рис. 17.9 показан график $A_p(\Omega)$ для фильтра Золотарева пятого порядка.

Дробы Золотарева так же, как и полиномы Чебышева, дают равноволновую характеристику рабочего ослабления фильтра в полосе пропускания. Однако в полосе не-

пропускания у фильтров Золотарева значения всех минимумов рабочего ослабления оказываются одинаковыми и равными значению рабочего ослабления на частоте Ω_3 . Такие фильтры называются также *фильтрами с изоекстремальными характеристиками* рабочего ослабления.

Фильтры с характеристиками Золотарева можно рассматривать как частный случай фильтров с характеристиками Чебышева, когда значения минимумов ослабления фильтра в полосе не-

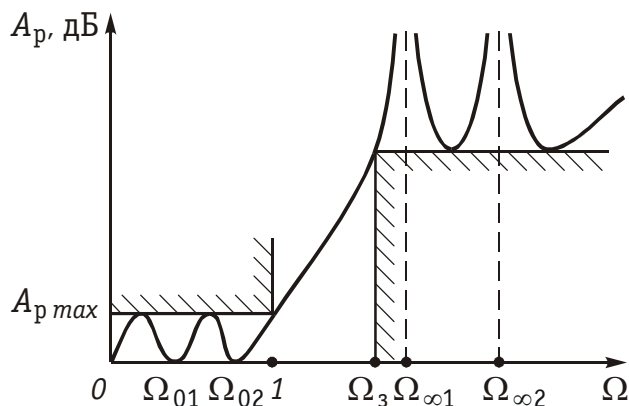


Рис. 17.9

17.3. Реализация фильтров нижних частот

Лестничные полиномиальные LC-фильтры. Любые из рассмотренных выше фильтров, как полиномиальные, так и со всплесками ослабления могут быть реализованы в виде пассивных LC-цепей.

Пассивные LC-фильтры обычно представляют собой реактивный лестничный четырехполюсник, включенный между генератором с активным внутренним сопротивлением R_r и нагрузкой с активным сопротивлением R_n (рис. 17.10). Входное сопротивление реактивного четырехполюсника, нагруженного на сопротивление R_n , обозначено на рисунке $Z_{вх1}(p)$.

Если фильтр со стороны зажимов 1—1' рассматривать как двухполюсник, образованный реактивным четырехполюсником и нагрузкой R_n , то, зная выражение $Z_{вх1}(p)$, можно реализовать данный двухполюсник одним из известных в теории цепей методов синтеза двухполюсников. Таким образом, задача реализации фильтра сводится к реализации двухполюсника по его заданному входному сопротивлению. Идея данного подхода при-

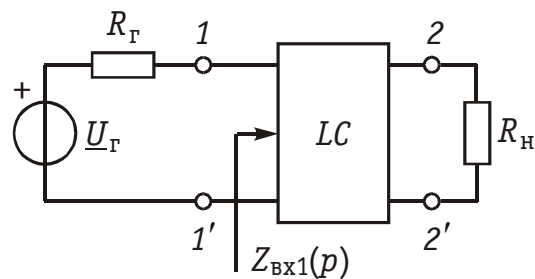


Рис. 17.10

надлежит С. Дарлингтону и метод реализации фильтров называется *методом Дарлингтона*.

На входе фильтра имеет место несогласованность, которую можно оценить, введя в рассмотрение коэффициент отражения (16.25)

$$\sigma(p) = \frac{R_{\Gamma} - Z_{\text{вх1}}(p)}{R_{\Gamma} + Z_{\text{вх1}}(p)}. \quad (17.25)$$

Решая (17.25) относительно $Z_{\text{вх1}}(p)$, получаем:

$$Z_{\text{вх1}}(p) = R_{\Gamma} \frac{1 - \sigma(p)}{1 + \sigma(p)}. \quad (17.26)$$

В (17.26) неизвестным является коэффициент отражения $\sigma(p)$. В свою очередь, коэффициент отражения $\sigma(p)$ связан с передаточной функцией $H_p(p) = w(p)/v(p)$ соотношением (16.26):

$$\begin{aligned} \sigma(p)\sigma(-p) &= 1 - H_p(p)H_p(-p) = \\ &= \frac{v(p)v(-p) - w(p)w(-p)}{v(p)v(-p)}. \end{aligned} \quad (17.27)$$

Из (17.27) следует, что знаменатель у $\sigma(p)$ такой же, как и у $H_p(p)$: им является полином $v(p)$. Остается найти нули правой части выражения (17.7) и половину из них «приписать» полиному числителя $\sigma(p)$. Последний формируется из нулей по теореме Виета.

Пример. Реализовать фильтр нижних частот Баттерворта второго порядка из примера (стр. 450) в виде пассивной LC -схемы. Внутреннее сопротивление генератора 1 кОм.

В примере была получена передаточная функция Баттерворта второго порядка $H_p(p) = 1/(p^2 + 1,41p + 1)$ для нормированных значений частоты $\Omega = \omega/\omega_H = \omega/(2\pi \cdot 159 \cdot 10^3) = \omega/10^6$, где $\omega_H = \omega_{\Pi} = 2\pi f_{\Pi}$. Реализация нормированной передаточной функции приведет к схеме с нормированными значениями реактивных элементов (обозначим их \hat{L}, \hat{C}), которые затем необходимо денормировать для получения реальных значений.

В соответствии с (17.27)

$$\begin{aligned} \sigma(p)\sigma(-p) &= 1 - \frac{1}{p^2 + 1,41p + 1} \frac{1}{p^2 - 1,41p + 1} = \\ &= \frac{p^4}{(p^2 + 1,41p + 1)(p^2 - 1,41p + 1)}. \end{aligned}$$

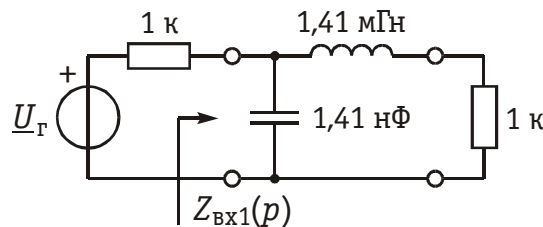


Рис. 17.11

Нули этой функции $p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{04} = 0$. Полином числителя $\sigma(p)$ в соответствии с теоремой Виета равен $(p - p_{01}) \cdot (p - p_{02}) = p^2$. Отсюда $\sigma(p) = p^2 / (p^2 + 1,41p + 1)$.

Согласно (17.26)

$$Z_{\text{вх1}}(p) = 10^3 \frac{1 - p^2 / (p^2 + 1,41p + 1)}{1 + p^2 / (p^2 + 1,41p + 1)} = \frac{1,41 \cdot 10^3 p + 10^3}{2p^2 + 1,41p + 1}.$$

Реализацию двухполюсника со входным сопротивлением $Z_{\text{вх1}}(p)$ осуществим разложением в цепную (лестничную) дробь по методу Кауэра. Представим $Z_{\text{вх1}}(p) = 1/Y_{\text{вх1}}(p)$ и проведем разложение проводимости:

$$\begin{aligned} \text{1-й этап} \quad & \left. \begin{array}{c} - \frac{2p^2 + 1,41p + 1}{2p^2 + 1,41p} \\ 1 \end{array} \right| \frac{1,41 \cdot 10^3 p + 10^3}{1,41 \cdot 10^{-3} p} \\ \text{2-й этап} \quad & \left. \begin{array}{c} - \frac{1,41 \cdot 10^3 p + 10^3}{1,41 \cdot 10^3 p} \\ 10^3 \end{array} \right| \frac{1}{1,41 \cdot 10^{-3} p} \\ \text{3-й этап} \quad & \left. \begin{array}{c} - \frac{1}{1} \\ 0 \end{array} \right| \frac{10^3}{10^{-3}} \end{aligned}$$

Процесс разложения закончен. Входное сопротивление $Z_{\text{вх1}}(p)$, представленное цепной дробью, имеет вид:

$$Z_{\text{вх1}}(p) = \frac{1}{p\hat{C} + \frac{1}{p\hat{L} + 1/G_{\text{н}}}} = \frac{1}{1,41 \cdot 10^{-3} p + \frac{1}{1,41 \cdot 10^3 p + 1/10^{-3}}}.$$

Схема двухполюсника, входное сопротивление которого соответствует данной цепной (лестничной) дроби, приведена на рис. 17.11. Нормированные значения элементов $\hat{C} = 1,41 \cdot 10^{-3}$, $\hat{L} = 1,41 \cdot 10^3$. Активная проводимость нагрузки не нормируется и равна $G_{\text{н}} = 10^{-3}$ См, т. е. сопротивление нагрузки $R_{\text{н}} = 1$ кОм. Денормировать значения элементов можно следующим образом. Комплексная проводимость нормированной емкости $j\Omega\hat{C} = j(\omega/\omega_{\text{н}})\hat{C} = j\Omega C$, откуда ненормированное значение емкости $C = \hat{C}/\omega_{\text{н}} = 1,41 \cdot 10^{-3}/10^6 = 1,41 \cdot 10^{-9}$ Ф = 1,41 нФ.

Подобным образом комплексное сопротивление нормированной индуктивности $j\Omega\hat{L} = j(\omega/\omega_{\text{н}})\hat{L} = j\Omega L$ или $L = \hat{L}/\omega_{\text{н}} = 1,41 \cdot 10^3/10^6 = 1,41 \cdot 10^{-3}$ Гн = 1,41 мГн.

Аналогично рассмотренному примеру решается задача реализации фильтра любого порядка. Например, полиномиальный ФНЧ пятого порядка ($m = 5$) реализуется в виде одной из двух схем, показанных на рис. 17.12, а и б. Количество реактивных элементов определяется порядком фильтра m . Отличие фильтра Баттерворта от фильтра Чебышева будет заключаться в этом случае только в разных значениях реактивных элементов, получаемых в процессе реализации соответствующих передаточных функций.

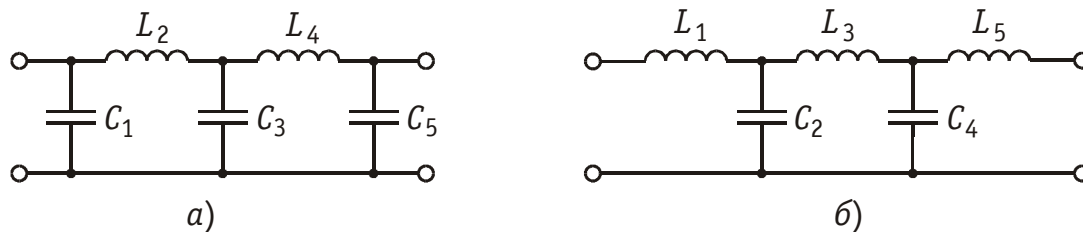


Рис. 17.12

Лестничные фильтры со всплесками ослабления. По подобной схеме осуществляется и реализация передаточных функций фильтров со всплесками ослабления (Чебышева или Золотарева). Разложение входного сопротивления таких фильтров в цепную дробь приведет к схемам, содержащим резонансные контуры, в которых резонансы происходят на частотах $\Omega_{\infty 1}$, $\Omega_{\infty 2}$, ... Наличие этих контуров и обеспечивает бесконечно большое затухание на частотах всплеска.

Так, ФНЧ пятого порядка со всплесками ослабления на частотах $\Omega_{\infty 1}$ и $\Omega_{\infty 2}$ реализуется в виде одной из схем, приведенных на рис. 17.13, а и б. И в первой и во второй схемах контуры рассчитаны на резонансные частоты $\Omega_{\infty 1}$ и $\Omega_{\infty 2}$. В первой схеме в параллельных контурах происходят резонансы токов; сопротивления контуров принимают бесконечно большие значения. В результате на частотах резонансов $\Omega_{\infty 1}$ и $\Omega_{\infty 2}$ наблюдается «обрыв» продольных ветвей фильтра и сигнал от генератора в нагрузку не поступает, т. е. фильтр вносит бесконечно большое ослабление. Во второй схеме в последовательных контурах происходят резонансы напряжений; сопротивления контуров обращаются в нуль. Таким образом, здесь на частотах $\Omega_{\infty 1}$ и $\Omega_{\infty 2}$ поперечные ветви «закорачивают» нагрузку и сигнал на выход фильтра не поступает. Таким образом, имеет место бесконечно большое ослабление.

Реализация лестничных фильтров по каталогам. Из изложенного следует, что синтез фильтров представляет собой сложную процедуру, поэтому разработчики фильтров пытались облегчить ее. В результате были созданы обширные каталоги фильтров, применение которых значительно облегчает процедуру синтеза ФНЧ. Табл. 17.1 представляет собой страницу из такого каталога, где

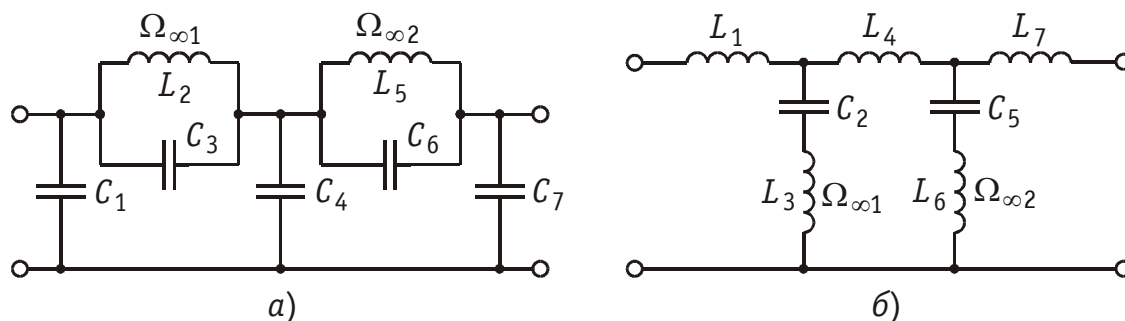
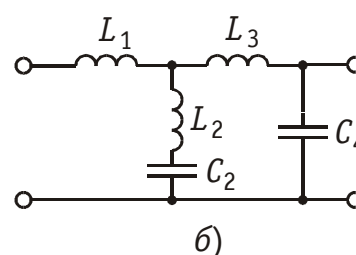
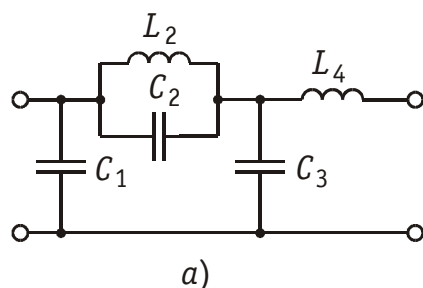


Рис. 17.13

Таблица 17.1

Параметры элементов фильтров Золотарева четвертого порядка

Ω_s	A_s , дБ	C_1	C_2	L_2	$\Omega_{\infty 2}$	C_3	L_4
при $\Delta A_s = 0,028$ дБ							
3,98	56	0,7020	0,04232	1,241	4,364244	1,282	0,7429
3,39	50	0,6871	0,05952	1,215	3,718173	1,272	0,7440
2,96	45	0,6697	0,08025	1,186	3,241901	1,261	0,7451
2,63	41	0,6497	0,1049	1,152	2,876673	1,248	0,7465
при $\Delta A_s = 0,044$ дБ							
3,76	56	0,7575	0,044585	1,282	4,124781	1,326	0,8018
3,23	50	0,7422	0,06339	1,256	3,544141	1,316	0,8027
2,84	45	0,7245	0,08436	1,226	3,109875	1,305	0,8037
2,45	40	0,6968	0,1183	1,287	2,677264	1,287	0,8052
при $\Delta A_s = 0,099$ дБ							
3,39	56	0,8775	0,05363	1,349	3,718173	1,400	0,9292
2,96	51	0,8612	0,07202	1,321	3,241901	0,390	0,9297
2,53	45	0,8357	0,1017	1,278	2,773213	1,373	0,9304
2,22	40	0,8057	0,1382	1,229	2,427221	1,354	0,9311
при $\Delta A_s = 0,177$ дБ							
3,09	55	0,9807	0,063309	1,382	3,386078	1,443	1,041
2,73	50	0,9630	0,08273	1,353	2,988543	1,432	1,041
2,37	45	0,9356	0,1141	1,308	2,588050	1,414	1,041
2,09	40	0,9040	0,1522	1,257	2,286311	1,394	1,041



Ω_s	A_s , дБ	L_1	L_2	C_2	$\Omega_{\infty 2}$	L_3	C_4
------------	------------	-------	-------	-------	---------------------	-------	-------

приведены нормированные элементы фильтра Золотарева четвертого порядка. В этой таблице Ω_s , A_s , ΔA_s — нормированная граничная частота полосы задерживания, минимальное ослабление в полосе задерживания, максимальное ослабление в полосе пропускания соответственно. Аналогичные каталоги существуют и для фильтров Баттерворта и Чебышева.

Процедура синтеза ФНЧ с помощью каталогов может выглядеть следующим образом:

1. По формуле (17.17 а) определяем порядок фильтра m . Если число m четное, то в числитель данной формулы добавляем слагаемое в соответствии с выражением (17.40) и уточняем порядок фильтра.

2. Из каталога фильтров выбираем таблицы, соответствующие данному порядку.

3. Из данных таблиц выбираем строку, для которой с минимально возможным отклонением выполняются неравенства

$$\Omega_3 \leq \Omega_s, \quad A_{pmin} \geq A_{2s} \quad \text{и} \quad A_{pmax} \leq \Delta A_s.$$

Нормированные элементы данной строки и будут нормированными элементами фильтра, схема которого приведена на рисунке к данной таблице. При этом, обозначения элементов вверху таблицы относятся к схеме *а*, а внизу — к схеме *б*. Истинные значения элементов получаются путем денормирования.

Активные RC-фильтры. Фильтры, представляющие собой комбинацию пассивной RC-цепи и активного элемента, называются активными RC-фильтрами. В качестве активного элемента чаще всего используются операционные усилители с двумя входами: инвертирующим и неинвертирующим.

Реализация передаточных функций фильтров на активных RC-цепях осуществляется следующим образом. Заданную функцию $H_p(p)$ порядка m разбивают на произведение передаточных функций не выше второго порядка, т. е. $H_p(p) = H_{p1}(p)H_{p2}(p) \dots H_{pk}(p)$. Каждую передаточную функцию $H_{pi}(p)$ реализуют в виде ARC-звена первого или второго порядка. Схему ARC-фильтра получают путем каскадного соединения звеньев.

Пример. Пусть задана передаточная функция полиномиального фильтра Чебышева пятого порядка.

$$H_p(p) = \frac{0,0628}{p^5 + 0,397p^4 + 1,415p^3 + 0,543p^2 + 0,408p + 0,0628}.$$

Полюсы этой функции (корни знаменателя): $p_1 = -0,177$; $p_{2,3} = -0,143 \pm \pm j0,597$; $p_{4,5} = -0,0547 \pm j0,966$. Вещественный полюс p_1 дает по теореме Виета сомножитель первого порядка $(p - p_1) = p + 0,177$; первая пара комплексно-сопряженных полюсов p_2 и p_3 — сомножитель второго порядка $(p - p_2) \cdot (p - p_3) = p^2 + 0,286p + 0,377$; вторая пара полюсов p_4 и p_5 — сомножитель $(p - p_4)(p - p_5) = p^2 + 0,110p + 0,936$. Тогда

$$\begin{aligned} H_p(p) &= \frac{0,0628}{(p + 0,177)(p^2 + 0,286p + 0,377)(p^2 + 0,110p + 0,936)} = \\ &= \frac{0,177}{p + 0,177} \cdot \frac{0,377}{p^2 + 0,286p + 0,377} \cdot \frac{0,936}{p^2 + 0,110p + 0,936} = \\ &= H_{p1}(p)H_{p2}(p)H_{p3}(p). \end{aligned}$$

Таким образом, фильтр Чебышева пятого порядка может быть реализован двумя звеньями с передаточными функциями второго порядка и одним звеном с передаточной функцией первого порядка.

В практике проектирования активных RC-фильтров используется большое число схем, реализующих передаточные функции пер-

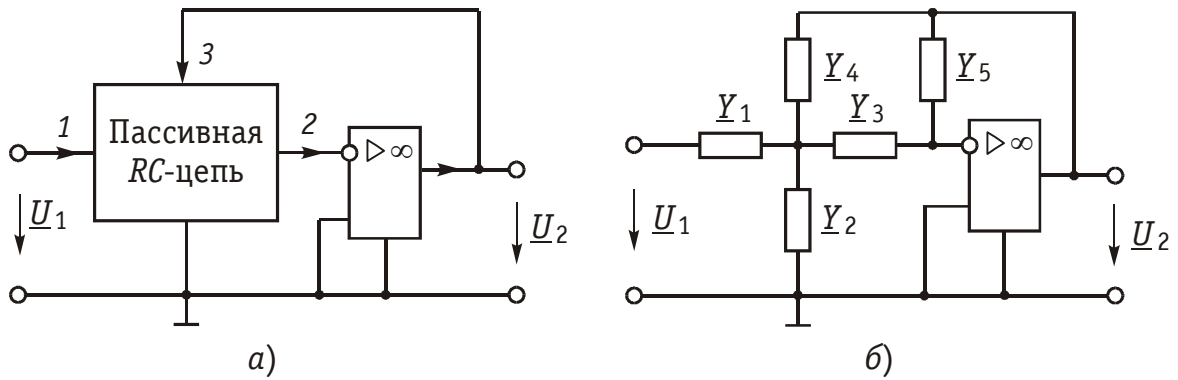


Рис. 17.14

вого и второго порядка. Один из способов построения таких схем показан на рис. 17.14, а. Пассивная часть схемы представлена в виде цепи из элементов R и C . Между зажимами 2 и 3 включен операционный усилитель, в котором использован инвертирующий вход. Примером пассивной RC -цепи является схема, приведенная на рис. 17.14, б. Передаточная функция изображенной на рис. 17.14, б активной RC -цепи была получена ранее (см. § 3.11) и имеет вид:

$$H_p(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{-Y_1 Y_3}{Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_3 Y_4}. \quad (17.28)$$

Для реализации в виде такой цепи полиномиального фильтрового звена второго порядка с передаточной функцией

$$H_p(p) = H \frac{1}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}. \quad (17.29)$$

нужно выбрать проводимости Y_1 , Y_3 и Y_4 активными: G_1 , G_3 и G_4 , а проводимости Y_2 и Y_5 — емкостными: pC_2 и pC_5 . Тогда (17.28) запишется в следующей форме:

$$H_p(p) = \frac{-G_1 G_3}{p^2 C_5 C_2 + p C_5 (G_1 + G_3 + G_4) + G_3 G_4}. \quad (17.30)$$

Сопоставление коэффициентов при p в соответствующих степенях и свободных членов из (17.30), выраженных через элементы фильтра, с заданными числовыми значениями коэффициентов при p и свободных членов из (17.29) позволяет определить значения элементов фильтра.

Пример. Реализовать фильтр нижних частот Баттерворта второго порядка из примера в виде активной RC -цепи.

Передаточная функция НЧ фильтра Баттерворта второго порядка была полу-

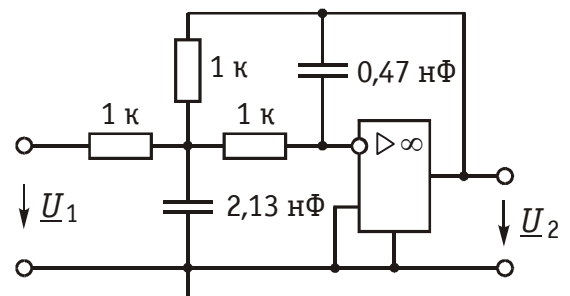


Рис. 17.15

чена ранее (см. пример на стр. 450) $H_p(p) = 1/(p^2 + 1,41p + 1)$. Для сопоставления с ней передаточной функции (17.30) представим последнюю в виде, когда коэффициент при p^2 равен 1:

$$H_p(p) = \frac{G_1 G_3}{C_2 C_5} \cdot \frac{1}{p^2 + p \frac{G_1 + G_3 + G_4}{C_2} + \frac{G_3 G_4}{C_2 C_5}}.$$

Приравнявая коэффициенты при p и свободные члены этих передаточных функций, получаем три уравнения с шестью неизвестными G_1, G_2, G_3, G_4, C_1 и C_2 : $G_1 G_3 / \hat{C}_2 \hat{C}_5 = 1$; $(G_1 + G_3 + G_4) / \hat{C}_2 = 1,41$; $G_3 G_4 / \hat{C}_2 \hat{C}_5 = 1$.

Следует учесть, что в уравнения входят нормированные значения емкостей \hat{C}_2 и \hat{C}_5 , так как коэффициенты передаточной функции фильтра Баттерворта получены для нормированной частоты $\Omega = \omega / \omega_n$ (где $\omega_n = \omega_n = 2\pi f_n = 2\pi \cdot 159 \cdot 10^3 = 10^6$ рад/с).

Поскольку искомым величин больше, чем уравнений, зададимся частью из них. Выберем приемлемые значения проводимостей G_1, G_3 и G_4 , например $G_1 = G_3 = G_4 = 10^{-3}$ См, т. е. $R_1 = R_3 = R_4 = 1$ кОм. Далее из второго уравнения легко получить $\hat{C}_2 = (G_1 + G_3 + G_4) / 1,41 = 2,128 \cdot 10^{-3}$, а из первого и третьего уравнений — $\hat{C}_5 = G_3 G_4 / \hat{C}_2 = 0,47 \cdot 10^{-3}$. Денормированные значения емкостей $C_2 = \hat{C}_2 / \omega_n = 2,13$ нФ, $C_5 = \hat{C}_5 / \omega_n = 0,47$ нФ.

Схема фильтра приведена на рис. 17.15.

Реализация фильтров со всплесками ослабления, передаточные функции которых описываются выражением (17.21), осуществляется так же, как и реализация полиномиальных фильтров. Передаточная функция (17.21) разбивается на произведение простейших (первого и второго порядков) передаточных функций; последние реализуются в виде фильтровых RC -звеньев первого и второго порядков, соединяемых каскадно в общую схему фильтра.

Для реализации передаточных функций второго порядка с нулем передачи $H_{pi}(p) = (p^2 + \alpha_0) / (p^2 + b_1 p + \alpha_0)$ используются специальные фильтровые ARC -звенья.

Более подробно методику синтеза активных RC -фильтров со всплесками ослабления можно изучить, обратившись к специальной литературе.

17.4. Переход от фильтров нижних частот к другим типам фильтров

Преобразование шкалы частот ФНЧ. Для синтеза фильтров верхних частот (полосовых или заграждающих) и, в частности, для нахождения их передаточных функций, можно было бы заново повторить все преобразования, примененные к фильтрам нижних частот. Однако такой подход нерационален. Обычно для расчета ФВЧ, ПФ или ЗФ используют преобразование шкалы частот ФНЧ-прототипа.

На рис. 17.16 приведены характеристики ослабления фильтров: нижних частот (а), верхних частот (б) полосового (в) и заграж-

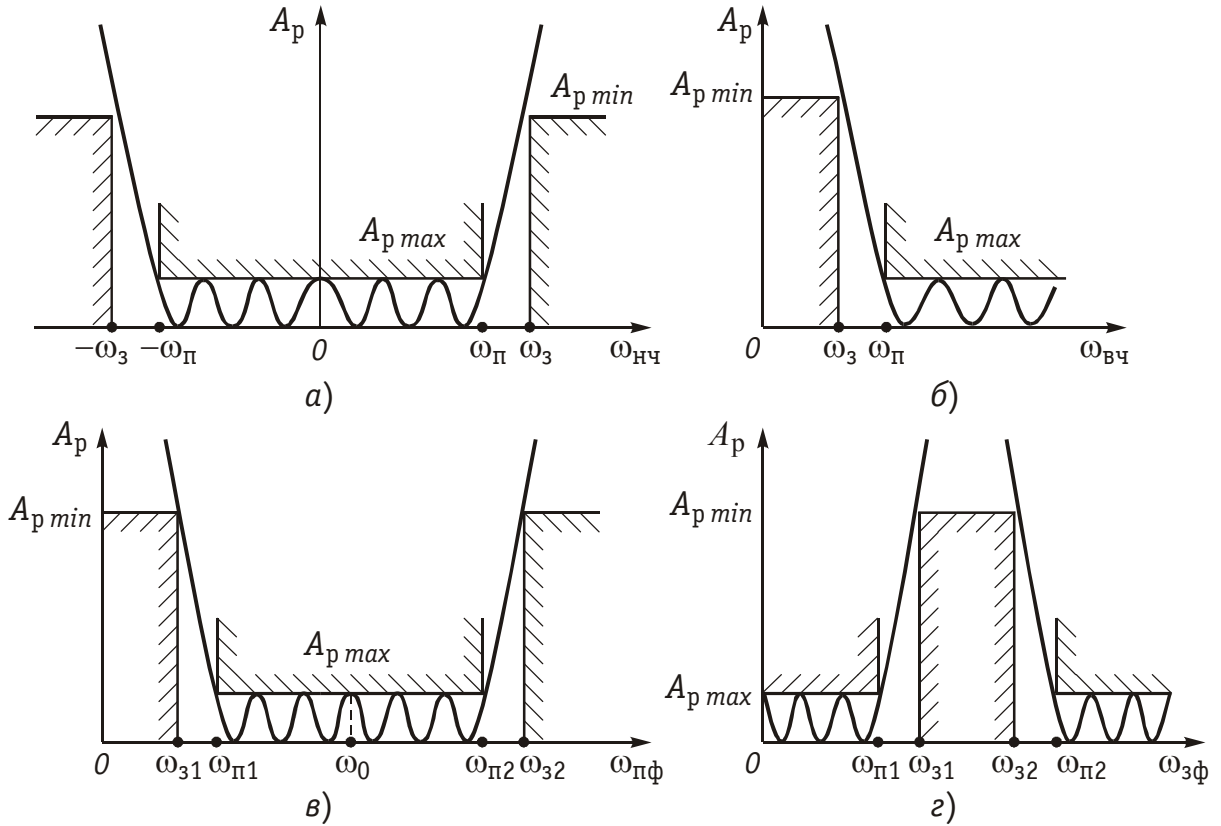


Рис. 17.16

дающего (г). Для ФНЧ эта характеристика построена как для положительных, так и для отрицательных частот. Шкала частот для каждого фильтра помечена для удобства буквенными обозначениями: «нч», «вч», «пф», «зф».

Из рис. 17.16, а и б видно, что характеристика ослабления ФНЧ в отрицательной области частот повторяет характеристику ФВЧ. Преобразовать характеристику ФНЧ в характеристику ФВЧ можно с помощью замены переменной:

$$\omega_{\text{н.ч}} = -\omega_{\text{п}}^2 / \omega_{\text{в.ч}}, \quad (17.31)$$

где $\omega_{\text{п}}$ — граничная частота полосы пропускания ФНЧ и ФВЧ.

График зависимости (17.31) представляет собой нижнюю ветвь гиперболы. На рис. 17.17 приведены характеристика ослабления ФНЧ, график преобразующей функции (17.31) и характеристика ослабления ФВЧ. Действительно, такое преобразование частоты приводит к соответствию: частоты $\omega_{\text{н.ч}} = -\infty$ частоте $\omega_{\text{в.ч}} = 0$; частоты $\omega_{\text{н.ч}} = -\omega_{\text{п}}$ частоте $\omega_{\text{в.ч}} = \omega_{\text{п}}$; частоты $\omega_{\text{н.ч}} = 0$ частоте $\omega_{\text{в.ч}} = \infty$.

Чтобы из характеристики ФНЧ получить характеристику ПФ (рис. 17.16, в), необходима замена переменной:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{н.ч}} &= \omega_{\text{п.ф}} - \omega_0^2 / \omega_{\text{п.ф}} = (\omega_{\text{п.ф}}^2 - \omega_0^2) / \omega_{\text{п.ф}} = \\ &= \omega_0 (\omega_{\text{п.ф}} / \omega_0 - \omega_0 / \omega_{\text{п.ф}}), \end{aligned} \quad (17.32)$$

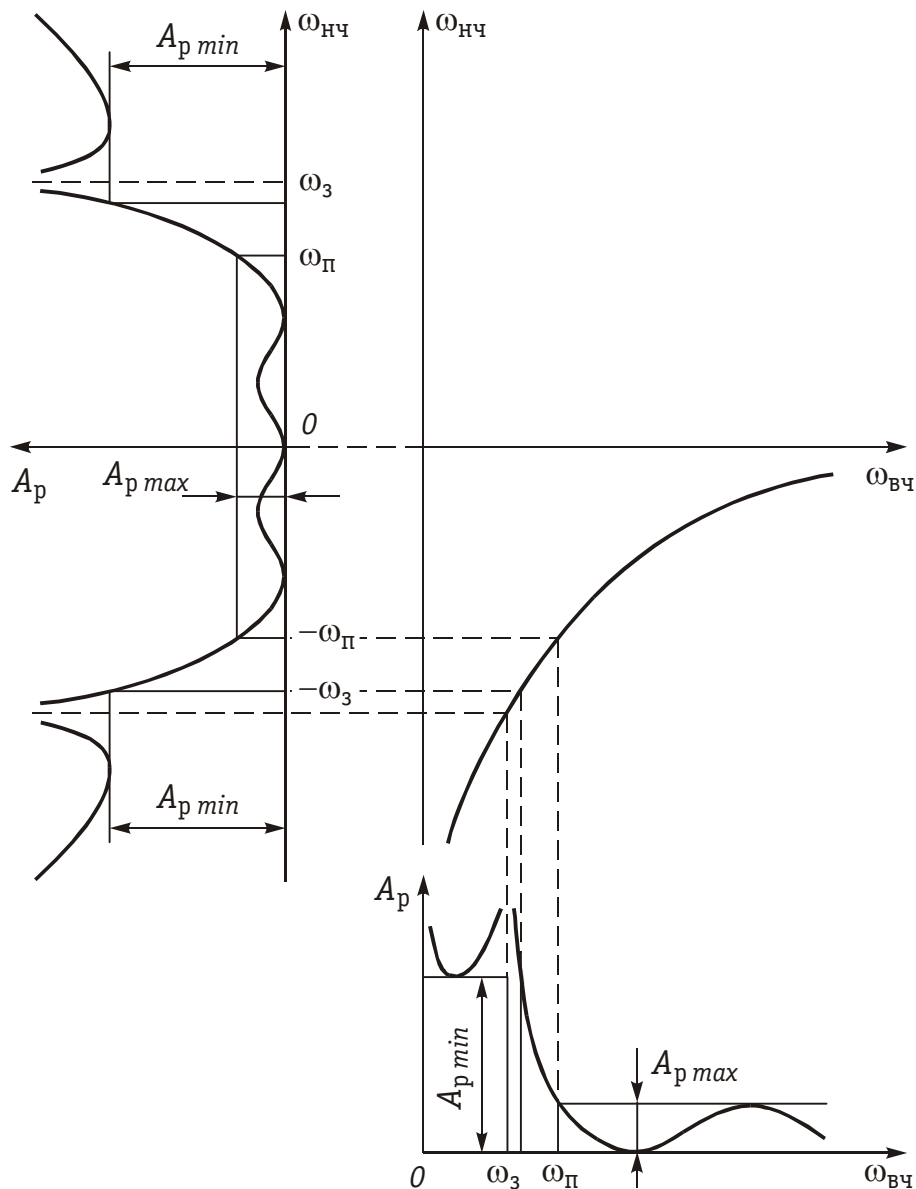


Рис. 17.17

где $\omega_0 = \sqrt{\omega_{\pi 1} \omega_{\pi 2}} = \sqrt{\omega_{31} \omega_{32}}$; $\omega_{\pi 1}$ и $\omega_{\pi 2}$ — граничные частоты полосы пропускания ПФ; ω_{31} и ω_{32} — граничные частоты полосы не пропускания ПФ.

График функции (17.32) описывается более сложной кривой, чем у ФВЧ. На рис. 17.18 показано как происходит преобразование шкалы частот ФНЧ в шкалу частот ПФ с помощью преобразования частоты (17.32). Данное преобразование приводит к соответствию частоты $\omega_{н.ч} = -\infty$ частоте $\omega_{п.ф} = 0$, частоты $\omega_{н.ч} = 0$ частоте $\omega_{п.ф} = \omega_0$, частоты $\omega_{н.ч} = \infty$ частоте $\omega_{п.ф} = \infty$.

Характеристику (рис. 17.16, з) заграждающего фильтра можно получить из характеристики ФНЧ, применяя преобразование частоты:

$$\omega_{н.ч} = \frac{\omega_0^2 \cdot \omega_{з.ф}}{\omega_0^2 - \omega_{з.ф}^2}. \quad (17.33)$$

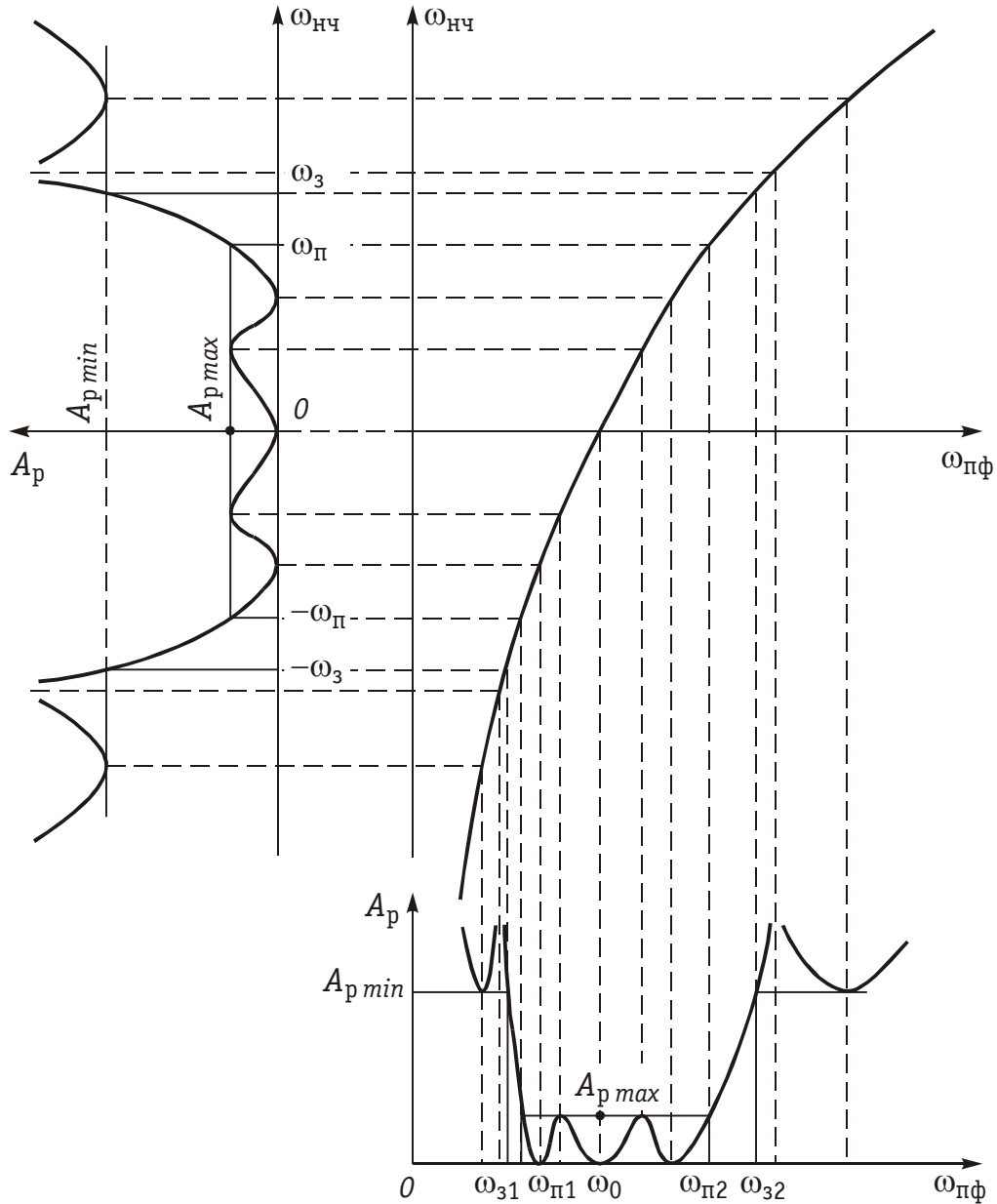


Рис. 17.18

Преобразование схем пассивных LC -фильтров. Замена переменных (2.31) и (2.32) в выражении для квадрата АЧХ $|H_p(j\omega)|^2$ фильтра нижних частот приводит при реализации этой функции к преобразованию схемы ФНЧ в схемы ФВЧ и ПФ. Индуктивное сопротивление ФНЧ $j\omega_{H\phi}L_{H\phi}$ переходит при преобразовании частот (17.31) в сопротивление:

$$j\omega_{H\phi}L_{H\phi} = j\left(-\omega_{\pi\phi}^2/\omega_{B\phi}\right)L_{H\phi} = \omega_{\pi\phi}^2/(j\omega_{B\phi}/L_{H\phi}) = 1/(j\omega_{B\phi}C_{B\phi}),$$

т. е. в емкостное сопротивление ФВЧ, где $C_{B\phi} = 1/\omega_{\pi\phi}^2 L_{H\phi}$.

Емкостная проводимость:

$$\begin{aligned} j\omega_{H\phi}C_{H\phi} &= j\left(-\omega_{\pi\phi}^2/\omega_{B\phi}\right)C_{H\phi} = \omega_{\pi\phi}^2/(j\omega_{B\phi}/C_{H\phi}) = \\ &= 1/(j\omega_{B\phi}L_{B\phi}) \end{aligned}$$

переходит в индуктивную проводимость фильтра ВЧ с индуктивностью $L_{в.ч} = 1/\omega_{п}^2 C_{н.ч}$.

Преобразование частоты (17.32) приводит к замене индуктивного сопротивления ФНЧ:

$$j\omega_{н.ч}L_{н.ч} = j\omega_{п.ф}L_{н.ч} + \frac{\omega_0^2}{j\omega_{п.ф}}L_{н.ч} = j\omega_{п.ф}L_{п.ф1} + \frac{1}{j\omega_{п.ф}C_{п.ф1}}$$

сопротивлением последовательного контура в ПФ с элементами $L_{п.ф1} = L_{н.ч}$ и $C_{п.ф1} = 1/(\omega_0^2 L_{н.ч})$.

Емкостная проводимость ФНЧ:

$$j\omega_{н.ч}C_{н.ч} = j\omega_{п.ф}C_{н.ч} + \frac{\omega_0^2}{j\omega_{п.ф}}C_{н.ч} = j\omega_{п.ф}C_{п.ф2} + \frac{1}{j\omega_{п.ф}L_{п.ф2}}$$

заменяется в ПФ проводимостью параллельного контура с элементами $C_{п.ф2} = C_{н.ч}$ и $L_{п.ф2} = 1/(\omega_0^2 C_{н.ч})$.

Нетрудно убедиться также, что индуктивный элемент ФНЧ преобразуется в ЗФ в параллельный колебательный контур с резонансной частотой ω_0 , а емкость ФНЧ — в последовательный колебательный контур с той же резонансной частотой.

Пример. Рассчитать полосовой фильтр с характеристиками Баттерворта, удовлетворяющий требованиям: $A_{pmax} = 3$ дБ; $A_{pmin} = 12,2$ дБ; $f_{п1} = 1241$ кГц; $f_{п2} = 1400$ кГц; $f_{з1} = 1168,5$ кГц; $f_{з2} = 1486$ кГц.

Для решения поставленной задачи нужно сначала построить фильтр НЧ-прототипа, а затем с помощью преобразования частоты перейти к ПФ.

Пересчитаем требования ПФ (рис. 17.16, в) в требования к НЧ-прототипу (см. рис. 17.16, а). Воспользуемся формулой (17.32): $f_0 = \sqrt{f_{п1}f_{п2}} = \sqrt{f_{з1}f_{з2}} = 1734,4$ кГц; $f_{п} = f_{п2} - f_0^2/f_{п1} = f_{п2} - f_{п1} = 159$ кГц; $f_{з} = f_{з2} - f_0^2/f_{з1} = f_{з2} - f_{з1} = 318$ кГц. В качестве нормирующей частоты выберем $f_{н} = f_{п}$. Тогда нормированные частоты $\Omega_{п} = 1$ и $\Omega_{з} = f_{з}/f_{п} = 2$. Итак, требования к НЧ-прототипу имеют вид: $A_{pmax} = 3$ дБ; $A_{pmin} = 12,2$ дБ; $f_{п} = 159$ кГц ($\Omega_{п} = 1$); $f_{з} = 318$ кГц ($\Omega_{з} = 2$).

В примере для такого НЧ-фильтра были получены квадрат АЧХ $|H_p(j\Omega)|^2 = 1/(1 + \Omega^4)$, рабочее ослабление $A_p = 10 \lg(1 + \Omega^4)$ и передаточная функция $H_p(p) = 1/(p^2 + 1,41p + 1)$.

В другом примере этот фильтр был реализован в виде схемы, изображенной на рис. 17.11 с элементами $L_{н.ч} = 1,41$ мГн и $C_{н.ч} = 1,41$ нФ.

При переходе к требуемому полосовому фильтру необходимо индуктивность продольного плеча $L_{н.ч}$ фильтра НЧ-прототипа заменить последователь-

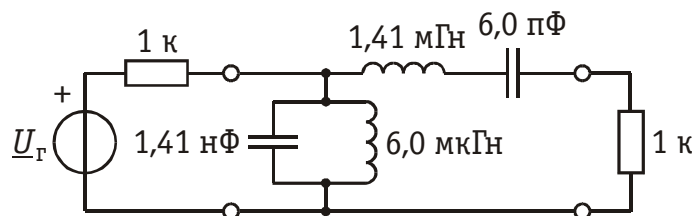


Рис. 17.19

ным контуром с элементами $L_{п.ф1} = L_{н.ч} = 1,41$ мГн и $C_{п.ф1} = 1/((2\pi f_0)^2 L_{н.ч}) = 6 \cdot 10^{-12}$ Ф = 6,0 пФ.

Вместо емкости $C_{н.ч}$ в поперечном плече полосового фильтра будет включен параллельный контур с элементами $C_{п.ф2} = C_{н.ч} = 1,41$ нФ и $L_{п.ф2} = 1/((2\pi f_0)^2 C_{н.ч}) = 6 \cdot 10^{-6}$ Гн = 6 мкГн.

Схема искомого полосового фильтра приведена на рис. 17.19.

Преобразование передаточных функций активных RC-фильтров. В активных RC-фильтрах для того, чтобы перейти от передаточной функции ФНЧ-прототипа к передаточным функциям ФВЧ и ПФ, следует осуществить замену комплексной переменной p . Из (17.31) получаем для ФВЧ

$$j\omega_{н.ч} = \omega_{п.ч}^2 / j\omega_{в.ч} \quad \text{или} \quad j\Omega_{н.ч} = 1/j\Omega_{в.ч}, \quad (17.34)$$

где $\Omega_{н.ч} = \omega_{н.ч} / \omega_{п.ч}$ и $\Omega_{в.ч} = \omega_{в.ч} / \omega_{п.ч}$.

Заменяя в (17.34) оператор $j\Omega$ на оператор p , запишем преобразование переменной p в выражении нормированной по частоте передаточной функции ФНЧ-прототипа:

$$p_{н.ч} = 1/p_{в.ч}. \quad (17.35)$$

Передаточная функция полиномиального звена второго порядка ФНЧ имеет вид:

$$H_p(p_{н.ч}) = H \frac{1}{b_2 p_{н.ч}^2 + b_1 p_{н.ч} + b_0}. \quad (17.36)$$

Замена переменной (17.35) в этом выражении приводит к передаточной функции полиномиального звена второго порядка ФВЧ:

$$H_p(p_{в.ч}) = H \frac{p_{в.ч}^2}{b_0 p_{в.ч}^2 + b_1 p_{в.ч} + b_2}. \quad (17.37)$$

Для реализации звена с передаточной функцией (17.37) может быть использована схема рис. 17.14, б, в которой следует выбрать проводимости Y_2 и Y_5 — активными, т. е. $Y_2 = G_2$ и $Y_5 = G_5$, а проводимости Y_1 , Y_3 и Y_4 — емкостными, т. е. $Y_1 = pC_1$; $Y_3 = pC_3$ и $Y_4 = pC_4$. Подставляя эти значения проводимостей в выражение (17.28), получаем передаточную функцию

$$H_p(p_{в.ч}) = H \frac{-p_{в.ч}^2 C_1 C_3}{p_{в.ч}^2 C_3 C_4 + p G_5 (C_1 + C_3 + C_4) + G_2 G_5} \quad (17.38)$$

ARC-звена ФВЧ второго порядка, схема которого дана на рис. 17.20. Значения элементов схемы будут найдены, если приравнять коэффициенты из (17.37) и (17.38) при соответствующих степенях p .

Для перехода от НЧ-прототипа к полосовому фильтру воспользуемся (17.32):

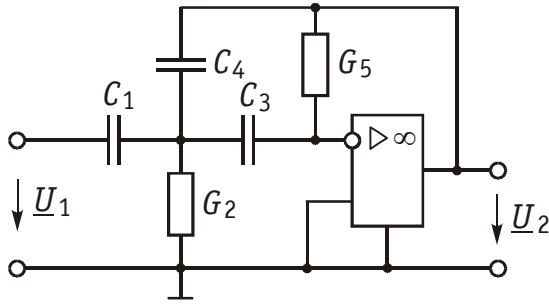


Рис. 17.20

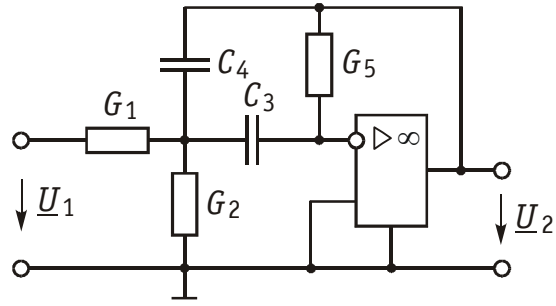


Рис. 17.21

$$j\omega_{н.ч} = (\omega_0^2 - \omega_{п.ф}^2) / j\omega_{п.ф} \quad \text{или} \quad j\Omega_{н.ч} = (\Omega_0^2 - \Omega_{п.ф}^2) / j\Omega_{п.ф}, \quad (17.39)$$

где $\Omega_{н.ч} = \omega_{н.ч} / \omega_{п.}$; $\Omega_{п.ф} = \omega_{п.ф} / \omega_{п.}$; $\Omega_0 = \omega_0 / \omega_{п.}$.

Вводя переменную $p = j\Omega$ и учитывая, что $p^2 = -\Omega^2$, находим из (17.39):

$$p_{н.ч} = (p_{п.ф}^2 + \Omega_0^2) / p_{п.ф}. \quad (17.40)$$

Такая замена переменной $p_{н.ч}$ в (17.36) приводит к передаточной функции полосового фильтра:

$$H_p(p_{п.ф}) = H \frac{p_{п.ф}^2}{b_4' p_{п.ф}^4 + b_3' p_{п.ф}^3 + b_2' p_{п.ф}^2 + b_1' p_{п.ф} + b_0'}, \quad (17.41)$$

где $b_4' = b_2$; $b_3' = b_1$; $b_2' = 2b_2\Omega_0^2 + b_0$; $b_1' = b_1\Omega_0^2$; $b_0' = b_2\Omega_0^4$.

Видим, что при переходе к ПФ порядок передаточной функции удваивается. Передаточную функцию (17.41) можно разбить на произведение передаточных функций второго порядка и каждую из них реализовать отдельной АРС-схемой.

Запишем передаточную функцию ПФ второго порядка:

$$H_p(p_{п.ф}) = H \frac{p_{п.ф}}{b_{2п.ф} p_{п.ф}^2 + b_{1п.ф} p_{п.ф} + b_{0п.ф}}. \quad (17.42)$$

Подобную передаточную функцию имеет АРС-схема, изображенная на рис. 17.14, б при $Y_1 = G_1$, $Y_2 = G_2$, $Y_5 = G_5$ и $Y_3 = pC_3$, $Y_4 = pC_4$. Действительно, из (17.28) находим:

$$H_p(p_{п.ф}) = \frac{-p_{п.ф} G_1 C_3}{p_{п.ф}^2 C_3 C_4 + p_{п.ф} G_5 (C_3 + C_4) + G_5 (G_1 + G_2)}. \quad (17.43)$$

Элементы схемы фильтра (рис. 17.21) определяются сопоставлением (17.42) и (17.43).

Порядок синтеза ФВЧ, ПФ и ЗФ. С помощью преобразования частоты был осуществлен переход от ФНЧ к другим типам фильтра. Однако для их синтеза этого недостаточно, так как исходными при синтезе ФВЧ, ПФ и ЗФ являются требования не к ФНЧ, а к

данным фильтрам. Поэтому вначале требуется выполнять обратный переход. Сформулируем порядок синтеза ФВЧ, ПФ, ЗФ:

1) по заданным требованиям к ФВЧ, ПФ и ЗФ необходимо определить требования к ФНЧ;

2) решить задачу аппроксимации для ФНЧ (получить квадрат АЧХ или операторную передаточную функцию);

3) реализовать квадрат АЧХ в виде лестничного ФНЧ и перейти с помощью преобразования частоты к схеме требуемого типа фильтра (если выбрана пассивная схема фильтра);

4) используя соответствующее преобразование частоты, перейти от операторной передаточной функции ФНЧ к операторной передаточной функции искомого фильтра и реализовать его в виде АРС-схемы (если выбран активный РС-фильтр).

Рассмотрим более подробно первый пункт.

Пусть заданы требования к ФВЧ, т. е. заданы $\omega_{\text{ПВ.Ч}}$, $\omega_{\text{ЗВ.Ч}}$, $A_{\text{рmax}}$ и $A_{\text{рmin}}$ (см. рис. 17.17). Определим требования к ФНЧ. Если в выражение (17.31) вместо $\omega_{\text{В.Ч}}$ подставить $\omega_{\text{ПВ.Ч}}$, то согласно рис. 17.17 получим

$$-\omega_{\text{ЗН.Ч}} = -\omega_{\text{ПВ.Ч}}^2 / \omega_{\text{ЗВ.Ч}}.$$

Откуда:

$$\omega_{\text{ПН.Ч}} = \omega_{\text{ПВ.Ч}}; \quad \omega_{\text{ЗН.Ч}} = \omega_{\text{ПВ.Ч}}^2 / \omega_{\text{ЗВ.Ч}}.$$

Величины $A_{\text{рmax}}$ и $A_{\text{рmin}}$ остаются для ФНЧ такими же как и для ФВЧ. Таким образом получены требования к ФНЧ. По найденным требованиям к ФНЧ решаем задачу аппроксимации одним из методов, изложенных выше.

Пусть заданы требования к ПФ, т. е. известны $\omega_{\text{З1}}$, $\omega_{\text{П1}}$, $\omega_{\text{П2}}$, $\omega_{\text{З2}}$, а также ослабление в полосе пропускания $A_{\text{рmax}}$ и в полосе задерживания $A_{\text{рmin}}$ (см. рис. 17.18). Подставим в выражение (17.32) последовательно граничные частоты полос пропускания и задерживания полосового фильтра. Как видно из рис. 17.18, в результате такой подстановки получим:

$$\omega_{\text{ЗН.Ч}} = \omega_{\text{З2}} - \omega_0^2 / \omega_{\text{З2}}; \quad \omega_{\text{ПН.Ч}} = \omega_{\text{П2}} - \omega_0^2 / \omega_{\text{П2}};$$

Учитывая, что

$$\omega_0^2 = \omega_{\text{П1}} \cdot \omega_{\text{П2}} = \omega_{\text{З1}} \cdot \omega_{\text{З2}},$$

получим окончательно:

$$\omega_{\text{ЗН.Ч}} = \omega_{\text{З2}} - \omega_{\text{З1}}; \quad \omega_{\text{ПН.Ч}} = \omega_{\text{П2}} - \omega_{\text{П1}}.$$

Требования по ослаблению к ФНЧ-прототипу остаются такими же, как и к ПФ. Следовательно, имеются все исходные данные для решения задачи аппроксимации ФНЧ.

Аналогично решается задача для ЗФ. Граничные частоты для ПП и ПЗ фильтров рассчитываются по формулам

$$\omega_{п.ч} = \omega_0^2 / (\omega_{п2} - \omega_{п1}); \quad \omega_{з.ч} = \omega_0^2 / (\omega_{з2} - \omega_{з1}).$$

17.5. Резонаторные фильтры

В многоканальных системах передачи разделение каналов по частоте осуществляется с помощью полосовых фильтров. Чтобы сигналы одного канала не попадали в другой, ПФ должны иметь высокую избирательность. Добротность резонансных контуров таких фильтров $Q > 20 \dots 25f_0/(f_{п2} - f_{п1})$. Так, для фильтра с $f_0 = 62$ кГц и полосой пропускания $f_{п2} - f_{п1} = 4$ кГц $Q > 300$, в то же время для фильтра с $f_0 = 106$ кГц и $f_{п2} - f_{п1} = 4$ кГц $Q > 1500$.

В радиосвязи используются еще более высокие частоты (десятки и сотни мегагерц) и для построения избирательных фильтров нужны резонаторы с добротностью в тысячи и десятки тысяч единиц. Такие значения добротности никогда не обеспечиваются в LC -резонаторах (их добротность не превышает сотен единиц), поэтому в фильтрах применяют высокодобротные механические резонаторы, пьезоэлектрические, магнитострикционные и электромеханические.

В *пьезоэлектрических фильтрах* роль резонатора выполняет пластинка, вырезанная специальным образом из материала, обладающего пьезоэлектрическим эффектом (например, из кристалла кварца). Пьезоэффект кварцевой пластинки заключается в появлении на ее поверхностях электрических зарядов при механическом воздействии на пластинку. Существует и обратный пьезоэффект — возникновение механических колебаний пьезопластинки при помещении ее в переменное электрическое поле.

Если пьезопластинку поместить между металлическими обкладками и подать на обкладки переменное напряжение, то пластинка начнет совершать механические колебания. На поверхностях пластинки возникнут электрические заряды и во внешней цепи потечет ток. При совпадении частоты переменного напряжения и частоты собственных колебаний пластинки возникает механический резонанс; амплитуда колебаний достигнет максимума и ток во внешней цепи будет максимальным. Таким образом, механический резонанс в кварцевой пластине подобен резонансу напряжений в последовательном колебательном контуре.

Эквивалентная схема пьезоэлектрического (в частности, кварцевого) резонатора (рис. 17.22) помимо эквивалентных индуктивно-

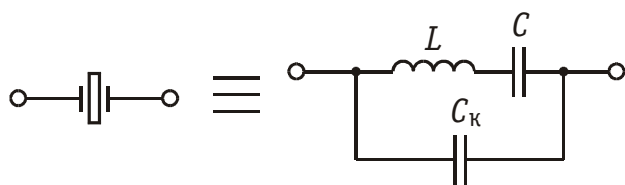


Рис. 17.22

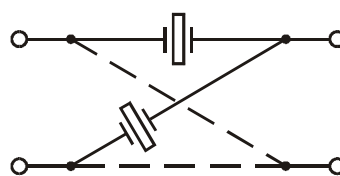


Рис. 17.23

сти L и емкости C резонатора содержит емкость кварцедержателя C_k , т. е. обкладок, между которыми помещена кварцевая пластинка.

Пьезоэлектрические фильтры с кварцевыми резонаторами называют *кварцевыми*. Добротность кварцевых резонаторов достигает 10 ... 20 тыс. ед. Кварцевые фильтры могут быть построены по мостовой схеме (рис. 17.23).

Магнитострикционные фильтры строятся на основе резонаторов из ферромагнитного материала, обладающего магнитострикционным эффектом (например, из сплава никеля с кобальтом). Магнитострикционный эффект состоит в том, что стержень из ферромагнетика, помещенный в переменное магнитное поле, изменяет свои геометрические размеры. Обратный эффект — изменение магнитной проницаемости стержня при механическом воздействии на него. Если, например, никель-кобальтовый стержень поместить внутрь катушки индуктивности, создающей переменное магнитное поле, его геометрические размеры начнут меняться. При этом будет меняться и его магнитная проницаемость. В катушке индуктивности наведется ЭДС, направленная против ЭДС генератора и уменьшающая ток во внешней цепи. При механическом резонансе амплитуда колебаний стержня будет максимальной, а ток во внешней цепи — минимальный. Таким образом, механический резонанс магнитострикционного стержня подобен резонансу токов параллельного колебательного контура.

Эквивалентная схема резонатора приведена на рис. 17.24 и включает в себя элементы L_M и C_M эквивалентного резонатору контура, а также индуктивность L_0 , учитывающую рассеяние магнитного потока при замыкании его через воздух.

Добротность магнитострикционных резонаторов ниже, чем кварцевых, и составляет 5 ... 10 тыс. ед. Магнитострикционные фильтры строятся по мостовой схеме (рис. 17.25).

В *электромеханических фильтрах* резонаторами являются металлические тела (диски, шарики, стержни, пластинки), соединенные металлическими связками. На рис. 17.26 изображен трехрезонаторный стержневой электромеханический фильтр. Возбуждаются

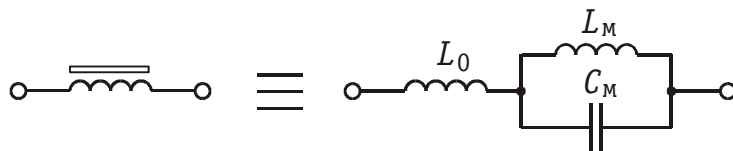


Рис. 17.25

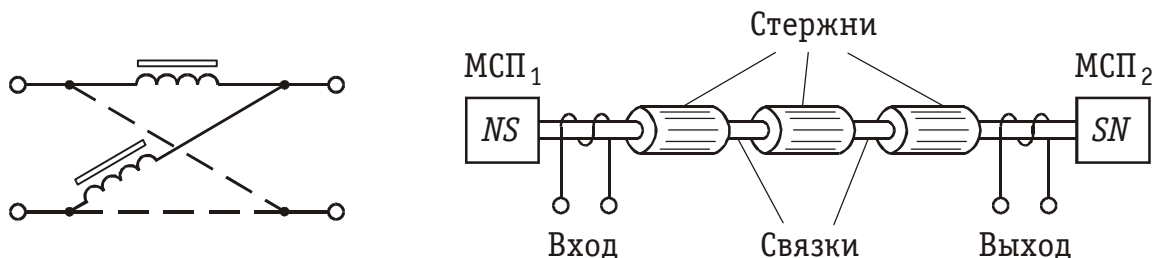


Рис. 17.25

Рис. 17.26

колебания в фильтре с помощью входного магнитострикционного преобразователя (МСП); снимаются колебания с выхода фильтра с помощью выходного МСП. Электромеханические фильтры являются также высокочастотными.

Кроме рассмотренных существуют и другие типы фильтров: фильтры с переключаемыми конденсаторами, кварцевые фильтры на поверхностных акустических волнах (ПАВ) и др. С некоторыми из них можно ознакомиться в [2] и специальной литературе.

Вопросы и задания для самопроверки

1. Что такое электрический фильтр? Какие типы фильтров существуют?
2. Характеристика рабочего ослабления фильтра изображена на рис. 17.3. Определить тип фильтра.

Ответ: ФНЧ Чебышева 5 порядка.

3. Какой вид имеют функции фильтрации фильтров Баттерворта, Чебышева, Золотарева?
4. Привести графики $A_p(\Omega)$ ФНЧ третьего порядка Баттерворта, Чебышева и Золотарева.
5. Рассчитать коэффициент неравномерности ослабления в полосе пропускания и порядок фильтра Баттерворта, удовлетворяющего требованиям: $A_{p\max} = 2$ дБ; $A_{p\min} = 25$ дБ; $f_{\Pi} = 15$ кГц; $f_{\Sigma} = 26$ кГц.

Ответ: $\varepsilon = 0,765$; $m = 6$.

6. Найти выражение для передаточной функции ФНЧ Баттерворта, удовлетворяющего требованиям, приведенным в задаче 5.

Ответ:
$$H_p(p) = \frac{1,3076}{[(p^2 + 0,5413p + 1,094)(p^2 + 1,479p + 1,094) \cdot (p^2 + 2,02p + 1,094)]}.$$

7. Рассчитать порядок и найти операторную передаточную функцию ФНЧ Чебышева, удовлетворяющего требованиям: $A_{p\max} = 1,25$ дБ; $A_{p\min} = 30$ дБ; $f_{\Pi} = 10^5$ кГц; $f_{\Sigma} = 2,5 \cdot 10^5$ кГц.

Ответ: $m = 3$;
$$H_p(p) = \frac{0,433}{p^3 + 0,9064p^2 + 1,1608p + 0,433}.$$

8. Привести LC-схемы фильтров, имеющих характеристики, изображенные на рис. 17.4.
9. Привести LC-схему фильтра, характеристика которого изображена на рис. 17.3.
10. Привести LC-схему фильтра НЧ Золотарева, а также график зависимости его рабочего ослабления от частоты.

11. Каков алгоритм расчета фильтров методом Дарлингтона?
12. Реализовать ФНЧ Баттерворта третьего порядка, имеющего передаточную функцию $H_p(p) = 1/(p^3 + 2p^2 + 2p + 1)$, в виде пассивной LC -схемы. Внутреннее сопротивление генератора $\hat{R}_T = 1$.
 Ответ: $\hat{L}_1 = 1$, $\hat{C} = 2$, $\hat{L}_3 = 1$.
13. Какие фильтры называются активными RC -фильтрами?
14. Какие передаточные функции имеют RC -фильтровые звенья первого и второго порядков? Как получить передаточную функцию фильтра более высокого порядка?
15. Реализовать активный RC -фильтр, имеющий передаточную функцию, приведенную в задаче 12.
16. Как осуществить переход от ФНЧ к ФВЧ, ПФ, ЗФ?
17. Доказать, что при переходе от ФНЧ к ЗФ индуктивность фильтра-прототипа преобразуется в параллельный контур в ЗФ, а емкость — в последовательный контур?
18. Привести схемы LC -фильтров, имеющих характеристики, изображенные на рис. 17.16, б, в, г.
19. Рассчитать ФВЧ с максимально плоской характеристикой ослабления, удовлетворяющий требованиям: $A_{pmax} = 1,5$ дБ; $A_{pmin} = 20$ дБ; $\omega_z = 10^6$ с⁻¹; $\omega_{\Pi} = 2 \cdot 10^6$ с⁻¹.
20. Как осуществляется переход от схемы НЧ-прототипа к схемам ФВЧ и ПФ в активных RC -фильтрах?
21. Какие высокочастотные механические резонаторы используются для построения фильтров?

ГЛАВА 18. КОРРЕКТИРУЮЩИЕ ЦЕПИ И ИХ СИНТЕЗ

18.1. Принцип корректирования искажений

Корректирование амплитудно-частотных искажений. Рассмотрим некоторую электрическую цепь — четырехполюсник (рис. 18.1), имеющую амплитудно-частотную характеристику (АЧХ), изображенную на рис. 18.2, а, а ослабление — на рис. 18.2, б. Пусть для упрощения входной сигнал $u_{вх}(t)$ состоит из суммы всего двух гармоник с частотами ω_1 и $2\omega_1$ (рис. 18.3, а). Форма входного сигнала показана на этом рисунке жирной линией.

Из анализа графиков АЧХ и ослабления цепи следует, что амплитуда первой гармоники при прохождении сигнала через цепь останется практически неизменной, а амплитуда второй гармоники уменьшится в несколько раз.

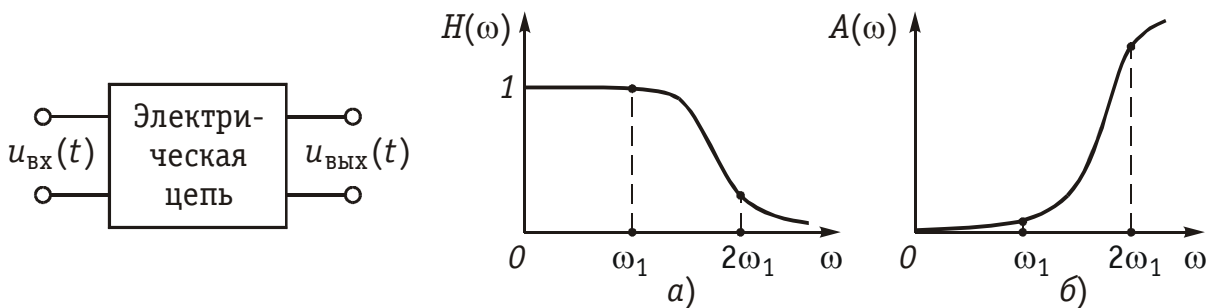


Рис. 18.1

Рис. 18.2

Результат сложения гармоник на выходе цепи дает форму сигнала, отличающуюся от входной (рис. 18.3, б).

Изменение формы сигнала на выходе цепи по сравнению с формой сигнала на ее входе называется *искажением сигнала*. Когда искажения формы сигнала связаны с непостоянством амплитудно-частотной характеристики цепи, они носят название *амплитудно-частотных искажений*.

Таким образом, условием отсутствия амплитудно-частотных искажений в цепи следует считать постоянство ее АЧХ (ослабления) на всех частотах (см. § 9.9):

$$H(\omega) = K; \quad A(\omega) = 20 \lg [1/H(\omega)] = A_0. \quad (18.1)$$

На практике условие (18.1) часто не выполняется, т. е. АЧХ и ослабление цепей аппаратуры и линий связи не являются постоянными. Эти цепи практически всегда вносят амплитудно-частотные искажения в передаваемый сигнал. Устранить подобные искажения полностью не удастся, но их можно уменьшить до величин, допустимых соответствующими нормами. Для этих цепей применяются *амплитудные корректоры*.

Амплитудный корректор — это четырехполюсник, который включается каскадно с цепью. Его задача заключается в том, чтобы

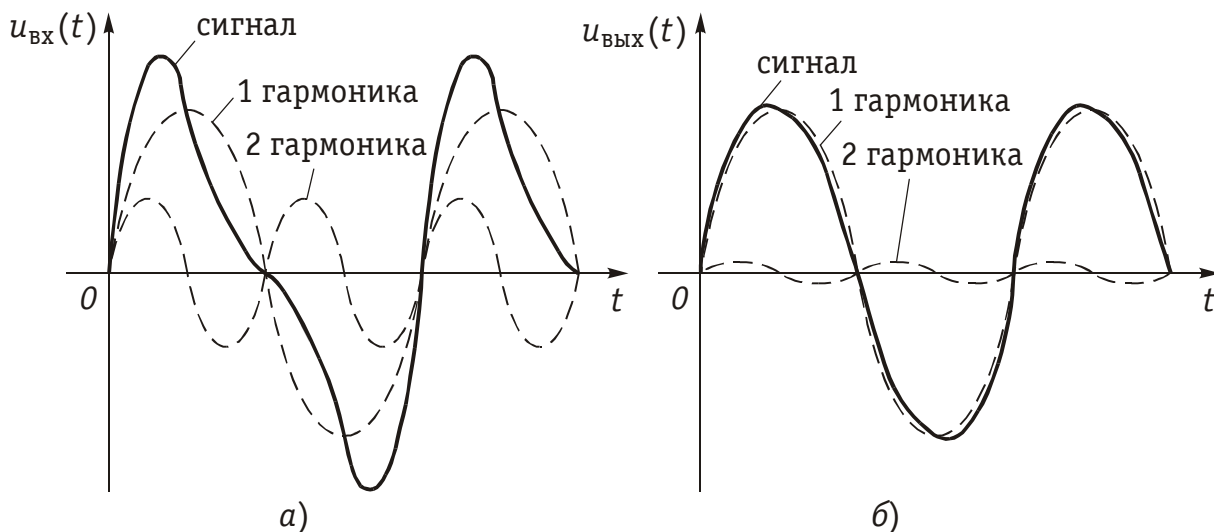


Рис. 18.3

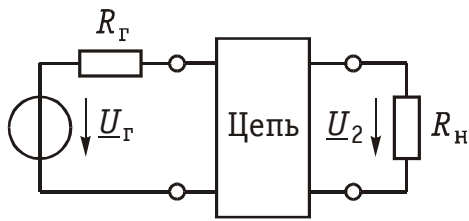


Рис. 18.4

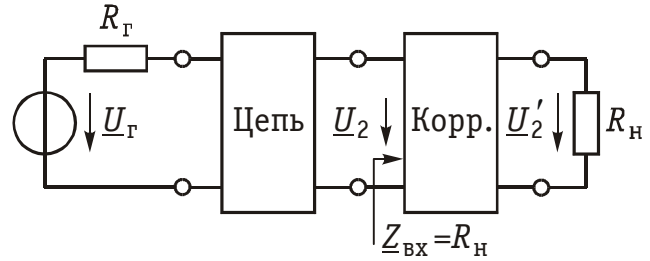


Рис. 18.5

дополнить АЧХ цепи или ее рабочее ослабление до постоянной величины на всех частотах рабочего диапазона. Вне рабочего диапазона АЧХ цепи может иметь любую форму.

На рис. 18.4 изображена цепь, работающая между генератором с внутренним сопротивлением R_{Γ} и нагрузкой $R_{\text{Н}}$. Рабочий коэффициент передачи этой цепи в соответствии с (12.44) равен:

$$H_{\text{ц}}(\omega) = \frac{2U_2}{U_{\Gamma}} \sqrt{\frac{R_{\Gamma}}{R_{\text{Н}}}}.$$

Для достижения условий безискаженной передачи между цепью и нагрузкой включен корректор (рис. 18.5). Чтобы режим работы цепи не нарушался, входное сопротивление корректора должно равняться сопротивлению нагрузки. Очевидно, только при этом условии напряжение на выходе цепи будет равно U_2 , как и в схеме рис. 18.4 до включения корректора.

Если обозначить напряжение на выходе каскадного соединения цепи и корректора U_2' , то рабочий коэффициент передачи такого соединения запишется в виде

$$H(\omega) = \frac{2U_2'}{U_{\Gamma}} \sqrt{\frac{R_{\Gamma}}{R_{\text{Н}}}}.$$

Разделим и умножим это выражение на U_2 и представим его в виде произведения двух сомножителей

$$H(\omega) = \left(\frac{2U_2}{U_{\Gamma}} \sqrt{\frac{R_{\Gamma}}{R_{\text{Н}}}} \right) \left(\frac{U_2'}{U_2} \right) = H_{\text{ц}}(\omega) \cdot H_{\text{к}}(\omega).$$

Первый сомножитель представляет рабочий коэффициент передачи цепи (см. рис. 18.4), а второй — коэффициент передачи по напряжению корректора.

Ослабление, вносимое каскадным соединением цепи и корректора,

$$A(\omega) = 20 \lg \frac{1}{H(\omega)} = 20 \lg \frac{1}{H_{\text{ц}}(\omega)} + 20 \lg \frac{1}{H_{\text{к}}(\omega)} = A_{\text{ц}}(\omega) + A_{\text{к}}(\omega)$$

вычисляется путем сложения ослаблений цепи и корректора.

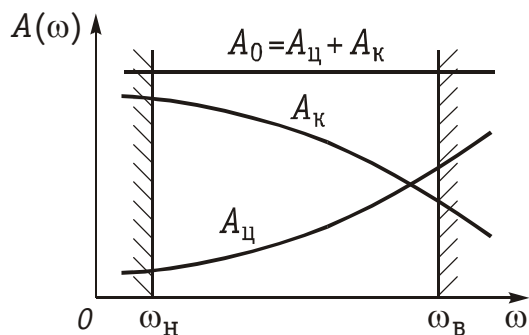


Рис. 18.6

Из рис. 18.6 видно, что корректор должен вносить ослабление, дополняющее ослабление цепи в рабочей полосе частот $\omega_{\text{н}} \div \omega_{\text{в}}$ до постоянной величины A_0 .

Корректирование фазочастотных искажений. Рассмотрим электрическую цепь — четырехполосник (рис. 18.7), имеющую рабочую фазовую постоянную $B(\omega)$, изображенную на рис. 18.8, а, и характеристику группового времени прохода (ГВП) $t_{\text{гр}}(\omega)$, являющуюся производной от рабочей фазовой постоянной, — на рис. 18.8, б. Входной сигнал $u_{\text{вх}}(t)$ состоит из суммы двух гармоник с частотами ω_1 и $2\omega_1$ (рис. 18.9, а). Форма входного сигнала изображена на этом рисунке жирной линией.

Анализ графиков $B(\omega)$ и $t_{\text{гр}}(\omega)$ цепи показывает, что фаза первой гармоники почти не меняется при прохождении сигнала через цепь, а фаза второй гармоники существенно увеличивается.

В результате сложения гармоник на выходе цепи получается сигнал, форма которого отличается от входной (рис. 18.9, б).

Искажения формы сигнала при прохождении его по цепи, обусловленные нелинейностью фазо-частотной характеристики цепи или непостоянством группового времени прохождения, называются *фазо-частотными искажениями*.

Условием отсутствия фазо-частотных искажений в цепи следует считать линейность рабочей фазовой постоянной $B(\omega)$ и ФЧХ цепи (рис. 18.10, а):

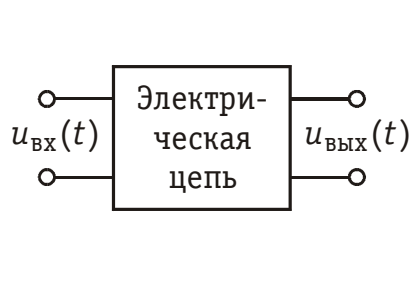


Рис. 18.7

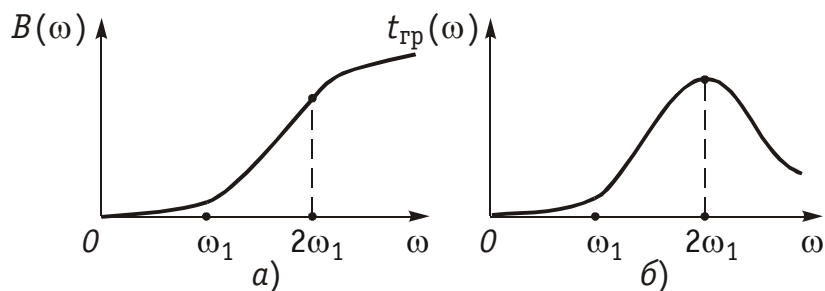


Рис. 18.8

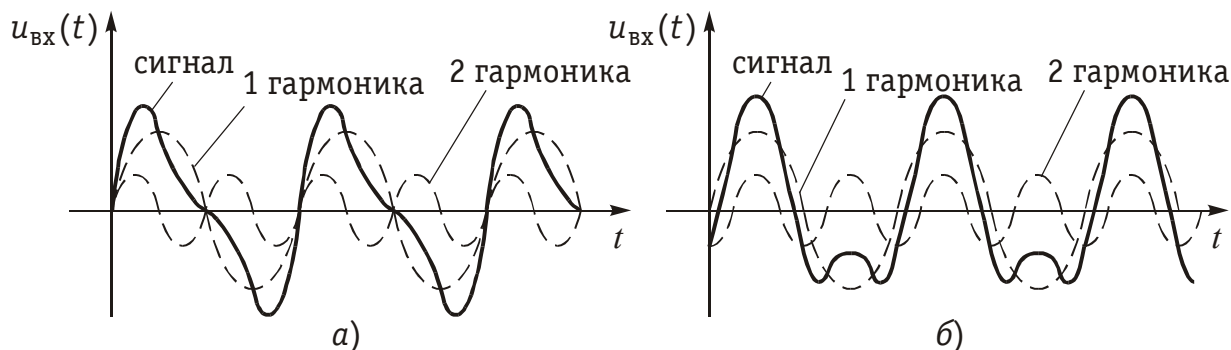


Рис. 18.9

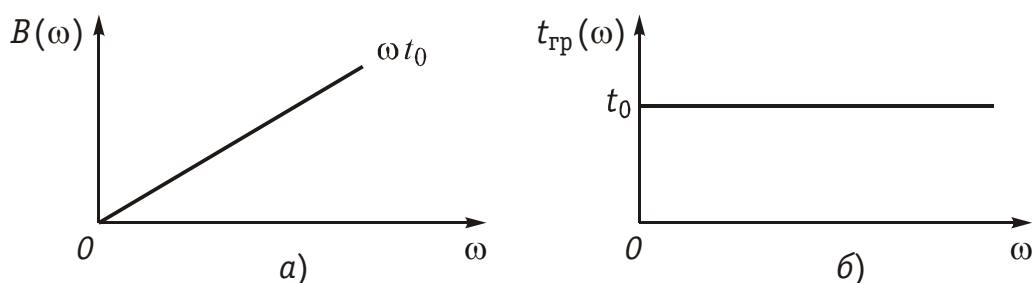


Рис. 18.10

$$B(\omega) = -\varphi(\omega) = \omega t_0. \quad (18.2)$$

Производная от фазо-частотной характеристики — это групповое время прохождения, которое для неискажающей цепи:

$$t_{\text{гр}}(\omega) = \frac{dB(\omega)}{d\omega} = t_0 \quad (18.3)$$

должна быть постоянной на всех частотах (рис. 18.10, б).

В реальных цепях условия (18.2) и (18.3) обычно не выполняются, т. е. ФЧХ не является линейной, а ГВП — не постоянно. Такие цепи вносят фазо-частотные искажения в передаваемый сигнал. Для уменьшения подобных искажений до допустимых значений применяют *фазовые корректоры*.

Фазовый корректор — это четырехполюсник, включаемый каскадно с цепью и дополняющий фазовую характеристику цепи до линейной. Вместо корректирования частотной характеристики фазы можно выравнивать характеристику группового времени прохождения так, чтобы она была постоянной на всех частотах рабочего диапазона. Фазовый корректор не должен искажать АЧХ цепи.

На рис. 18.11 для достижения условий безискаженной передачи между генератором и нагрузкой включено каскадное соединение цепи с ФЧХ, подлежащей коррекции, и корректора. Входное сопротивление фазового корректора должно равняться сопротивлению нагрузки, чтобы условия работы цепи не изменялись по сравнению с теми, в которых находится цепь, включенная между генератором и нагрузкой в отсутствие корректора.

Передаточная функция цепи, изображенной на рис. 18.11:

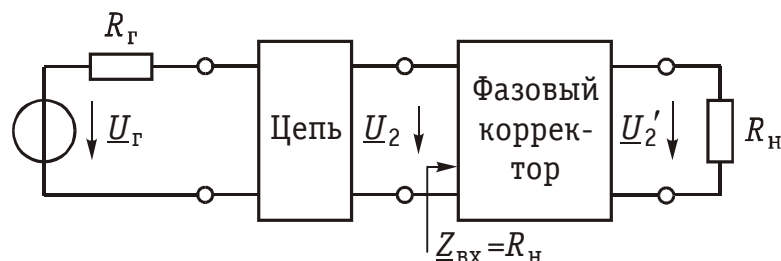


Рис. 18.11

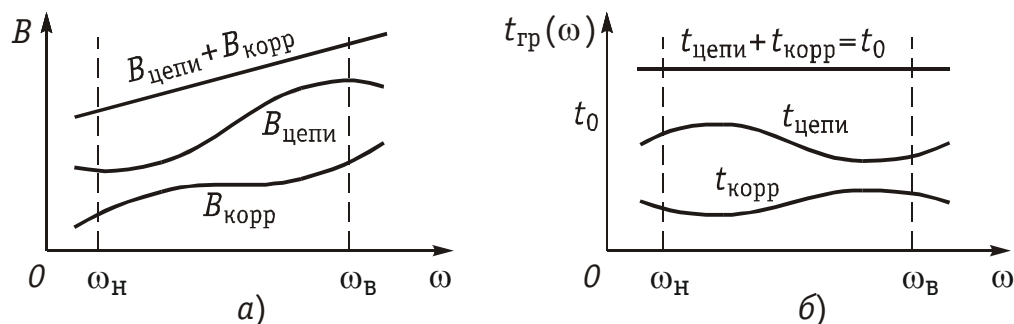


Рис. 18.12

$$H(j\omega) = \frac{2\underline{U}_2'}{\underline{U}_\Gamma} \sqrt{\frac{R_\Gamma}{R_\text{н}}}.$$

Умножим и разделим это выражение на \underline{U}_2 и представим его в виде произведения передаточных функций цепи $H_\text{ц}(j\omega)$ и корректора $H_\text{к}(j\omega)$:

$$H(j\omega) = \left(\frac{2\underline{U}_2}{\underline{U}_\Gamma} \sqrt{\frac{R_\Gamma}{R_\text{н}}} \right) \left(\frac{\underline{U}_2'}{\underline{U}_2} \right) = H_\text{ц}(j\omega) \cdot H_\text{к}(j\omega).$$

Фазо-частотная характеристика каскадного соединения цепи и корректора:

$$\varphi(\omega) = \varphi_\text{ц}(\omega) + \varphi_\text{к}(\omega) \quad (18.4)$$

вычисляется как сумма ФЧХ цепи и корректора.

Из рис. 18.12 видно, что фазовый корректор должен дополнять ФЧХ цепи в рабочей полосе частот $\omega_\text{н} \div \omega_\text{в}$ до линейной зависимости (рис. 18.12, а) либо дополнять групповое время прохождения цепи до постоянной величины t_0 в том же рабочем диапазоне частот (рис. 18.12, б). За пределами рабочего диапазона ФЧХ и ГВП могут иметь любую форму.

Корректоры бывают постоянными и непостоянными (регулируемыми). Характеристики постоянных корректоров не меняются при изменении характеристик цепи. Существуют корректоры, характеристики которых можно изменить в зависимости от изменения параметров цепи. Изменение параметров цепи возможно, во-первых, при изменении показателей окружающей среды, прежде всего температуры. Во-вторых, в технике связи распространены коммутируемые сети, когда канал связи между двумя пользователями устанавливается случайным образом на время сеанса связи и заранее неизвестно, из каких участков он будет составлен. Погрешности в АЧХ и ФЧХ, вносимые каждым участком могут складываться неудачно, так что общая погрешность будет больше допустимых величин. В этом случае включают так называемые «подчисточные» корректоры. Настройку регулируемых корректоров производят либо вручную, либо автоматически.

18.2. Амплитудные корректоры

Пассивные корректоры. Пассивные амплитудные корректоры строят, как правило, в виде симметричной Т-перекрытой схемы.

Симметричный Т-перекрытый четырехполюсник приведен на рис. 18.13. Сопротивления \underline{Z}_1 и \underline{Z}_2 выбираются обратными, т. е. $\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = R_0^2$. Если такой четырехполюсник нагрузить на сопротивление R_0 , то его входное сопротивление окажется равным также R_0 .

Комплексная передаточная функция по напряжению схемы рис. 18.13 может быть вычислена по формуле:

$$\underline{H}_k = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R_0}{\underline{Z}_1 + R_0} \quad \text{или} \quad H_k(j\omega) = \frac{R_0}{\underline{Z}_1(j\omega) + R_0}.$$

Операторная передаточная функция по напряжению имеет вид:

$$H_k(p) = \frac{R_0}{\underline{Z}_1(p) + R_0}. \quad (18.5)$$

Вычислим ослабление, вносимое корректором:

$$A_k(\omega) = 20 \lg \frac{1}{H_k(\omega)} = 20 \lg \left| 1 + \frac{\underline{Z}_1(j\omega)}{R_0} \right|. \quad (18.6)$$

Данная формула показывает, что зная поведение \underline{Z}_1 на разных частотах, можно определить частотную зависимость ослабления A_k .

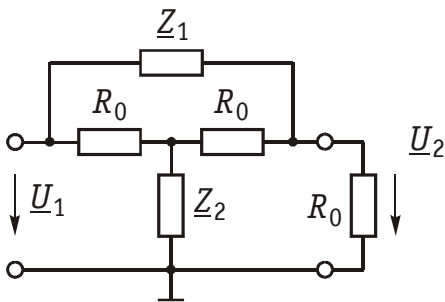
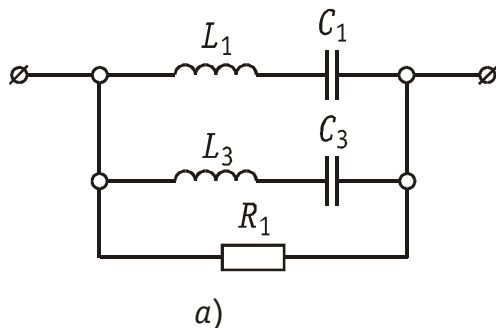
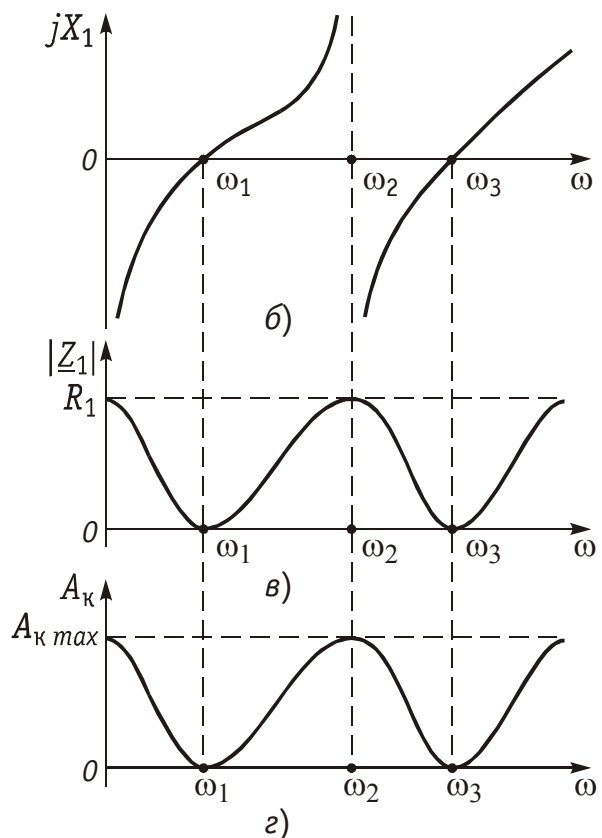


Рис. 18.13



a)



з)

Рис.18.14

Пример. Схема двухполюсника \underline{Z}_1 в продольном плече корректора изображена на рис. 18.14, а. Построить график частотной зависимости ослабления корректора $A_k(\omega)$.

Построим вначале график частотной зависимости сопротивления реактивного двухполюсника $X_1(\omega)$, образованного элементами L_1 , C_1 , L_3 и C_3 . На нулевой частоте индуктивное сопротивление равно нулю, а емкостное — бесконечности, поэтому $X_1(0) \rightarrow -\infty$. Двухполюсник имеет три резонанса, причем первый — резонанс напряжений, на частоте ω_1 , второй — резонанс токов на частоте ω_2 , третий — снова резонанс напряжений на частоте ω_3 . Это значит, что $X_1(\omega_1) = X_1(\omega_3) = 0$, $X_1(\omega_2) \rightarrow \infty$. При $\omega \rightarrow \infty$ сопротивление $X_1(\omega)$ также бесконечно большое (рис. 18.14, б).

Сопротивление \underline{Z}_1 , стоящее в продольном плече корректора, содержит помимо реактивных элементов активное сопротивление R_1 (рис. 18.14, а). Поэтому на частотах, равных 0, ω_2 и ∞ , на которых реактивное сопротивление $X_1(\omega)$ стремится к ∞ , полное сопротивление $|\underline{Z}_1|$ двухполюсника ограничено величиной R_1 (рис. 18.14, в).

Ослабление корректора $A_k(\omega)$ рассчитывается по формуле (18.6) и зависит от значений $|\underline{Z}_1(\omega)|$. График $A_k(\omega)$ повторяет по форме график $|\underline{Z}_1(\omega)|$. На частоте резонанса токов ω_2 , а также на частотах $\omega = 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ ослабление корректора $A_k(\omega)$ достигает своего максимального значения:

$$A_{k \max} = 20 \lg \left| 1 + \frac{R_1}{R_0} \right|.$$

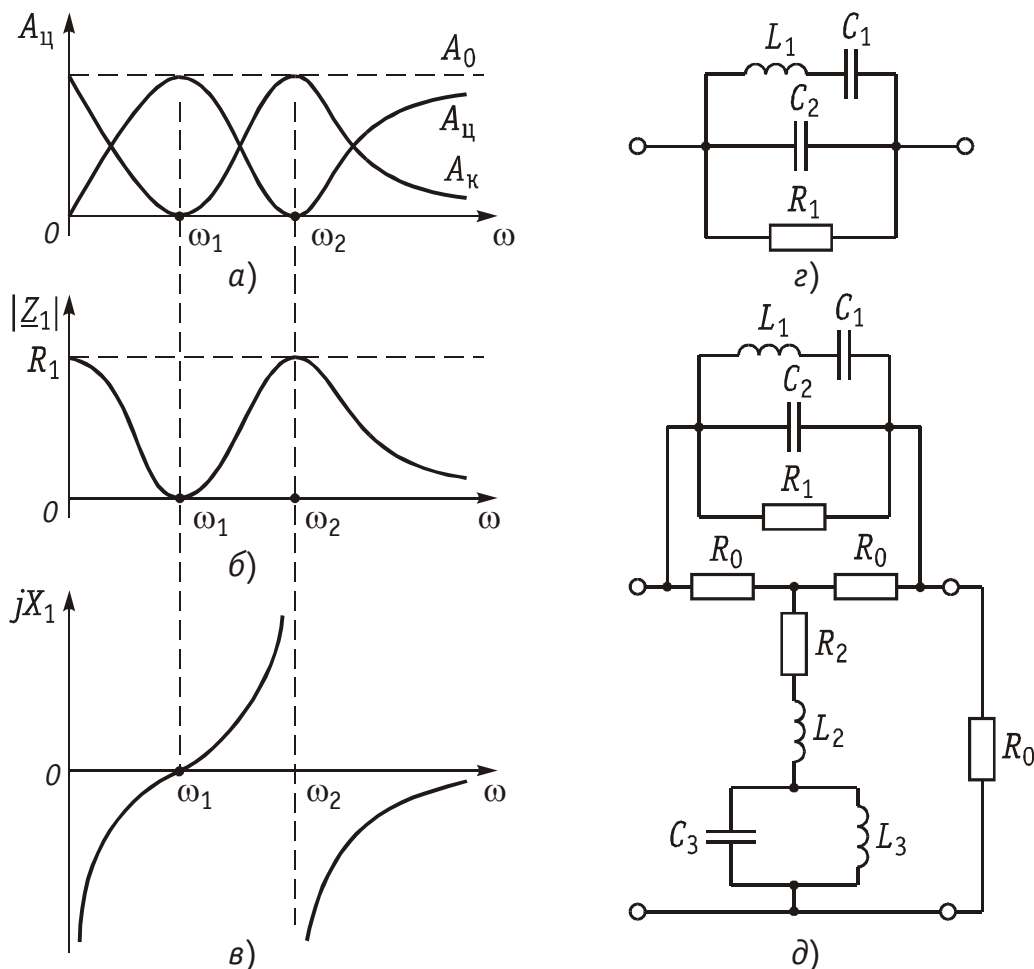


Рис. 18.15

На частотах резонанса напряжений ω_1 и ω_3 значение $A_k(\omega)$ равно 0 (рис. 18.14, з).

Пример. Задано ослабление $A_{\text{ц}}(\omega)$ цепи, подлежащей коррекции (рис. 18.15, а). Привести схему корректора, выравнивающего характеристику этой цепи до значения A_0 .

Находим требуемую характеристику ослабления $A_k(\omega)$ корректора из условия $A_k(\omega) = A_0 - A_{\text{ц}}(\omega)$. График $A_k(\omega)$ приведен на этом же рис. 18.15, а.

По характеристике $A_k(\omega)$ строим графики частотной зависимости полного сопротивления $|Z_1(\omega)|$ и реактивного сопротивления $X_1(\omega)$ продольного плеча корректора (рис. 18.15, б и 18.15, в).

Из графиков рис. 18.15, в и 18.15, б следует, что двухполосник \underline{Z}_1 имеет три реактивных элемента и одно активное сопротивление. В схеме два резонанса: первым наступает резонанс напряжений на частоте ω_1 , вторым — резонанс токов на частоте ω_2 . Таким условиям удовлетворяет двухполосник \underline{Z}_1 , изображенный на рис. 18.15, з. Двухполосник \underline{Z}_2 в поперечном плече корректора является обратным двухполоснику \underline{Z}_1 .

Схема корректора приведена на рис. 18.15, д.

На практике широко используются типовые звенья пассивных корректоров 1-го и 2-го порядков. Звенья 1-го порядка содержат по одному реактивному элементу в двухполосниках \underline{Z}_1 и \underline{Z}_2 . На рис. 18.16, а изображено такое звено с двухполосником \underline{Z}_1 , состоящим из параллельного соединения элементов R_1 и C_1 .

Операторное сопротивление двухполосника \underline{Z}_1 :

$$Z_1(p) = \frac{1}{C_1(p + 1/R_1C_1)}. \quad (18.7)$$

Если подставить выражение (18.7) в формулу (18.5), то получим операторную передаточную функцию звена:

$$H_k(p) = \frac{R_0C_1(p + 1/R_1C_1)}{1 + R_0C_1(p + 1/R_1C_1)} = \frac{p + 1/R_1C_1}{p + \frac{R_0 + R_1}{C_1R_0R_1}} = \frac{p + \alpha_1}{p + \alpha_2},$$

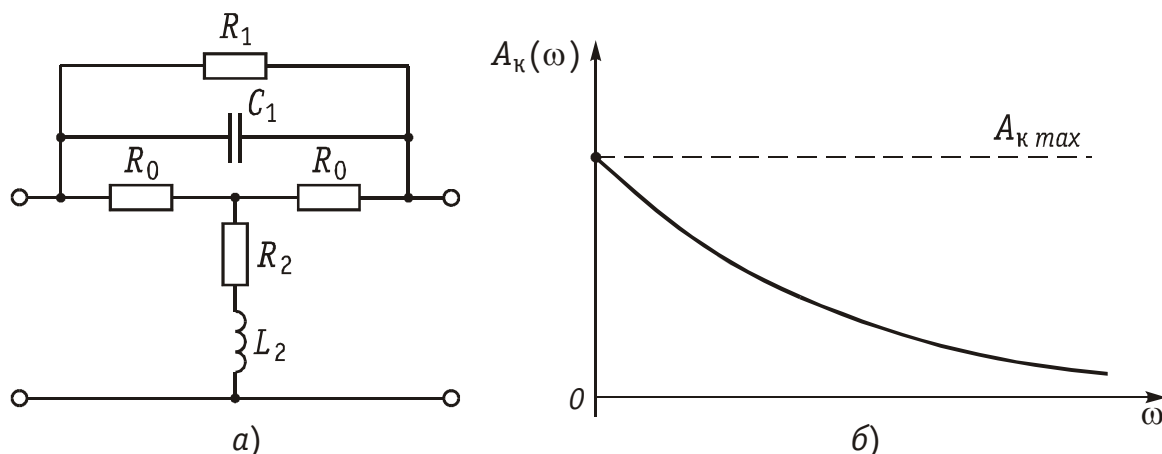


Рис. 18.16

где $\alpha_1 = \frac{1}{R_1 C_1}$ и $\alpha_2 = \frac{R_0 + R_1}{C_1 R_0 R_1}$.

Частотная характеристика ослабления данного звена:

$$A_K(\omega) = 10 \lg \frac{\omega^2 + \alpha_2^2}{\omega^2 + \alpha_1^2}; \quad (18.8)$$

$$A_{K \max} = 20 \lg \frac{R_0 + R_1}{R_0}$$

показана на рис. 18.16, б.

На рис. 18.17, а изображено звено 1-го порядка с двухполюсником \underline{Z}_1 , состоящим из параллельного соединения R_1 и L_1 . Операторная передаточная функция этого звена:

$$H_K(p) = \frac{R_0}{R_0 + R_1} \cdot \frac{p + R_1/L_1}{p + \frac{R_0 R_1}{L_1(R_0 + R_1)}} = H \frac{p + \alpha_1}{p + \alpha_2},$$

где $\alpha_1 = \frac{R_1}{L_1}$ и $\alpha_2 = \frac{R_0 R_1}{L_1(R_0 + R_1)}$, $H = \frac{R_0}{R_0 + R_1}$.

Частотная характеристика ослабления звена

$$A_K(\omega) = 10 \lg \frac{\omega^2 + \alpha_2^2}{H^2(\omega^2 + \alpha_1^2)}$$

показана на рис. 18.17, б.

Максимальное значение ослабления корректора:

$$A_{K \max} = 20 \lg \left| 1 + \frac{R_1}{R_0} \right|. \quad (18.9)$$

Звенья 2-го порядка содержат по два реактивных элемента в двухполюсниках \underline{Z}_1 и \underline{Z}_2 . На рис. 18.18, а изображено звено, содержащее последовательный колебательный контур и сопротив-

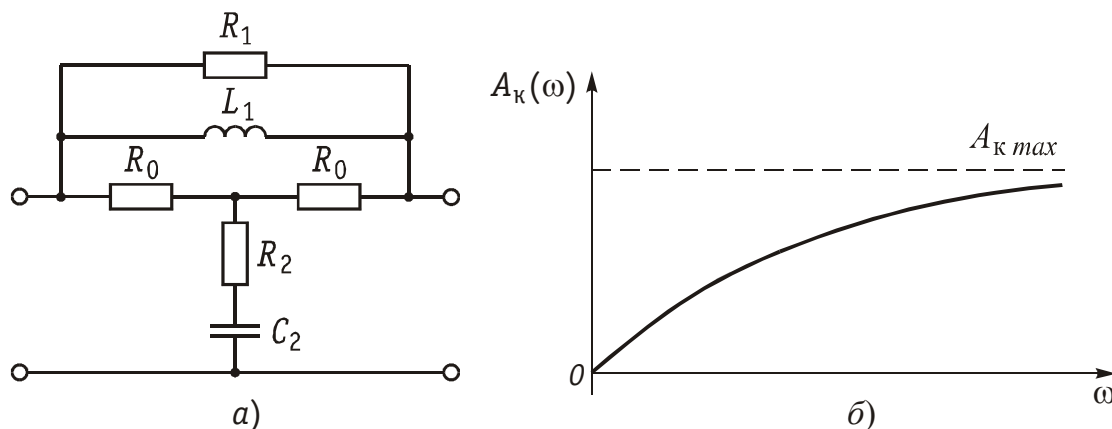


Рис. 18.17

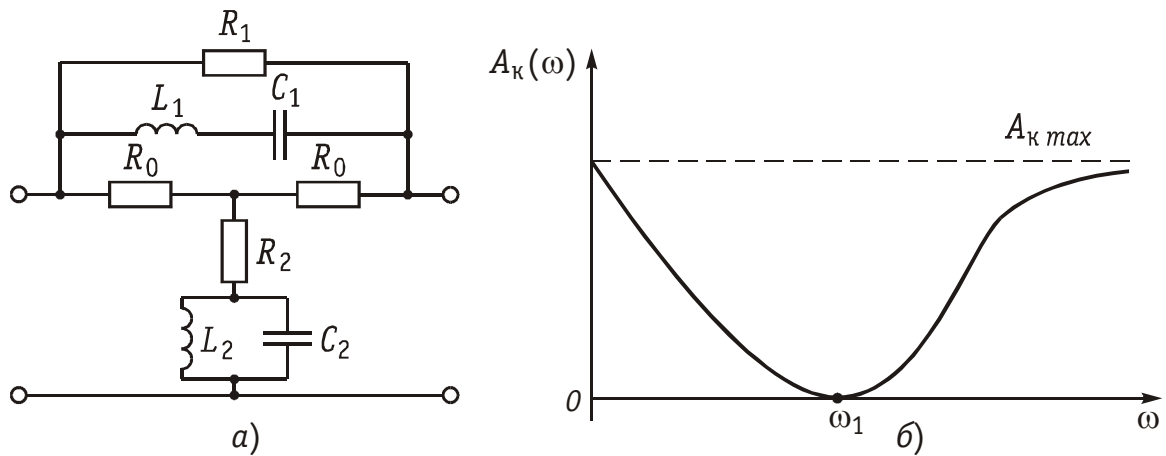


Рис. 18.18

ление R_1 в продольной ветви корректора. Операторная передаточная функция такого звена:

$$H_K(p) = \frac{R_0}{R_0 + R_1} \cdot \frac{p^2 + \frac{R_1}{L_1}p + \frac{1}{L_1 C_1}}{p^2 + \frac{R_0 R_1}{L_1 (R_0 + R_1)}p + \frac{1}{L_1 C_1}} = H \frac{p^2 + \alpha_1 p + \omega_0^2}{p^2 + \alpha_2 p + \omega_0^2},$$

где $\alpha_1 = \frac{R_1}{L_1}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{L_1 C_1}$, $H = \frac{R_0}{R_0 + R_1}$, $\alpha_2 = \alpha_1 H$.

Частотная характеристика ослабления звена:

$$A_K(\omega) = 10 \lg \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \alpha_2^2 \omega^2}{H^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \alpha_1^2 \omega^2]}$$

показана на рис. 18.18, б.

Максимальное значение A_{Kmax} по-прежнему рассчитывается по формуле (18.9).

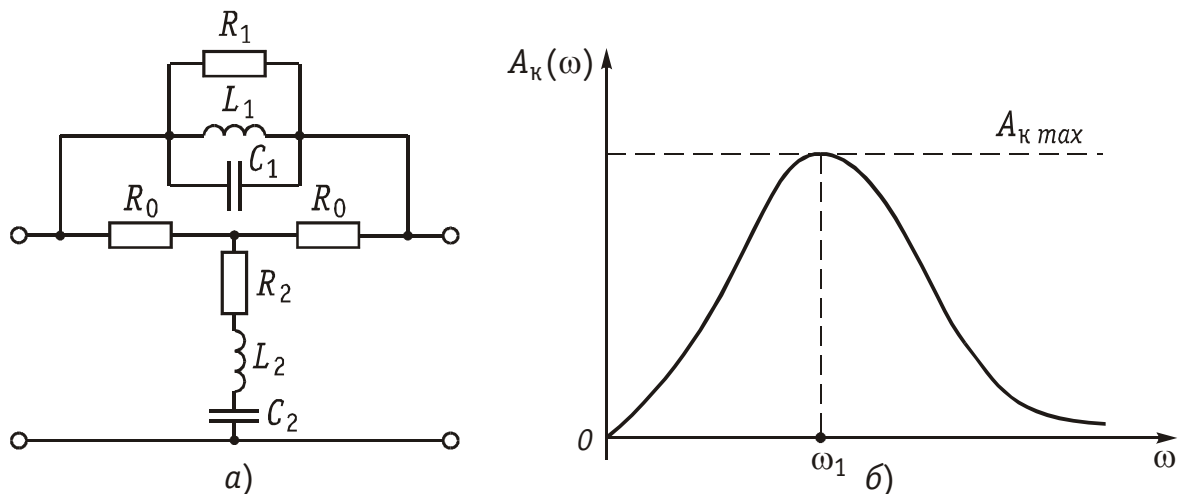


Рис. 18.19

На рис. 13.19, *а* изображено еще одно звено 2-го порядка с двухполюсником \underline{Z}_1 , представляющим собой параллельный колебательный контур. Операторная передаточная функция звена и частотная характеристика ослабления (рис. 3.19, *б*) имеют вид:

$$H_K(p) = \frac{p^2 + \frac{1}{R_1 C_1} p + \frac{1}{L_1 C_1}}{p^2 + \frac{R_0 + R_1}{C_1 R_0 R_1} p + \frac{1}{L_1 C_1}} = \frac{p^2 + \alpha_1 p + \omega_0^2}{p^2 + \alpha_2 p + \omega_0^2},$$

$$A_K(\omega) = 10 \lg \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \alpha_2^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \alpha_1^2 \omega^2},$$

где $\alpha_1 = \frac{1}{R_1 C_1}$, $\alpha_2 = \frac{R_0 + R_1}{C_1 R_0 R_1}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{L_1 C_1}$.

Значение $A_{K \max}$ на графике рис. 18.20, *б* рассчитывается по формуле (18.9).

Пример. Определить элементы в поперечном плече корректора (рис. 18.16, *а*), имеющего элементы $R_0 = 600$ Ом, $R_1 = 2400$ Ом, $C_1 = 60$ нФ. Рассчитать и построить частотную зависимость ослабления корректора $A_K(f)$ в диапазоне частот $0 \div 8$ кГц.

Элементы сопротивления \underline{Z}_2 в поперечной ветви должны быть обратны сопротивлению \underline{Z}_1 .

Из теории двухполюсников известно, что для обратных двухполюсников $\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = R_0^2$. Отсюда

$$R_2 = \frac{R_0^2}{R_1} = \frac{600^2}{2400} = 150 \text{ Ом},$$

$$L_2 = C_1 \cdot R_0^2 = 60 \cdot 10^{-9} \cdot 600^2 = 21,6 \text{ мГн}.$$

Значения $A_K(\omega)$ рассчитываем по формуле (18.8) или по общей формуле (18.6), применимой для корректора любого типа. Например, на частоте $f = 0$ получаем

$$\begin{aligned} A_{K \max} &= A_K(0) = 10 \lg \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} = 20 \lg \frac{R_0 + R_1}{R_0} = \\ &= 20 \lg \frac{600 + 2400}{600} = 13,98 \text{ дБ}. \end{aligned}$$

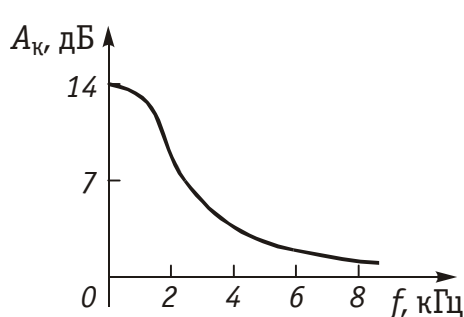


Рис. 18.20

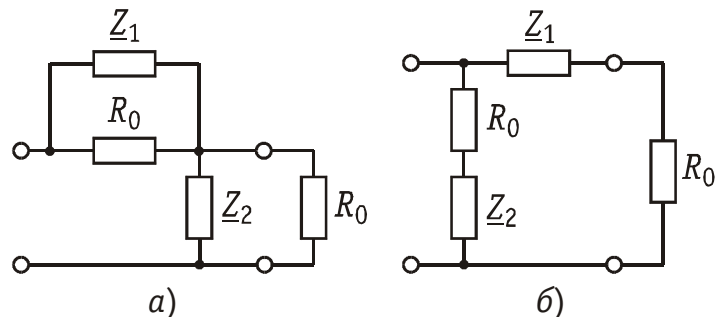


Рис. 18.21

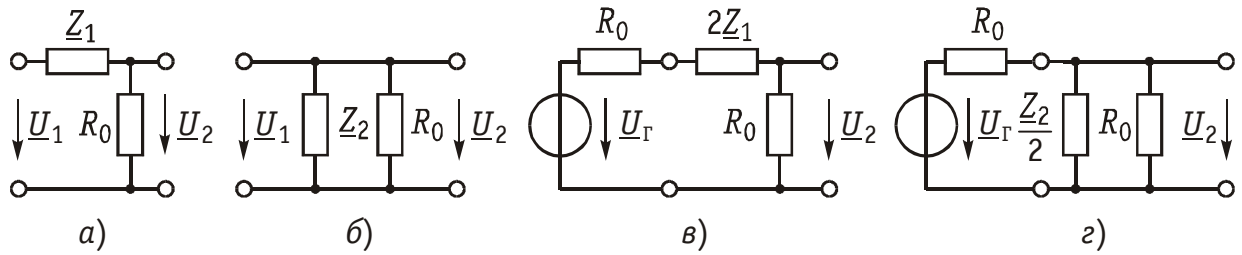


Рис. 18.22

Остальные значения $A_k(f)$ рассчитываются аналогично. По результатам расчета построен график $A_k(f)$, изображенный на рис. 18.20.

Помимо Т-перекрытой схемы корректора (рис. 18.19) применяются также другие схемы, изображенные на рис. 18.21.

Передаточные функции, которые реализуются Т-перекрытым корректором, можно реализовать и элементарными четырехполюсниками, схемы которых приведены на рис. 18.22. Например, для четырехполюсника на рис. 18.22, а операторная передаточная функция

$$H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{R_0}{R_0 + Z_1(p)}$$

рассчитывается также, как и для корректора, построенного по Т-перекрытой схеме (см. формулу (18.5)). Цепи с элементарными четырехполюсниками применяются в случаях, когда не требуется согласование между генератором, корректором и нагрузкой.

В табл. 18.1 приведены характеристики и расчетные формулы звеньев пассивных амплитудных корректоров.

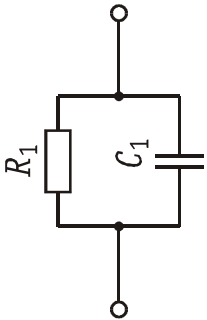

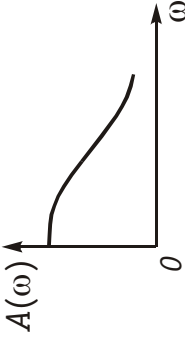
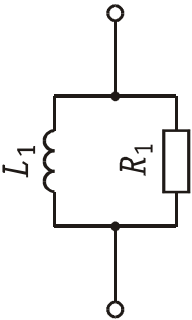

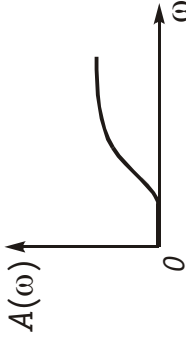
Активные корректоры. Кроме пассивных схем амплитудных корректоров применяют активные схемы. Активные амплитудные корректоры строятся в общем случае с применением RC - и RLC -элементов, которые называют ARZ -цепями. Существует большое количество разновидностей активных звеньев эквивалентных по передаточной функции пассивным амплитудным корректорам. Две схемы таких активных звеньев на операционных усилителях изображены на рис. 18.23. Их передаточные функции выражаются соответствующими формулами:

$$H_k(p) = -\frac{R_2 \cdot Z(p)}{R_1 [R_2 + Z(p)]}, \quad (18.10)$$

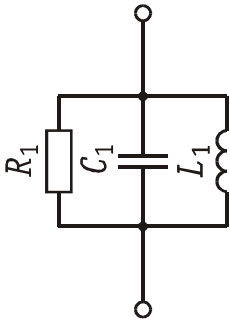
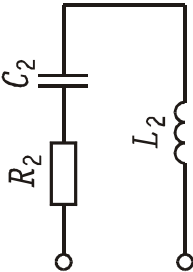
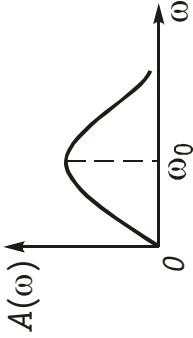
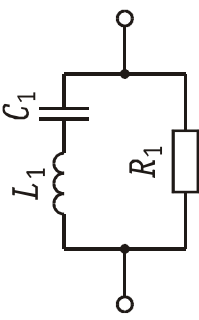
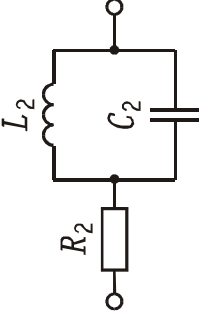
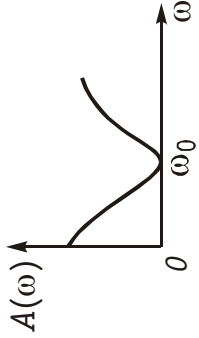
$$H_k(p) = \frac{R_1 + R_2 + Z(p)}{R_2 + Z(p)}. \quad (18.11)$$

Если в схеме рис. 18.23, а в качестве двухполюсника Z выбрать последовательное соединение резистора R и емкости C , то передаточная функция (18.10) звена принимает вид:

Таблица 18.1
Характеристика и расчетные формулы звеньев пассивных амплитудных корректоров

Двухполюсники		$A_K(\omega)$	$H_K(p)$	Коэффициент
Z_1	Z_2			
			$H \frac{p + \alpha_1}{p + \alpha_2}$	$\alpha_1 = \frac{1}{R_1 C_1}$ $\alpha_2 = \frac{R_0 + R_1}{C_1 R_0 R_1}$ $H = 1$
				$\alpha_1 = R_1/L_1$ $\alpha_2 = \frac{R_0 R_1}{L_1 (R_0 + R_1)}$ $H = R_0/(R_0 + R_1)$

Продолжение табл. 18.1

Двухполюсники		$A_K(\omega)$	$H_K(p)$	Коэффициент
Z_1	Z_2			
			$H \frac{p^2 + \alpha_1 p + \omega_0^2}{p^2 + \alpha_2 p + \omega_0^2}$	$\alpha_1 = 1/R_1 C_1$ $\omega_0^2 = \frac{1}{L_1 C_1}$ $\alpha_2 = \frac{R_0 + R_1}{C_1 R_0 R_1}$ $H = 1$
				$\alpha_1 = R_1/L_1$ $\omega_0^2 = \frac{1}{L_1 C_1}$ $\alpha_2 = \alpha_1 H$ $H = \frac{R_0}{R_0 + R_1}$

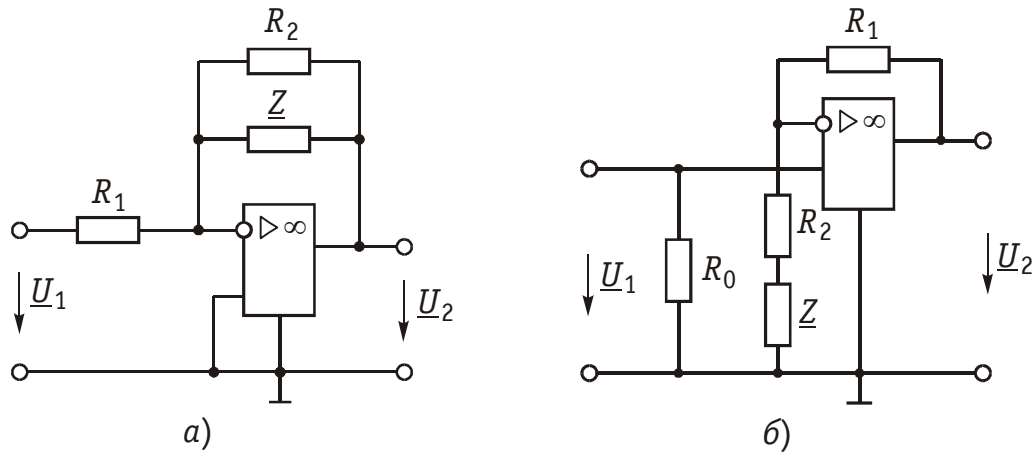


Рис. 18.23

$$H_K(p) = -\frac{R_2 \left(R + \frac{1}{pC} \right)}{R_1 \left[R_2 + R + \frac{1}{pC} \right]} = -\frac{R_2 R}{R_1 R_2 + R_1 R} \cdot \frac{p + \frac{1}{RC}}{p + \frac{1}{C(R_2 + R)}} =$$

$$= -H \frac{p + \alpha_1}{p + \alpha_2}$$

где $H = \frac{R_2 R}{R_1 (R_2 + R)}$, $\alpha_1 = \frac{1}{RC}$, $\alpha_2 = \frac{1}{C(R_2 + R)}$.

Частотная характеристика ослабления данного звена, также как и у пассивного звена 1-го порядка, вычисляется по формуле:

$$A_K(\omega) = 10 \lg \frac{1}{H^2} \cdot \frac{\omega^2 + \alpha_2^2}{\omega^2 + \alpha_1^2}.$$

Данная функция при увеличении частоты имеет монотонно возрастающий характер от величины $A_K(0) = 20 \lg(R_1/R_2)$ до величины $A_K(\infty) = 20 \lg[R_1(R + R_2)/RR_2]$. Если выбрать $R_1 < R_2$ и $R = R_1 R_2 / (R_2 - R_1)$, то ослабление будет изменяться от $A_K(0)$ до нуля, оставаясь отрицательным (рис. 18.24, кривая 1).

Выберем в схеме 18.23, б в качестве двухполюсника \underline{Z} емкость C . Тогда передаточная функция (18.11) этого звена принимает вид:

$$H_K(p) = \frac{R_1 + R_2 + 1/(pC)}{R_2 + 1/(pC)} = H \cdot \frac{p + \alpha_1}{p + \alpha_2},$$

где $\alpha_1 = \frac{1}{(R_1 + R_2)C}$, $\alpha_2 = \frac{1}{R_2 C}$, $H = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$.

Частотная характеристика ослабления:

$$A_K(\omega) = 10 \lg \frac{1}{H^2} \cdot \frac{\omega^2 + \alpha_2^2}{\omega^2 + \alpha_1^2}.$$

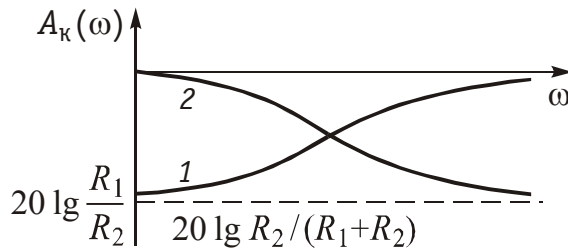


Рис. 18.24

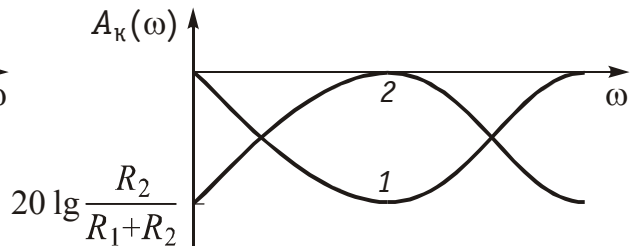


Рис. 18.25

При увеличении частоты данная функция имеет монотонно убывающий характер от $A_k(0) = 0$ до $A_k(\infty) = 20 \lg [R_2 / (R_1 + R_2)]$ (рис. 18.24, кривая 2).

Если в качестве двухполюсника \underline{Z} выбрать последовательный LC -контур, то частотная характеристика ослабления будет иметь вид, показанный на рис. 18.25, кривая 1. При выборе в качестве двухполюсника \underline{Z} параллельного LC -контура частотная характеристика ослабления будет иметь обратный характер, как показано на рис. 18.25, кривая 2.

Несмотря на то, что рассмотренные схемы могут содержать индуктивности, они имеют ряд преимуществ по сравнению с пассивными амплитудными корректорами. Так, число реактивных элементов вдвое меньше, а ослабление, вносимое каскадным соединением цепи и корректора, близко к нулю. Последнее важно также потому, что дополнительное ослабление за счет применения пассивного корректора, как правило, приходится компенсировать с помощью усилителя, т. е. общая схема все равно оказывается активной.

Пример. Определить передаточную функцию амплитудного корректора, построенного по схеме рис. 18.23, б, в которой в качестве двухполюсника \underline{Z} выбран последовательный колебательный LC -контур. Рассчитать и построить частотную характеристику ослабления $A_k(f)$ корректора в диапазоне частот от 0 до $f_v = 100$ кГц для элементов контура $R_1 = 10$ кОм, $R_2 = 20$ кОм, $L = 200$ мГн, $C = 1,268$ нФ.

Операционный усилитель в схеме рис. 18.23, б включен по неинвертирующей схеме, поэтому передаточная функция корректора определяется по формуле (18.11), в которой $Z(p) = pL + 1/(pC)$:

$$H_k(p) = \frac{R_1 + R_2 + Z(p)}{R_2 + Z(p)} = \frac{R_1 + R_2 + pL + \frac{1}{pC}}{R_2 + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{p^2 + p \frac{R_1 + R_2}{L} + \frac{1}{LC}}{p^2 + \frac{R_1}{L}p + \frac{1}{LC}}.$$

Частотная характеристика ослабления:

$$A_k(\omega) = 20 \lg \frac{1}{H_k(\omega)} = 10 \lg \frac{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right)^2 + \omega^2 \left(\frac{R_1}{L} \right)^2}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right)^2 + \omega^2 \left(\frac{R_1 + R_2}{L} \right)^2}.$$

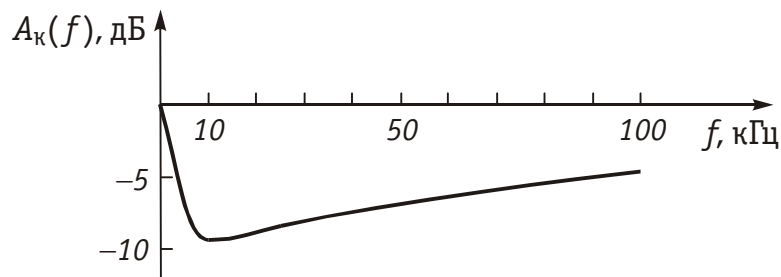


Рис. 18.26

В формулах $H_k(p)$ и $A_k(\omega)$ величина $1/(LC)$ — это квадрат резонансной частоты ω_0^2 LC -контура. Для заданных значений L и C имеем:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{200 \cdot 10^{-13} \cdot 1,268 \cdot 10^{-9}} = 0,394 \cdot 10^{10} \text{ (рад/с)}^2.$$

Резонансная частота $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC}) = 10$ кГц. Рассчитаем значения $A_k(f)$ на частотах, равных нулю, $f_0 = 10$ кГц и $f_B = 100$ кГц.

$$A_k(0) = 10 \lg \frac{(1/LC)^2}{(1/LC)^2} = 10 \lg 1 = 0 \text{ дБ},$$

$$A_k(f_0) = 20 \lg \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 20 \lg \frac{10}{10 + 20} = -9,54 \text{ дБ},$$

$$A_k(f_B) = 10 \lg \frac{\left(\frac{1}{LC} - \omega_B^2\right)^2 + \omega_B^2 \left(\frac{R_1}{L}\right)^2}{\left(\frac{1}{LC} - \omega_B^2\right)^2 + \omega_B^2 \left(\frac{R_1 + R_2}{L}\right)^2} = -4,1 \text{ дБ}.$$

Аналогичным образом можно рассчитать ослабление $A_k(f)$ на любой частоте в рабочем диапазоне. График $A_k(f)$ изображен на рис. 18.26.

Синтез амплитудных корректоров. При синтезе пассивного амплитудного корректора исходными данными являются: частотная характеристика ослабления цепи $A_{\text{ц}}(\omega)$, подлежащая коррекции в диапазоне частот $\omega_H \dots \omega_B$; точность коррекции ΔA в этом же диапазоне частот; сопротивление нагрузки R_0 .

Вначале определяют частотную характеристику амплитудного корректора $A_k(\omega)$. Для этого необходимо задать характеристику ослабления A_0 каскадного соединения цепи и корректора. Эта характеристика должна быть постоянной, не зависящей от частоты, причем ее величину принимают несколько большей, чем максимальное ослабление цепи:

$$A_0 = \max A_{\text{ц}} + A_1, \quad (18.12)$$

где $A_1 = 1 \dots 2$ дБ.

Частотная характеристика ослабления амплитудного корректора вычисляется по формуле:

$$A_k(\omega) = A_0 - A_{\text{ц}}(\omega). \quad (18.13)$$

Таблица 18.2

f , кГц	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$A_{\text{ц}}$, дБ	11,9	11,0	10,0	8,5	7,2	5,8	4,3	3,4	2,5	1,8	1,1

Таблица 18.3

f , кГц	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$A_{\text{к}}$, дБ	0,1	1,0	2,0	3,5	4,8	6,2	7,7	8,6	9,5	10,2	10,9

торов. Отличие заключается в том, что характеристика ослабления A_0 каскадного соединения цепи и корректора выбирается близкой к нулю.

Пример. В таблице 18.2 задана частотная характеристика ослабления цепи $A_{\text{ц}}(f)$. Рассчитать элементы амплитудного корректора, если $A_0 = 12$ дБ и $R_0 = 200$ Ом.

Воспользуемся формулой (18.13) и рассчитаем ослабление корректора $A_{\text{к}}(f) = A_0 - A_{\text{ц}}(f)$ в диапазоне частот от 0 до 50 кГц.

Результаты расчета $A_{\text{к}}(f)$ приведены в таблице 18.3, а на рисунке 18.27 изображены графики ослаблений $A_{\text{ц}}(f)$, A_0 и $A_{\text{к}}(f)$.

Частотная характеристика ослабления $A_{\text{к}}(f)$ на рис. 18.27 может быть получена с помощью корректора, реализованного по схеме рис. 18.19, в которой двухполюсник \underline{Z}_1 состоит из параллельного соединения элементов L_1 и R_1 .

Найдем R_1 из формулы (18.9):

$$R_1 = R_0 (10^{0,05 A_{\text{к max}}} - 1).$$

Значение $A_{\text{к max}} = 10,9$ дБ на частоте $f = 50$ кГц берем из таблицы 18.3. Получаем:

$$R_1 = 200 (10^{0,05 \cdot 10,9} - 1) = 500 \text{ Ом}.$$

Для расчета L_1 выбираем узел интерполяции: $f_1 = 25$ кГц, $A_{\text{к1}}(f_1) = 6,2$ дБ. Подставляем эти данные в формулу (18.6) или

$$A_{\text{к1}}(\omega_1) = 10 \lg \frac{\omega_1^2 + \alpha_2^2}{H^2 (\omega_1^2 + \alpha_2^2)},$$

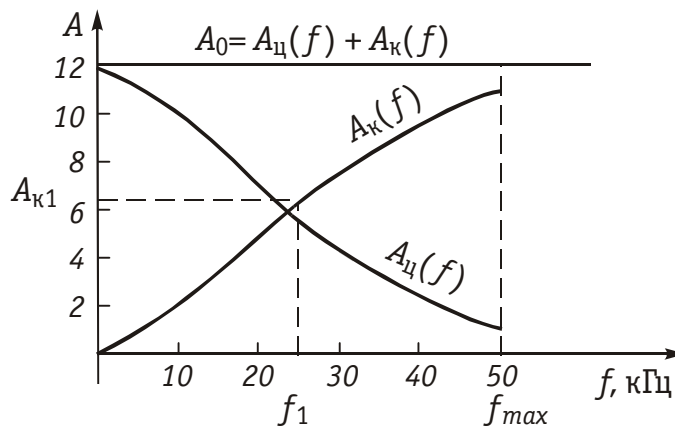


Рис 18.27

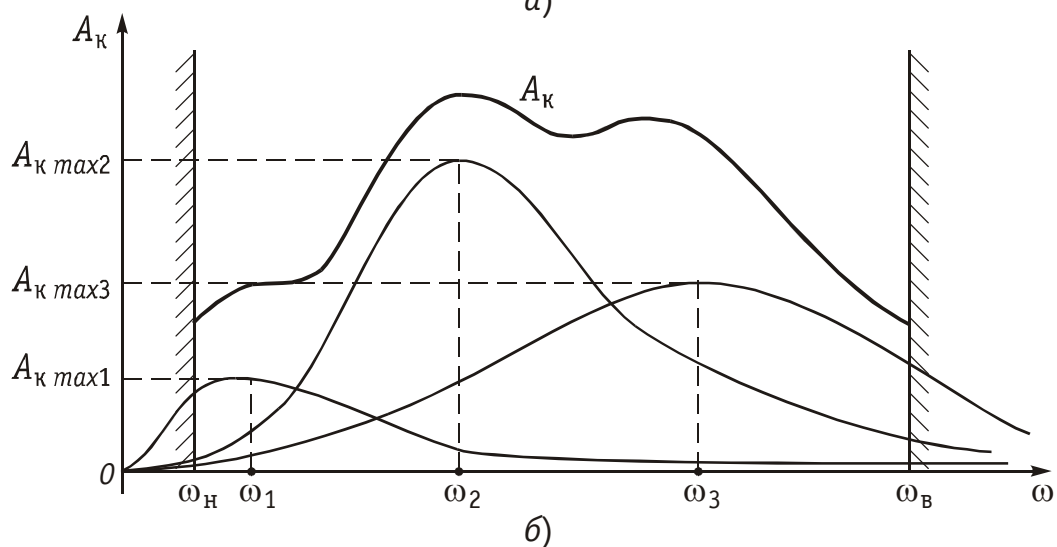
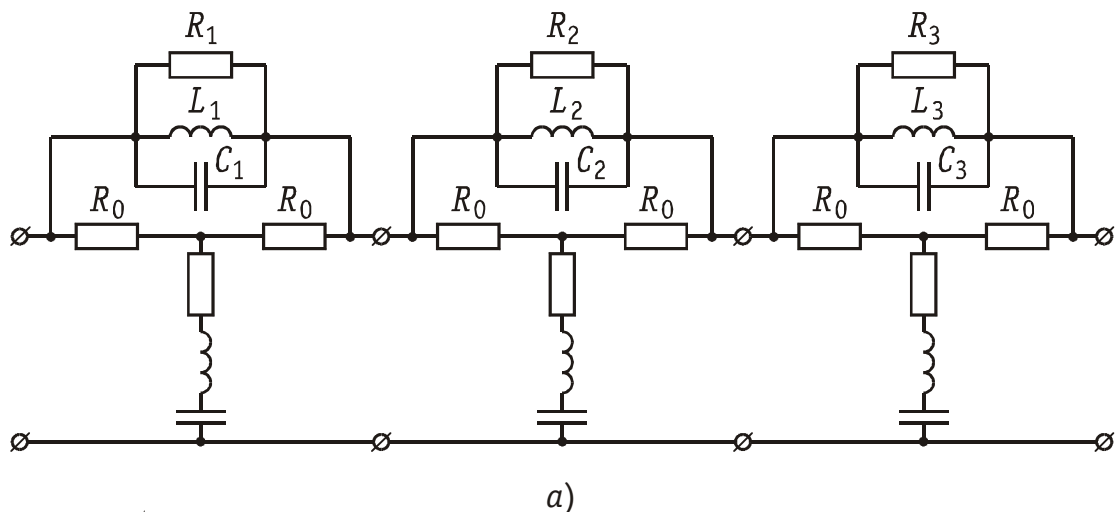


Рис. 18.28

где $\alpha_1 = \frac{R_1}{L_1}$, $\alpha_2 = \frac{R_0 R_1}{L_1 (R_1 + R_0)}$, $H = \frac{R_0}{R_0 + R_1}$, $\omega_1 = 2\pi f_1$.

Получаем значение $L_1 = 2$ мГн.

Значения параметров элементов R_2 и C_2 , образующих обратный двухполюсник \underline{Z}_2 , рассчитываем по формулам:

$$R_2 = \frac{R_0^2}{R_1} \text{ и } C_2 = \frac{L_1}{R_0^2}.$$

Получаем $R_2 = 80$ Ом и $C_2 = 0,05$ мкФ. Расчетная характеристика ослабления корректора, вычисляемая по формуле (3.3), точно совпадает с требуемой только на частотах $f_1 = 25$ кГц и $f_{max} = 50$ кГц.

Используя каскадное соединение различных типовых звеньев корректоров, можно получить частотные зависимости ослабления $A_k(\omega)$ любой сложности. На рис. 18.28 изображена схема сложного корректора, построенного на основе типовых схем (рис. 18.19), и его рабочее ослабление. Изменением характеристик типовых схем добиваются получения требуемой характеристики амплитудного корректора.

18.3. Фазовые корректоры

Пассивные корректоры. Фазовые корректоры должны иметь постоянное входное сопротивление и постоянное ослабление, которые не зависят от частоты. Таким условиям удовлетворяют симметричные мостовые четырехполюсники (рис. 18.29), у которых сопротивления \underline{Z}_1 и \underline{Z}_2 реактивные и взаимнообратные, т. е.:

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = R_0^2 \text{ и } \underline{Z}_1 = \pm jX_1, \quad \underline{Z}_2 = \mp jX_2.$$

Такие четырехполюсники имеют с обеих сторон одинаковые характеристические сопротивления:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2} = R_0,$$

поэтому их легко согласовывать с внутренним сопротивлением генератора и сопротивлением нагрузки.

Рабочее ослабление мостового симметричного согласованно включенного четырехполюсника с взаимно-обратными сопротивлениями \underline{Z}_1 и \underline{Z}_2 равно нулю на всех частотах: $A(\omega) = 0$, т. е. эта схема не вносит никакого дополнительного ослабления сигнала.

Операторная передаточная функция по напряжению схемы рис. 18.29 имеет вид:

$$H_K(p) = \frac{R_0 - Z_1(p)}{R_0 + Z_1(p)} \quad (18.14)$$

Комплексная передаточная функция по напряжению схемы рис. 18.29, в которой \underline{Z}_1 и \underline{Z}_2 — реактивные двухполюсники, может быть вычислена по формуле:

$$H_K(j\omega) = \frac{R_0 - jX_1}{R_0 + jX_1} \quad (18.15)$$

Нетрудно видеть, что модуль передаточной функции (18.15) равен 1, а аргумент и ГВП вычисляются по формулам:

$$\varphi_K(\omega) = -2 \operatorname{arctg} \frac{X_1}{R_0}, \quad (18.16)$$

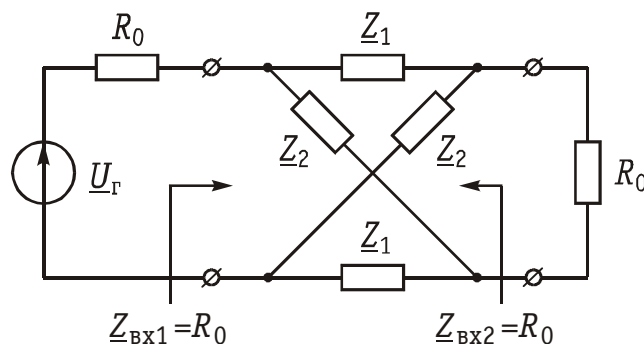


Рис. 18.29

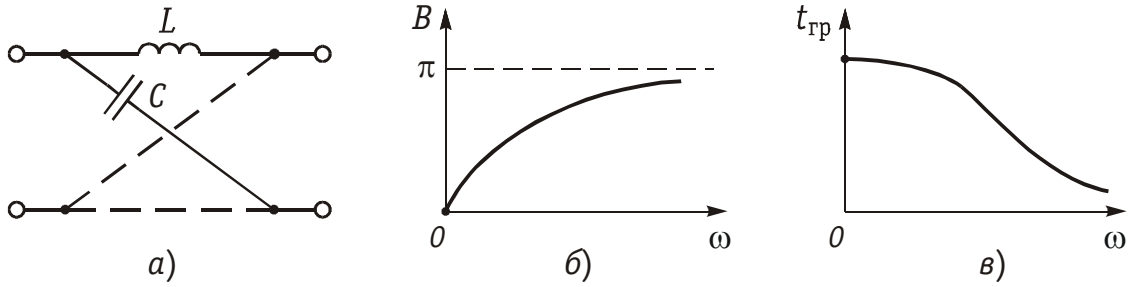


Рис. 18.30

$$B_{\kappa}(\omega) = 2 \operatorname{arctg} \frac{X_1}{R_0}, \quad (18.17)$$

$$t_{\text{гр}}(\omega) = \frac{dB(\omega)}{d\omega} = \frac{2/R_0}{1 + (X_1/R_0)^2} \cdot \frac{dX_1}{d\omega}. \quad (18.18)$$

Формулы (18.16), (18.17) и (18.18) показывают, что фазо-частотная характеристика, фазовая постоянная и характеристика группового времени запаздывания корректора зависят только от вида двухполюсника X_1 .

На практике используются типовые звенья пассивных фазовых корректоров первого и второго порядков.

На рис. 18.30, а изображена схема фазового корректора 1-го порядка, в котором двухполюсником \underline{Z}_1 является индуктивность $Z_1(p) = pL$, а двухполюсником \underline{Z}_2 — емкость $Z_2(p) = 1/(pC)$.

Операторная передаточная функция этого корректора в соответствии с (18.14) имеет вид:

$$H_{\kappa}(p) = \frac{R_0 - pL}{R_0 + pL} = -\frac{p - R_0/L}{p + R_0/L} = -\frac{p - \alpha_1}{p + \alpha_1}, \quad (18.19)$$

где $\alpha_1 = R_0/L$.

Рабочая фазовая постоянная $B(\omega)$ и ГВП в соответствии с формулами (18.17) и (18.18)

$$B_{\kappa}(\omega) = 2 \operatorname{arctg}(\omega/\alpha_1), \quad (18.20)$$

$$t_{\text{гр}}(\omega) = \frac{2\alpha_1}{\omega^2 + \alpha_1^2}. \quad (18.21)$$

Графическое изображение данных характеристик показано на рис. 18.30, б и в.

На рис. 18.31, а изображена схема фазового корректора 2-го порядка, с двухполюсником \underline{Z}_1 , состоящим из последовательного соединения элементов L_1 и C_1 , т. е. $Z_1(p) = pL_1 + 1/(pC_1)$.

Операторная передаточная функция такого корректора в соответствии с (18.14) имеет вид:

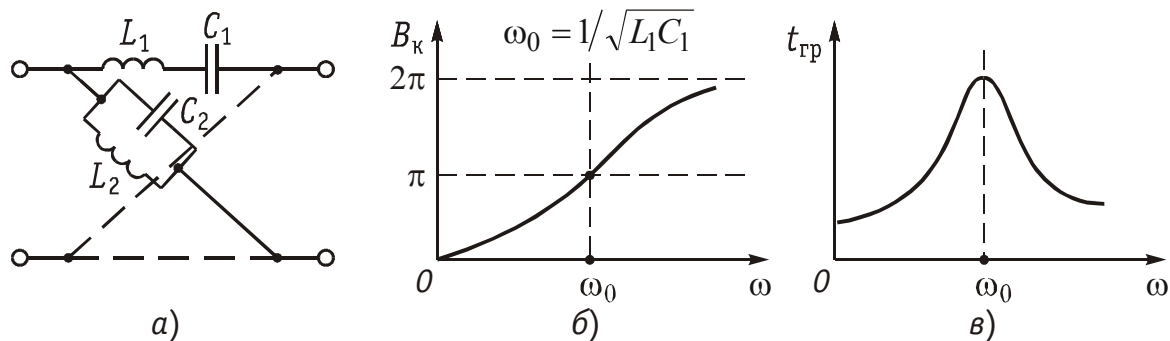


Рис. 18.31

$$H_K(p) = \frac{R_0 - pL_1 - 1/(pC_1)}{R_0 + pL_1 + 1/(pC_1)} = -\frac{p^2 - (\omega_0/Q_{\Pi})p + \omega_0^2}{p^2 + (\omega_0/Q_{\Pi})p + \omega_0^2},$$

где $\omega_0^2 = 1/(L_1C_1)$, $Q_{\Pi} = 1/(\omega_0 R_0 C_1)$ — добротность полюса передаточной функции.

Комплексная передаточная функция корректора получается при $p = j\omega$:

$$H_K(j\omega) = -\frac{\omega_0^2 - \omega^2 - j(\omega_0/Q_{\Pi})\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + j(\omega_0/Q_{\Pi})\omega}. \quad (18.22)$$

Модуль функции равен 1, а рабочая фазовая постоянная $B(\omega)$ и ГВП $t_{\text{гр}}(\omega)$ вычисляются в соответствии с (18.17) и (18.18) по формулам:

$$B_K(\omega) = \pi + 2 \operatorname{arctg} \left[Q_{\Pi} (\omega^2 - \omega_0^2) / \omega_0 \omega \right]; \quad (18.23)$$

$$t_{\text{гр}}(\omega) = \frac{2\omega_0 Q_{\Pi} (\omega^2 + \omega_0^2)}{Q_{\Pi}^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^2 \omega^2}. \quad (18.24)$$

Графики зависимостей $B(\omega)$ и $t_{\text{гр}}(\omega)$ фазового корректора 2-го порядка приведены на рис. 18.31, б и в.

Если известны коэффициенты передаточной функции ω_0 , Q_{Π} и нагрузка R_0 , то параметры элементов корректора рассчитываются по формулам

$$C_1 = 1/Q_{\Pi} R_0 \omega_0; \quad (18.25)$$

$$L_1 = Q_{\Pi} R_0 / \omega_0. \quad (18.26)$$

Пример. Фазовый корректор (рис. 18.30, а) имеет элементы $L_1 = 100$ мГн, $R_0 = 500$ Ом. Рассчитать и построить графики частотных зависимостей фазовой постоянной $B_K(f)$ и группового времени прохождения $t_{\text{гр}}(f)$ в диапазоне частот от 0 до 10 кГц.

Фазовая характеристика $B(\omega)$ рассчитывается по формуле (18.20), поэтому:

Таблица 18.4

f , кГц	0	1	2	4	6	8	10
B_k , рад	0	1,8	2,38	2,75	2,88	2,94	2,98
$t_{гр}$, мкс	400	155	96	55	38	29	24

$$B_k(f) = 2 \operatorname{arctg} \frac{2\pi f L_1}{R_0}.$$

ГВП $t_{гр}(\omega)$ рассчитывается по формуле (18.21), поэтому:

$$t_{гр}(f) = \frac{2R_0 L_1}{4\pi^2 f^2 L_1^2 + R_0^2}.$$

Подставляя в выражения для $B_k(f)$ и $t_{гр}(f)$ значения $L_1 = 10 \cdot 10^{-3}$ Гн и $R_0 = 500$ Ом, получаем:

$$B_k(f) = 2 \operatorname{arctg} \frac{2\pi f L_1}{R_0} = 2 \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 100 \cdot 10^{-3}}{500} f = 2 \operatorname{arctg} 1,256 \cdot 10^{-3} f,$$

$$t_{гр}(f) = \frac{2R_0 L_1}{4\pi^2 f^2 L_1^2 + R_0^2} = \frac{2 \cdot 500 \cdot 100 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 3,14^2 \cdot 100^2 \cdot 10^{-6} f^2 + 500^2} = \frac{100}{0,394 f^2 + 25 \cdot 10^4}.$$

Результаты расчета $B_k(f)$ и $t_{гр}(f)$ в диапазоне частот $f = 0 \div 10$ кГц приведены в таблице 18.4, а графики — на рис. 18.32, а и б.

Пример. Схема фазового корректора приведена на рис. 18.31, а. Рассчитать и построить графики частотных зависимостей фазовой постоянной $B_k(f)$ и ГВП $t_{гр}(f)$ в диапазоне частот от 0 до 10 кГц для двух случаев:

1) $R_0 = 600$ Ом; $L_1 = 36$ мГн, $C_1 = 0,025$ мкФ;

2) $R_0 = 600$ Ом; $L_1 = 36$ мГн, $C_1 = 0,05$ мкФ.

Фазовая характеристика $B_k(\omega)$ корректора рассчитывается по формуле (18.23), а ГВП $t_{гр}(\omega)$ по формуле (18.24), поэтому:

$$B_k(f) = \pi + 2 \operatorname{arctg} \left[Q_{\Pi} (4\pi^2 f^2 - \omega_0^2) / \omega_0 2\pi f \right],$$

$$t_{гр}(f) = \frac{2\omega_0 Q_{\Pi} (4\pi^2 f^2 + \omega_0^2)}{Q_{\Pi}^2 (4\pi^2 f^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^2 4\pi^2 f^2},$$

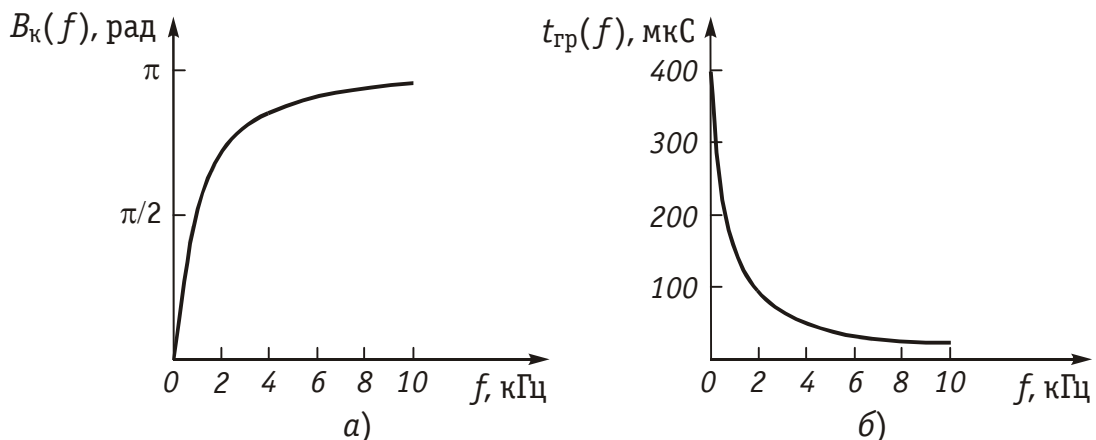


Рис. 18.32

где $\omega_0^2 = 1/(L_1 C_1)$, $Q_{\Pi} = 1/(\omega_0 R_0 C_1)$.

Рассчитаем значения ω_0^2 и Q_{Π} для двух случаев задания параметров элементов корректора:

$$1) \quad \omega_0^2 = \frac{1}{L_1 C_1} = \frac{1}{36 \cdot 10^{-3} \cdot 0,025 \cdot 10^{-6}} = 0,11 \cdot 10^{10} \text{ (рад/с)}^2;$$

$$Q_{\Pi} = \frac{1}{\omega_0 R_0 C_1} = \frac{1}{\sqrt{0,11 \cdot 10^{10}} \cdot 600 \cdot 0,025 \cdot 10^{-6}} = 2.$$

$$2) \quad \omega_0^2 = \frac{1}{36 \cdot 10^{-3} \cdot 0,05 \cdot 10^{-6}} = 0,056 \cdot 10^{10} \text{ (рад/с)}^2;$$

$$Q_{\Pi} = \frac{1}{\sqrt{0,056 \cdot 10^{10}} \cdot 600 \cdot 0,05 \cdot 10^{-6}} = 1,41.$$

Подставляя значения ω_0^2 и Q_{Π} в выражения для расчета $B_{\kappa}(f)$ и $t_{\text{гр}}(f)$, рассчитываем эти характеристики в диапазоне частот от 0 до 10 кГц и заносим результаты расчета в таблицу 18.5 для случая 1) и в таблицу 18.6 для случая 2).

Поскольку график $t_{\text{гр}}(\omega)$ имеет максимум (рис. 18.31, в), то для определения частоты этого максимума берем производную $dt_{\text{гр}}(\omega)$ и, приравняв ее к нулю, находим:

$$\omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{\sqrt{4 - Q_{\Pi}^2} - 1} \quad (18.27)$$

или $f_{\max} = \frac{\omega_0}{2\pi} \sqrt{\sqrt{4 - Q_{\Pi}^2} - 1} = 0$ для первого случая ($Q_{\Pi} = 2$) и $f_{\max} = 2,42$ кГц

для второго случая ($Q_{\Pi} = 1,41$).

В общем случае анализ выражения (18.27) показывает, что при $Q_{\Pi} \geq \sqrt{3}$ ГВП имеет максимум на частоте $f = 0$, а при $Q_{\Pi} < \sqrt{3} = 1,73$ максимум ГВП — на частоте f_{\max} .

Значение $t_{\text{гр} \max}$ рассчитывается по формуле:

$$t_{\text{гр} \max} = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{4Q_{\Pi}^{-2} - 1}} \cdot \frac{2Q_{\Pi}}{2Q_{\Pi} - \sqrt{4Q_{\Pi}^{-2} - 1}}. \quad (18.28)$$

Для второго случая, когда $Q = 1,41$, имеем $t_{\text{гр} \max} = 144$ мкс. Следует также отметить, что при $Q_{\Pi} \gg 1$ формулы (18.27) и (18.28) существенно упрощаются:

$$\omega_{\max} = \omega_0, \quad t_{\text{гр} \max} = \frac{4Q_{\Pi\omega_0}}{\omega_0}. \quad (18.29)$$

Таблица 18.5

f , кГц	0	2	4	5,3	8	10
B_{κ} , рад	0	1,44	2,59	3,14	4,11	4,35
$t_{\text{гр}}$, мкс	120	106	73,5	60	34,8	26,2

Таблица 18.6

f , кГц	0	1	2,42	3,76	6	8	10
B_{κ} , рад	0	0,77	2,0	3,14	4,35	4,87	5,19
$t_{\text{гр}}$, мкс	120	117	144	120	57,6	30,8	18,9

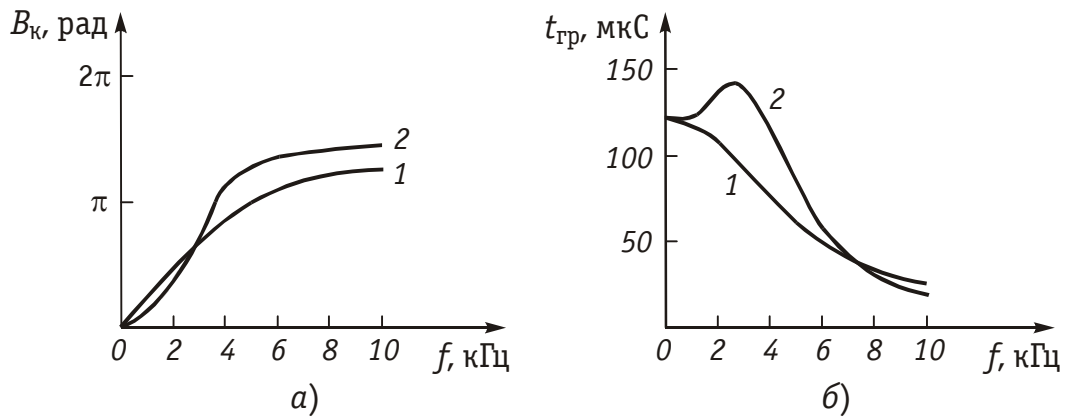


Рис. 18.33

Графики зависимостей $B_k(\omega)$ и $t_{гр}(\omega)$ для двух случаев приведены на рис. 18.33 (обозначены цифрами 1 и 2).

Мостовая схема не всегда удобна в реализации, так как является уравновешенной. Существует ряд эквивалентных схем в виде неуравновешенной схемы, как показано на рис. 18.34. Заметим, что на практике добротность полюса больше единицы и поэтому чаще используется схема рис. 18.34, а, что удобно, так как она не содержит связанных индуктивностей с заданным коэффициентом связи. Неуравновешенные схемы по сравнению с мостовыми содержат вдвое меньше элементов.

Активные корректоры. Помимо пассивных фазовых корректоров применяют активные фазовые корректоры. Кроме пассивных RC или RLC -элементов схемы активных корректоров содержат операционные усилители. Существуют активные фазовые звенья 1-го и 2-го порядков. На рис. 18.35 приведена схема фильтрового звена на операционном усилителе. Передаточная функция этого звена вычисляется по формуле:

$$H_k(p) = -\frac{p - 1/(R_1C)}{p + 1/(R_1C)} = -\frac{p - \alpha_1}{p + \alpha_1}, \quad (18.30)$$

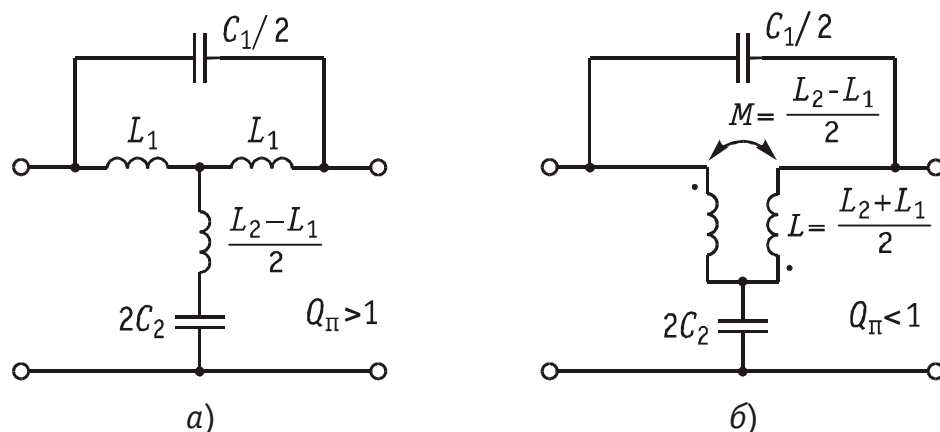


Рис. 18.34

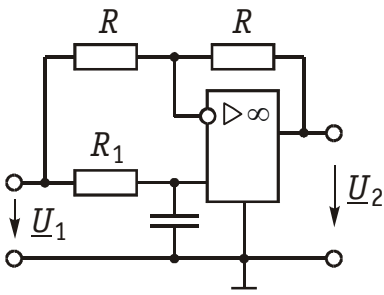


Рис. 18.35

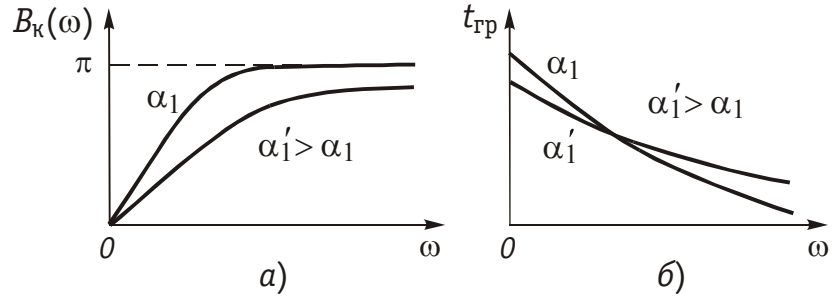


Рис. 18.36

где $\alpha_1 = 1/R_1C$.

Выражение (18.30) аналогично формуле для расчета передаточной функции пассивного фазового корректора (18.19), т. е. схема, приведенная на рис. 18.35, — это активный корректор 1-го порядка.

Фазовые характеристики $B(\omega)$ и ГВП данного звена, также как у пассивного корректора 1-го порядка, вычисляются по формулам

$$B_k(\omega) = 2 \arctg(\omega/\alpha_1),$$

$$t_{\text{гр}}(\omega) = \frac{2\alpha_1}{\omega^2 + \alpha_1^2}.$$

График $B_k(\omega)$ монотонно нарастает от $B_k(0) = 0$ до $B_k(\infty) = \pi$, а график $t_{\text{гр}}(\omega)$ монотонно убывает от $t_{\text{гр}}(0) = 2/\alpha_1$ до $t_{\text{гр}}(\infty) = 0$. На рис. 18.36 показаны графики $B_k(\omega)$ и $t_{\text{гр}}(\omega)$, построенные для разных значений α_1 активного корректора 1-го порядка.

На рис. 18.37 приведена еще одна схема активного фазового корректора, также построенная на основе активного фильтрового звена. Если в схеме рис. 18.37 задать $R_3 = nR_2$, $R_4 = nR_2/(n-1)$, $n > 1$, то передаточная функция, рассчитанная, например, с помощью метода узловых напряжений, будет иметь вид:

$$H(p) = -\frac{R_1 - Z(p)}{R_1 + Z(p)}. \quad (18.31)$$

Это передаточная функция фазового корректора (сравни с формулой (18.14)).

Если в качестве двухполюсника Z выбрать емкость, то передаточная функция (18.31) принимает вид (18.30):

$$H_k(p) = -\frac{R_1 - 1/pC}{R_1 + 1/pC} = -\frac{p - 1/R_1C}{p + 1/R_1C} = -\frac{p - \alpha_1}{p + \alpha_1},$$

т. е. схема на рис. 18.37 — это схема фазового корректора 1-го порядка.

Когда в качестве двухполюсника Z используется последовательный LC -контур, то получается передаточная функция фазового корректора 2-го порядка:

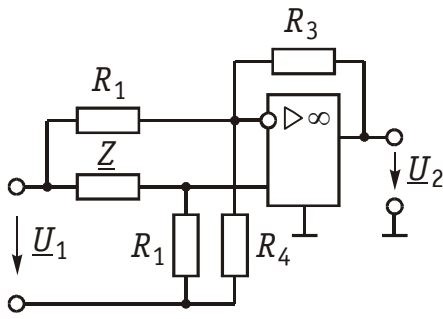


Рис. 18.37

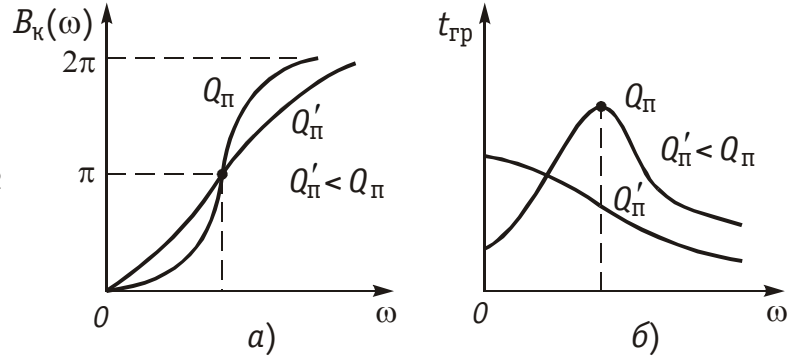


Рис. 18.38

$$H_k(p) = -\frac{p^2 - p \frac{R_1 C}{LC} + \frac{1}{LC}}{p^2 + p \frac{R_1 C}{LC} + \frac{1}{LC}} = -\frac{p^2 - (\omega_0/Q_\pi) p + \omega_0^2}{p^2 + (\omega_0/Q_\pi) p + \omega_0^2},$$

где $\omega_0^2 = 1/(LC)$, $Q_\pi = 1/(\omega_0 R_1 C)$ — добротность полюса передаточной функции.

Графики частотных зависимостей $B_k(\omega)$ и $t_{гр}(\omega)$ данного корректора, полученные для разных значений Q_π , приведены на рис. 18.38.

Хотя активные ARZ -фазовые корректоры имеют индуктивность, но преимуществом их по сравнению с пассивными корректорами является меньшее количество элементов при том же порядке передаточных функций.

Пример. Определить передаточную функцию фазового корректора, построенного по схеме рис. 18.35, в которой в качестве двухполюсника \underline{Z} используется параллельный LC -контур. Рассчитать и построить качественно частотную характеристику ГВП $t_{гр}(f)$ корректора в диапазоне частот от 0 до 5 кГц для элементов цепи $R_1 = 37,5$ Ом, $L = 36$ мГн, $C = 1,6$ мкФ.

Найдем сопротивление $Z(p)$ параллельного LC -контура:

$$Z(p) = \frac{pL \cdot 1/pC}{pL + 1/pC} = \frac{pL}{p^2 LC + 1}.$$

Подставив $Z(p)$ в формулу (18.31), получим передаточную функцию фазового корректора:

$$H(p) = -\frac{R_1 - Z(p)}{R_1 + Z(p)} = -\frac{R_1 - pL/(p^2 LC + 1)}{R_1 + pL/(p^2 LC + 1)} = -\frac{p^2 - (\omega_0/Q_\pi) p + \omega_0^2}{p^2 + (\omega_0/Q_\pi) p + \omega_0^2},$$

где $\omega_0^2 = 1/(LC)$, $Q_\pi = \omega_0 R_1 C$.

ГВП рассчитывается по формуле (18.24), в которой $\omega = 2\pi f$,

$$t_{гр}(f) = \frac{2\omega_0 Q_\pi (4\pi^2 f^2 + \omega_0^2)}{Q_\pi^2 (4\pi^2 f^2 - \omega_0^2) + \omega_0^2 4\pi^2 f^2}.$$

Находим значения ω_0^2 и Q_π :

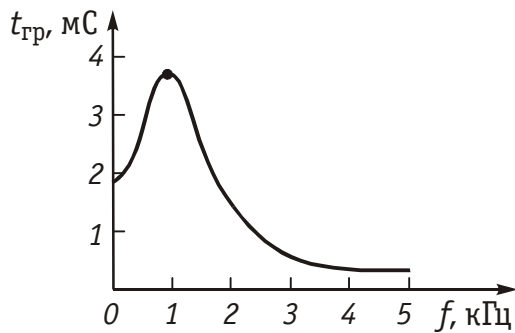


Рис. 18.39

$$\begin{aligned}\omega_0^2 &= \frac{1}{LC} = \frac{1}{36 \cdot 10^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 17,36 \cdot 10^6 \text{ (рад/с)}^2, \\ \omega_0 &= 0,416 \cdot 10^4 \text{ рад/с}, \\ f_0 &= 0,662 \text{ кГц}, \\ Q_{\Pi} &= \omega_0 R_1 C = \\ &= 0,416 \cdot 10^4 \cdot 37,5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6} = 0,25.\end{aligned}$$

Поскольку $Q_{\Pi} < \sqrt{3}$, то находим значения ω_{max} и $t_{gp\ max}$ по формулам (18.27)

и (18.28):

$$\begin{aligned}\omega_{max} &= \omega_0 \sqrt{\sqrt{4 - Q_{\Pi}^2} - 1} = 0,416 \cdot 10^4 \sqrt{\sqrt{4 - 0,25^2} - 1} = 4,16 \cdot 10^3 \text{ (рад/с)}, \\ f_{max} &= \frac{\omega_{max}}{2\pi} = 0,662 \text{ кГц}, \quad t_{gp\ max} = 3,7 \text{ мс}.\end{aligned}$$

Рассчитываем значения $t_{gp}(f)$ на частотах $f_1 = 0$ и $f_2 = 5$ кГц по формуле (18.24). Получаем $t_{gp}(f_1) = 1,92$ мс и $t_{gp}(f_2) = 0,12$ мс.

График зависимости $t_{gp}(f)$ приведен на рис. 18.39.

Синтез фазовых корректоров. При синтезе фазовых корректоров задаются характеристика ГВП корректируемой цепи, сопротивление нагрузки R_0 , точность коррекции и диапазон частот $\omega_n \dots \omega_b$, в котором осуществляется коррекция. Вначале определяют требуемую характеристику фазового корректора. Для этого задают постоянное значение ГВП t_0 , которое должно быть несколько больше максимального значения ГВП цепи (рис. 18.12, б):

$$t_0 = t_{\text{цепи}\ max} + \Delta t.$$

Затем любым способом определяют площадь S_k под характеристикой требуемого ГВП корректора, например, площадь можно рассчитать по формуле:

$$\int_0^{\infty} t_{gp}(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} dB_k(\omega) = B_k(\infty) - B_k(0).$$

После этого приближенно можно определить число фазовых звеньев второго порядка, необходимых для коррекции, так как площадь под кривой группового времени фазового звена второго порядка равна 2π :

$$n = 1,1 S_k / 2\pi.$$

В данной формуле коэффициентом 1.1 учитывается то, что не вся площадь под характеристикой фазового звена попадает в диапазон коррекции.

Зная число звеньев, задаемся в первом приближении их параметрами ω_{0k} и $Q_{\Pi k}$, $k = 1 \dots n$. Для начала частоты распределяют-

ся равномерно, добротность определяют из условия требуемой величины группового времени звена на частоте ω_{maxk} . Эта величина выбирается на 10 ... 20% меньше, чем требуемое групповое время корректора на этой частоте. Из сказанного и формулы (18.27) следует:

$$Q_{pk} = m\omega_{0k} \cdot t_{грmaxk},$$

где $m = 0,8 \dots 0,9$.

На рис. 18.40 показаны характеристики ГВП четырех фазовых звеньев, требуемая и реальная характеристики ГВП корректора.

Далее с применением компьютерных программ решается оптимизационная задача в общей постановке:

$$\max |t_{кт}(\omega) - t_k(\omega, Q_{pk}, \omega_{0k})| = \min \omega \in [\omega_n, \omega_b].$$

Если полученный минимум меньше или равен требуемой точности коррекции, то по заданным Q_{pk} , ω_{0k} и R_0 рассчитывают элементы L_{1k} и C_{1k} мостовой схемы фазового звена (рис. 18.31, а). Остальные элементы находят из условия, что двухполюсники Z_a и Z_b обратные:

$$L_{2k} = R_0^2 C_{1k}, \quad C_{2k} = L_{1k} / R_0^2.$$

Если полученная точность коррекции не удовлетворяет требованиям, то увеличивают число звеньев и повторяют расчет также с помощью компьютера.

С синтезом активных фазовых корректоров можно познакомиться в специальной литературе.

18.4. Гармонические корректоры

Линии задержки. Одним из элементов гармонических корректоров являются так называемые *линии задержки* (ЛЗ). Идеальная линия задержки осуществляет задержку колебания на постоянную величину Δt , не изменяя энергии этого колебания. Очевидно, модуль передаточной функции (АЧХ) ЛЗ равен 1, а угол (ФЧХ) $\varphi(\omega) = -\omega \cdot \Delta t$. Таким образом, передаточная функция линии задержки

$$H(j\omega) = e^{-j\omega\Delta t}. \quad (18.32)$$

Однако данная функция не удовлетворяет УФР, так как $\varphi(\omega)$ не является тангенс-функцией. В реальной линии задержки ГВП является постоянным только с определенной степенью точности в заданном диапазоне частот. Будем рассматривать низкочастотные

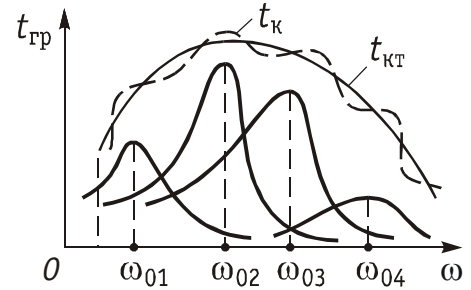


Рис. 18.40

ЛЗ, рабочий частотный диапазон которых простирается от нуля до частоты ω . Совершенно очевидно, что ЛЗ являются частным случаем фазового корректора (ФК). Отличие состоит в том, что от ФК требуется воспроизвести частотную характеристику ГВП, вообще говоря, произвольной формы, в то время как ЛЗ обладает только постоянным, с заданной степенью точности, групповым временем. В связи с этим есть возможность заранее рассчитать набор ЛЗ для различных значений ГВП и различной точности его воспроизведения и оформить результаты в виде каталогов. Как и в случае аппроксимации характеристик фильтров, применяется как равноволновая аппроксимация, так и аппроксимация монотонными характеристиками.

Определим далее общий вид операторной передаточной функции ЛЗ. Во-первых, знаменатель любой передаточной функции должен быть полиномом Гурвица $v(p)$. Во-вторых, непосредственной подстановкой легко убедиться, что модуль комплексной передаточной функции равен единице, если в числителе находится полином, сопряженный полиному знаменателя. Поэтому в самом общем виде комплексная передаточная функция ФК или ЛЗ имеет вид

$$H(j\omega) = v(-j\omega)/v(j\omega).$$

Заменив $j\omega$ на p , получим операторную передаточную функцию

$$H(p) = v(-p)/v(p). \quad (18.33)$$

Как видим, вся информация о передаточной функции содержится в полиноме Гурвица. Так, фазовая характеристика четырех-полюсника равна удвоенному аргументу полинома при $p = j\omega$

$$B(\omega) = 2\varphi(\omega) = 2\arg v(j\omega),$$

где $\varphi(\omega) = \arg v(j\omega)$.

Продифференцировав аргумент, получим

$$\varphi'(\omega) = d(\arg v(j\omega))/d\omega,$$

а ГВП линии задержки равно

$$t_{\text{гр}}(\omega) = 2\varphi'(\omega).$$

Мы уже убедились, что при построении каталогов удобно применять нормированные величины. В данном случае это нормированная частота $\Omega = \omega/\omega_{\text{н}}$ и нормированное ГВП $\hat{t}_{\text{гр}} = \omega_{\text{н}} t_{\text{гр}}$. При синтезе ЛЗ частота нормирования $\omega_{\text{н}}$ находится из условия, что на нулевой частоте нормированная функция $\hat{\varphi}'(0) = 1$, а ГВП равно 2, т. е.

$$\hat{t}_{\text{гр}}(0) = t_{\text{гр}}(0)\omega_{\text{н}} = 2.$$

Отсюда

$$\omega_n = 2/t_{\text{гр}}(0). \quad (18.34)$$

Аппроксимация ГВП гладкими функциями осуществляется на основе *полиномов Бесселя*, которые имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} v_B(p) &= p + 1, \\ v_B(p) &= p^2 + 3p + 3, \\ v_B(p) &= p^3 + 6p^2 + 15p + 15, \\ v_B(p) &= p^4 + 10p^3 + 45p^2 + 105p + 105 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Графики нормированной функции $\hat{\varphi}'(\Omega)$ показаны на рис. 18.41.

Задача аппроксимации максимально-гладкими функциями решена аналитически с помощью рядов Тейлора. Задаваясь погрешностью аппроксимации Δ , легко получить нормированные граничные частоты рабочей полосы линии задержки. На рис. 18.41 проведена линия на уровне 0,9, что отвечает 10% погрешности. Существуют справочники, в которых приведены таблицы, содержащие граничные нормированные частоты при различных порядках полинома Бесселя n и различных погрешностях.

Зная полином Бесселя нетрудно численно найти координаты его корней, которые являются полюсами передаточной функции. Напомним, что в соответствии с (18.33) каждому полюсу в левой полуплоскости соответствует нуль в правой, т. е. $p_{0k} = -p_k$. Координаты корней полиномов Бесселя приведены в справочниках.

Рассмотрим порядок синтеза ЛЗ с максимально-плоской характеристикой группового времени. При синтезе заданными величинами являются групповое время t_z , рабочий диапазон частот $0 \dots \omega_1$, погрешность аппроксимации Δ . Согласно (18.34) находим частоту нормирования ω_n при условии, что $t_{\text{гр}}(0) = t_z$. Зная ω_n рассчитываем нормированную граничную частоту $\omega_1/\omega_n = \Omega_1$. Пользуясь графиками или таблицами, находим минимальный порядок передаточной функции ЛЗ, при которой граничная частота рабочей полосы частот равна или превышает Ω_1 . Найденному порядку соответствует полином Бесселя $v_B(p)$. Таким образом, получена передаточная функция в виде

$$H(p) = v_B(-p)/v_B(p).$$

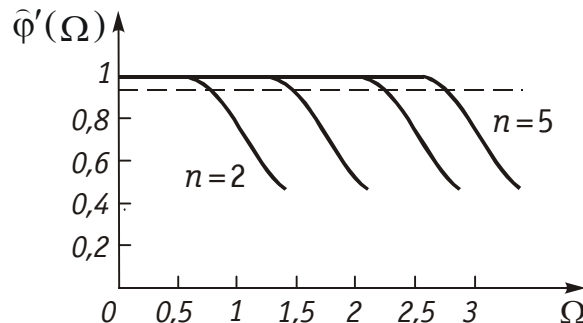


Рис. 18.41

Зная координаты корней полинома Бесселя, передаточную функцию можно представить в виде произведений функций второго порядка и каждую функцию реализовать фазовым звеном, как это было рассмотрено ранее. Напомним, что при нечетном порядке m одна из функций будет первого порядка.

Решить задачу равноволновой аппроксимации аналитически трудно, поэтому она решается численными методами и в справочниках приведены такие же таблицы, как и в случае аппроксимации максимально гладкими функциями. Поэтому порядок синтеза ЛЗ с равноволновыми характеристиками группового времени остается прежним, как и в случае монотонных характеристик.

Гармонические корректоры. Как уже отмечалось, параметры тракта передачи нуждаются в окончательной коррекции. Для этой цели применяются регулируемые корректоры, которые, как правило, настраиваются автоматически. Теория таких корректоров заключается в том, что передаточную функцию корректора, которая является с точностью до постоянной обратно пропорциональной по отношению к линии передачи, раскладывают в ряд по системе ортогональных функций:

$$H_K(j\omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l \phi_l(j\omega).$$

Если в качестве базисной функции $\phi_l(j\omega)$ выбрать передаточную функцию ЛЗ, то получится ряд Фурье в комплексной форме:

$$H_K(j\omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l e^{-jl\omega\Delta t}. \quad (18.35)$$

коэффициенты которого

$$A_l = \frac{1}{2\omega_c} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} H_K(j\omega) e^{j\frac{l\pi\omega}{\omega_c}} d\omega. \quad (18.36)$$

Сделаем важные замечания: 1. Ряд Фурье применяется для разложения периодических функций. Поэтому АЧХ и ФЧХ такого корректора также будут периодическими. Интервал $[-\omega_c, \omega_c]$ является рабочим. 2. Так как АЧХ линии передачи является четной функцией, а ФЧХ — нечетной, то коэффициенты (18.36) в разложении ряда Фурье (18.35) являются вещественными числами. 3. Для ускорения сходимости ряда из фазочастотной характеристики линии вычитают линейную составляющую, что устраняет разрывы ФЧХ на границах интервала.

Попытаемся реализовать передаточную функцию (18.35). Из данного ряда следует, что передаточная функция корректора получается путем умножения передаточных функций линий задержки на вещественные числа с последующим суммированием. Однако, точная реализация функции (18.35) невозможна, так как требует бесконечного числа ЛЗ, поэтому ее реализуют приближенно, ограничиваясь конечными числами слагаемых с отрицательными (m) и положительными (n) индексами

$$H_K(j\omega) \cong \sum_{l=-m}^n A_l e^{-jl\omega\Delta t}. \quad (18.37)$$

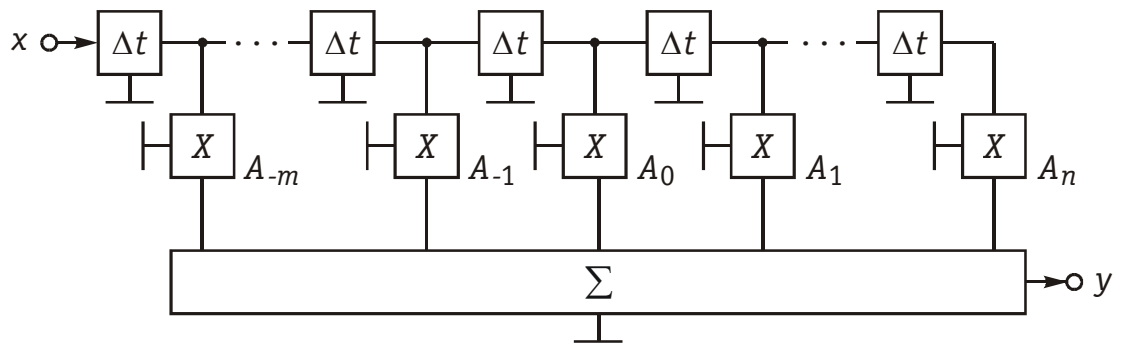


Рис. 18.42

Даже после усечения ряда, передаточная функция остается нереализуемой. Во-первых, передаточная функция ЛЗ не удовлетворяет УФР. Во-вторых, при отрицательных значениях l ФЧХ линии задержки равна $|l|\Delta t\omega$, а ее групповое время $t = -d\phi(\omega)/d\omega = |l|\Delta t$ является отрицательным. В данном случае это означает, что нарушается причинно-следственная связь и колебание на выходе появляется раньше, чем на входе. Данная трудность легко преодолевается, если допустить что корректор вносит постоянную задержку $t_{\text{гр}} = (m+1)\Delta t$. С учетом сказанного, функциональную схему корректора представляют в виде, показанном на рис. 18.42.

Колебание x , поступающее на вход корректора, задерживается первой ЛЗ на время Δt и поступает на входы умножителя и следующей ЛЗ. Колебание, поступившее на вход второй ЛЗ, задерживается дополнительно на время Δt так, что общая задержка составляет $2\Delta t$. Задержанное на эту величину колебание поступает на вход третьей ЛЗ и вход второго умножителя и т. д. Задержанные на величины $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t \dots$ колебания суммируются, образуя колебание y . Таким образом, получается с точностью до множителя $e^{(m+n)\Delta t}$ передаточная функция (18.37). Умножитель в простейшем случае представляет собой делитель напряжения. Регулировка (настройка) корректора осуществляется с помощью изменения коэффициентов A_l . На практике изменяется коэффициент деления делителя. Для упрощения изображения схемы гармонического корректора каскадное соединение линии задержки заменяют одной ЛЗ с отводами, а умножители — переменным сопротивлением (кроме этого не показывают заземленных проводов). Соответствующая данным упрощениям схема гармонического корректора показана на рис. 18.43. Частным случаем гармонического корректора является косинусный корректор. Он получается когда число отводов слева и справа от нулевого одинаково и соответствующие коэффициенты с положительными и отрицательными индексами равны между собой, т. е. $A_{-l} = A_l$. Тогда попарные суммы дают косинусоидальную функцию

$$A_{-l}e^{jl\omega\Delta t} + A_l e^{-jl\omega\Delta t} = 2A_l \cos l\omega\Delta t,$$

а выражение (18.37) примет вид

$$H(j\omega) = A_0 + 2\sum_{l=1}^n A_l \cos l\omega\Delta t.$$

Полученная функция является вещественной, а значит может применяться только для коррекции АЧХ.

В данном параграфе изложены только основы построения гармонических корректоров в диапазоне частот $0 \dots \omega_1$. Здесь не рассмотрены полосовые кор-

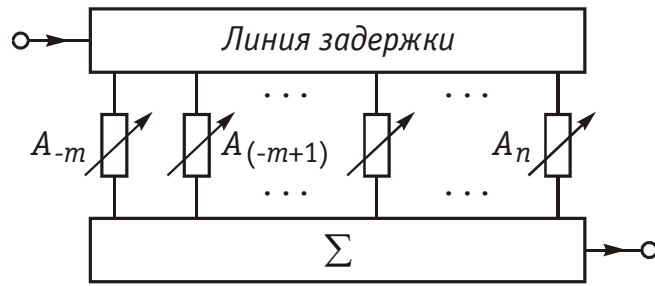


Рис. 18.43

ректоры, алгоритмы автоматической настройки корректоров, а также корректоры с обратными связями и ряд других вопросов, которые изучаются в специальных курсах.

Вопросы и задания для самопроверки

1. Почему происходят искажения сигнала на выходе цепи?
2. Сформулировать условие отсутствия амплитудно-частотных искажений в цепи.
3. Каким образом корректируются частотные характеристики цепей?
4. По какой схеме можно построить пассивный амплитудный корректор?
5. Как рассчитывается передаточная функция Т-перекрытого корректора и вносимое им ослабление?
6. Схема двухполюсника \underline{Z}_2 в корректоре приведена на рис. 18.14, а. Получить схему двухполюсника \underline{Z}_1 . Построить график частотной зависимости ослабления $A_k(\omega)$ корректора.
7. Какие схемы типовых звеньев пассивных корректоров известны? Какой вид имеют частотные характеристики вносимого ими ослабления?
8. Доказать, что частотная характеристика ослабления $A_k(\omega)$ звена, изображенного на рис. 18.16, имеет вид (18.8), а максимальное значение ослабления рассчитывается по формуле $A_{k\max} = 20 \lg |1 + R_1/R_0|$.
9. Доказать, что операторная передаточная функция элементарного четырехполюсника, изображенного на рис. 18.22, б, соответствует передаточной функции корректора (формула (18.5)).
10. Какие амплитудные корректоры называются активными?
11. Получить передаточную функцию и частотную характеристику ослабления активного звена корректора, изображенного на рис. 18.23, б, в котором в качестве двухполюсника \underline{Z} выбран параллельный LC-контур. Подтвердить, что график рабочего ослабления $A_k(\omega)$ такого корректора — это кривая 2 на рис. 18.25.

$$\text{Ответ: } H_K(p) = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot \frac{p^2 + p \frac{1}{(R_1 + R_2)C} + \frac{1}{LC}}{p^2 + p \frac{1}{R_2 C} + \frac{1}{LC}} = H \frac{p^2 + \alpha_1 p + \omega_0^2}{p^2 + \alpha_2 p + \omega_0^2}.$$

12. Каков порядок расчета пассивного амплитудного корректора?
13. Рассчитать элементы, образующие двухполюсник \underline{Z}_1 амплитудного корректора, частотная зависимость ослабления $A_K(f)$ которого приведена в таблице, а значение $R_0 = 200 \text{ Ом}$.

Таблица

f , кГц	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
A_K , дБ	15,6	10,5	6,3	4,0	2,7	1,9	1,4	1,1	0,9	0,7	0,6

Ответ: $R_1 = 1 \text{ кОм}$, $C_1 = 51 \text{ нФ}$.

14. Зачем применяют каскадное соединение типовых звеньев корректоров?
15. Сформулировать условия безискаженной передачи сигнала.
16. Почему происходят фазо-частотные искажения?
17. Что такое групповое время прохождения?
18. По рис. 18.12 пояснить, как работает фазовый корректор.
19. Каким образом строятся пассивные фазовые корректоры?
20. Как рассчитываются передаточные функции $H_K(p)$, фазовые характеристики $B_K(\omega)$ и ГВП $t_{гр}(\omega)$ мостовых фазовых корректоров 1-го и 2-го порядков?
21. Как изменится график $t_{гр}(f)$ на рис. 18.32, б, если индуктивность L_1 уменьшить в 2 раза.
22. Определить параметры элементов фазового корректора 2-го порядка (рис. 18.32) по заданным коэффициентам передаточной функции $\omega_0 = 0,416 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$, $Q_{\Pi} = 0,25$ и $R_0 = 600 \text{ Ом}$.

Ответ: $L_1 = 36 \text{ мГн}$; $C_1 = 1,6 \text{ мкФ}$;
 $L_2 = 0,58 \text{ Гн}$; $C_2 = 0,1 \text{ мкФ}$.

23. Каким образом строятся активные фазовые корректоры?
24. Доказать, что операторная передаточная функция $H_K(p)$ корректора, изображенного на рис. 18.35, имеет вид (18.30).
25. Каким образом на основе схемы рис. 18.37 получить фазовые корректоры 1-го и 2-го порядков?
26. Как изменится график $t_{гр}(f)$ на рис. 18.39, если сопротивление R_1 : 1) увеличить в 4 раза; 2) увеличить в 10 раз; 3) уменьшить в 2 раза?
27. Каков алгоритм расчета фазовых корректоров?

ГЛАВА 19. ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ И ЦЕПИ

19.1. Дискретные сигналы

Дискретизация аналоговых сигналов. Сигнал — это физический процесс (например, изменяющиеся во времени токи и напряжения), содержащий в себе некоторую информацию. Любой сигнал можно описать математической функцией.

Существуют аналоговые, дискретные и цифровые сигналы. *Аналоговые сигналы* описываются непрерывной во времени функцией $x(t)$, которая может принимать любые значения в определенном интервале (на рис. 19.1 в качестве $x(t)$ взят ток $i(t)$ микрофона М); *дискретные сигналы* $x_T(t)$ представляют собой последовательности или отсчеты функции $x(t)$, взятые в определенные дискретные моменты времени kT (рис. 19.1, б); *цифровыми* являются сигналы, которые в дискретные моменты времени kT принимают конечные дискретные значения — *уровни квантования* (рис. 19.1, в), которые затем кодируются цифровыми кодами. (На рис. 19.1, в, Δ — шаг квантования).

Если в цепь микрофона (рис. 19.1), где ток $i(t)$ является непрерывной функцией времени, встроить ключ и периодически на короткие мгновения замыкать его, то ток в цепи будет иметь вид узких импульсов с амплитудами, повторяющими форму непрерыв-

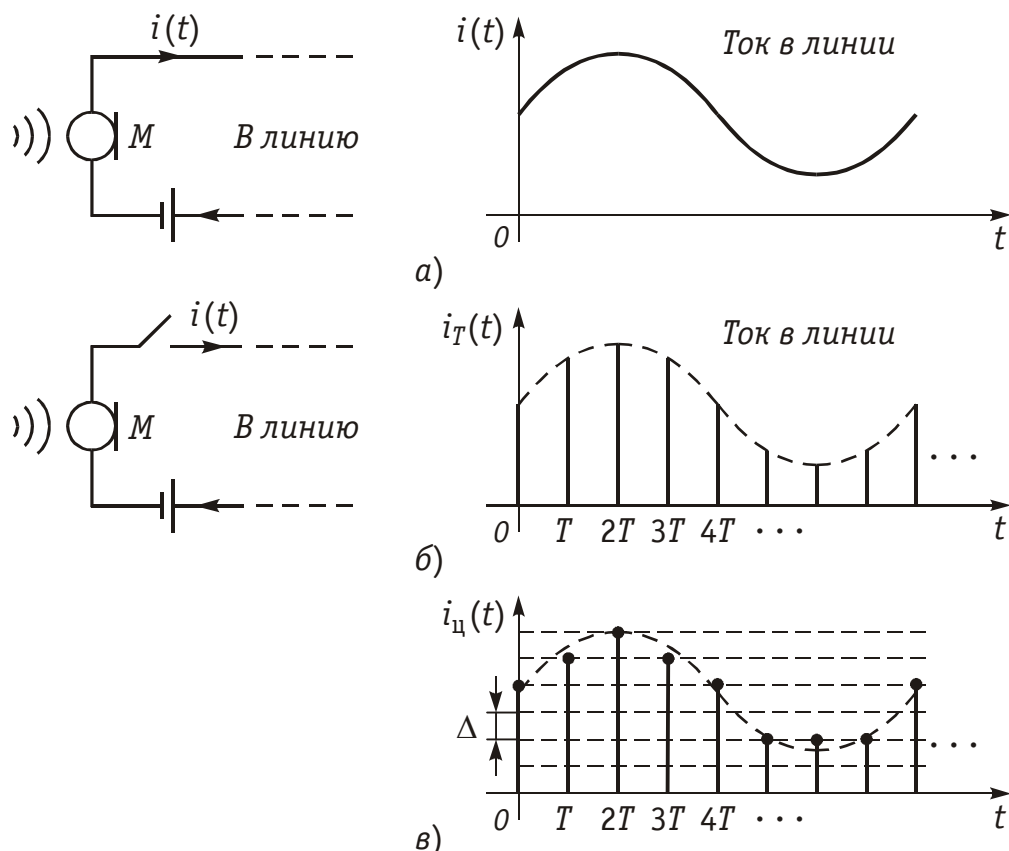


Рис. 19.1

ного сигнала. Последовательность этих импульсов, которые называют *отсчетами непрерывного сигнала*, и представляет собой, не что иное, как дискретный сигнал. Причем, во всех этих записях k — целое число, принимающее как положительные, так и отрицательные значения.

В отличие от непрерывного сигнала $x(t)$ дискретный сигнал можно обозначить $x_T(t)$. Так, на рис. 19.1 при $k < 0$ дискретный сигнал $i_T(t) \equiv 0$. При $k = 0$ значение $i_T(0T)$ равно значению сигнала $i(t)$ в момент времени $t = 0$. При $k > 0$ отсчеты $i(kT)$ повторяют форму сигнала $i(t)$, т.к. их амплитуды равны значениям непрерывного сигнала в моменты времени kT .

Дискретные сигналы можно задавать графиками, как это показано на рис. 19.1, формулами, например, $i_T(t) = \sin(2\pi f k T)$, в виде таблиц дискретных значений или другими способами.

Цифровые сигналы и фильтры будут рассмотрены в § 19.8.

При рассмотрении дискретных сигналов часто время t нормируют к периоду дискретизации:

$$\hat{t} = \frac{t}{T}.$$

При этом дискретный сигнал рассматривается как функция целочисленной переменной k :

$$x(kT) = x(k).$$

Математическая модель дискретного сигнала. Аналитически дискретный сигнал $x_T(t)$ удобно представлять с помощью *дискретизирующей последовательности δ -функций*:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT). \quad (19.1)$$

Тогда $x_T(t)$ можно представить в виде

$$x_T(t) = x(t) \cdot f(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT), \quad (19.2)$$

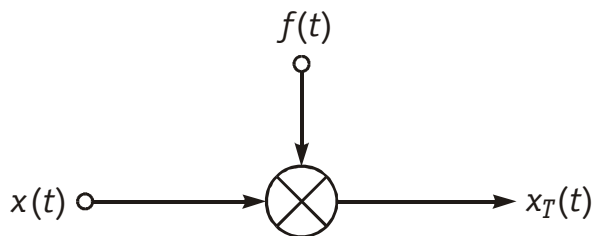


Рис. 19.2

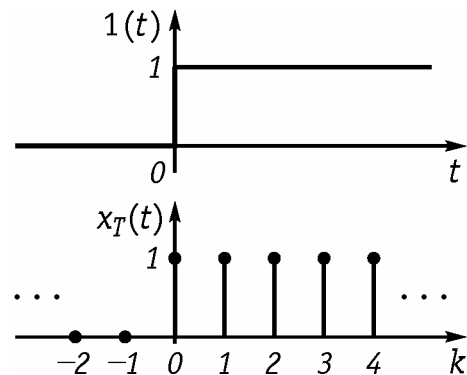


Рис. 19.3

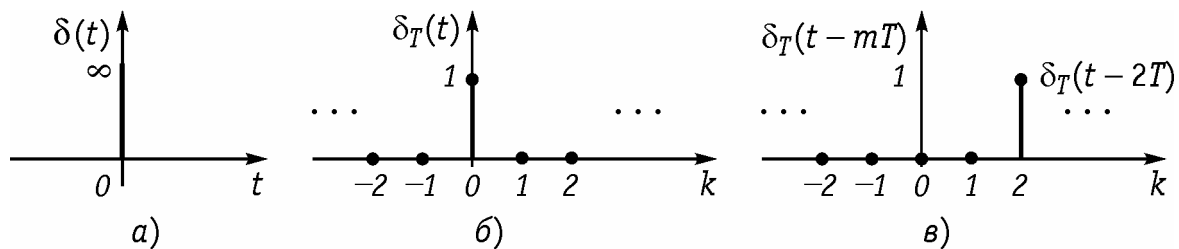


Рис. 19.4

т.е. дискретный сигнал $x_T(t)$ с помощью (19.2) представляется в виде последовательности δ -функций с весовыми коэффициентами, равными отсчетам $x(kT)$ аналогового сигнала $x(t)$ в точках kT . На рис. 19.2 изображена схема, иллюстрирующая процедуру формирования дискретного сигнала согласно формулы (19.2).

Рассмотрим примеры некоторых дискретных сигналов, полученных из типовых аналоговых сигналов.

Пример. Единичный ступенчатый аналоговый сигнал $1(t)$ приведен на рис. 19.3.

Соответствующий ему дискретный сигнал $x_T(t)$ называется ступенчатой последовательностью. Он определяется следующим образом:

$$x_T(t) = \begin{cases} 1, & k \geq 0; \\ 0, & k < 0. \end{cases}$$

Такая последовательность приведена на рис. 19.3.

Пример. Импульс Дирака или δ -функция в аналоговой области приведена на рис. 19.4, а.

Дельта-последовательность или дискретная δ -функция определяется выражением

$$\delta_T(t) = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

Последовательность $\delta_T(t)$, приведенная на рис. 19.4, б принимает единственное значение, равное 1, при $k = 0$. Этот сигнал можно сдвинуть на m интервалов (рис. 19.4, в при $m = 2$):

$$\delta_T(t - mT) = \begin{cases} 1, & k = m; \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

Пример. Цифровой единичный скачок (рис. 19.5, а), описываемый отношением

$$u_1(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0; \\ 0, & k < 0, \end{cases}$$

из которого следует, что данный сигнал равен единице при $k \geq 0$ и равен нулю при остальных значениях k .

Задержанный цифровой единичный скачок (рис. 19.5, б), описываемый соотношением

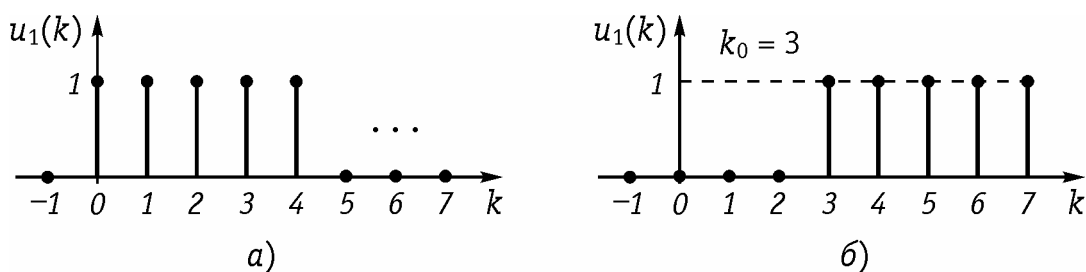


Рис. 19.5

$$u_1(k - k_0) = \begin{cases} 1, & k \geq k_0; \\ 0, & k < k_0, \end{cases}$$

из которого следует, что данный сигнал, в отличие от незадержанного, равен единице при $k \geq k_0$ и равен нулю при остальных значениях k .

Пример. Дискретная экспонента, описываемая соотношением

$$x(k) = \begin{cases} a^k, & k \geq 0; \\ 0, & k < 0, \end{cases}$$

Если $|a| < 1$, дискретная экспонента называется *убывающей* (рис. 19.6, а), а если $|a| > 1$, — *возрастающей* (рис. 19.6, б). При $a < 0$ последовательность будет *знакопеременной* (рис. 19.6, в), а при $a > 0$ — *знакопостоянной*. При $a = 1$ все значения отсчетов при $k \geq 0$ одинаковы и равны единице.

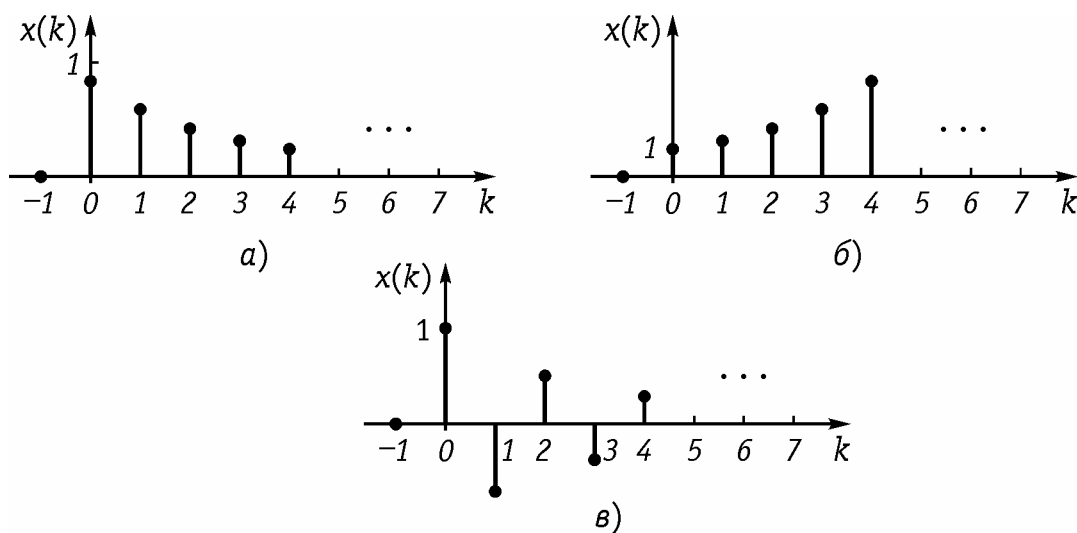


Рис. 19.6

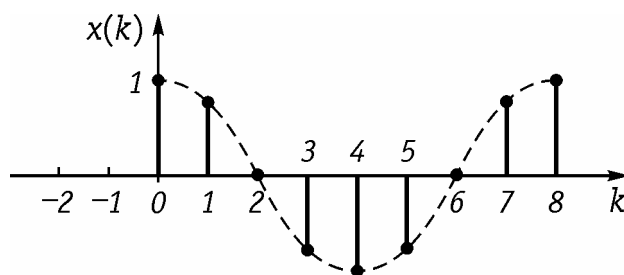


Рис. 19.7

Пример. Дискретная косинусоида (синусоида) (рис. 19.7), описываемая соотношением

$$x(k) = A \cos(2\pi fTk) = A \cos(\omega Tk),$$

где T — период дискретизации; f , ω — линейная и циклическая частоты, связанные соотношением $\omega = 2\pi f$.

Дискретная косинусоида связана с аналоговым гармоническим сигналом следующим образом:

$$x(t) = A \cos(\omega t)|_{t=kT} = A \cos(\omega Tk).$$

Пример. Дискретная комплексная экспонента, описываемая соотношением

$$x(k) = Ae^{j\omega Tk},$$

или, с учетом формулы Эйлера

$$x(k) = A \cos(\omega Tk) + jA \sin(\omega Tk).$$

Интервал времени T , через который отсчитываются значения непрерывного сигнала $x(t)$, называется *интервалом дискретизации*. Обратная величина $1/T$ (обозначим ее f_d) называется частотой взятия отсчетов или *частотой дискретизации*.

Отсчеты непрерывного сигнала следует брать с такой частотой (или через такой интервал времени), чтобы успевать отследить все, даже самые быстрые, изменения сигнала. Иначе, при восстановлении этого сигнала по дискретным отсчетам часть информации будет потеряна и форма восстановленного сигнала будет отличаться от формы исходного (рис. 19.8). Если обратиться к схеме рис. 19.1, то это означает, что звук на приеме будет восприниматься с искажениями.

Для сигналов с ограниченным спектром, т.е. сигналов, у которых спектр ограничен некоторой верхней частотой $\omega_v = 2\pi F_v$ существует *теорема Котельникова*, определяющая выбор интервала

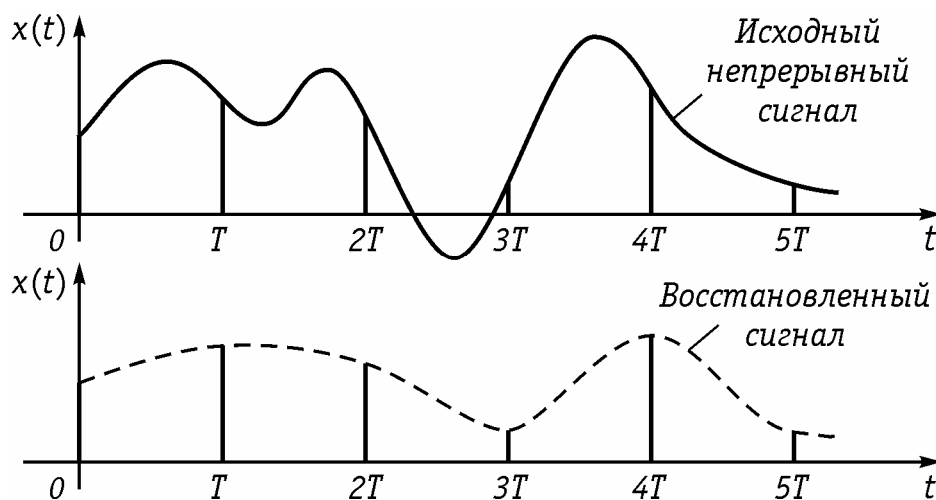


Рис. 19.8

дискретизации T (или, что то же, частоты дискретизации f_d). Эта теорема впервые была доказана В.А. Котельниковым в 1933 г. в работе «О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи» ставшей основополагающей в теории и технике цифровой связи.

Теорема Котельникова. *Если функция $x(t)$ имеет спектр, ограниченный верхней частотой F_B , то $x(t)$ полностью определяется последовательностью своих значений (отсчетов) в моменты времени, отстоящие друг от друга на период $T \leq 1/2F_B$.*

Математически теорема Котельникова записывается следующим образом

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin \omega_B(t - kT)}{\omega_B(t - kT)}, \quad (19.3)$$

где $\omega_B = 2\pi F_B$; $T = 1/2F_B$; $x(kT)$ — значения (отсчеты) функции $x(t)$ в моменты kT .

Доказательство теоремы Котельникова дается в общей теории связи. Здесь же отметим, что функция вида $\sin \omega_B t' / \omega_B t'$ ($t' = t - kT$) известна нам как функция отсчетов (см. § 5.3), поэтому теорему Котельникова иногда называют еще *теоремой отсчетов*.

Физический смысл теоремы Котельникова (19.3) заключается в том, что непрерывная функция $x(t)$ с ограниченным спектром F_B полностью может быть восстановлена, если известны ее отсчеты, взятые через интервал $T \leq 1/2F_B$. Эта теорема играет очень большую роль в теории связи, т. к. позволяет передачу аналоговых сигналов заменить передачей дискретных или цифровых сигналов, что позволяет существенно повысить эффективность систем связи.

Учитывая, что согласно теоремы Котельникова частота дискретизации $f_d = 1/T \geq 2F_B$, т.е. должна быть не менее, чем вдвое превышать верхнюю частоту F_B в спектре аналогового сигнала, то при анализе дискретных сигналов и цепей в частотной области часто вводят понятие *нормированной частоты*:

$$\hat{f} = \frac{f}{f_d} = fT \quad \text{или} \quad \hat{\omega} = \omega T. \quad (19.4)$$

19.2. Спектр дискретного сигнала

Преобразование Фурье для дискретного сигнала. Определим связь между спектром $X(j\omega)$ аналогового сигнала $x(t)$ и спектром $X_T(j\omega)$ дискретного сигнала $x_T(t)$, определенного моделью (19.2). Учитывая, что $x_T(t) = x(t)f(t)$ согласно теоремы свертки (9.30) получим спектральную плотность дискретного сигнала

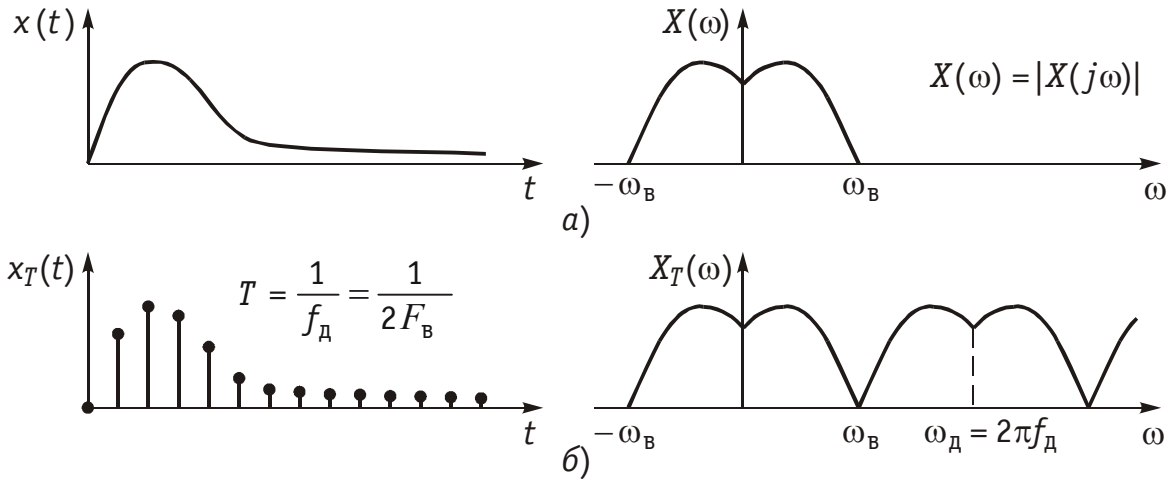


Рис. 19.9

$$X_T(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) X_f(j\omega - j\Omega) d\Omega, \quad (19.5)$$

где $X_f(j\omega)$ — спектральная плотность дискретизирующей последовательности (19.1).

Для нахождения $X_f(j\omega)$ разложим $f(t)$ в комплексный ряд Фурье (5.6):

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{A}_k e^{jk\omega_d t}, \quad (19.6)$$

где $\omega_d = 2\pi/T$ — частота дискретизации,

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_d t} \cdot dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_d t} \cdot dt = \frac{2}{T}.$$

Отсюда согласно (9.42) получаем

$$X_f(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_d). \quad (19.7)$$

Подставив (19.7) в формулу (19.5) после изменения порядка интегрирования и суммирования и с учетом фильтрующего свойства δ -функции окончательно получим

$$X_T(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j\omega - jn\omega_d). \quad (19.8)$$

Из (19.8) следует важный вывод: *спектр дискретного сигнала $x_T(t)$ (рис. 19.9 б) представляет собой сумму бесконечно большого числа «копий» спектра аналогового сигнала (рис. 19.9, а), расположенных на оси частот через одинаковые интервалы.*

Следует отметить, что согласно (19.8) и рис. 19.9, б энергия спектра дискретного сигнала оказывается бесконечно велика, что

является следствием идеализации реального сигнала моделью (19.2). Если же использовать вместо дискретизирующей последовательности (19.1) последовательность импульсов конечной энергии (например, прямоугольных импульсов), то получим спектр $X_T(j\omega)$, энергия которого убывает с ростом ω («копии» $X(j\omega)$ с ростом ω уменьшаются). В то же время следует еще раз подчеркнуть, что представление дискретного сигнала в форме (19.2) существенно упрощает анализ дискретных сигналов и цепей и широко используется в расчетах.

Спектр дискретного сигнала $X_T(j\omega)$ можно найти и непосредственно из прямого преобразования Фурье (9.6) для дискретного сигнала (действует в момент $t \geq 0$).

$$\begin{aligned} X_T(j\omega) &= \int_0^{\infty} x_T(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT) dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} \delta(t - kT) dt. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом фильтрующего свойства δ -функции получим прямое преобразование Фурье для дискретных сигналов.

$$X_T(j\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-j\omega kT} \quad (19.9)$$

и обратное преобразование Фурье:

$$x(kT) = \frac{1}{\omega_d} \int_{-0,5\omega_d}^{0,5\omega_d} X_T(j\omega) e^{j\omega kT} d\omega. \quad (19.10)$$

На практике в формулах (19.9), (19.10) часто вместо зависимости $X_T(j\omega)$ рассматривают зависимости $X_T(jf)$, которые легко можно получить путем замены $\omega = 2\pi f$.

Пример. Рассчитаем спектр дискретного сигнала, состоящего из одного отсчета $x_T(t) = [a; 0; 0; 0; \dots]$.

Воспользуемся формулой (19.9), в которую подставим значения $x_t(t)$ заданного сигнала

$$X_T(jf) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-j2\pi f kT} = a e^{-j2\pi f \cdot 0 \cdot T} = a.$$

Пример. Рассчитаем спектр экспоненциальной дискретной функции $x_T(t) = 0,5^k, k \geq 0$.

График дискретной функции $x_T(t)$ приведен на рис. 19.10, а ее отсчеты можно записать в виде последовательности $x\{k\} = \{1; 0,5; 0,25; 0,125; 0,0625; \dots\}$.

Спектр дискретной экспоненты рассчитаем по формуле (19.9)

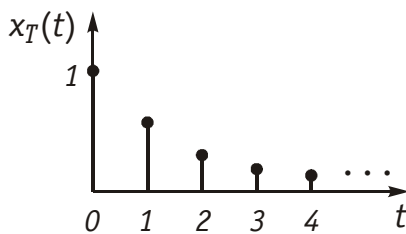


Рис. 19.10

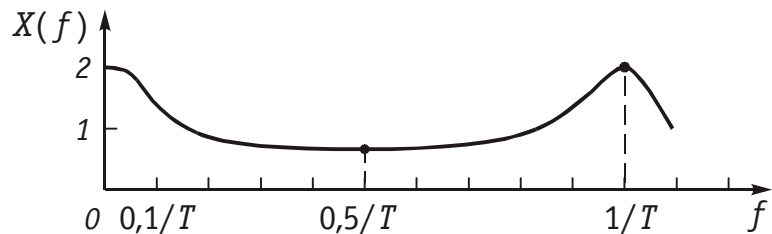


Рис. 19.11

$$X(jf) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kT] e^{-j2\pi f k T} = \sum_{k=0}^{\infty} 0,5^k e^{-j2\pi f k T} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (0,5 e^{-j2\pi f T})^k = \frac{1}{1 - 0,5 e^{-j2\pi f T}},$$

где для суммирования ряда использована формула

$$\sum_{k=0}^{\infty} y^k = 1 + y + y^2 + y^3 + \dots = \frac{1}{1 - y}.$$

Используя формулу Эйлера ($e^{jx} = \cos x + j \sin x$), получим выражение для расчета спектра амплитуд $X(f)$.

$$X(f) = 1 / \sqrt{[1 - 0,5 \cos(-2\pi f T)]^2 + [0,5 \sin(-2\pi f T)]^2}.$$

Для построения графика будем задавать значения f от 0 до $1/T$ с шагом $0,1/T$ и рассчитывать $X(f)$.

График спектра амплитуд $X(f)$ экспоненциальной дискретной функции $x_T(t) = 0,5^k$ приведен на рисунке 19.11.

Как видно из графика, спектр дискретного сигнала сплошной и периодический с периодом $f_d = 1/T$.

Следует отметить, что если не выполняется условие теоремы Котельникова: $f_d \geq 2f_v$, то спектры в (19.8) частично перекрываются. На рис. 19.12, рис. 19.13 показан характер изменения спектра дискретного сигнала $X_T(f)$ при изменении частоты дискретизации сигнала $x_T(t)$, ограниченного во времени интервалом T_c (рис. 19.12) и неограниченного во времени (рис. 19.13).

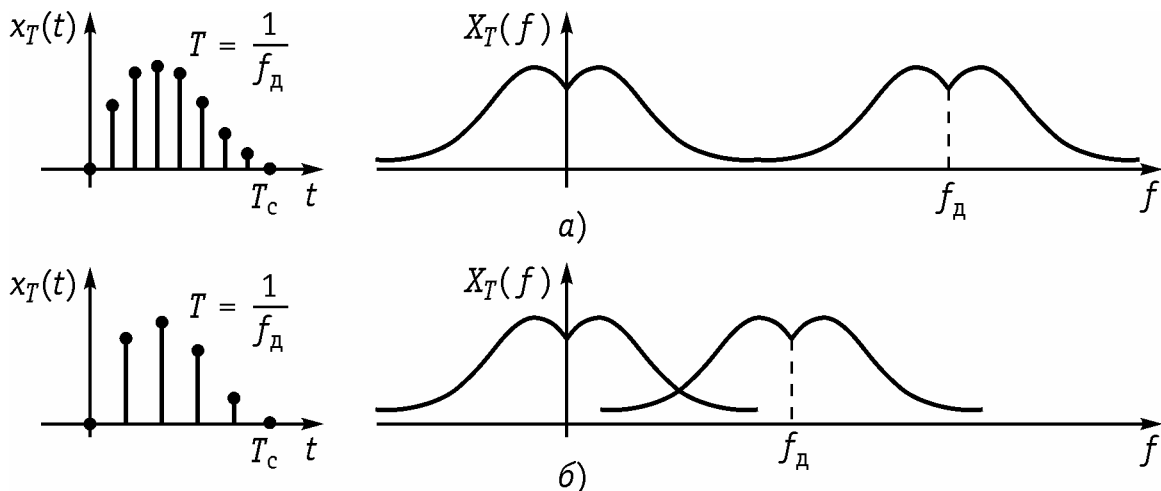


Рис. 19.12

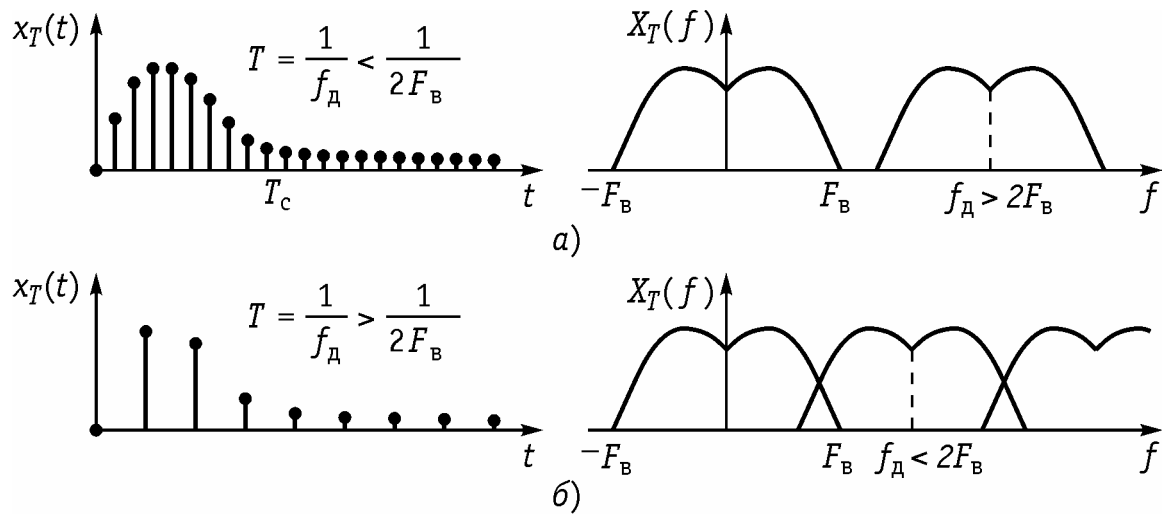


Рис. 19.13

Как следует из представленных графиков увеличение периода дискретизации $T > 1/2F_B$; $F_d < 2F_B$ приводит к наложению смежных спектров в (19.8), что приводит к наложению спектра $X_T(f)$. Эти искажения называются *ошибками наложения*. Чтобы их устранить необходимо частоту дискретизации увеличить до $F_d \geq 2F_B$.

Пример. Рассчитаем интервал дискретизации и минимально допустимую частоту дискретизации сигнала, спектральная плотность которого равна нулю при значениях частоты выше 100 кГц.

Из условия задачи следует, что граничная частота спектра F_B равна 100 кГц. Тогда в соответствии с теоремой Котельникова имеем интервал дискретизации

$$T = \frac{1}{2F_B} = \frac{1}{2 \cdot 100 \cdot 10^3} = 5 \text{ мкс}.$$

Минимально допустимая частота дискретизации $f_d = 2F_B = 2 \cdot 100 = 200$ кГц.

Пример. Определим дискретные отсчеты сигнала длительностью $t_{\text{и}} = 3$ мс, приведенного на рис. 19.14, а, если в качестве граничной частоты спектра F_B принять значение $3/t_{\text{и}}$, выше которого все значения спектральной плотности уменьшаются более чем в 10 раз по сравнению с максимальным.

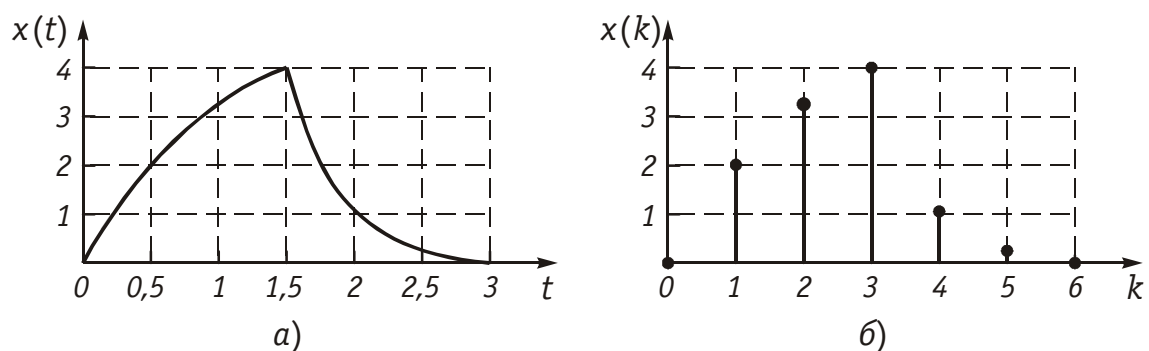


Рис. 19.14

Хотя сигнал конечной длительности имеет бесконечный спектр частот, однако почти всегда можно определить граничную частоту спектра таким образом, чтобы отсекание частот превышающих F_B , привело к пренебрежимо малым изменениям энергии исходного сигнала. Такое условие задано в примере.

Граничная частота спектра $F_B = 3/t_H = 3/(3 \cdot 10^3) = 1$ кГц.

Интервал дискретизации $T = 1/(2F_B) = 1/(2 \cdot 1 \cdot 10^3) = 0,5$ мс.

Берем отсчеты сигнала, приведенного на рис. 19.14, а, через интервал времени $T = 0,5$ мс и получаем последовательность $x\{k\} = \{0; 2; 3,2; 4; 1; 0,3; 0\}$, изображенную графически на рис. 19.14, б.

Отметим, что аналоговый сигнал $x(t)$ можно полностью восстановить по его дискретным отсчетам $x(kT)$ с помощью ФНЧ, частота среза которого $\omega_c = 0,5\omega_d = \omega_B$. Этот вывод хорошо иллюстрирует рис. 19.13, а из которого видно, что спектр сигнала на выходе ФНЧ совпадает со спектром аналогового сигнала $x(t)$.

Дискретное преобразования Фурье. Как следует из формулы (19.8) $X_T(j\omega)$ имеет периодическую структуру с $\omega_d = 2\pi/T$. Причем, как и спектр аналогового сигнала $X(j\omega)$ спектр дискретного сигнала $X_T(j\omega)$ является сплошным (см. рис. 19.9, б). Вместе с тем при цифровой обработке сигналов используется не только дискретизация во времени, но и дискретизация в частотной области.

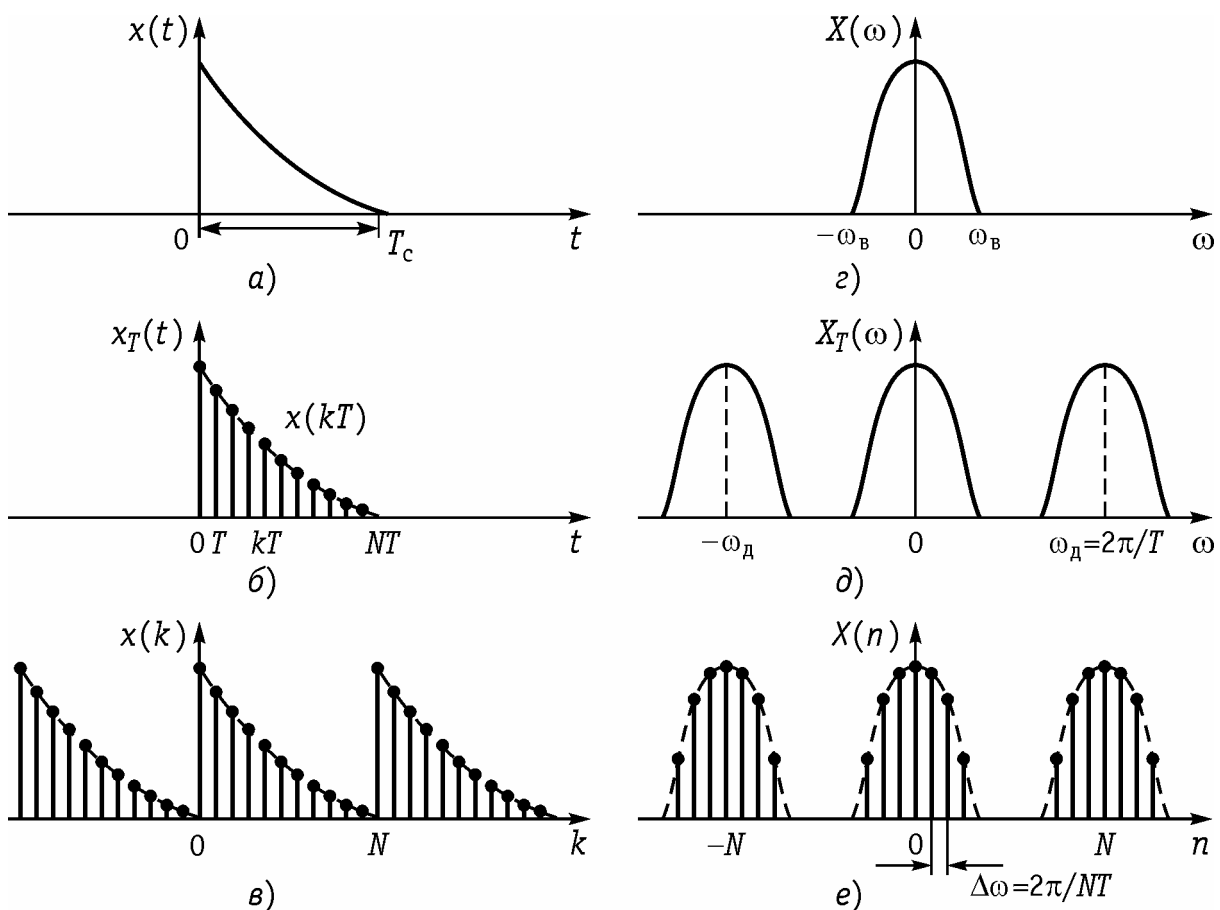


Рис. 19.15

Для сигнала $x(t)$ ограниченного во времени интервалом T_c (рис. 19.15, *a*) справедлива *обратная теорема Котельникова*, которая может быть получена из (19.3) путем замены $t \rightarrow \omega$; $\omega_B \rightarrow T_c/2$; $T \rightarrow \Delta\omega$:

$$X(j\omega) = \sum_{n=-T_c F_B}^{T_c F_B} X(n\Delta\omega) \frac{\sin \frac{T_c}{2}(\omega - n\Delta\omega)}{\frac{T_c}{2}(\omega - n\Delta\omega)}, \quad (19.11)$$

где $\Delta\omega = 2\pi/T_c$; T_c — длительность сигнала; $X(n\Delta\omega)$ — отсчеты спектра сигнала в частотной области.

Переходя к дискретному сигналу $x_T(t)$ (рис. 19.15, *б*) отметим, что общее количество отсчетов сигнала будет равно

$$N = T_c/T,$$

где $T = 2\pi/\omega_d = \pi/\omega_B$.

Дискретный спектр (рис. 19.15, *e*) может быть получен путем периодического повторения последовательности $\{x(kT)\}$ с периодом $T_c = NT$ (рис. 19.15, *в*). При этом частотный интервал между дискретными отсчетами спектра (рис. 19.15, *e*) составляет

$$\Delta\omega = 2\pi/T_c = 2\pi/NT. \quad (19.12)$$

С учетом вышеизложенного *дискретное преобразование Фурье* (ДПФ) можно получить, если в преобразовании (19.9) сделать замену $\omega = n\Delta\omega$. Тогда получим

$$X_T(jn\Delta\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT) e^{-jn\Delta\omega kT}$$

или с учетом (19.12)

$$X_T(jn\Delta\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT) e^{-jn \frac{2\pi}{N} k}, \quad (19.13)$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \pm \dots N/2$.

Для упрощения записи аргумент $n\Delta\omega$ и kT обычно заменяют индексом n и k соответственно и опускают индекс T , при этом (19.13) примет вид

$$X(jn) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad (19.14)$$

которое определяет *прямое ДПФ*.

С помощью (19.14) можно определить отсчеты спектра $X(jn)$ по временным отсчетам сигнала $x(k)$.

Обратное ДПФ можно получить из (19.14) воспользовавшись дуальностью прямого и обратного преобразований Фурье:

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(jn) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}. \quad (19.15)$$

При $k < 0$ обратное преобразование Фурье определит $x(k)$, расположенную слева от 0 (рис. 19.15, в).

Для ДПФ по аналогии с непрерывными преобразованиями Фурье справедливы основные теоремы и свойства (см. § 9.2).

В частности, *свойство линейности*

$$\sum_{l=1}^n a_l x_l(k) \doteq \sum_{l=1}^n a_l X_l(jn), \quad (19.16)$$

сдвиг дискретного сигнала:

$$x(k-m) \doteq X(jn) e^{-j\frac{2\pi}{N}nm}, \quad (19.17)$$

т.е. сдвиг последовательности отсчетов сигнала на m интервалов приводит лишь к изменению фазового спектра дискретного сигнала.

Теорема свертки:

$$X_1(n) X_2(n) \doteq \sum_{k=0}^{N-1} x_1(m-k) x_2(k), \quad (19.18)$$

где $N = N_1 + N_2$; N_1, N_2 — число отсчетов x_1 и x_2 соответственно.

Аналогично можно записать и другие теоремы для ДПФ. Заметим, что ДПФ можно использовать для определения не только спектра дискретных сигналов, но и спектра аналоговых сигналов, для чего их необходимо дискретизировать согласно теоремы Котельникова (19.3).

Пример. Рассчитаем ДПФ дискретного периодического сигнала, заданного тремя отсчетами $x\{k\} = \{0; 1; 2\}$.

Для расчета воспользуемся формулой ДПФ (19.14).

$$X(j0) = x(0) e^{-j2\pi \cdot 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{3}} + x(1) e^{-j2\pi \cdot 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{3}} + x(2) e^{-j2\pi \cdot 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{3}} = 0 + 1 + 2 = 3;$$

$$X(j1) = x(0) e^{-j2\pi \cdot 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}} + x(1) e^{-j2\pi \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}} + x(2) e^{-j2\pi \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}} = 0 + 1 e^{-j120^\circ} + 2 e^{-j240^\circ};$$

$$X(j2) = 0 e^{-j0^\circ} + 1 e^{-j240^\circ} + 2 e^{-j480^\circ}.$$

Поскольку

$$e^{-j120^\circ} = e^{-j480^\circ} = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad e^{-j240^\circ} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2},$$

то

$$X(j1) = \frac{1}{2}(-3 + j\sqrt{3}) = 1,74 e^{j150^\circ},$$

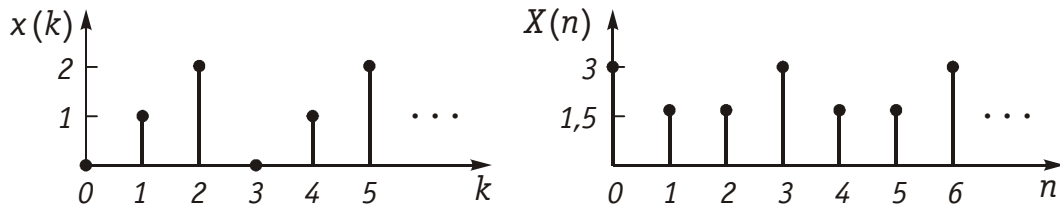


Рис. 19.16

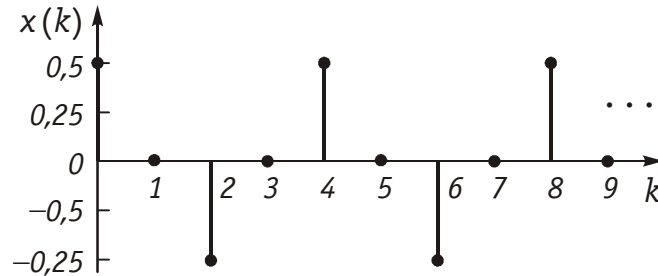


Рис. 19.17

$$X(j2) = \frac{1}{2}(-3 - j\sqrt{3}) = 1,74 e^{j210^\circ}.$$

Графики заданного дискретного периодического сигнала $x(k)$ и рассчитанного дискретного периодического спектра амплитуд $X(n)$ приведены на рис. 19.16.

Пример. Рассчитаем значения дискретного сигнала $x(k)$, ДПФ которого имеет вид $X[n] = \{0; 1; 0; 1\}$.

Значения дискретного сигнала $x(k)$ будем рассчитывать по формуле (19.15)

$$x(0) = \frac{1}{4} \{ X(0)e^{j0^\circ} + X(1)e^{j0^\circ} + X(2)e^{j0^\circ} + X(3)e^{j0^\circ} \} = 0,5;$$

$$\begin{aligned} x(1) &= \frac{1}{4} \left\{ X(0)e^{j0^\circ} + X(1)e^{j\frac{\pi}{2}} + X(2)e^{j\pi} + X(3)e^{j\frac{6\pi}{4}} \right\} = \\ &= \frac{1}{4} \{ 0 + j1 + 0 - j1 \} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(2) &= \frac{1}{4} \{ X(0)e^{j0^\circ} + X(1)e^{j\pi} + X(2)e^{j2\pi} + X(3)e^{j3\pi} \} = \\ &= \frac{1}{4} \{ 0 - 1 + 0 - 1 \} = -0,5; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(3) &= \frac{1}{4} \left\{ X(0)e^{j0^\circ} + X(1)e^{j\frac{3\pi}{2}} + X(2)e^{j3\pi} + X(3)e^{j\frac{9\pi}{2}} \right\} = \\ &= \frac{1}{4} \{ 0 - j + 0 + j \} = 0. \end{aligned}$$

График последовательности $x\{k\} = \{0,5; 0; -0,5; 0\}$ приведен на рис. 19.17. Сигнал $x(k)$ дискретный и периодический.

Пример. Определить с помощью ДПФ спектр аналогового сигнала, изображенного на рис. 19.18, а.

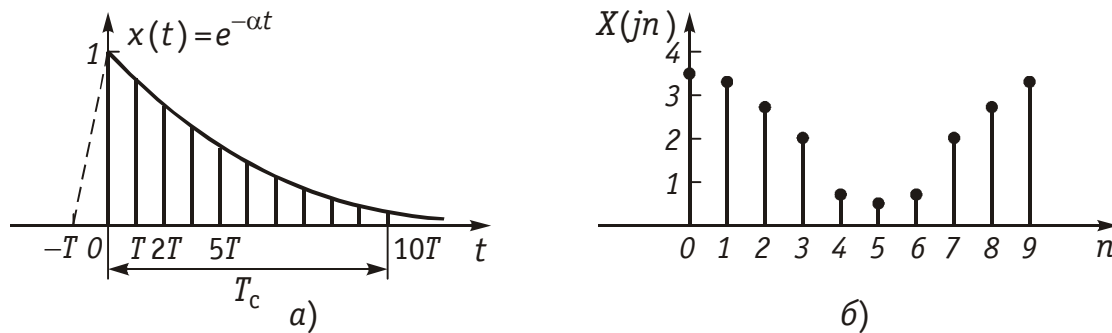


Рис. 19.18

Ограничим длительность сигнала T_c , где $e^{-\alpha T_c} \ll 1$ (рис. 9.18, а). Например, при $T_c = 3/\alpha$, $e^{-\alpha T_c} = e^{-3} \approx 0,05$. Выберем число отсчетов $N = 10$, определим частоту дискретизации

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_c} = \frac{2\pi}{N \cdot T} = \frac{2\pi}{10 \cdot T}.$$

Согласно (19.14) находим отсчеты спектра сигнала

$$X(j0) = 1 \cdot e^{-j0} + 0,716 e^{-j0} + 0,531 e^{-j0} + 0,37 e^{-j0} + 0,263 e^{-j0} + 0,189 e^{-j0} + \\ + 0,135 e^{-j0} + 0,0934 e^{-j0} + 0,07 e^{-j0} + 0,05 e^{-j0} = 3,41;$$

.....

$$X(j4) = 1 \cdot e^{-j0} + 0,716 e^{-j\frac{4}{5}\pi} + 0,531 e^{-j\frac{8}{5}\pi} + 0,37 e^{-j\frac{12}{5}\pi} + 0,263 e^{-j\frac{16}{5}\pi} + \\ + 0,189 e^{-j\frac{20}{5}\pi} + 0,135 e^{-j\frac{24}{5}\pi} + 0,0934 e^{-j\frac{28}{5}\pi} + 0,07 e^{-j\frac{32}{5}\pi} + 0,05 e^{-j\frac{36}{5}\pi} = 0,6$$

и т.д.

В таблице приведены результаты расчета спектра,

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$X(jn)$	3,4	3,3	2,8	1,6	0,6	0,4	0,6	1,6	2,8	3,3

а на рис. 19.18, б спектр сигнала $X(jn)$. Следует отметить, что с увеличением T (уменьшение числа отсчетов N) погрешность аппроксимации $x(t)$ увеличивается (см. рис. 19.8, а).

Как следует из вышеприведенных примеров и формул (19.14), (19.15), для вычисления ДПФ содержащих N отсчетов необходимо осуществить в общем случае N^2 операций с комплексными числами. Если длина обрабатываемых массивов достаточно велика, то вычисление ДПФ даже на современных быстродействующих ЭВМ занимает достаточно много времени. Для сокращения вычислений используют обычно алгоритм *быстрого преобразования Фурье* (БПФ). Существует много разновидностей БПФ. Здесь мы рассмотрим один алгоритм, основанный на прореживании по времени.

Быстрое преобразование Фурье. Положим, что число отсчетов $N = 2^q$, где q — целое число. Разобьем дискретную последовательность отсчетов $\{x(k)\}$ на две части:

$$\text{четную} \quad \{x(k)\}_{\text{чт}} = \{x(2k)\}$$

и нечетную $\{x(k)\}_{\text{нч}} = \{x(2k+1)\}$, где $k = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1$. Представим спектр (19.14) в виде

$$\begin{aligned} X(jn) &= \sum_{k=0}^{N/2-1} x(2k) e^{-j\frac{2\pi}{N}2kn} + \sum_{k=0}^{N/2-1} x(2k+1) e^{-j\frac{2\pi}{N}(2k+1)n} = \\ &= \sum_{k=0}^{N/2-1} x(2k) e^{-j\frac{2\pi}{N/2}kn} + e^{-j\frac{2\pi n}{N}} \sum_{k=0}^{N/2-1} x(2k+1) e^{-j\frac{2\pi}{N/2}kn}. \end{aligned} \quad (19.19)$$

Из (19.19) следует, что

$$X(jn) = X_{\text{чт}}(jn) + e^{-j\frac{2\pi n}{N}} X_{\text{нч}}(jn), \quad (19.20)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots, ((N/2) - 1)$.

Из (19.20) следует, что первая половина $X(jn)$ ($n = 0, 1, 2, \dots, (N/2) - 1$) выражается через ДПФ двух частных последовательностей: $X_{\text{чт}}(jn)$ и $X_{\text{нч}}(jn)$. Вторую половину ($n \geq N/2$) $X(jn)$ можно найти, если учесть периодичность его четной и нечетной части с периодом $N/2$:

$$X_{\text{чт}}(jn) = X_{\text{чт}}[j(n + N/2)]; \quad X_{\text{нч}}(jn) = X_{\text{нч}}[j(n + N/2)]$$

и соотношение (при $n \geq N/2$):

$$e^{j\frac{2\pi((N/2)+n)}{N}} = e^{-j\pi} \cdot e^{-j\frac{2\pi n}{N}} = -e^{-j\frac{2\pi n}{N}},$$

при этом получим

$$X[j((N/2) + n)] = X_{\text{чт}}(jn) - e^{-j\frac{2\pi n}{N}} \cdot X_{\text{нч}}(jn). \quad (19.21)$$

Формула (19.20) и (19.21) лежит в основе БПФ. Как следует из этих формул для вычисления $X_{\text{чт}}(jn)$ и $X_{\text{нч}}(jn)$ требуется $(N/2)^2$ операций и для выполнения операции умножения на $\exp\{\cdot\}$ — N операций:

$$N_{\text{БПФ}} = (N/2)^2 + N. \quad (19.22)$$

Для ДПФ (19.14) требуется $N_{\text{ДПФ}} = N^2/2 + N^2/2 = N^2$ операций, что существенно выше, чем $N_{\text{БПФ}}$. Например, при $N = 10^3$, получаем $N_{\text{ДПФ}} = 10^6$, а $N_{\text{БПФ}} \approx 250 \cdot 10^3$, т.е. для БПФ требуется в четыре раза меньше операций, чем при ДПФ.

В общем случае число операций, необходимое в БПФ равно

$$N_{\text{БПФ}} = N \log_2 N \quad (19.23)$$

и выигрыш по сравнению с ДПФ равно

$$B = \frac{N^2}{N \log_2 N} \quad (19.24)$$

и может достигать сотен и тысяч раз при достаточно больших входных массивах N .

В заключении отметим, что сам процесс вычисления по формулам (19.19), (19.20) производят по итерационному принципу: последовательность отсчетов с четными и нечетными номерами снова разбивают на две части и т.д. Процесс разбиения продолжается до тех пор, пока не получится последовательность, состоящая из одного элемента (исходного ДПФ). Более подробно с алгоритмами БПФ можно ознакомиться в специальной литературе (см. например, Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов. М.: Радио и связь. 1990).

19.3. Z-преобразование и его свойства

При анализе и синтезе дискретных и цифровых цепей широко применяют так называемое *z-преобразование*. Это преобразование играет такую же основополагающую роль по отношению к дискретным сигналам, как преобразование Лапласа по отношению к аналоговым сигналам.

Z-преобразование дискретного сигнала. Заменим в уравнении (19.9) $j\omega$ на комплексную переменную p :

$$X_T(p) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-pkT}, \quad (19.25)$$

таким образом, мы получим *изображение по Лапласу дискретного сигнала*. Оригинал, т.е. сам дискретный сигнал можно определить с помощью обратного преобразования Лапласа (7.4):

$$x_T(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} X_T(p) e^{pT} dp. \quad (19.26)$$

Уравнение (19.26) определяет всю дискретную последовательность $x_T(t) = \{x(kT)\}$. Для определения одного, k -го отсчета формула (19.26) примет вид

$$x(kT) = T \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\pi/T}^{j\pi/T} X_T(p) e^{pkT} dp. \quad (19.27)$$

Следует однако отметить, что $X_T(p)$ является трансцендентной функцией переменной p вследствие наличия в (19.25) и (19.27) множителя $e^{\pm pkT}$.

Для перехода к рациональным функциям осуществим замену переменных:

$$e^{pT} = z = x + jy. \quad (19.28)$$

Тогда формула (19.25) примет вид:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}. \quad (19.29)$$

Равенство (19.29) называют *прямым односторонним z -преобразованием*.

Обратное z -преобразование определяется формулой:

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} X(z) z^{k-1} dz, \quad (19.30)$$

где интегрирование осуществляется по окружности с радиусом $|z| = 1$.

Доказать справедливость (19.30) можно следующим образом. Пусть $X(z)$ — функция комплексной переменной z , аналитическая в области $|z| > r_0$. Раскроем ряд (19.29):

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots + x(k)z^{-k}. \quad (19.31)$$

Домножим левую и правую часть (19.31) на z^{k-1} :

$$z^{k-1}X(z) = x(0)z^{k-1} + x(1)z^{k-2} + x(2)z^{k-3} + \dots + x(k)z^{-1}. \quad (19.32)$$

Возьмем контурный интеграл от левой и правой части (19.32) вдоль кривой, лежащей целиком в области аналитичности и охватывающей все полюсы $X(z)$ и учтем равенство Коши:

$$\oint_{|z|=1} z^n dz = \begin{cases} 2\pi j & \text{при } n = -1 \\ 0 & \text{при } n \neq -1. \end{cases}$$

Тогда все слагаемые, кроме k -го обратятся в нуль:

$$\oint_{|z|=1} X(z) z^{k-1} dz = \oint_{|z|=1} x(k) z^{-1} dz = x(k) \oint_{|z|=1} z^{-1} dz = 2\pi j x(k).$$

Отсюда непосредственно следует (19.30), что и требовалось доказать.

Установим связь между точками на комплексной плоскости $p = \alpha + j\omega$ и z -плоскости $z = x + jy$ (рис. 19.19).

Если положить $\alpha = 0$, то мы будем перемещаться по оси $j\omega$ в плоскости p . При переходе в z -плоскость точки мнимой оси $j\omega$ будут располагаться на единичной окружности $z = e^{j\omega T}$. Причем, точка $j0$ на p -плоскости переходит в точку $z = +1$ на вещественной

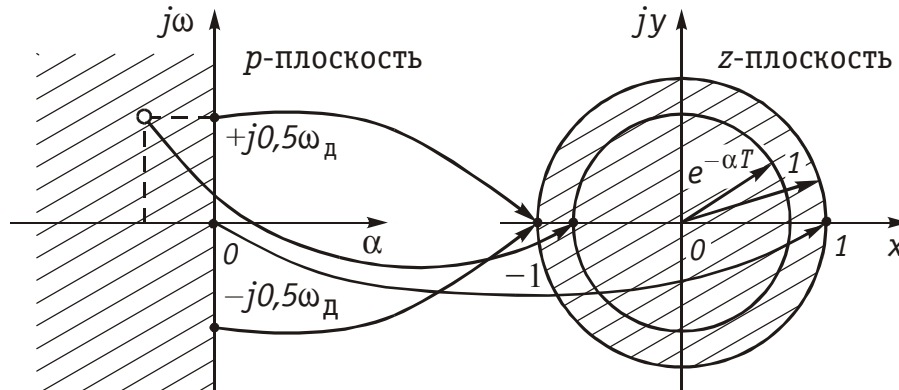


Рис. 19.19

оси z -плоскости, а точки $\pm j0,5\omega_d$ — в точку $z = -1$. Это означает, что точки отрезка $(-j0,5\omega_d \div j0,5\omega_d)$ p -плоскости проектируются в точки на единичной окружности z -плоскости. Так как функция $e^{\pm j\omega T}$ периодическая, то последующие отрезки оси $j\omega$ на p -плоскости такой же длины будут вновь проектироваться на единичную окружность.

Точкам левой p -полуплоскости соответствуют точки внутри единичной окружности z -плоскости, а точкам правой p -полуплоскости — точки вне этой окружности.

Пример. Рассчитаем z -преобразование дискретного сигнала $x(k)$, имеющего вид

$$x(k) = \begin{cases} 0, & k \leq 0 \\ 1, & k = 1, 2, 3 \\ 0, & k > 3. \end{cases}$$

Воспользовавшись формулой (19.29), получим

$$X(z) = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} = \frac{z^2 + z + 1}{z^3}.$$

Пример. Найдем z -преобразование $X(z)$ дискретного экспоненциального сигнала $x(k) = e^{-\alpha k T}$.

Подставим значение $x(k)$ в формулу (19.29), получим

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha k T} \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-\alpha T} \cdot z^{-1})^k.$$

Из теории рядов следует, что при выполнении условия $|e^{-\alpha T} \cdot z^{-1}| < 1$ сумма ряда $X(z)$ равна $1/(1 - e^{-\alpha T} \cdot z^{-1})$ или

$$X(z) = \frac{z}{z - e^{-\alpha T}}.$$

Z -преобразование $X(z)$ дискретного сигнала $x(k)$ определено только для области z , в которой степенной ряд (19.29) сходится. Эта область сходимости включает в себя все значения z , находящиеся вне некоторого круга на комплексной z -плоскости, радиус

которого r_0 называется радиусом сходимости (рис. 19.20), т.е. при $r_0 < |z| < \infty$ ряд сходится. В области сходимости существует взаимно однозначное соответствие между $X(z)$ и $x(k)$, т.е. каждому $x(k)$ соответствует одно и только одно $X(z)$, определенное для $|z| > r_0$ и наоборот.

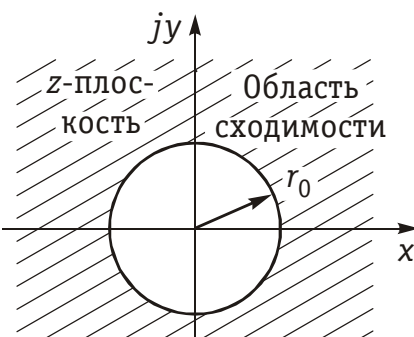


Рис. 19.20

Пример. Определим радиус сходимости для z -преобразования сигнала, заданного в предыдущем примере.

Как уже было установлено, z -преобразование сигнала $x(k) = e^{-akT}$ имеет вид

$$X(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}}.$$

Нуль функции $X(z)$ будет в точке $z_0 = 0$, полюс — в точке $z_k = e^{-aT}$. Следовательно, радиус сходимости $r_0 = e^{-aT}$, а функция $X(z)$ сходится при $|z| > e^{-aT}$.

Окружность, имеющая радиус сходимости $r_0 = e^{-aT}$, приведена на рис. 19.19. Область сходимости находится за пределами этой окружности.

Пример. Найдем z -преобразование сигнала $x(k) = Aa^k$, $k \geq 0$. Этот дискретный сигнал показан на рис. 19.21 для трех различных значений a : $a = 0,8$; $a = 1$; $a = -0,8$.

В соответствии с (19.29) z -преобразование такого дискретного сигнала равно

$$X(z) = A \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k}. \quad (19.33)$$

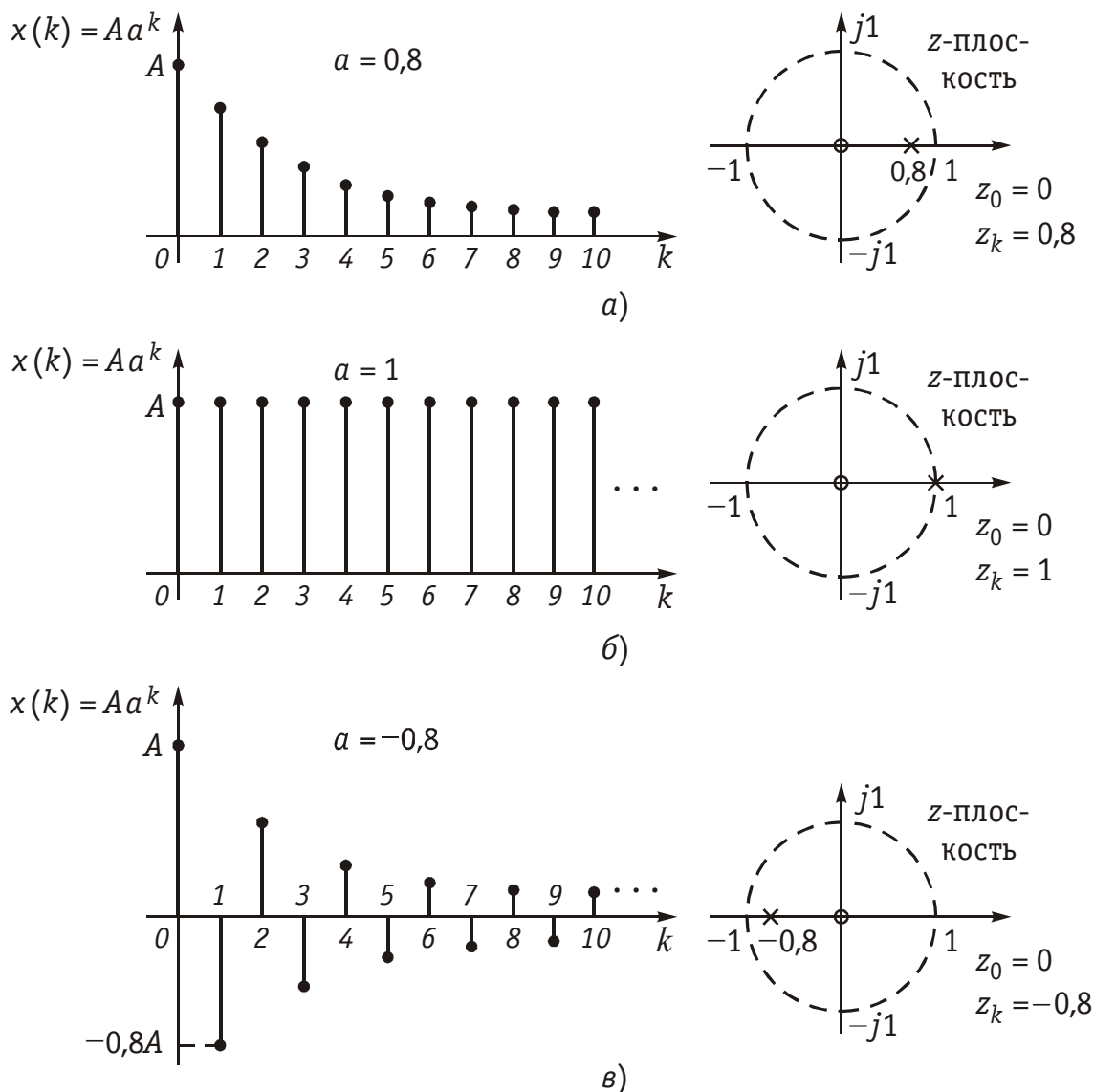


Рис. 19.21

Из математики известно, что этот ряд сходится к функции

$$X(z) = \frac{A}{1 - az^{-1}} = A \frac{z}{z - a}, \quad (19.34)$$

если $|az^{-1}| < 1$ или $|z| > a$.

Функция $X(z)$ имеет нуль при $z = 0$, а ее полюс $z_n = a$ лежит на окружности радиусом $R_0 = a$, ограничивающей область сходимости.

На рис. 19.21 показано расположение нуля и полюса функции $X(z)$ в z -плоскости при различных a .

Нахождение дискретного сигнала по его z -изображению. Для этого можно воспользоваться обратным z -преобразованием (19.30).

Другой способ заключается в том, чтобы разложить функцию $X(z)$ в степенной ряд по степеням z^{-1} . Тогда коэффициенты при степенях z^{-1} будут, в соответствии с формулой (19.29), отсчетами дискретного сигнала $x(k)$.

Пример. Найдем дискретный сигнал $x(k)$, которому соответствует z -преобразование $X(z) = 1/(1 - 0,5z^{-1})$.

Воспользуемся разложением функции $(1 - q)^{-1}$ в ряд:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

Для заданного z -преобразования $q = 0,5z^{-1}$, поэтому запишем z -преобразование в виде

$$X(z) = 1 + 0,5z^{-1} + 0,25z^{-2} + 0,125z^{-3} + \dots$$

Сравнивая полученное выражение с общей формулой z -преобразования

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k},$$

получим последовательность

$$x\{k\} = \{1; 0,5; 0,25; 0,125; \dots\}.$$

Общий член этой последовательности $x(k) = 0,5^k, k \geq 0$.

Пример. Найдем отсчеты дискретного сигнала по его z -преобразованию

$$X(z) = \frac{30z^2}{6z^2 - z - 1} = \frac{5}{1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}}.$$

Для разложения функции $X(z)$ в степенной ряд по степеням z^{-1} выполним деление числа 5 на многочлен $\left(1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}\right)$. В результате получим частное $5 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{35}{36}z^{-2} + \dots$. Отсчеты дискретного сигнала равны

$$x(0) = 5; \quad x(1) = \frac{5}{6}; \quad x(2) = \frac{35}{36}; \quad \text{и т.д.}$$

Процедура деления здесь не приведена из-за ее громоздкости, хотя выражения полиномов, стоящих в числителе и знаменателе $X(z)$, не слишком сложные.

Более эффективным способом нахождения $x(k)$ по известному $X(z)$ является способ подобный методу разложения на простейшие дроби в преобразованиях Лапласа.

Пример. Найдем общий член x_k дискретного сигнала $x(k)$, которому соответствует z -изображение, заданное в предыдущем примере

$$X(z) = \frac{30z^2}{6z^2 - z - 1} = \frac{5}{1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}}.$$

Функция $X(z)$ имеет полюсы в точках $z_1 = 1/2$ и $z_2 = -1/3$, или, что то же, в точках $z_1^{-1} = 2$ и $z_2^{-1} = -3$.

Разложим $X(z)$ на сумму простых дробей:

$$X(z) = \frac{5}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}. \quad (19.35)$$

Коэффициенты в числителях каждой дроби вычисляются так же, как при разложении входного сопротивления $z(p)$ реактивных двухполюсников при синтезе их по схеме Фостера:

$$\left. \frac{5\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)} \right|_{z^{-1}=2} = 3;$$

$$\left. \frac{5\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)} \right|_{z^{-1}=-3} = 2.$$

Подобно тому, как формула (19.34) представляет сумму ряда (19.33), простые дроби в (19.17) являются суммами рядов

$$3 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k z^{-k} \quad \text{и} \quad 2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k z^{-k}.$$

Поскольку z -преобразование — это линейная операция, то последовательность $x(k)$ состоит из суммы двух последовательностей:

$$x(k) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^k + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^k, \quad k \geq 0.$$

После выполнения операции возведения в степень k получим отсчеты дискретного сигнала

$$x(0) = 5; \quad x(1) = \frac{5}{6}; \quad x(2) = \frac{35}{36};$$

и т.д.

Свойства z -преобразования. Так же как и для преобразований Лапласа и Фурье, существуют теоремы для z -преобразования. Приведем наиболее важные теоремы одностороннего z -преобразования.

Теорема линейности (суперпозиции). Сумме дискретных сигналов соответствует сумма их z -изображений. Если дискретным сигналам $x(k)$ и $y(k)$ соответствуют z -изображения $X(z)$ и $Y(z)$, то

$$ax(k) + by(k) \doteq aX(z) + bY(z),$$

где a и b — некоторые числа.

Доказательство теоремы выполните самостоятельно, используя выражение (19.29) для расчета z -изображения дискретного сигнала.

Теорема опережающего сдвига. Если дискретному сигналу $x(k)$ соответствует одностороннее z -преобразование $X(z)$, то сигналу, сдвинутому на один интервал дискретизации, $x(k+1)$ соответствует z -преобразование $z(X(z) - x(0))$.

Математическая запись теоремы имеет вид

$$x(k+1) \doteq z(X(z) - x(0)),$$

Чтобы доказать теорему, воспользуемся основным выражением (19.29) для расчета z -преобразования дискретных сигналов $x(k)$ и $x(k+1)$, а также графиками, приведенными на рис. 19.22.

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots;$$

$$X'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1)z^{-k} = x(1) + x(2)z^{-1} + x(3)z^{-2} + \dots$$

Сравнивая $X(z)$ и $X'(z)$, получаем $X'(z) = z(X(z) - x(0))$, что и требовалось доказать.

Очевидно, что теорема опережающего сдвига выполняет ту же самую роль, что и теорема дифференцирования для преобразований Лапласа.

Теорема задержки. Математическая запись теоремы имеет вид

$$x(k-N)u(k-N) \doteq z^{-N} \cdot X(z), \quad N \geq 0.$$

В теореме задержки $u(k)$ — это дискретные отсчеты функции единичного скачка (рис. 19.23)

$$u(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0, \end{cases}$$

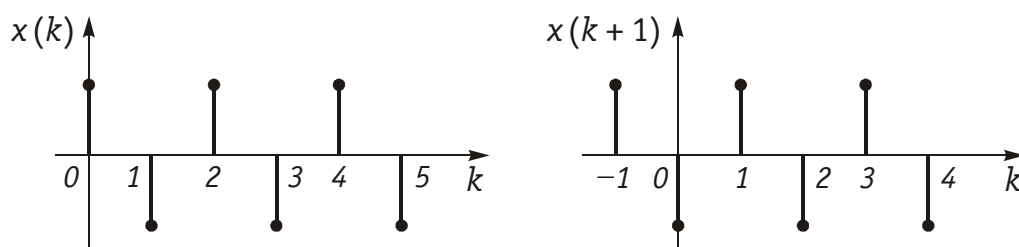


Рис. 19.22

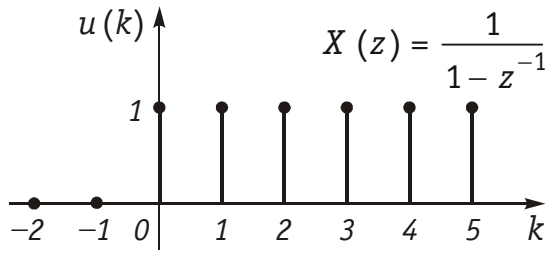


Рис. 19.23

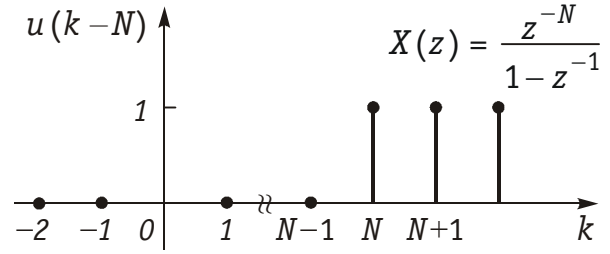


Рис. 19.24

а $u(k - N)$ — это дискретные отсчет функции $u(k)$, задержанной на N интервалов дискретизации (рис. 19.24).

$$u(k - N) = \begin{cases} 0, & k < N, \\ 1, & k \geq N. \end{cases}$$

Доказательство вытекает из основного выражения (19.29) для z -преобразования.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} x(k - N) u(k - N) z^{-N} &= x(0) z^{-N} + x(1) z^{-(N+1)} + x(2) z^{-(N+2)} + \dots = \\ &= z^{-N} (x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + \dots) = \\ &= z^{-N} \cdot X(z). \end{aligned}$$

При доказательстве учтено, что единичная ступенчатая функция обращается в нуль при отрицательных значениях ее аргумента, т.е. при $n < N$. Из теоремы задержки в частности следует, что сдвиг дискретного сигнала на один интервал дискретизации T соответствует умножению z -преобразования на оператор z^{-1} , поэтому часто z^{-1} называют *оператором единичной задержки* в z -области.

Теорема умножения на a^k . Математическая запись теоремы имеет вид

$$a^k x(k) \doteq X(a^{-1}z).$$

Теорема умножения на k

$$k \cdot x(k) \doteq -z \frac{dX(z)}{dz}.$$

Теоремы умножения дискретного сигнала $x(k)$ на a^k и на k можно также доказать, используя формулу (19.29). Предлагаем проделать это самостоятельно.

Теорема свертки. Свертке дискретных сигналов $x(k)$ и $h(k)$ соответствует произведение их z -преобразований

$$x(k) * h(k) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot h(m - k) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \cdot x(m - k) \doteq X(z) \cdot H(z).$$

Эту теорему мы приводим здесь без доказательства. При необходимости с ним можно познакомиться в специальной литературе.

Пример. Найдем z -преобразование функции единичного отсчета, задержанной на N интервалов дискретизации.

Найдем z -преобразование дискретного δ -импульса $\delta(k)$ (рис. 19.4), используя выражение (19.29)

$$X_{\delta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k) z^{-k} = 1.$$

Используя теорему задержки, найдем z -изображение сигнала $\delta(k - N)$

$$X(z) = z^{-N} \cdot X_{\delta}(z) = z^{-N}.$$

На рисунке 19.4 приведен также график задержанной функции единичного отсчета для частного случая $N = 2$.

Пример. Найдем z -преобразование функции

$$x(k) = a^{k-N} u(k - N).$$

В одном из примеров мы уже находили, что z -преобразование сигнала a^k имеет вид (19.34) $X(z) = 1/(1 - az^{-1})$.

Используя теорему задержки, получаем

$$a^{k-N} u(k - N) \doteq \frac{z^{-N}}{1 - az^{-1}}.$$

При $a = 1$ имеем:

$$u(k - N) \doteq \frac{z^{-N}}{1 - z^{-1}}.$$

Графики дискретных сигналов $u(k - N)$ и $a^{k-N} u(k - N)$ приведены на рис. 19.24 и 19.25.

Пример. Найдем z -преобразование дискретной последовательности $x(k) = ka^k$, $k \geq 0$.

Поскольку z -изображение последовательности a^k известно (19.16), то, используя теорему умножения на k , получим

$$X(z) = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}.$$

Пример. Найдем z -преобразование дискретной последовательности из N отсчетов единичной амплитуды (рис. 19.26)

$$x(k) = \begin{cases} 1, & 0 \leq k < N, \\ 0, & k \geq N. \end{cases}$$

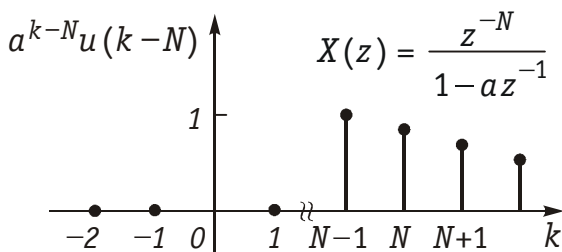


Рис. 19.25

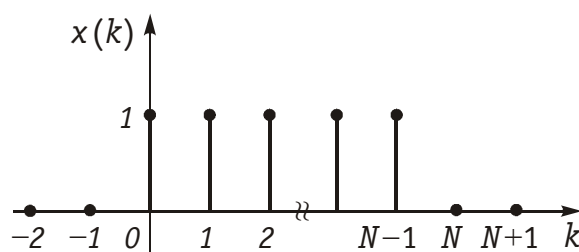


Рис. 19.26

Сигнал $x(k)$ можно представить как разность двух сигналов

$$x(k) = u(k) - u(k - N).$$

Из теорем линейности и задержки легко получить z -преобразование

$$X(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}},$$

что совпадает с формулой для частичной суммы геометрической прогрессии

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{N-1} z^{-k}.$$

Пример. Вычислим z -преобразование свертки дискретных сигналов $x\{k\} = \{1; 1; 1; 0; 0; 0; \dots\}$ и $y\{k\} = \{0; 0; 1; 1; 0; 0; \dots\}$.

Найдем z -преобразование сигнала $x(k)$, используя формулу (19.29)

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = \\ &= 1 + z^{-1} + z^{-2}. \end{aligned}$$

Найдем z -преобразование сигнала $y(k)$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k} = z^{-2} + z^{-3}.$$

Вычислим z -преобразование свертки сигналов $x(k)$ и $y(k)$, используя теорему свертки

$$\begin{aligned} x(n) * y(n) &\div X(z) \cdot Y(z) = (1 + z^{-1} + z^{-2})(z^{-2} + z^{-3}) = \\ &= z^{-2} + 2z^{-3} + 2z^{-4} + z^{-5}. \end{aligned}$$

В табл. 19.1 дана сводка z -преобразований наиболее часто встречающихся дискретных последовательностей. Эти табличные сведения также могут быть использованы для расчета z -преобразований сигналов и перехода от z -преобразований к дискретным сигналам.

Пример. Найдем общий член дискретного сигнала $x(k)$, которому соответствует z -изображение

$$X(z) = \frac{11 - z^{-1} - z^{-2}}{1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}}.$$

Разложение функции $X(z)$ на простые дроби приводит к выражению

$$X(z) = 6 + \frac{3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}.$$

Используя теорему линейности и находя в таблице 19.1 дискретные сигналы, соответствующие каждому из слагаемых в выражении $X(z)$, получаем

$$x(k) = 6\delta(k) + 3(1/2)^k + 2(-1/3)^k = \begin{cases} 11, & k = 0, \\ 3(1/2)^k + 2(-1/3)^k, & k > 0. \end{cases}$$

Табл. 19.1 – Краткая таблица односторонних z -преобразований

Дискретный сигнал $x(k), \quad k \geq 0$	z -преобразование $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$
$x(k) = \delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$	$X(z) = 1$
$x(k) = u(k - N) = \begin{cases} 1, & k \geq N \geq 0 \\ 0, & k < N \end{cases}$	$X(z) = \frac{z^{-N}}{1 - z^{-1}}$
$x(k) = a^k$	$X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}}$
$x(k) = A$	$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$
$x(k) = k$	$X(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$
$x(k) = k a^k$	$X(z) = \frac{a z^{-1}}{(1 - a z^{-1})^2}$
$x(k) = a^k \cos k\theta$	$X(z) = \frac{1 - a \cos \theta z^{-1}}{1 - 2a \cos \theta z^{-1} + a^2 z^{-2}}$
$x(k) = a^k \sin k\theta$	$X(z) = \frac{a \sin \theta z^{-1}}{1 - 2a \cos \theta z^{-1} + a^2 z^{-2}}$
$x(k) = \begin{cases} e^{jk2\pi fT}, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$	$X(z) = \frac{1}{1 - e^{j2\pi fT} \cdot z^{-1}}$

По этой формуле легко подсчитать значение $x(k)$ для любого k . Аналогичным образом, разложение

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1}} = -z^{-1} - 2 + \frac{3}{1 - z^{-1}}$$

приводит к последовательности

$$x(k) = -\delta(k - 1) - 2\delta(k) + 3 = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 2, & k = 1, \\ 3, & k > 1. \end{cases}$$

19.4. Дискретные цепи

Дискретная свертка. В предыдущих разделах этой главы бала установлена определенная аналогия между соотношениями, существующими для аналоговых и дискретных сигналов. Подобная аналогия существует и между методами анализа и синтеза аналоговых и дискретных цепей.

Под дискретной цепью понимают любое устройство, которое преобразует одну последовательность $x\{k\}$ в другую $y\{k\}$ (рис. 19.27).

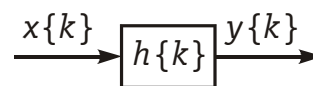


Рис. 19.27

Линейной дискретной цепью называют цепь, подчиняющуюся принципу суперпозиции.

Связь между входным дискретным сигналом $x\{k\}$ (воздействием) и выходным сигналом $y\{k\}$ (отсчетом) определяется *дискретной сверткой* (сравни с (8.12)):

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k), \quad (19.36)$$

где $h(k)$ — импульсная характеристика дискретной цепи. Она определяется как отклик дискретной цепи на воздействие в виде единичного импульса (δ -функция, рис. 19.4).

Иногда свертку (19.36) записывают символически: $y(k) = x(k) * h(k)$ (см. теорему свертки, § 19.3).

Линейная дискретная цепь, будет устойчива, если выполняется условие

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|^2 < \infty. \quad (19.37)$$

Пример. Рассчитаем значения выходной последовательности $y\{k\}$ цепи, имеющей дискретную импульсную характеристику $h\{k\} = \{-1; 1; 2\}$, если входная последовательность имеет вид $x\{k\} = \{-2; 1; 2; -1\}$. Графики $x(k)$ и $h(k)$ приведены на рис. 19.28.

Пользуясь формулой (19.36), рассчитаем значения выходной последовательности $y(k)$

$$\begin{aligned} y(0) &= h(0) \cdot x(0) = (-1) \cdot (-2) = 2, \\ y(1) &= h(0) \cdot x(1) + h(1) \cdot x(0) = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = -3, \\ &\dots \dots \dots \\ y(4) &= h(0) \cdot x(4) + h(1) \cdot x(3) + h(2) \cdot x(2) + h(3) \cdot x(1) + h(4) \cdot x(0) = \\ &= (-1) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) = 3, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

График дискретного сигнала $y(k)$ приведен на рис. 19.29.

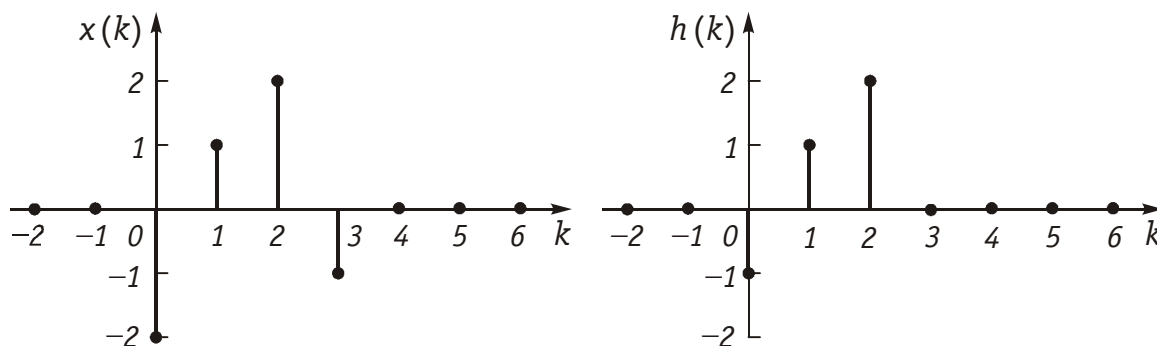
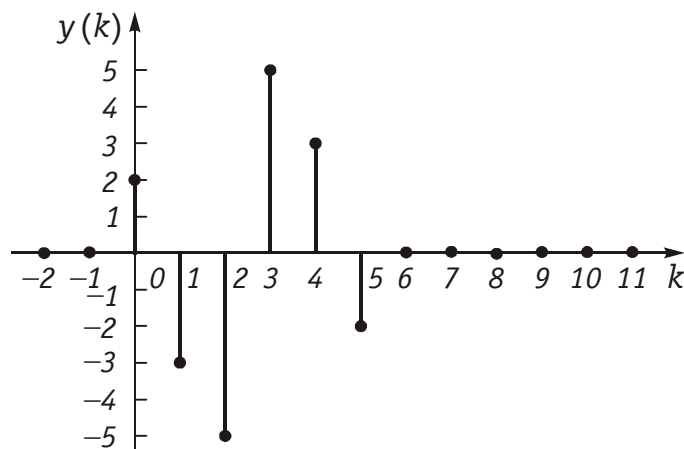


Рис. 19.28



Вычисления по формуле (19.36) можно выполнить также с помощью простого устройства. Запишем последовательности чисел $x(k)$ и $h(-k)$ на отдельных полосках бумаги, как показано на рис. 19.30. На обеих полосках пометим маленькими стрелочками точки $k = 0$. Обратим внимание на то, что $h(-k)$ является обратной последовательностью относительно $h(k)$, так что она строится в обратном направлении от $k = 0$. Будем сдвигать нижнюю полоску относительно верхней в направлении стрелки. Вычисление суммы произведений стоящих друг против друга чисел при каждом сдвиге дает последовательность $y(k)$.

Проведя дискретизацию импульсной характеристики аналоговой цепи можно описать ее дискретной математической моделью. Если, например, для RC -цепи, изображенной на рис. 19.31 взять дискретные значения импульсной характеристики:

$k = 0$
 $x(k)$ { 0 0 0 -2 1 2 -1 0 0 0 }
 $h(-k)$ { 0 0 0 2 1 -1 0 0 } \rightarrow
 $\leftarrow 4 \rightarrow$ \uparrow
 $n = 0$

Произведение 0 0 0 4 -1 0 0 0
 Сумма произведений = 3 = $y(4)$

$k = 0$
 $x(k)$ { 0 0 0 -2 1 2 -1 0 0 0 }
 $h(-k)$ { 0 0 0 2 1 -1 0 0 } \rightarrow
 \uparrow
 $k = 0$

Произведение 0 0 0 2 0 0
 Сумма произведений = 2 = $y(0)$

Рис. 19.30

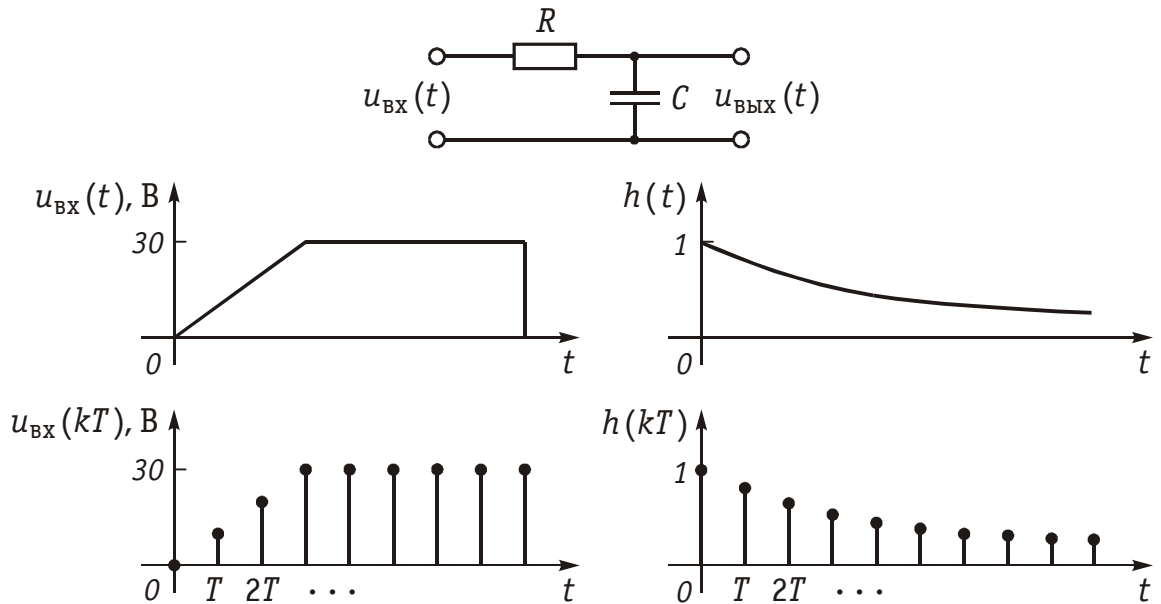


Рис. 19.31

$$h(k) = h(kT) = \frac{1}{RC} e^{-kT/RC},$$

то получим дискретную математическую модель RC цепи, выходную реакцию которой можно найти с помощью (19.36). При этом, естественно входной сигнал также должен быть дискретизирован (рис. 19.31). Точно также можно получить дискретные модели других аналоговых цепей. Таким образом формула дискретной свертки (19.36) является достаточно универсальной, пригодной для описания как аналоговых, так и дискретных цепей.

Пример. На вход цепи поступает сигнал в виде дискретной δ -функции. Рассчитаем выходные последовательности $y(k)$ цепей, имеющих дискретные импульсные характеристики

- а) $h\{k\} = \{1; 1; 0; 0; \dots\}$;
- б) $h\{k\} = \{1; -1; 0; 0; \dots\}$;
- в) $h[k] = 2e^{-k/2}$.

Графики импульсных характеристик а), б), в) приведены на рис. 19.32.

Рассчитываем значения $y(n)$, используя формулу (19.36)

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k), \text{ в которой } x(k) = \delta\{k\}.$$

Для цепи, имеющей дискретную импульсную характеристику

- а) $h\{k\} = \{1; 1; 0; 0; \dots\}$, получаем

$$y(0) = h(0) \cdot \delta(0) = 1 \cdot 1 = 1,$$

$$y(1) = h(0) \cdot \delta(1) + h(1) \cdot \delta(0) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1,$$

$$y(2) = h(0) \cdot \delta(2) + h(1) \cdot \delta(1) + h(2) \cdot \delta(0) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0,$$

$$y(3) = h(0) \cdot \delta(3) + h(1) \cdot \delta(2) + h(2) \cdot \delta(1) + h(3) \cdot \delta(0) = 0.$$

Все остальные значения $y(n)$ будут также нулевыми.

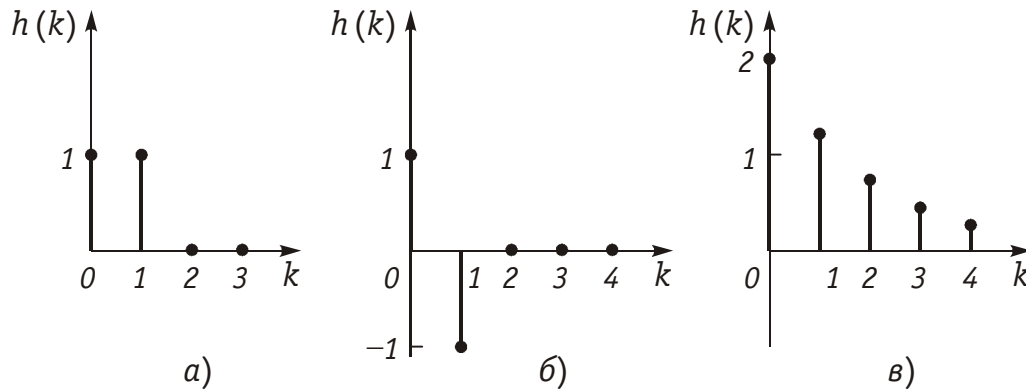


Рис. 19.32

Для цепи с импульсной характеристикой

б) $h\{k\} = \{1; -1; 0; 0; \dots\}$ получаем

$$y(0) = h(0) \cdot \delta(0) = 1 \cdot 1 = 1,$$

$$y(1) = h(0) \cdot \delta(1) + h(1) \cdot \delta(0) = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = -1,$$

$$y(2) = h(0) \cdot \delta(2) + h(1) \cdot \delta(1) + h(2) \cdot \delta(0) = 0.$$

Остальные значения $y(n)$ равны нулю.

Для цепи с импульсной характеристикой

в) $h\{k\} = 2e^{-k/2} = \{2; 1,22; 0,74; 0,45; 0,27; \dots\}$ получаем

$$y(0) = h(0) \cdot \delta(0) = 2,$$

$$y(1) = h(0) \cdot \delta(1) + h(1) \cdot \delta(0) = 1,22,$$

$$y(2) = h(0) \cdot \delta(2) + h(1) \cdot \delta(1) + h(2) \cdot \delta(0) = 0,74.$$

Все остальные отсчеты выходной последовательности $y\{k\}$ повторяют соответствующие отсчеты дискретной импульсной характеристики $h(k)$, также как и в двух предыдущих случаях а) и б). Этот вывод очевиден, т. к. импульсная характеристика — это реакция цепи на δ -импульс.

Графики $y(k)$ будут такими же, как графики $h(k)$ на рис. 19.32, что является очевидным, т.к. $h(k)$ по определению есть реакция цепи на δ -функцию.

Элементы дискретных цепей. Как следует из уравнения (19.36) при вычислении реакции дискретной цепи на заданное воздействие выполняется всего три операции: умножение, задержка и сложение.

На рис. 19.33 эти действия представлены в виде элементов структурной схемы. Операцию умножения дискретного сигнала $x(k)$ на число a можно представить в виде усилителя с коэффициентом усиления a . На его выходе получаем сигнал $y(k) = a \cdot x(k)$. Сложение чисел естественно отобразить на схеме в виде сумматора. Получение отсчета $x(k-1) = x(kT - T)$ из $x(k) = x(kT)$ можно связать с задержкой последнего на время T , т.е. на один «такт». Действие элемента задержки поясняется на рис. 19.33.

Таким образом, алгоритм вычислений дискретного сигнала $y(k)$, описываемый выражением (19.36), можно представить в виде структурной схемы.

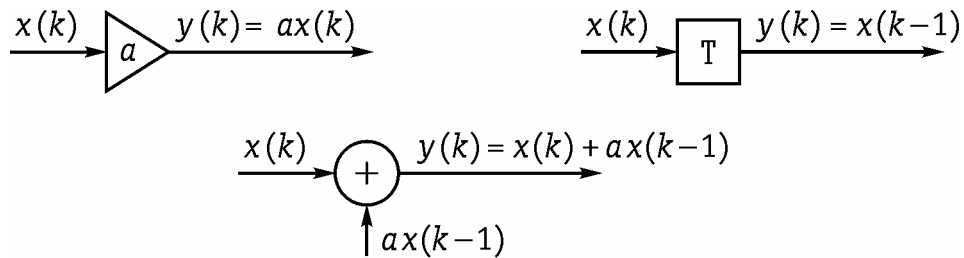


Рис. 19.33

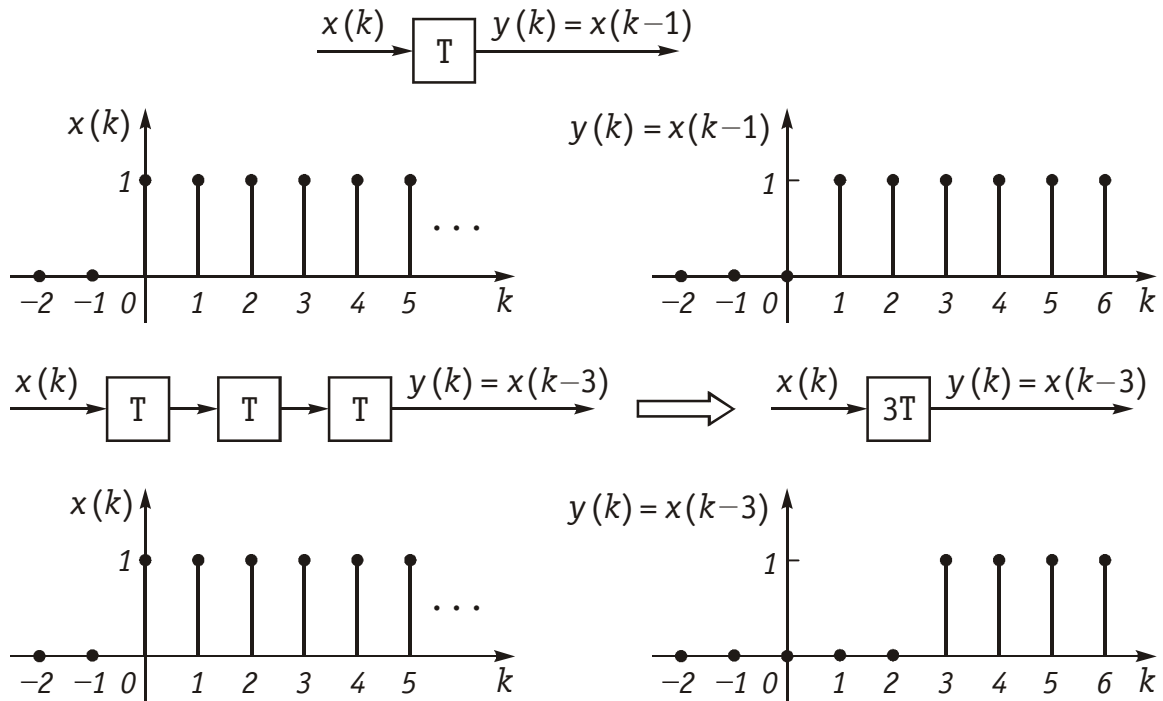


Рис. 19.34

Пример. Составим структурную схему цепи, дискретная импульсная характеристика которой дана в предыдущей задаче, т.е. $h\{k\} = \{-1; 1; 2\}$ (рис. 19.28).

В соответствии с алгоритмом (19.36) и с учетом заданных значений характеристики $h(k)$ структурная схема цепи приведена на рис. 19.35. По этой схеме несложно определить выражение для выходной последовательности $y(k) = -x(k) + x(k-1) + 2x(k-2)$.

Как следует из рис. 19.33 и рис. 19.34 общим свойством элементов дискретных цепей является их однонаправленное действие, показанное на рисунках стрелками. С точки зрения топологии, элементы дискретных цепей представляют собой двухполюсные (элемент задержки, умножитель) или многополюсные элементы (сумматор).

Общее уравнение дискретных цепей. Из уравнения (19.36), рассмотренных примеров и рис. 19.35 отклик дискретной цепи $y(k)$ на воздействие $x(k)$ можно записать в виде следующего уравнения

$$y(k) = a_0x(k) + a_1x(k-1) + a_2x(k-2) + \dots + a_Nx(k-N), \quad (19.38)$$

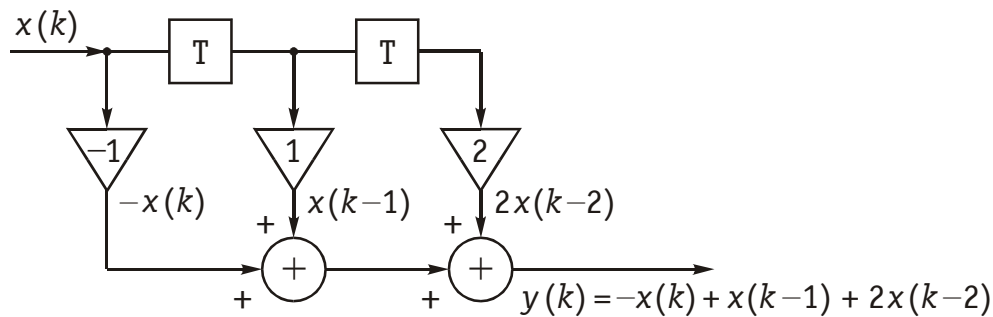


Рис. 19.35

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_N$ — некоторые числа (веса) представляющие собой по сути отсчеты импульсной характеристики цепи.

Уравнению (19.38) соответствует дискретная цепь, изображенная на рис. 19.36. В литературе эту цепь называют иногда *трансверсальным фильтром*.

Как следует из (19.38) для получения k -го отсчета выходного сигнала подвергаются обработке $(k - N)$ отсчетов входного сигнала с соответствующими весовыми коэффициентами.

Следует однако отметить, что уравнением (19.38) не исчерпываются все возможные алгоритмы работы дискретных цепей. В частности, этот алгоритм может включать обработку не только отсчетов входного, но и отсчетов выходного сигнала, сдвинутого на определенное число тактов. Поэтому наиболее общее уравнение дискретной цепи имеет следующий вид

$$y(n) = \sum_{k=0}^N a_k x(n-k) + \sum_{l=1}^M b_l y(n-l), \quad (19.39)$$

где b_l — весовые коэффициенты.

На рис. 19.37 изображена схема дискретной цепи, соответствующей алгоритму (19.39).

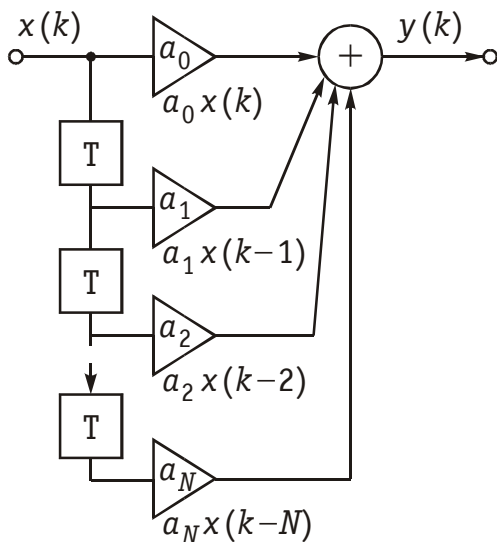


Рис. 19.36

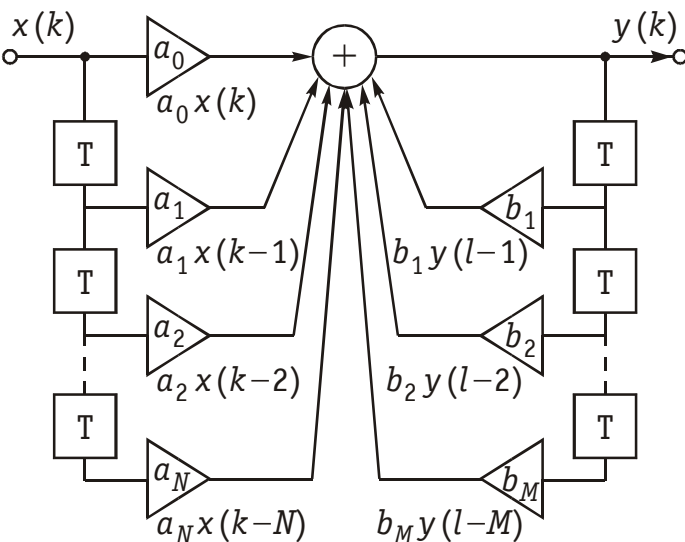


Рис. 19.37

Принципиальным отличием схемы, изображенной на рис. 19.37 от схемы на рис. 19.36 является наличие цепи обратной связи, поэтому схемы, описываемые уравнением (19.39), получили название *рекурсивных*, а цепи, описываемые (19.38), — *нерекурсивных*.

Для нахождения реакции дискретной цепи необходимо решить *разностные уравнения* (19.38) и (19.39). Если решение (19.38) обычно не представляет особого труда, то для решения (19.39) необходимо использовать специальные методы. По аналогии с решением дифференциальных уравнений, описывающих аналоговую цепь, решение разностных уравнений можно осуществить как классическим, так и операторным методом. Обычно для решения разностных уравнений в теории дискретных цепей используется операторный метод, причем вместо преобразования Лапласа используют z -преобразование.

Передаточные функции. При анализе и синтезе дискретных систем важнейшую роль играют *передаточные* или *системные функции цепей*.

Применим к уравнению (19.39) прямое z -преобразование и учтя основные свойства z -преобразования (см. § 19.3), получим

$$Y(z) = X(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} + Y(z) \sum_{l=1}^M b_l z^{-l}.$$

Отсюда следует

$$Y(z) \left[1 - \sum_{l=1}^M b_l z^{-l} \right] = X(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k}. \quad (19.40)$$

Определим *передаточную функцию дискретной цепи* как отношение z -преобразований выходного ко входному дискретному сигналу:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}{1 - \sum_{l=1}^M b_l z^{-l}}. \quad (19.41)$$

Из (19.41) следует, что коэффициенты a_k числителя определяют *нерекурсивную* часть дискретной цепи, а коэффициенты b_l знаменателя — *рекурсивную* часть.

Для *нерекурсивной* цепи ($M = 0$) *передаточная функция* определится как

$$H(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^{-k}. \quad (19.42)$$

Передаточную функцию (19.42) можно определить как z -преобразование от импульсной характеристики цепи:

$$H(z) = \sum_{k=0}^N h(k) z^{-k}. \quad (19.43)$$

Сравнение (19.42) и (19.43) показывает, что роль коэффициентов a_k играют отсчеты импульсной характеристики $h(k)$. Нетрудно также видеть, что импульсная характеристика нерекурсивной цепи согласно (19.38) является конечной, а рекурсивной согласно (19.39) бесконечной, поэтому иногда нерекурсивные дискретные цепи называют *цепями с конечной импульсной характеристикой* (КИХ), а рекурсивные — с *бесконечной импульсной характеристикой* (БИХ).

Пример. Положим, что передаточная функция дискретной цепи имеет вид

$$H(z) = \frac{a}{1 - bz^{-1}}.$$

При $a = 1$; $b = 0$ получаем идеальный интегратор с импульсной характеристикой $h\{k\} = \{1, 1, \dots, 1, \dots\}$. По нерекурсивной схеме такую импульсную характеристику реализовать нельзя.

Анализ (19.41) показывает, что передаточная функция рекурсивной цепи имеет структуру, аналогичную типичной передаточной функции цепи с ОС (см. гл. 14). $H(z)$ является дробно-рациональной функцией относительно z^{-1} :

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - \dots - b_M z^{-M}}.$$

Из (19.41) и (19.42) также следует, что $H(z)$ из (19.41) имеет полюса (нули полинома знаменателя), которые могут располагаться в любой точке z -плоскости, а $H(z)$ из (19.42) только полюс кратности N в начале координат.

Пример. Найдем передаточную функцию элемента задержки. Сигнал на его выходе описывается уравнением

$$y(k) = x(k-1).$$

Применив к нему z -преобразование, получим

$$Y(z) = X(z) z^{-1}.$$

Отсюда получаем

$$H(z) = Y(z)/X(z) = z^{-1},$$

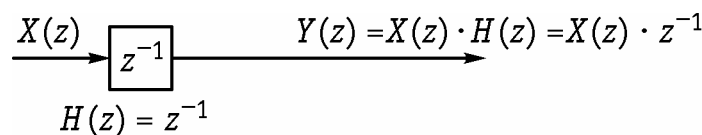


Рис. 19.38

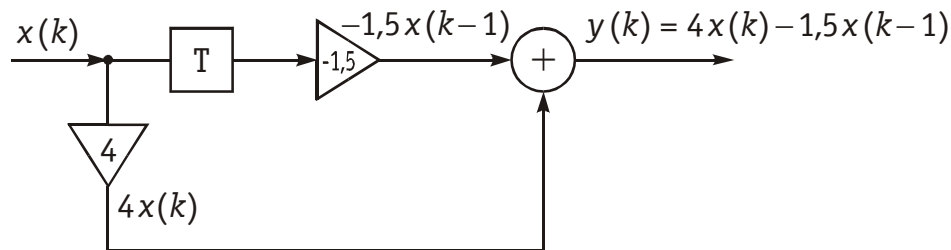


Рис. 19.39

поэтому на структурных операторных схемах дискретных цепей элемент задержки обычно обозначают z^{-1} (рис. 19.38).

Пример. Найдем импульсную характеристику и передаточную функцию дискретной цепи (рис. 19.39), выходная последовательность которой задана выражением $y(k) = 4x(k) - 1,5x(k-1)$.

Отсчеты дискретной импульсной характеристики $h(k)$ — это отсчеты $y(k)$, рассчитанные при условии, что на вход цепи подается дискретная δ -функция, т. е. $x\{k\} = \delta\{k\} = \{1; 0; 0; \dots\}$.

$$h(0) = 4\delta(0) - 1,5\delta(-1) = 4,1 - 1,5 \cdot 0 = 4,$$

$$h(1) = 4\delta(1) - 1,5\delta(0) = -1,5,$$

$$h(k) = 0 \text{ при } k > 1.$$

Таким образом, отсчеты дискретной импульсной характеристики $h\{k\} = \{4; -1,5\}$ соответствуют коэффициентам усиления усилителей в схеме (рис. 19.39).

Для нахождения передаточной функции $H(z)$ воспользуемся формулой (19.42):

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \cdot z^{-k} = h(0)z^0 + h(1)z^{-1} = 4 - 1,5z^{-1}.$$

Другой способ нахождения передаточной функции $H(z)$ заключается в том, чтобы определить z -изображение выходной последовательности, а затем найти $H(z)$ как отношение $Y(z)$ и $X(z)$:

$$Y(z) = 4X(z) - 1,5X(z)z^{-1}$$

или

$$Y(z) = X(z)(4 - 1,5z^{-1}) = X(z) \cdot H(z).$$

Очевидно, что $H(z) = 4 - 1,5z^{-1}$. На рис. 19.40 приведено z -изображение этой дискретной цепи.

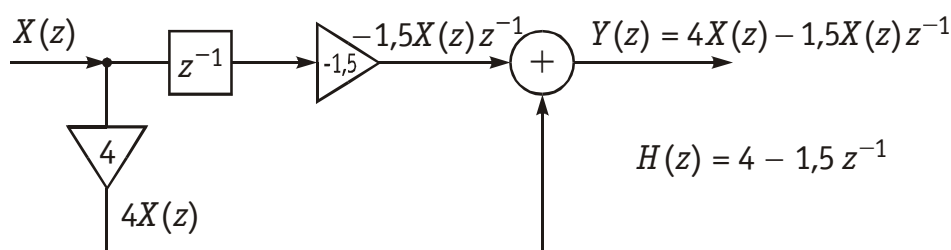


Рис. 19.40

Пример. Найдем передаточную функцию дискретной цепи, входная и выходная последовательности которой имеют вид

$$x\{k\} = \{1; 0; 1; 2\}, \quad y\{k\} = \{0; 1; 2; 1\}.$$

Z -изображения последовательностей

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot z^{-k} = 1 + z^{-2} + 2z^{-3};$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k) \cdot z^{-k} = z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}.$$

Следовательно, передаточная функция

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}}{1 + z^{-2} + 2z^{-3}}.$$

Зная передаточную функцию дискретной цепи $H(z)$ с помощью формулы

$$Y(z) = X(z)H(z) \quad (19.44)$$

можно найти z -изображение выходного сигнала $Y(z)$ по z -изображению входного $X(z)$.

Для нахождения отсчетов выходного сигнала $y(k)$ по его z -изображению $Y(z)$ можно точно также как и для аналоговых цепей использовать теорему разложения (см. § 7.2), которая применительно к дискретным цепям для правильной дробно-рациональной функции $Y(z) = P(z)/Q(z)$ (где $P(z)$, $Q(z)$ — полиномы) имеет вид

$$y(n) = \sum_{l=1}^M y_l(n) = \sum_{l=1}^M A_l z_l^n, \quad (19.45)$$

где A_l — коэффициенты разложения $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{l=1}^M \frac{A_l}{1 - z_l z^{-1}}, \quad z_l — \text{простые полюса } Y(z).$$

Коэффициент A_l может быть найден

$$A_l = \left[\frac{P(z)}{dQ(z)/dz} \right]_{z=z_l} —$$

вычет функции $Y(z)$ в полюсе $z = z_l$.

Следует отметить, что отсчеты $y(k)$ для нерекурсивной цепи могут быть найдены как коэффициенты при отрицательных степенях z в уравнении для $Y(z)$.

Пример. Найдем отсчеты выходного сигнала $y(k)$ дискретной цепи, z -изображение которой приведено на рис. 19.41, а входной сигнал $x\{k\} = \{-2; 1; 2; -1\}$. Найдем z -изображение входного сигнала $x(k)$:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} = \\ &= -2 + z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3}. \end{aligned}$$

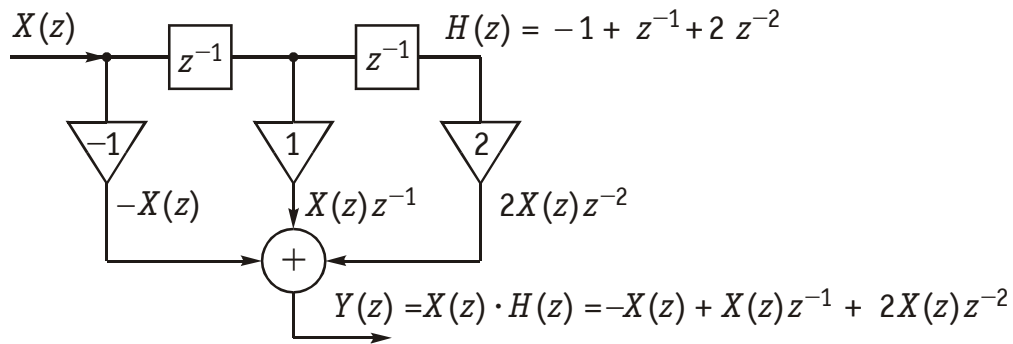


Рис. 19.41

Передаточная функция цепи (рис. 19.41) $H(z) = -1 + z^{-1} + 2z^{-2}$. Она находится непосредственно по схеме либо как z -изображение дискретной импульсной характеристики $h\{k\} = \{-1; 1; 2\}$.

Найдем z -изображение выходного сигнала

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z) = (2 + z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3})(-1 + z^{-1} + 2z^{-2}) = 2 - 3z^{-1} - 5z^{-2} + 5z^{-3} + 3z^{-4} - 2z^{-5}.$$

Коэффициенты при z в отрицательных степенях в этом выражении являются отсчетами выходного сигнала $y(k)$ (рис. 19.29):

$$y\{k\} = \{2; -3; -5; 5; 3; -2\}.$$

Пример. Найдем отсчеты выходного сигнала нерекурсивной дискретной цепи, имеющей дискретную импульсную реакцию $h\{k\} = \{1; -0,6; -1,5; 1\}$, при воздействии на нее дискретного сигнала $x\{k\} = \{1; 0; 1; 0\}$.

Отсчеты дискретной импульсной характеристики — это коэффициенты усиления $a_0 = 1$; $a_1 = -0,6$; $a_2 = -1,5$; $a_3 = 1$. Структурная схема нерекурсивной дискретной цепи с заданной импульсной реакцией приведена на рис. 19.42.

Выходной дискретный сигнал $y(k)$ найдем, используя выражение (19.38)

$$y(k) = a_0x(k) + a_1x(k-1) + a_2x(k-2) + a_3x(k-3) = x(k) - 0,6x(k-1) - 1,5x(k-2) + x(k-3).$$

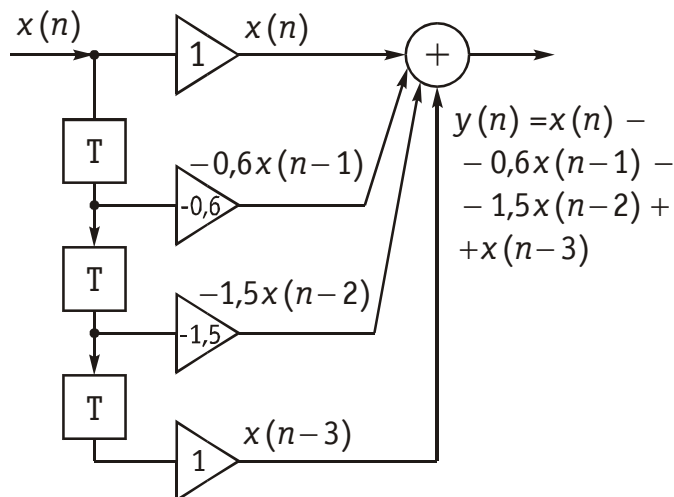


Рис. 19.42

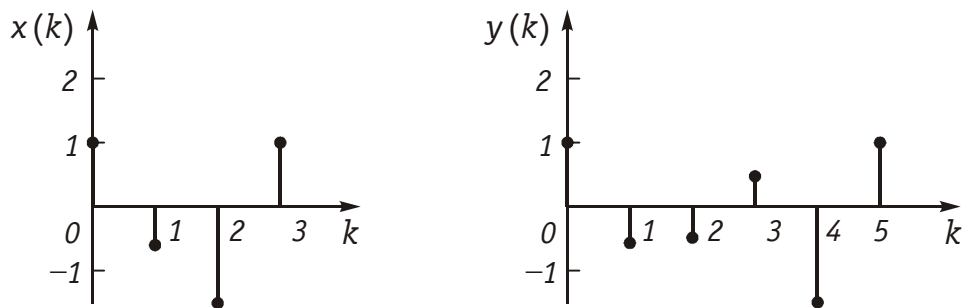


Рис. 19.43

Отсчеты сигнала $y(k)$ найдем, подставляя значения $x(k)$ в полученное разностное уравнение.

$$y(0) = x(0) = 1;$$

$$y(1) = x(1) - 0,6x(0) = 0 - 0,6 \cdot 1 = -0,6;$$

$$y(2) = x(2) - 0,6x(1) - 1,5x(0) = 1 - 0,6 \cdot 0 - 1,5 \cdot 1 = -0,5;$$

$$y(3) = x(3) - 0,6x(2) - 1,5x(1) + x(0) = 0 - 0,6 \cdot 1 - 1,5 \cdot 0 + 1 = 0,4.$$

Аналогичным образом рассчитываем $y(4) = -1,5$; $y(5) = 1$; $y(6) = 0$. Все остальные отсчеты также равны нулю.

Таким образом, выходная последовательность $y\{k\} = \{1; -0,6; -0,5; 0,4; -1,5; 1\}$. Графики $x(k)$ и $y(k)$ приведены на рис. 19.43.

Из рис. 19.37 следует, что для реализации алгоритмов рекурсивной обработки сигнала дискретная цепь должна иметь большое количество ячеек памяти, что существенно усложняет схему. Для упрощения дискретной цепи используют, так называемую *каноническую схему*. Каноническая схема может быть получена из (19.43), если представить $Y(z)$ в виде:

$$Y(z) = W(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k}, \quad (19.46)$$

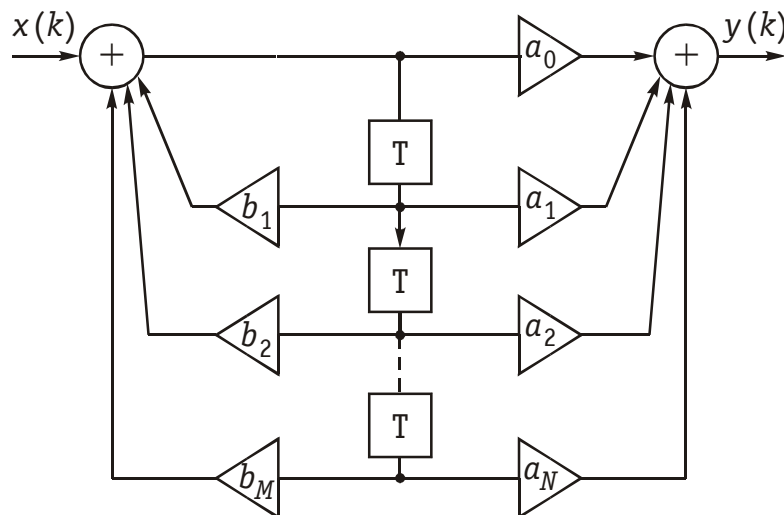


Рис. 19.44

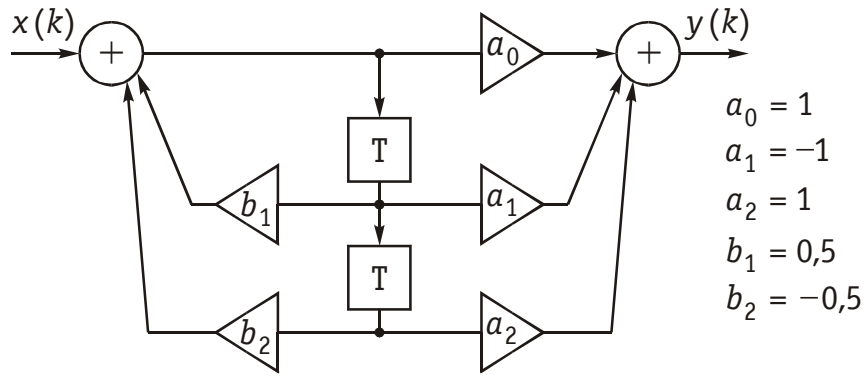


Рис. 19.45

где $W(z)$ — z -преобразование промежуточной последовательности

$$W(z) = \frac{X(z)}{1 - \sum_{l=1}^M b_l z^{-l}}. \quad (19.47)$$

Тогда согласно (19.46) алгоритм дискретной обработки сигнала заключается в том, что вначале реализуется рекурсивное преобразование (19.47), а затем нерекурсивное (рис. 19.44).

Пример. Найдем реакцию дискретной цепи на воздействие $x\{k\} = \{1; -1; 1; -1\}$, если передаточная функция цепи имеет вид

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,5z^{-1} + 0,5z^{-2}}.$$

Составим структурную каноническую схему дискретной цепи с заданной передаточной функцией (рис. 19.45). Коэффициенты усиления известны: $a_0 = 1$; $a_1 = -1$; $a_2 = 1$; $b_1 = 0,5$; $b_2 = -0,5$.

Найдем выходной сигнал $y(k)$ цепи, используя уравнение (19.38) или непосредственно по схеме:

$$\begin{aligned} y(k) &= a_0 x(k) + a_1 x(k-1) + a_2 x(k-2) + b_1 y(k-1) + b_2 y(k-2) = \\ &= x(k) - x(k-1) + x(k-2) + 0,5y(k-1) - 0,5y(k-2). \end{aligned}$$

Рассчитаем отсчеты $y(k)$:

$$\begin{aligned} y(0) &= x(0) = 1; \\ y(1) &= x(1) - x(0) + 0,5y(0) = -1 - 1 + 0,5 \cdot 1 = -1,5; \\ y(2) &= x(2) - x(1) + x(0) + 0,5y(1) - 0,5y(0) = \\ &= 1 + 1 + 1 + 0,5(-1,5) = 2,25. \end{aligned}$$

Аналогичным образом рассчитываем $y(3) = -1,125$, $y(4) = 1,3125$ и т.д.

Устойчивость рекурсивных цепей. Дискретная цепь считается неустойчивой, если ограниченное по амплитуде входное воздействие вызывает на ее выходе бесконечно нарастающий отклик. На-

оборот, дискретная цепь устойчива, когда отклик на ограниченное воздействие также ограничен.

Известно, что у устойчивой аналоговой цепи полюсы передаточной функции располагаются в левой полуплоскости переменной p . При переходе от аналоговой цепи к дискретной и замене преобразования Лапласа z -преобразованием точки левой полуплоскости p -плоскости переходят в точки, лежащие внутри единичной окружности z -плоскости (рис. 19.19). Таким образом, полюсы передаточной функции устойчивой дискретной цепи располагаются внутри единичной окружности z -плоскости.

Нерекурсивные цепи всегда устойчивы.

Пример. Определим устойчивость цепей, имеющих передаточные функции:

$$а) H_1(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - 0,3z^{-1}},$$

$$б) H_2(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - 2z^{-1}},$$

$$в) H_3(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 1,8z^{-1} + 0,97z^{-2}},$$

$$г) H_4(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 2,4z^{-1} + 1,69z^{-2}}.$$

Полюс передаточной функции

$$H_1(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - 0,3z^{-1}}$$

найдем, приравняв знаменатель $H_1(z)$ к нулю, $1 - 0,3z^{-1} = 0$.

Получаем полюс $z_1^{(1)} = 0,3$, который находится внутри единичной окружности z -плоскости. Это означает, что цепь устойчива.

Передаточная функция

$$H_2(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - 2z^{-1}}$$

имеет полюс в точке $z_1^{(2)} = 2$; такая цепь неустойчива.

Полюсы передаточной функции

$$H_3(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 1,8z^{-1} + 0,97z^{-2}}$$

являются комплексно-сопряженными $z_1^{(3)} = 0,9 + j0,4$ и $z_2^{(3)} = 0,9 - j0,4$. Поскольку эти полюсы лежат внутри единичной окружности (их модули $|z_1^{(3)}| = |z_2^{(3)}| < 1$), то данная дискретная цепь устойчива.

Примером неустойчивой цепи служит цепь с передаточной функцией

$$H_4(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 2,4z^{-1} + 1,69z^{-2}},$$

у которой $z_1^{(4)} = 1,2 + j0,5$ и $z_2^{(4)} = 1,2 - j0,5$ и $|z_1^{(4)}| = |z_2^{(4)}| > 1$.

Частотные характеристики. Для перехода от передаточной функции $H(z)$ к частотной характеристике $H(jf)$ необходимо произвести замену

$$z = e^{j\omega T} = e^{j2\pi f T}.$$

Обычно вводят в рассмотрение нормированную частоту $\Omega = fT = f/f_d$. С учетом этого формула (19.41) примет вид:

$$\begin{aligned} H(j\Omega) &= H(e^{j2\pi\Omega}) = \\ &= \frac{a_0 + a_1 e^{-j2\pi\Omega} + a_2 e^{-j4\pi\Omega} + \dots + a_N e^{-j2\pi N\Omega}}{1 - b_1 e^{-j2\pi\Omega} - b_2 e^{-j4\pi\Omega} - \dots - b_M e^{-j2\pi M\Omega}} = \\ &= \frac{(a_0 + a_1 \cos 2\pi\Omega + a_2 \cos 4\pi\Omega + \dots + a_N \cos 2\pi N\Omega) -}{(1 - b_1 \cos 2\pi\Omega - b_2 \cos 4\pi\Omega - \dots - b_M \cos 2\pi M\Omega) +} \times \\ &\times \frac{-j(a_1 \sin 2\pi\Omega + a_2 \sin 4\pi\Omega + \dots + a_N \sin 2\pi N\Omega)}{+j(b_1 \sin 2\pi\Omega + b_2 \sin 4\pi\Omega + \dots + b_M \sin 2\pi M\Omega)}. \end{aligned} \quad (19.48)$$

Из (19.48) легко получить амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики дискретной цепи. В частности, амплитудно-частотная характеристика будет представлена выражением

$$\begin{aligned} H(\Omega) = |H(j\Omega)| &= \sqrt{\frac{(a_0 + a_1 \cos 2\pi\Omega + a_2 \cos 4\pi\Omega + \dots)^2 +}{(1 - b_1 \cos 2\pi\Omega - b_2 \cos 4\pi\Omega - \dots)^2 +}} \times \\ &\times \frac{(a_1 \sin 2\pi\Omega + a_2 \sin 4\pi\Omega + \dots)^2}{(b_1 \sin 2\pi\Omega + b_2 \sin 4\pi\Omega + \dots)^2}. \end{aligned} \quad (19.49)$$

Пример. Дискретная цепь 3-го порядка описывается передаточной функцией

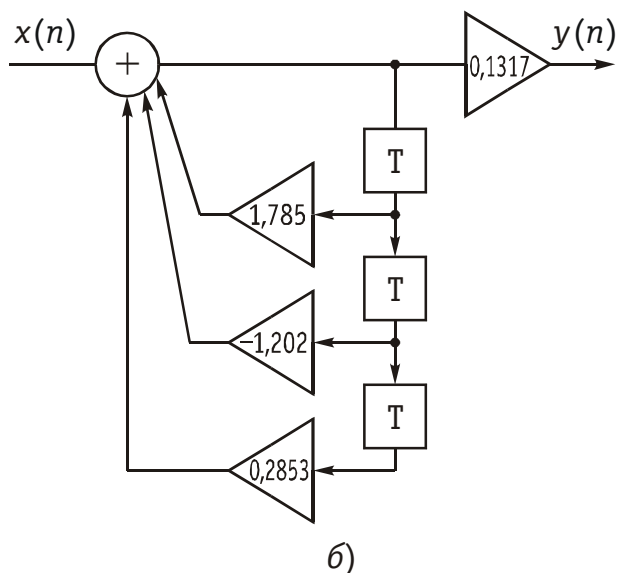
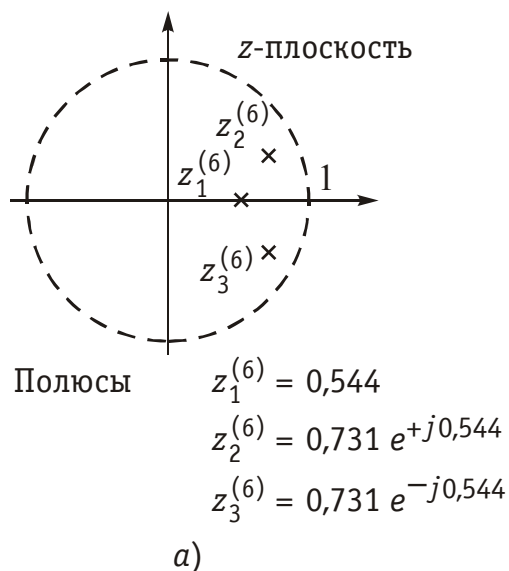


Рис. 19.46

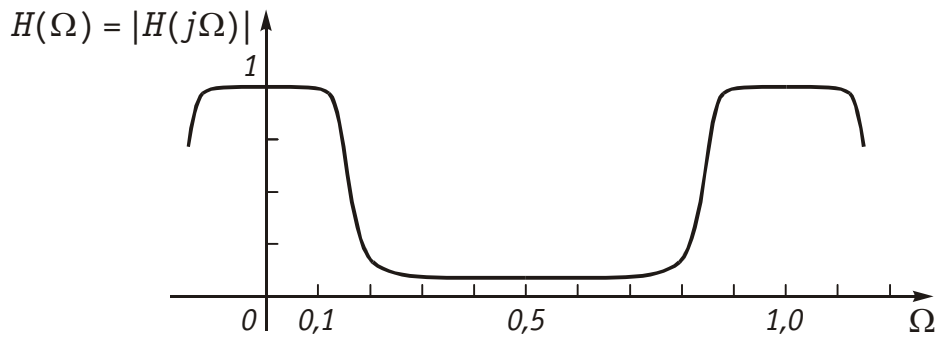


Рис. 19.47

$$H_6(z) = \frac{0,1317}{1 - 1,785z^{-1} + 1,202z^{-2} - 0,2853z^{-3}} \quad (19.50)$$

с полюсами $z_1^{(6)} = 0,544$ и $z_{2,3}^{(6)} = 0,731e^{\pm j 0,544}$. Расположение полюсов в плоскости z показано на рис. 19.46, а. Здесь же приведена структурная схема дискретной цепи (рис. 19.46, б). Определить АЧХ цепи.

Подставим в (19.50)

$$H(\Omega) = \frac{0,1317}{\sqrt{(1 - 1,785 \cos 2\pi\Omega + 1,202 \cos 4\pi\Omega - 0,2853 \cos 6\pi\Omega)^2 + (1,785 \sin 2\pi\Omega - 1,202 \sin 4\pi\Omega + 0,2853 \sin 6\pi\Omega)^2}} \times$$

На рис. 19.47 изображен график АЧХ $H(\Omega)$ цепи. Из рисунка видно, что АЧХ с передаточной функцией (19.50) соответствует ФНЧ Баттерворта. Как и следовало ожидать, амплитудно-частотная характеристика дискретной цепи является периодической функцией (так как $H(j\Omega)$ есть преобразование Фурье от дискретной импульсной реакции). Ее период равен $f_d = 1/T$ или $\Omega = f_d \cdot T = 1$. Поэтому она используется в диапазоне частот от 0 до $0,5f_d$ (или до $\Omega = 0,5$). Цепь устойчива.

Пример. Найдем частотную характеристику дискретной цепи с импульсной характеристикой $h\{k\} = \{1,5; 1; 0,5\}$.

Запишем передаточную функцию $H(z)$ цифрового фильтра, воспользовавшись формулой

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k}.$$

Получим $H(z) = 1,5 + z^{-1} + 0,5z^{-2}$ передаточную функцию нерекурсивной цепи.

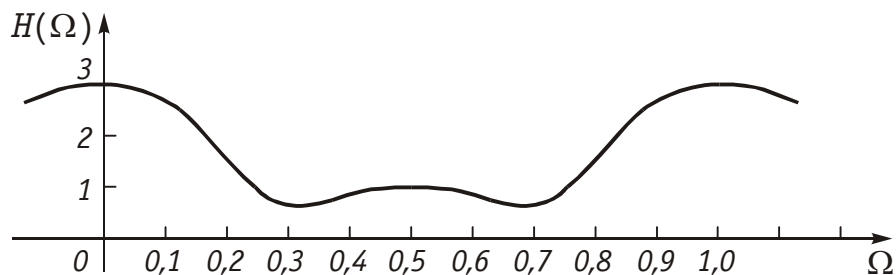


Рис. 19.48

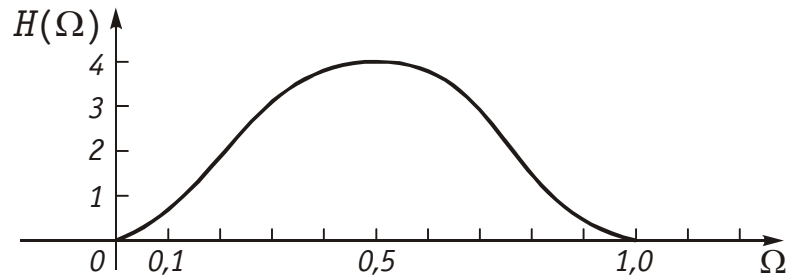


Рис. 19.49

Найдем АЧХ этой цепи, подставляя в формулу (19.48) значения коэффициентов усиления $a_0 = 1,5$; $a_1 = 1$; $a_2 = 0,5$,

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \sqrt{(a_0 + a_1 \cos 2\pi\Omega + a_2 \cos 4\pi\Omega)^2 + (a_1 \sin 2\pi\Omega + a_2 \sin 4\pi\Omega)^2} = \\ &= \sqrt{(1,5 + \cos 2\pi\Omega + 0,5 \cos 4\pi\Omega)^2 + (\sin 2\pi\Omega + 0,5 \sin 4\pi\Omega)^2}. \end{aligned}$$

График АЧХ изображен на рис. 19.48.

Пример. Изменим коэффициенты усиления в предыдущем примере. Выберем $a_0 = a_2 = 1$, $a_1 = -2$. Вновь найдем выражение $H(\Omega)$ и построим график его амплитудно-частотной характеристики.

Заменим в формуле для $H(\Omega)$, полученной в предыдущем примере, значения коэффициентов a_0 , a_1 и a_2 . Получим

$$H(\Omega) = \sqrt{(1 - 2 \cos 2\pi\Omega + \cos 4\pi\Omega)^2 + (-2 \sin 2\pi\Omega + \sin 4\pi\Omega)^2}.$$

График АЧХ изображен на рис. 19.49. Из графика видно, что нерекурсивная цепь с такими значениями коэффициентов усиления — это режекторный фильтр.

19.5. Типовые звенья дискретных цепей

Звенья 1-го и 2-го порядков. В литературе типовыми звеньями дискретных цепей считаются звенья 1-го и 2-го порядков. Они получаются из общей структуры рис. 19.44, если оставить в ней только один либо два элемента задержки.

На рис. 19.50, а показано звено 1-го порядка с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1}}$$

и АЧХ

$$H(\Omega) = \sqrt{\frac{(a_0 + a_1 \cos 2\pi\Omega)^2 + (a_1 \sin 2\pi\Omega)^2}{(1 - b_1 \cos 2\pi\Omega)^2 + (b_1 \sin 2\pi\Omega)^2}}.$$

Типовое звено 2-го порядка изображено на рис. 19.50, б. Его передаточная функция

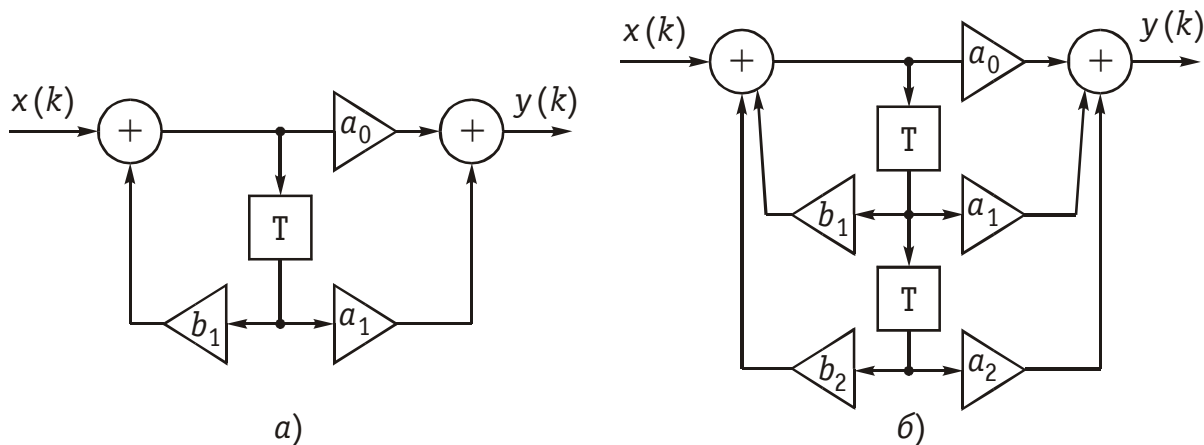


Рис. 19.50

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}$$

и АЧХ

$$H(\Omega) = \sqrt{\frac{(a_0 + a_1 \cos 2\pi\Omega + a_2 \cos 4\pi\Omega)^2 + (a_1 \sin 2\pi\Omega + a_2 \sin 4\pi\Omega)^2}{(1 - b_1 \cos 2\pi\Omega - b_2 \cos 4\pi\Omega)^2 + (b_1 \sin 2\pi\Omega + b_2 \sin 4\pi\Omega)^2}}.$$

Пример. Построим график АЧХ звена первого порядка, у которого $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.

Передаточная функция такого звена первого порядка

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1}} = \frac{1}{1 - b_1 z^{-1}}.$$

Амплитудно-частотная характеристика

$$H(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - b_1 \cos 2\pi\Omega)^2 + (b_1 \sin 2\pi\Omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + b_1^2 - 2b_1 \cos 2\pi\Omega}}.$$

Поскольку полюс z_n передаточной функции $H(z)$ равен b_1 , то для того, чтобы цепь была устойчивой необходимо выбирать значения b_1 такими, чтобы выполнялось условие $|b_1| < 1$.

На рис. 19.51 приведены графики АЧХ, построенные для значений $b_1 = 0,5$ и $b_1 = -0,5$.

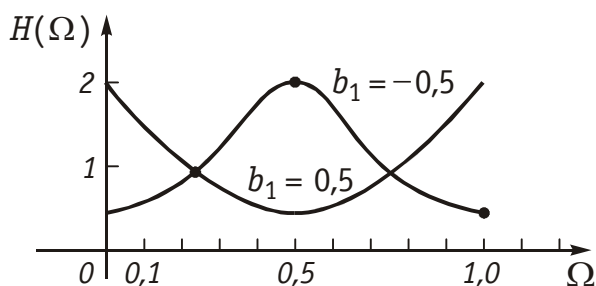


Рис. 19.51

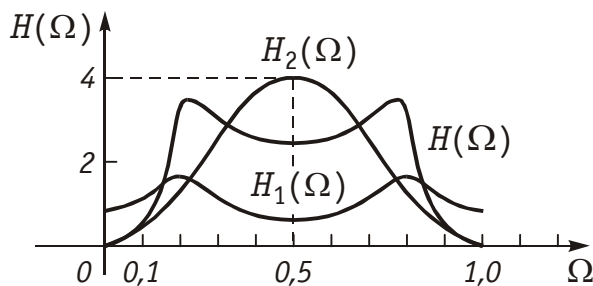


Рис. 19.52

АЧХ рассматриваемого фильтра зависит от знака коэффициента b_1 . При $b_1 > 0$ получаем режекторный фильтр, при $b_1 < 0$ — полосовой.

Пример. Найдем передаточную функцию и построим график АЧХ звена 2-го порядка (рис. 19.50, б) при $a_0 = a_2 = 1$, $a_1 = 2$, $b_1 = 0,2$ и $b_2 = -0,4$.

Передаточная функция такого звена

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} = \frac{1 + z^{-1} - 2z^{-2}}{1 - 0,2z^{-1} + 0,4z^{-2}}.$$

Как указывалось ранее, рекурсивную цепь с прямыми и обратными связями можно представить как каскадное соединение рекурсивного фильтра с передаточной функцией $H_1(z)$ и нерекурсивного фильтра с передаточной функцией $H_2(z)$. В нашем случае, для звена второго порядка,

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - 0,2z^{-1} + 0,4z^{-2}}, \quad H_2(z) = 1 - z^{-1} - 2z^{-2},$$

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z).$$

График АЧХ для $H_2(z)$ уже был построен и приведен на рис. 19.49. АЧХ $H_1(\Omega)$ рекурсивного фильтра рассчитывается по формуле

$$H_1(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - 0,2 \cos 2\pi\Omega + 0,4 \cos 4\pi\Omega)^2 + (-0,2 \sin 2\pi\Omega + 0,4 \sin 4\pi\Omega)^2}}.$$

Графики $H_1(\Omega)$, $H_2(\Omega)$ и $H(\Omega) = H_1(\Omega) \cdot H_2(\Omega)$ изображены на рис. 19.52.

Соединение типовых звеньев. Типовые звенья могут соединяться каскадно (рис. 19.53, а); при этом их передаточные функции перемножаются:

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \cdot H_3(z),$$

где H_1 , H_2 , H_3 — передаточные функции звеньев.

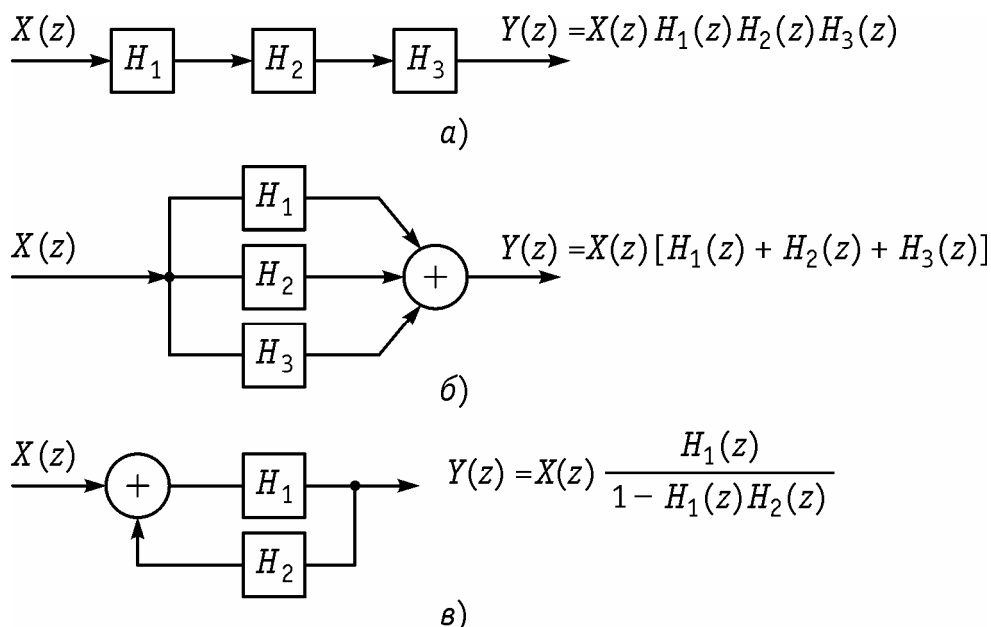


Рис. 19.53

При параллельном соединении звеньев (рис. 19.53, б) общая передаточная функция определяется как

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) + H_3(z).$$

Соединение, показанное на рис. 19.53, в, называют включением цепи H_2 в обратную связь цепи H_1 , причем

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 - H_1(z) \cdot H_2(z)}.$$

Следует иметь в виду, что все соединения, изображенные на рис. 19.53, справедливы не только для типовых звеньев, но и для любых других структур.

Пример. Найдем передаточные функции при различных способах соединения рекурсивной и нерекурсивной цепей, имеющих $H_1(z) = 1/(1 - 0,3z^{-1})$ и $H_2(z) = 0,2 + z^{-1} + z^{-2}$.

При каскадном соединении этих цепей

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) = \frac{0,2 + z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,3z^{-1}};$$

при параллельном соединении

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) = \frac{1,2 + 0,4z^{-1} + 0,7z^{-2} - 0,3z^{-3}}{1 - 0,3z^{-1}};$$

при включении цепи H_2 в обратную связь цепи H_1

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 - H_1(z)H_2(z)} = \frac{1,25}{1 - 1,625z^{-1} - 1,25z^{-2}}.$$

Пример. Найдем передаточную функцию дискретной цепи, изображенной на рис. 19.54.

Цепь, приведенная на рис. 19.54, представляет собой каскадное соединение типовых звеньев 1-го и 2-го порядков. Передаточная функция соединения имеет вид

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 - b_1 \cdot z^{-1}} \cdot \frac{a'_0 + a'_1 z^{-1} + a'_2 z^{-2}}{1 - b'_1 z^{-1} - b'_2 z^{-2}}.$$

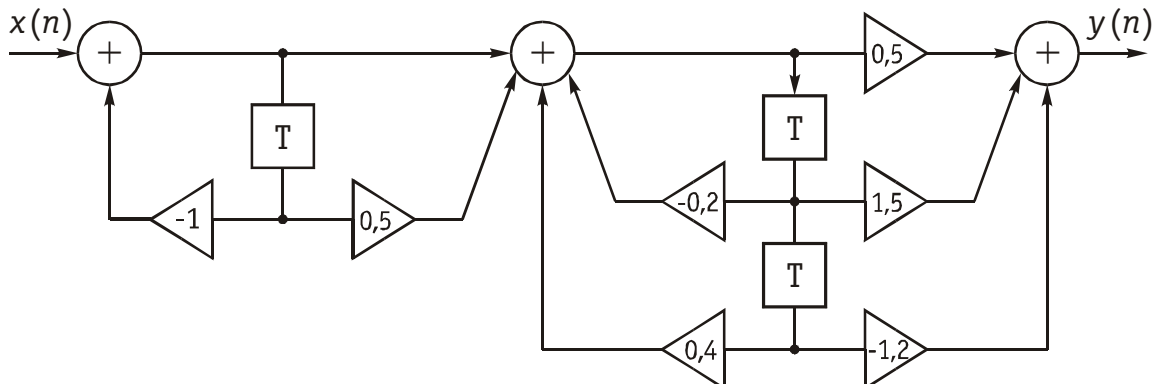


Рис. 19.54

Подставляя в выражение для $H(z)$ заданные значения коэффициентов усиления $a_0 = 1$, $a_1 = 0,5$, $b_1 = -1$ и $a'_0 = 0,5$, $a'_1 = 1,5$, $a'_2 = -1,2$, $b'_1 = -0,2$, $b'_2 = 0,4$, получаем

$$H(z) = \frac{0,5 + 1,75z^{-1} - 0,45z^{-2} - 6z^{-3}}{1 + 1,2z^{-1} - 0,2z^{-2} - 0,4z^{-3}}.$$

19.6. Метод переменных состояния дискретных цепей

В п. 6.7 был рассмотрен метод переменных состояния применительно к аналоговым цепям. При этом метод переменных состояния позволяет вместо системы дифференциальных уравнений m -го порядка (6.3) линейную цепь описать системой из m дифференциальных уравнений 1-го порядка, называемых уравнениями состояния цепи

Аналогичным образом для описания дискретных цепей в пространстве состояния вместо разностного уравнения (19.39) N -го порядка рассмотрим систему из N линейных разностных уравнений 1-го порядка.

В качестве примера рассмотрим рекурсивную цепь 2-го порядка, описываемую уравнением

$$y_n = a_0x_n + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + b_1y_{n-1} + b_2y_{n-2}.$$

Каноническая схема этой цепи изображена на рис. 19.55.

Введем переменные состояний дискретной цепи как сигналы $q_1(n)$ и $q_2(n)$ на выходе элементов задержки (рис. 19.55).

Из рис. 19.55 следует, что

$$q_2(n+1) = q_1(n), \quad (19.51)$$

$$q_1(n+1) = q_0(n), \quad (19.52)$$

Если учтем, что

$$q_0(n) = x(n) + b_1q_1(n) + b_2q_2(n), \quad (19.53)$$

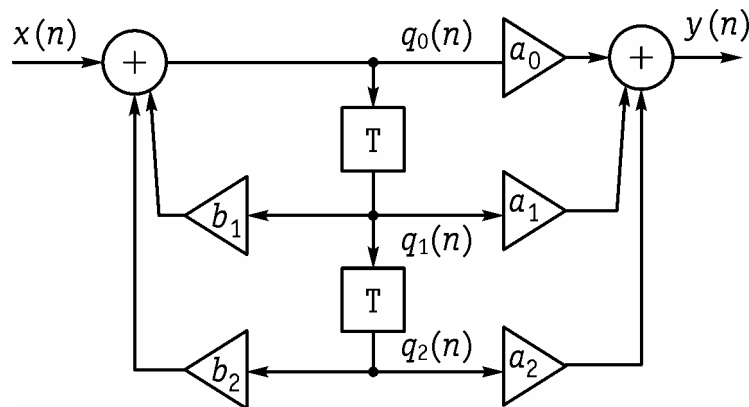


Рис. 19.55

то после подстановки (19.53) в уравнение (19.52) получим систему 2-х дискретных разностных уравнений, описывающих дискретную цепь в пространстве состояния

$$\begin{cases} q_2(n+1) = 0 \cdot q_2(n) + 1 \cdot q_1(n) + 0 \cdot x(n), \\ q_1(n+1) = b_2 \cdot q_2(n) + b_1 \cdot q_1(n) + 1 \cdot x(n). \end{cases} \quad (19.54)$$

Или обозначив

$$\mathbf{q}(n) = \begin{bmatrix} q_2(n) \\ q_1(n) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (*)$$

получим уравнение состояния дискретной цепи в матричной форме:

$$\mathbf{q}(n+1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}(n) + \mathbf{B} \cdot x(n). \quad (19.55)$$

Уравнение реакции цепи $y(n)$ можно получить по аналогии с (6.95) как линейную комбинацию вектора состояния и вектора воздействия:

$$y(n) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{q}(n) + \mathbf{D} \cdot x(n), \quad (19.56)$$

где \mathbf{C} , \mathbf{D} — матрицы параметров дискретной цепи. Например, для цепи, изображенной на рис. 19.55 матрицы \mathbf{C} и \mathbf{D} можно найти из уравнения

$$y(n) = a_0 q_0(n) + a_1 q_1(n) + a_2 q_2(n).$$

Или с учетом (19.53)

$$\begin{aligned} y(n) &= a_0 [x(n) + b_1 q_1(n) + b_2 q_2(n)] + a_1 q_1(n) + a_2 q_2(n) = \\ &= (a_0 b_1 + a_1) q_1(n) + (a_0 b_2 + a_2) q_2(n) + a_0 x(n). \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} (a_0 b_1 + a_1) & (a_0 b_2 + a_2) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = a_0. \quad (**)$$

Методы решения уравнений состояния дискретных систем.

Решение во временной области. Решение уравнений состояния может осуществляться как во временной области, так и в z -области. При решении уравнений состояния во временной области используется рекуррентная процедура решения разностного уравнения (19.55) при заданном начальном состоянии $\mathbf{q}(0)$ и известной последовательности входного сигнала $x(k)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(1) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}(0) + \mathbf{B} \cdot x(0), \\ \mathbf{q}(2) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}(1) + \mathbf{B} \cdot x(1) = \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{q}(0) + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot x(0) + \mathbf{B} \cdot x(1), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (19.57)$$

$$\mathbf{q}(n) = \mathbf{A}^n \cdot \mathbf{q}(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-1-k} \mathbf{B} \cdot x(k),$$

где $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ — единичная матрица.

Таким образом, зная начальное состояние дискретной цепи $\mathbf{q}(0)$, можно вычислить компоненты вектора состояния $\mathbf{q}(n)$ на любом шаге n (любой момент времени). Причем, как и в случае аналоговой цепи (6.98) решение (19.57) содержит две составляющих: первая — реакция цепи при нулевом входном сигнале; вторая — реакция цепи при нулевом начальном состоянии.

Уравнение реакции цепи (19.56) при этом примет вид:

$$y(n) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^n \cdot \mathbf{q}(0) + \mathbf{C} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-1-k} \mathbf{B} \cdot x(k) + \mathbf{D} \cdot x(n) \quad (19.58)$$

На основании (19.58) можно найти отсчеты импульсной и переходной характеристик дискретной цепи.

Пример. Определить импульсную характеристику цепи, изображенной на рис. 19.55.

Решение. Учтя, что импульсная характеристика цепи — это ее реакция на единичный импульс $x_0(n) = \{1, 0, 0, \dots\}$ и приняв $\mathbf{q}(0)$, получим из (19.58) уравнение импульсной характеристики цепи

$$h(n) = \mathbf{C} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-1-k} \mathbf{B} \cdot x_0(k) + \mathbf{D} \cdot x_0(n).$$

Отсюда можно получить с учетом (*), (**) отсчеты импульсной характеристики

$$\begin{aligned} h(0) &= \mathbf{D} \cdot x_0(n) = a_0 \cdot x_0(n) = a_0, \\ h(1) &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^0 \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{B} = \left\| (a_0 b_1 + a_1) \quad (a_0 b_2 + a_2) \right\| \times \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\| = \\ &= a_0 b_2 + a_2, \\ h(2) &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \left\| (a_0 b_1 + a_1) \quad (a_0 b_2 + a_2) \right\| \times \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ b_2 & b_1 \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\| = \\ &= a_2 + b_1 a_1 + b_1^2 a_0 + b_2 a_0 \\ &\text{и т.д.} \end{aligned}$$

Для n -го отсчета имеем ($n > 0$)

$$h(n) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}. \quad (19.59)$$

Как следует из (19.59) для вычисления выходной реакции дискретной цепи требуется вычисление больших степеней матрицы \mathbf{A} . В литературе описаны процедуры, упрощающие эти операции (см. например, [1] «Основы цифровой обработки сигналов — СПб: БХВ — Петербург — 2003, 608 с.»).

Решение в z -области. По аналогии с решением уравнения состояния аналоговой цепи операторным методом (7.38), (7.39) можно решить уравнение состояния для дискретной цепи в z -области.

Применим прямое z -преобразование к уравнениям (19.55) и (19.56) и учтем свойства z -преобразования:

$$z[\mathbf{Q}(z) - \mathbf{q}(0)] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}(z) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}(z), \quad (19.60)$$

$$Y(z) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}(z) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{X}(z), \quad (19.61)$$

где $\mathbf{Q}(z)$, $\mathbf{Y}(z)$, $\mathbf{X}(z)$ — z -изображения последовательности векторов состояния $\mathbf{q}(n)$, выходного $y(n)$ и входного $x(n)$ сигналов соответственно.

Из (19.60) получаем непосредственное решение

$$\mathbf{Q}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{X}(z) + z\mathbf{q}(0)). \quad (19.62)$$

Или при нулевых начальных условиях ($\mathbf{q}(0) = 0$):

$$\mathbf{Q}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}(z). \quad (19.63)$$

Отсюда можно найти искомый вектор состояния дискретной цепи

$$\mathbf{q}(z) \doteq \mathbf{Q}(z).$$

19.7. Дискретные фильтры и их синтез

Постановка задачи и этапы синтеза. Дискретная цепь может осуществлять любые операции: фильтрацию сигнала, корректирование характеристик и т.п., т.е. выполнять функции любой аналоговой цепи.

В частности, при синтезе дискретных частотных фильтров нужно найти такие коэффициенты передаточной функции (19.41), или (19.42), частотная характеристика которой удовлетворяла бы нор-

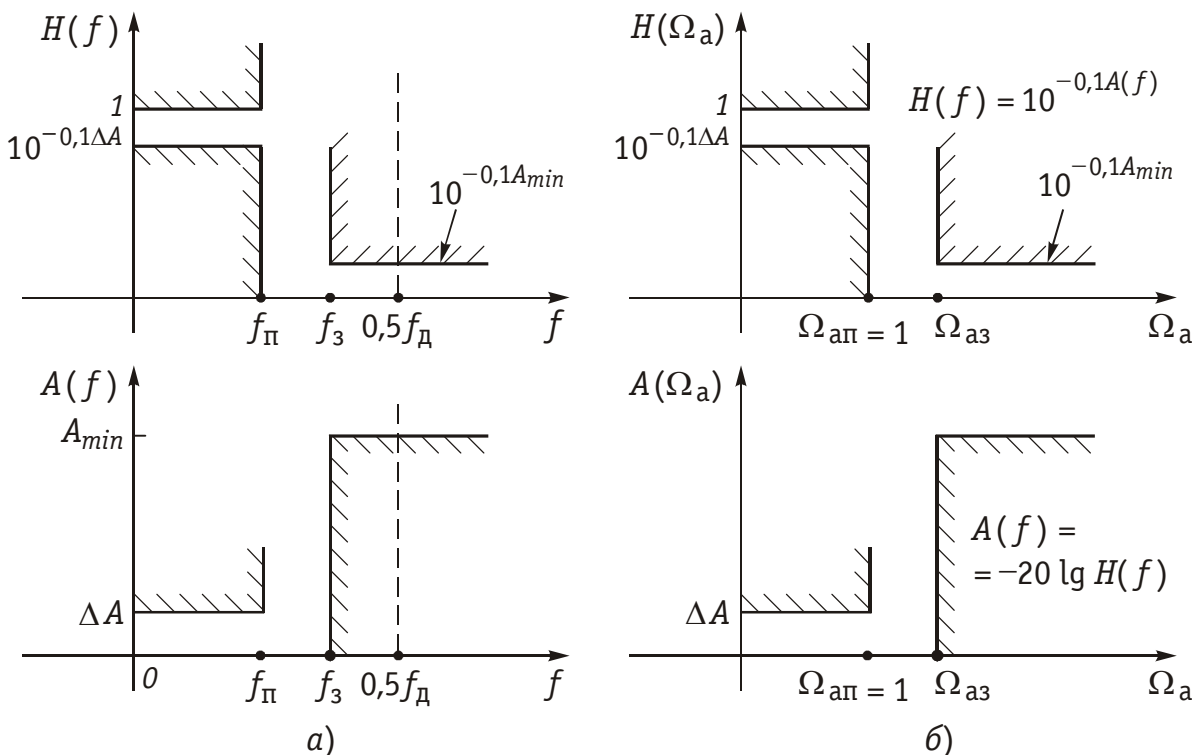


Рис. 19.56

мам ослабления фильтра в полосах пропускания и непропускания (рис. 19.56, *a*). Определение коэффициентов — это задача аппроксимации. Известен целый ряд методов ее решения. Наиболее распространенным является следующий метод. Сначала рассчитывают аналоговый НЧ-прототип и получают его передаточную функцию $H(p)$, затем путем замены комплексной переменной $p = \Phi\{z\}$ переходят от $H(p)$ к передаточной функции дискретной цепи $H(z)$.

Использование стандартного преобразования $z = e^{pT}$ или $p = (1/T) \ln z$ не приведет к дробно-рациональной функции. Поэтому для ФНЧ применяют *билинейное преобразование*

$$p = \gamma \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \gamma \frac{z - 1}{z + 1} \quad (19.64)$$

(γ — некоторый постоянный множитель), которое является первым приближением стандартного преобразования при разложении его в ряд Тейлора:

$$p = \frac{1}{T} \ln z = \frac{2}{T} \left[\frac{z - 1}{z + 1} + \frac{1}{3} \frac{(z - 1)^3}{(z + 1)^3} + \frac{1}{5} \frac{(z - 1)^5}{(z + 1)^5} + \dots \right]. \quad (19.65)$$

Из разложения (19.65) следует, что необходимо выбирать $\gamma = 2/T$. Однако, далее мы покажем, что удобнее брать другие значения коэффициента γ .

Билинейное преобразование (19.64) переводит все точки из левой полуплоскости переменной p в точки на единичной окружности плоскости z . Так что, если была устойчива аналоговая цепь, будет устойчивой и дискретная. Подтвердим эти утверждения на примере.

Пример. Найдем положения точек на z -плоскости, соответствующих следующим значениям переменной p : $p_1 = -2$; $p_2 = -2 + j2$; $p_3 = j2$.

Из формулы (19.64) найдем выражение для расчета z :

$$z = \frac{\gamma + p}{\gamma - p}.$$

Подставляя в эту формулу значение полюса $p = p_1 = -2$, лежащего в левой полуплоскости плоскости p , получаем

$$z = \frac{\gamma - 2}{\gamma + 2}.$$

Поскольку γ — число вещественное и положительное, то числитель ($\gamma - 2$) меньше знаменателя ($\gamma + 2$), и значит $z < 1$, т. е. точка z лежит внутри единичной окружности, что говорит об устойчивости цепи.

При $p = p_2 = -2 + j2$ получаем

$$\underline{z} = \frac{\gamma - 2 + j2}{\gamma + 2 - j2}.$$

Найдем модуль \underline{z}

$$z = \frac{\sqrt{(\gamma - 2)^2 + 2^2}}{\sqrt{(\gamma + 2)^2 + 2^2}}.$$

Он меньше единицы, поскольку модуль числителя меньше модуля знаменателя, т. е. точка \underline{z} также лежит внутри единичной окружности.

При $p = p_3 = j2$ получаем

$$\underline{z} = \frac{\gamma + j2}{\gamma - j2} = \frac{\sqrt{\gamma^2 + 4}}{\sqrt{\gamma^2 + 4}} e^{j2 \arctg \frac{2}{\gamma}}.$$

Модуль \underline{z} равен 1, т.е. точка $p = j2$, лежащая на мнимой оси плоскости p , переходит в точку на единичной окружности плоскости z при использовании билинейного преобразования.

Переход к аналоговому прототипу применяется обычно для дискретных фильтров, имеющих бесконечную импульсную характеристику $h(k)$, принимающую ненулевые значения на бесконечном множестве значений $k = 0, 1, \dots$.

Дискретные цепи с конечной импульсной характеристикой, принимающей ненулевые значения лишь при $k = 0, 1, \dots, N - 1$, не имеют аналогов среди пассивных электрических фильтров, поэтому для их расчета применяются другие методы.

Нерекурсивные фильтры с передаточной функцией (19.43) всегда имеют конечные импульсные характеристики. Рекурсивные фильтры с передаточной функцией (19.41) могут иметь как конечные, так и бесконечные импульсные характеристики.

Пример. Найдем дискретные импульсные характеристики фильтров, имеющих передаточные функции

$$H_1(z) = 2 + 0,5z^{-1} - 3z^{-2}, \quad H_2(z) = 1/(1 - 0,5z^{-1}),$$

$$H_3(z) = \frac{1 - z^{-5}}{1 - z^{-1}}.$$

Дискретная импульсная характеристика $h(k)$ связана с передаточной функцией обратным z -преобразованием (см. формулу (19.30)):

$$h(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} H(z) z^{k-1} dz, \quad (19.66)$$

т.е. $h(k) = z^{-1} \{H(z)\}$. Нерекурсивной цепи с передаточной функцией $H_1(z)$ соответствует $h\{k\} = \{2; 0,5; -3\}$, т.е. это фильтр с конечной импульсной характеристикой.

Импульсная характеристика цепи с передаточной функцией $H_2(z)$ рассчитывается по формуле $h(k) = 0,5^k$, т.е. это рекурсивный фильтр с бесконечной импульсной характеристикой.

Отсчеты импульсной характеристики рекурсивной цепи с передаточной функцией $H_3(z)$ будут конечными и равными 1 только для $k = 0, 1, 2, 3, 4$, а для $k \geq 5$ $h(k) = 0$. Значит этот рекурсивный фильтр имеет конечную импульсную характеристику.

Требования к аналоговому фильтру-прототипу. Следует иметь в виду, что частотная характеристика аналогового фильтра определена на всей положительной полуоси частот, в то время как у дискретного фильтра она имеет тот же смысл только до частоты $0,5f_d$, затем она периодически повторяется (рис. 19.47). Ясно, что шкала частот дискретного фильтра оказывается деформированной относительно шкалы частот аналогового фильтра. Соответствие этих шкал легко установить из билинейного преобразования (19.64). Перепишем его в виде:

$$z = (\gamma + p)/(\gamma - p). \quad (19.67)$$

Обозначим, во избежание путаницы, нормированную частоту для аналогового фильтра-прототипа Ω_a , обычную (т.е. ненормированную) частоту для дискретного фильтра будем, как и ранее, обозначать буквой f , а нормированную — буквой Ω . Теперь заменим в (19.67) комплексную переменную p на $j\Omega_a$, а комплексную переменную z на $e^{j2\pi fT} = e^{j2\pi\Omega}$ и установим соответствие между частотами f (или Ω) и Ω_a :

$$e^{j2\pi fT} = e^{j2\pi\Omega} = \frac{\gamma + j\Omega_a}{\gamma - j\Omega_a} = e^{j2\operatorname{arctg}\frac{\Omega_a}{\gamma}}.$$

Отсюда легко получить, что

$$\pi fT = \pi\Omega = \operatorname{arctg}\frac{\Omega_a}{\gamma}$$

или

$$\Omega_a = \gamma \operatorname{tg} \pi fT = \gamma \operatorname{tg} \pi \frac{f}{f_d} = \gamma \operatorname{tg} \pi\Omega. \quad (19.68)$$

При изменении частоты f от 0 до $0,5f_d$, или нормированной частоты Ω от 0 до 0,5, нормированная частота Ω_a в шкале аналогового прототипа будет пробегать значения от 0 до бесконечности (рис. 19.56).

Во многих справочниках по расчету фильтров граничная частота полосы пропускания принимается равной $\Omega_{ап} = 1$. Чтобы частота $f_{п}$ (или $\Omega_{п}$) дискретного фильтра пересчитывалась в $\Omega_{ап} = 1$ (рис. 19.56, б), из (19.68) ясно, что коэффициент γ нужно взять равным:

$$\gamma = \frac{1}{\operatorname{tg} \pi f_{п}T} = \frac{1}{\operatorname{tg} \pi\Omega_{п}}. \quad (19.69)$$

Пример. Рассчитаем дискретный ФНЧ с параметрами: $f_d = 8$ кГц; $f_{п} = 1$ кГц; $f_{з} = 3$ кГц; $\Delta A = 1,4$ дБ; $A_{min} = 40$ дБ.

По формуле (19.69) находим $\gamma = 1/\operatorname{tg} \pi \cdot 0,125 = 2,414214$ и по формуле (19.68) определяем нормированную граничную частоту полосы непропускания $\Omega_{аз}$ аналогового НЧ-прототипа:

$$\Omega_{аз} = 2,414214 \cdot \operatorname{tg} \pi \cdot 0,375 \approx 5,82.$$

Тем самым, произведен пересчет требований, предъявленных к дискретному фильтру (рис. 19.56, а) в требования к аналоговому НЧ-прототипу (рис. 19.56, б).

Расчет аналогового НЧ-прототипа. Исходными данными для расчета являются требования к НЧ-пототипу (рис. 19.56, б). По ним, пользуясь любым справочником, рассчитывают передаточную функцию фильтра-прототипа.

Пример. Для $\Omega_{аз} = 5,82$, $A_{\min} = 40$ дБ и $\Delta A = 1,4$ дБ, (параметры ФНЧ, взятые из примера), пользуясь справочником Христиана Э., Эйзенмана Е. «Таблицы и графики по расчету фильтров» М.: Связь, 1975, находим, что

$$H(p) = \frac{1,732052}{(p + 1,200937)(p^2 + 1,200937p + 1,442249)}. \quad (19.70)$$

Реализация рекурсивного фильтра. Для перехода от аналогового фильтра к дискретному воспользуемся заменой переменных (19.64)

$$p = \gamma \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}.$$

В результате получаем $H(z)$ в виде дробно-рациональной функции, которая может быть реализована.

Пример. От передаточной функции (19.70) аналогового фильтра-прототипа перейдем к передаточной функции $H(z)$ дискретного фильтра.

Подставим в выражение (19.70) значение

$$p = 2,414214 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}.$$

Получим

$$H(z) = 1,732052 \frac{1 + z^{-1}}{3,615151 - 1,213278z^{-1}} \times \frac{(1 + z^{-1})^2}{10,1699 - 8,77236z^{-1} + 4,371362z^{-2}}.$$

Дискретный фильтр можно реализовать в виде каскадного соединения типовых звеньев 1-го и 2-го порядка. Для этого функцию $H(z)$ перепишем в виде:

$$H(z) = 1,732052 \frac{0,2766 + 0,2766z^{-1}}{1 - 0,33561z^{-1}} \times \frac{0,09833 + 0,19666z^{-1} + 0,09833z^{-2}}{1 - 0,86258z^{-1} + 0,42983z^{-2}}.$$

Схема фильтра, имеющего такую передаточную функцию, приведена на рис. 19.57. Амплитудно-частотная характеристика $A(\Omega) = 20 \lg H(\Omega)$, рассчитанная на основании формул для АЧХ типовых звеньев, показана на рис. 19.58 (кривая 1).

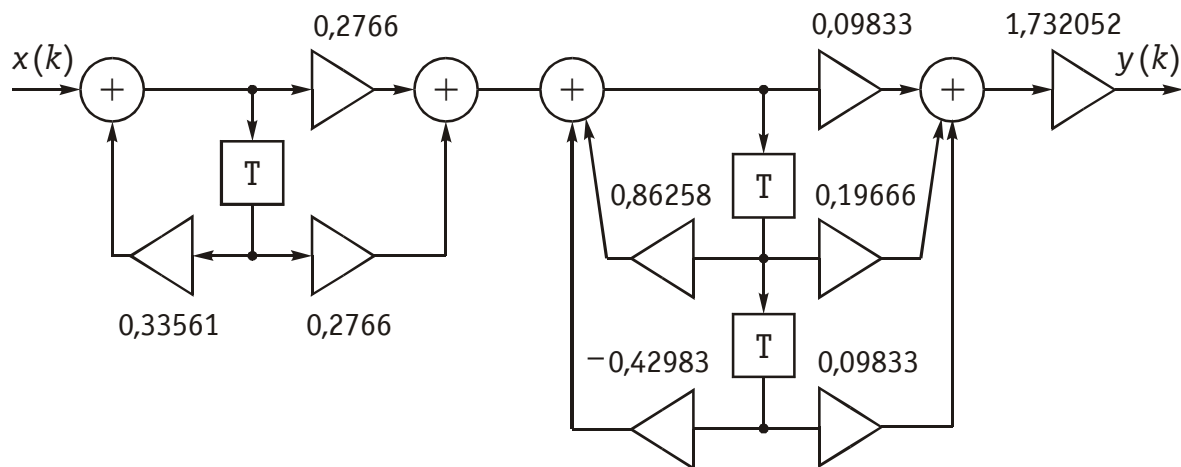


Рис. 19.57

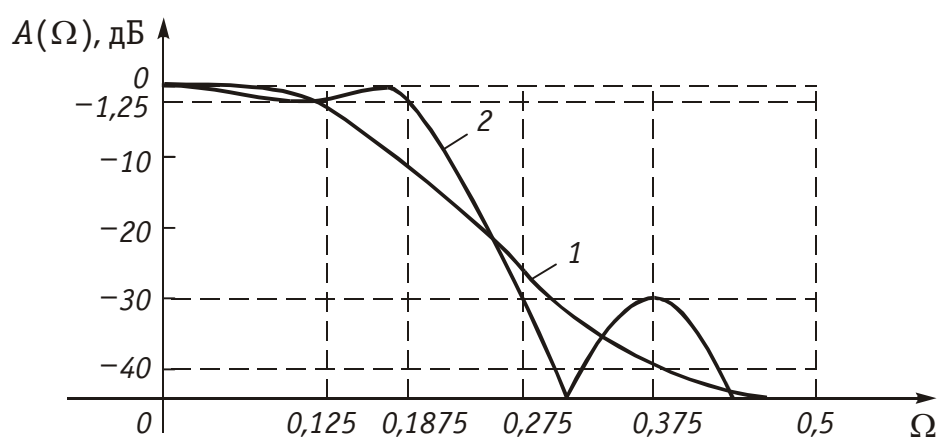


Рис. 59.58

Аналогичным образом производится расчет фильтров со всплесками ослабления (нулями передачи).

Пример. Найдем передаточную функцию дискретного фильтра НЧ с АЧХ, равноволновой в полосе пропускания и со всплеском ослабления в полосе задерживания. Параметры фильтра: $f_d = 32$ кГц; $f_n = 6$ кГц; $f_z = 8,8$ кГц; $\Delta A = 1,5$ дБ; $A_{\min} = 30$ дБ.

Определяем: $\Omega_n = 6 \cdot 10^3 / (32 \cdot 10^3) = 0,1875$ и

$\Omega_z = 8,8 \cdot 10^3 / (32 \cdot 10^3) = 0,275$. Далее находим

$\gamma = \operatorname{ctg} \pi \cdot 0,1875 = 1,496606$ и

$\Omega_{az} = 1,496606 \cdot \operatorname{tg} \pi \cdot 0,275 = 1,7523$.

По справочнику рассчитываем

$$H(p) = 0,129302 \frac{p^2 + 3,865161}{(p + 0,510162)(p^2 + 0,38086p + 0,980233)}$$

и с помощью подстановки

$$p = 1,496606 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

переходим к $H(z)$

$$H(z) = 0,103788 \frac{1+z^{-1}}{1-0,491558z^{-1}} \times \frac{1+0,53246z^{-1}+z^{-2}}{1-0,664682z^{-1}+0,699215z^{-2}}.$$

Амплитудно-частотная характеристика $A(\Omega) = 20 \lg H(\Omega)$ такого фильтра показана на рис. 19.58 (кривая 2).

Синтез фильтров с конечной импульсной характеристикой. Если известна передаточная функция $H(z)$ дискретного фильтра, то для реализации фильтра с конечной импульсной характеристикой $h(k)$, равной нулю везде кроме $0 \leq k \leq N-1$, поступают следующим образом. Амплитудно-частотную характеристику $H(\Omega)$ фильтра дискретизируют, разбивая частотный интервал $\Omega = 0 \div 1$ на N равных интервалов. В результате получают последовательность отсчетов АЧХ на N частотах $\Omega = n/N$, т. е. $H(n/N)$, $0 \leq n \leq N-1$. Поскольку $H(n/N) = N \cdot H(n)$, то, подставляя эту последовательность в формулу обратного дискретного преобразования Фурье (19.15), получаем выражение для дискретной импульсной характеристики $h(k)$ фильтра

$$h(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \underline{H}[n/N] e^{j2\pi kn \cdot \frac{1}{N}}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (19.71)$$

Как известно, конечную импульсную характеристику имеют не рекурсивные фильтры. Это значит, что полученные отсчеты дискретной импульсной характеристики $h(k)$ являются коэффициентами усиления a_0, a_2, \dots, a_{N-1} в схеме не рекурсивного фильтра, приведенной на рис. 19.36.

Пример. Найдём импульсную характеристику $h(k)$ фильтра нижних частот, имеющего граничную частоту полосы пропускания $\Omega = 0,1$, и АЧХ, приведенную на рис. 19.59. Импульсную характеристику будем рассчитывать для значения $N = 30$.

В формуле (19.57) для расчета $h(k)$ используются комплексные значения передаточной функции. Если выбрать значения $H[n/N]$, показанные на рис. 19.59 ($H[n/N] = 1$ в полосе пропускания и $H[n/N] = 0$ в полосе непропускания) и фазу передаточной функции $\arg \underline{H}[n/N]$, равную нулю, то передаточная функция будет иметь заданные значения в точках $\Omega = n/N$, но очень сильно отличаться от требуемой формы на частотах Ω между этими точками.

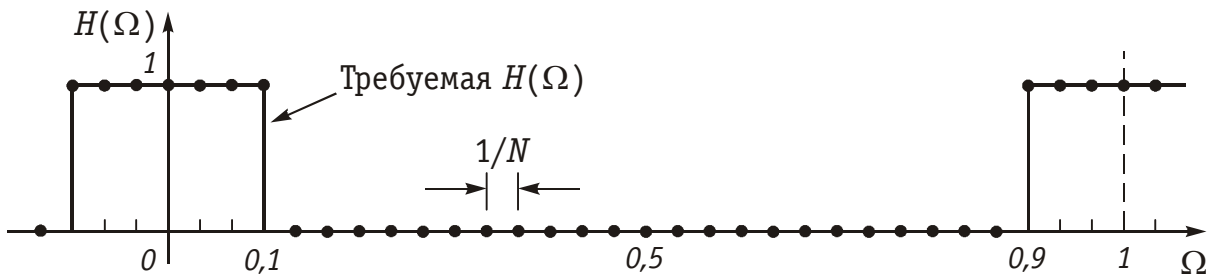


Рис. 19.59

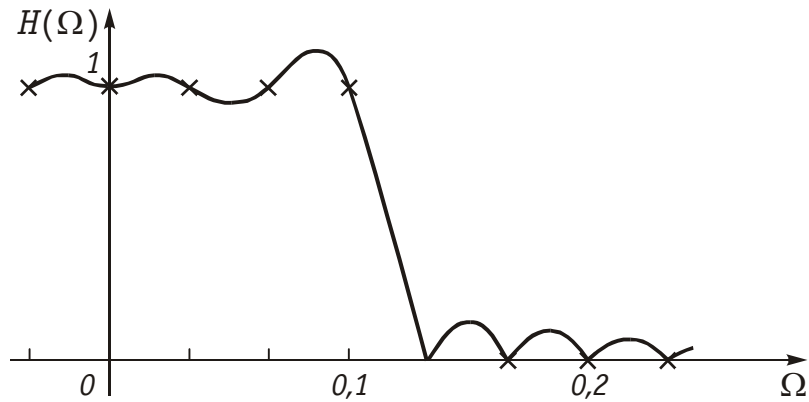


Рис. 19.60

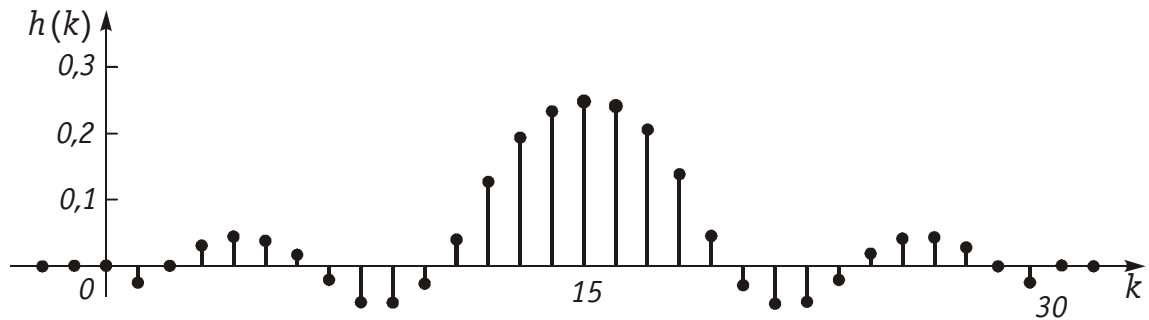


Рис. 19.61

Гораздо лучшие результаты получаются, если выбрать $\arg \underline{H}[n/N] = -2\pi\Omega(N/2)|_{\Omega=n/N}$. Выбор такой фазы эквивалентен тому, что $\underline{H}[n/N] = (-1)^n$ вместо 1 в полосе пропускания. Такой передаточной функции соответствует АЧХ, изображенная на рис. 19.60. Подстановка значений $\underline{H}[n/N]$ в формулу (19.35) позволяет получить выражение для расчета $h(k)$:

$$h(k) = \frac{1}{30} \left(-e^{-j2\pi 3k/30} + e^{-j2\pi 2k/30} - e^{-j2\pi k/30} + 1 - \exp^{j2\pi k/30} + e^{j2\pi 2k/30} - e^{j2\pi 3k/30} \right).$$

График конечной импульсной характеристики $h(k)$ изображен на рис. 19.61.

Для реализации фильтра с такой импульсной характеристикой по схеме рис. 19.36 потребуется 30 усилителей и 29 элементов задержки, т.е. схема довольно громоздкая. Схема с обратными связями, реализующая АЧХ, изображенную на рис. 19.59, будет иметь гораздо меньше элементов. Однако достоинством нерекурсивных фильтров с конечной импульсной характеристикой является то, что они всегда устойчивы и, кроме того, обеспечивают линейные фазовые характеристики.

Синтез дискретных фильтров верхних частот, полосовых и режекторных. Требования к любому типу фильтра преобразуются в требования к аналоговому ФНЧ-прототипу. Затем рассчитывается аналоговый прототип, как это показано выше, и с помощью замены переменных переходят от $H(p)$ к $H(z)$.

Конечно, формулы замены переменных уже не такие, как для ФНЧ. Они приведены для разных типов фильтров в табл. 19.2. Требования к дискретным фильтрам графически изображены на рис. 19.62.

Таблица 19.2 — Формулы замены переменных для различных типов фильтров

Дискр. фильтр	Граничные частоты	Формула замены	Параметр	Связь между частотами	Граничные частоты аналогового фильтра
НЧ	$\Omega_{\text{п}} = f_{\text{п}}/f_{\text{д}}$ $\Omega_{\text{з}} = f_{\text{з}}/f_{\text{д}}$	$p = \gamma \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$	$\gamma = \operatorname{ctg} \pi \Omega_{\text{п}}$	$\Omega_{\text{а}} = \gamma \operatorname{tg} \pi \Omega$	$\Omega_{\text{аз}} = \gamma \operatorname{tg} \pi \Omega_{\text{з}}$
ВЧ	$\Omega_{\text{п}} = f_{\text{п}}/f_{\text{д}}$ $\Omega_{\text{з}} = f_{\text{з}}/f_{\text{д}}$	$p = \gamma \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$	$\gamma = \operatorname{ctg} \pi \Omega_{\text{п}}$	$\Omega_{\text{а}} = \gamma \operatorname{ctg} \pi \Omega$	$\Omega_{\text{аз}} = \gamma \operatorname{ctg} \pi \Omega_{\text{з}}$
ПФ	$\Omega_{\text{п1}} = f_{\text{п1}}/f_{\text{д}}$ $\Omega_{\text{п2}} = f_{\text{п2}}/f_{\text{д}}$ $\Omega_{\text{з1}} = f_{\text{з1}}/f_{\text{д}}$ $\Omega_{\text{з2}} = f_{\text{з2}}/f_{\text{д}}$	$p = \gamma \frac{1 - 2\alpha z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-2}}$	$\gamma = \operatorname{ctg} \pi (\Omega_{\text{п2}} - \Omega_{\text{п1}})$ $\alpha = \frac{\cos \pi (\Omega_{\text{п2}} + \Omega_{\text{п1}})}{\cos \pi (\Omega_{\text{п2}} - \Omega_{\text{п1}})}$	$\Omega_{\text{а}} = \gamma \frac{\alpha - \cos 2\pi \Omega}{\sin 2\pi \Omega}$	$\Omega_{\text{аз}} = \min(\Omega'_{\text{аз}} , \Omega''_{\text{аз}}),$ где $\Omega'_{\text{аз}} = \gamma \frac{\alpha - \cos 2\pi \Omega_{\text{з1}}}{\sin 2\pi \Omega_{\text{з1}}}$ $\Omega''_{\text{аз}} = \gamma \frac{\alpha - \cos 2\pi \Omega_{\text{з2}}}{\sin 2\pi \Omega_{\text{з2}}}$
ЗФ	$\Omega_{\text{п1}} = f_{\text{п1}}/f_{\text{д}}$ $\Omega_{\text{п2}} = f_{\text{п2}}/f_{\text{д}}$ $\Omega_{\text{з1}} = f_{\text{з1}}/f_{\text{д}}$ $\Omega_{\text{з2}} = f_{\text{з2}}/f_{\text{д}}$	$p = \gamma \frac{1 - z^{-2}}{1 - 2\alpha z^{-1} + z^{-2}}$	$\gamma = \operatorname{ctg} \pi (\Omega_{\text{п2}} - \Omega_{\text{п1}})$ $\alpha = \frac{\cos \pi (\Omega_{\text{п2}} + \Omega_{\text{п1}})}{\cos \pi (\Omega_{\text{п2}} - \Omega_{\text{п1}})}$	$\Omega_{\text{а}} = \gamma \frac{\sin 2\pi \Omega}{\alpha - \cos 2\pi \Omega}$	$\Omega_{\text{аз}} = \min(- \Omega'_{\text{аз}} , \Omega''_{\text{аз}}),$ где $\Omega'_{\text{аз}} = \gamma \frac{\sin 2\pi \Omega_{\text{з1}}}{\alpha - \cos 2\pi \Omega_{\text{з1}}}$ $\Omega''_{\text{аз}} = \gamma \frac{\sin 2\pi \Omega_{\text{з2}}}{\alpha - \cos 2\pi \Omega_{\text{з2}}}$

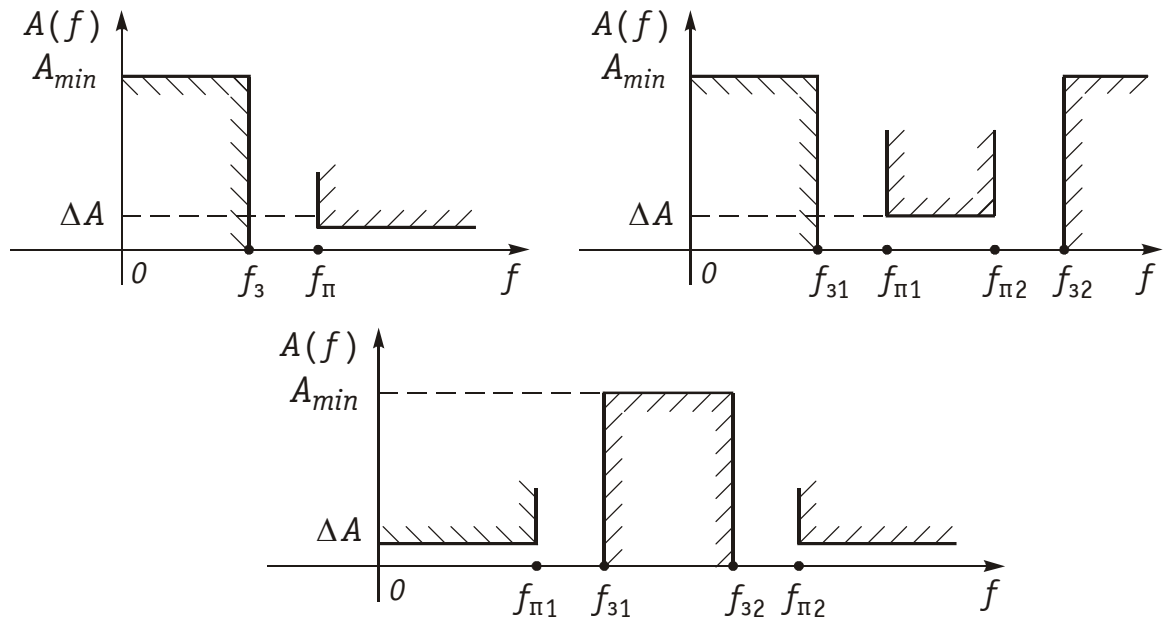


Рис. 19.62

Пример. Определить передаточную функцию дискретного полосового фильтра с параметрами: $f_d = 140$ Гц; $f_{П1} = 15,5$ Гц; $f_{П2} = 30$ Гц; $f_{31} = 7,75$ Гц; $f_{32} = 60$ Гц; $\Delta A = 0,5$ дБ; $A_{\min} = 40$ дБ.

Определяем:

$$\Omega_{П1} = 15,5/140 = 0,110714; \quad \Omega_{П2} = 30/140 = 0,214286;$$

$$\Omega_{31} = 7,75/140 = 0,055357; \quad \Omega_{32} = 60/140 = 0,428571;$$

$$\gamma = \operatorname{ctg}[\pi \cdot (0,214286 - 0,110714)] = 2,964087;$$

$$\alpha = \frac{\cos[\pi(0,214286 + 0,110714)]}{\cos[\pi(0,214286 - 0,110714)]} = 0,551433;$$

$$\Omega'_{аз} = 2,964087 \frac{0,551433 - \cos 2\pi \cdot 0,055357}{\sin 2\pi \cdot 0,055357} \approx -3,38;$$

$$\Omega''_{аз} = 2,964087 \frac{0,551433 - \cos 2\pi \cdot 0,428571}{\sin 2\pi \cdot 0,428571} \approx 9,92;$$

$$\Omega_{аз} = \min(3,38; 9,92) \approx 3,38.$$

По данным $\Omega_{аз} = 3,38$, $\Delta A = 0,5$ дБ и $A_{\min} = 40$ дБ из справочника находим

$$H(p) = 0,484123 \frac{1}{p^2 + 0,412569p + 1,144123} \times \frac{1}{p^2 + 0,996024p + 0,437016}.$$

Передаточную функцию $H(z)$ найдем, используя подстановку

$$p = 2,964087 \frac{1 - 2 \cdot 0,551433z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-2}}$$

и разлагая каждый из двух полиномов четвертой степени (в знаменателе $H(z)$) на множители (полиномы второй степени):

$$H(z) = 0,0035652 \frac{1 - z^{-2}}{1 - 0,703705z^{-1} + 0,684397z^{-2}} \times \frac{1 - z^{-2}}{1 - 1,155395z^{-1} + 0,741638z^{-2}} \times \\ \times \frac{1 - z^{-2}}{1 - 0,378998z^{-1} + 0,860199z^{-2}} \times \frac{1 - z^{-2}}{1 - 1,479492z^{-1} + 0,907562z^{-2}}.$$

19.8. Цифровые фильтры

Функциональная схема цифрового фильтра. В отличие от дискретных фильтров в *цифровом фильтре* (ЦФ) осуществляется обработка цифровых сигналов (рис. 19.1, в). На рис. 19.63 изображена функциональная схема цифровой обработки аналоговых сигналов. Аналоговый сигнал $x(t)$ подается на аналого-цифровой преобразователь (АЦП), где осуществляется дискретизация, квантование непрерывного сигнала и его кодирование. В результате на выходе АЦП формируется цифровой сигнал, представляющий собой последовательность двоичных чисел с фиксированным количеством разрядов.

Например, если отсчет имеет величину 30 В, то запись числа в двоичном 8-разрядном коде будет такой: 00011110. Закодированные в двоичном коде отсчеты на выходе кодера АЦП на рисунке обозначены $\hat{x}(k)$. Далее двоичная последовательность поступает на вычислительное устройство (ВУ), которое представляет собой универсальную или специализированную микро ЭВМ, микропроцессорное или любое другое вычислительное устройство. Главное состоит в том, что в памяти ВУ должна быть записана программа вычисления, например, выражение (19.36), и отсчеты импульсной реакции, заданной цепи. Следовательно, в результате работы программы ВУ будет выдавать закодированные в двоичном коде отсчеты $\hat{y}(k)$. Далее двоичная выходная последовательность поступает на вход цифро-аналогового преобразователя (ЦАП), содержащий декодер и интерполятор. В ЦАП осуществляется декодирование сигнала, в результате формируется дискретный выходной сигнал $y(kT)$ и после интерполяции на выходе ЦАП получаем выходной аналоговый сигнал $y(t)$.

Как видим, ВУ может сыграть роль реальной цепи. И хотя самой физической цепи в наличии может и не быть, а задана она будет лишь в виде отсчетов импульсной реакции и программы вычислений, мы будем наблюдать на выходе описанной системы такое же выходное напряжение $y(t)$, как и на выходе реальной цепи.

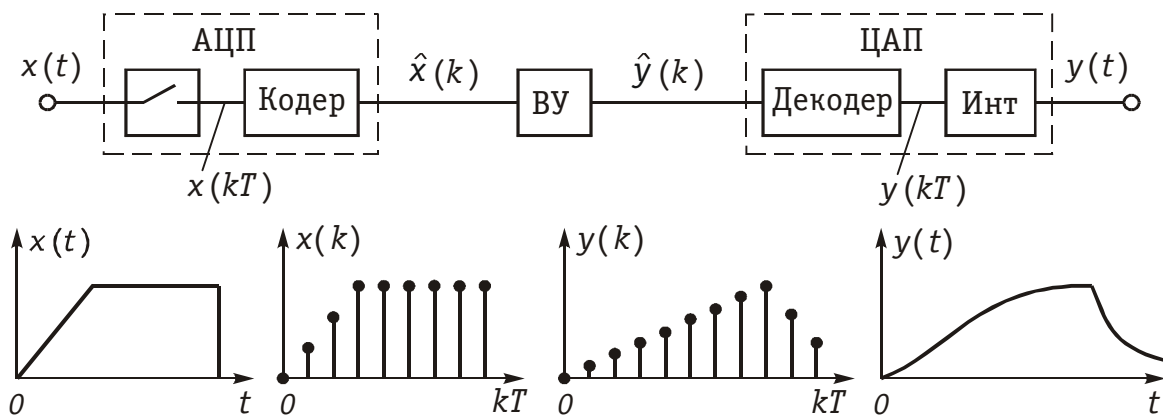


Рис. 19.63

Следует отметить, что при цифровой обработке ЦАП может и отсутствовать, если выходной сигнал надо получить в цифровой форме.

Аналогово-цифровое преобразование сигналов. Как следует из рис. 19.64 АЦП осуществляет дискретизацию аналогового сигнала, его квантование по уровню с шагом Δ (рис. 19.1, *в*) и кодирование. Обычно процесс квантования осуществляется одновременно с его кодированием, в результате на выходе АЦП получаем сигнал, представленный в некотором цифровом коде.

Одним из основных параметров кода является его основание, соответствующее выбранной системе счисления. Близко к оптимальным реализуются *двоичные* или *бинарные* коды, которые нашли наибольшее распространение в связи.

Известно большое количество различных устройств преобразования непрерывного сообщения в бинарный код. Все их можно разбить на три основные группы: преобразователи последовательного счета, поразрядного кодирования и преобразователи считывания. Наибольшее применение в связи нашли преобразователи первых двух типов.

Принцип действия преобразователя последовательного счета с временным преобразованием иллюстрируется схемой изображенной на рис. 19.64 и временными диаграммами на рис. 19.65.

Кодирование в данной схеме осуществляется следующим образом. Аналоговый сигнал после дискретизации и квантования $x_{ц}(t)$ поступает на вход широтно-импульсного модулятора (ШИМ), на выходе которого формируются прямоугольные импульсы ширина которых пропорциональна отсчету сигнала $x_{ц}(t)$ в моменты kT (рис. 19.65). Далее этот ШИМ-сигнал подается на схему* «И», на

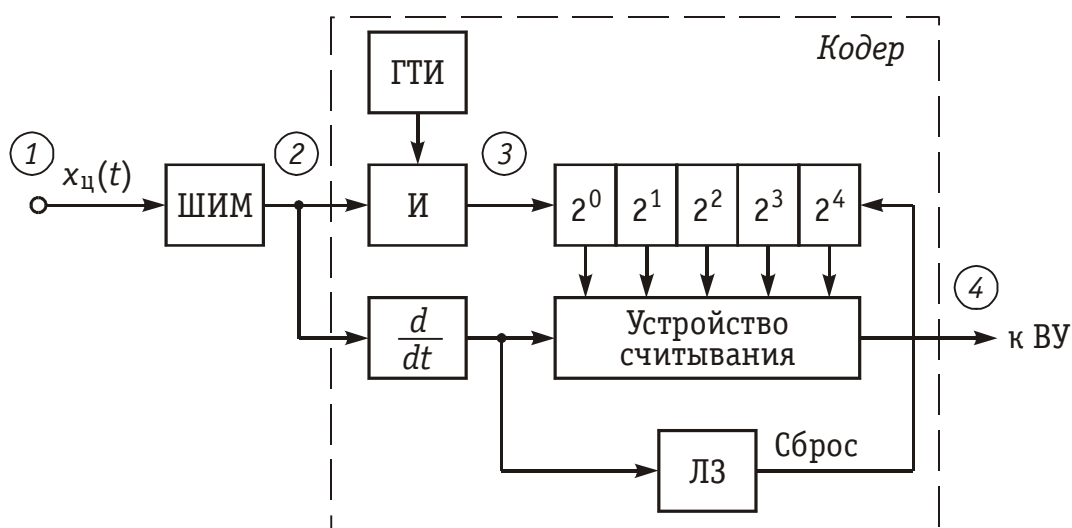


Рис. 19.64

* Особенностью схемы «И» является то, что сигнал на ее выходе появляется при наличии на ее входах одновременно двух сигналов.

второй вход которой поступают импульсы с генератора тактовой частоты (ГТИ). На выходе схемы «И» формируются импульсы, число которых в «пачке» пропорционально ширине импульса. Эти импульсы поступают в двоичный счетчик, где число их фиксируется в двоичной системе счисления. Задним фронтом ШИМ-импульса запускается устройство считывания результата, с выхода которого кодовая комбинация поступает в ВУ. Считывание может осуществляться последовательно или параллельно (последовательный или параллельный код).

На рис. 19.65 приведен вид кодовой группы на выходе при последовательном считывании. Для возвращения двоичного счетчика в исходное состояние на него через линию задержки ЛЗ с $\tau_3 = \tau_{\text{счит}}$ подается сигнал сброса, формируемый задним фронтом ШИМ-импульса. С приходом следующего измерительного импульса работа кодера повторяется.

Аналогичным образом можно кодировать и амплитудно-модулированную импульсную последовательность (кодер последовательного счета с частотным преобразованием). Для этого АИМ-сигнал подается на ЧМ-генератор (мультивибратор), и осуществляется счет импульсов этого генератора за фиксированные промежутки времени по рассмотренной выше схеме.

В преобразователях поразрядного кодирования производится последовательное сравнение выходного сигнала с набором эталонных напряжений, каждое из которых соответствует определенному

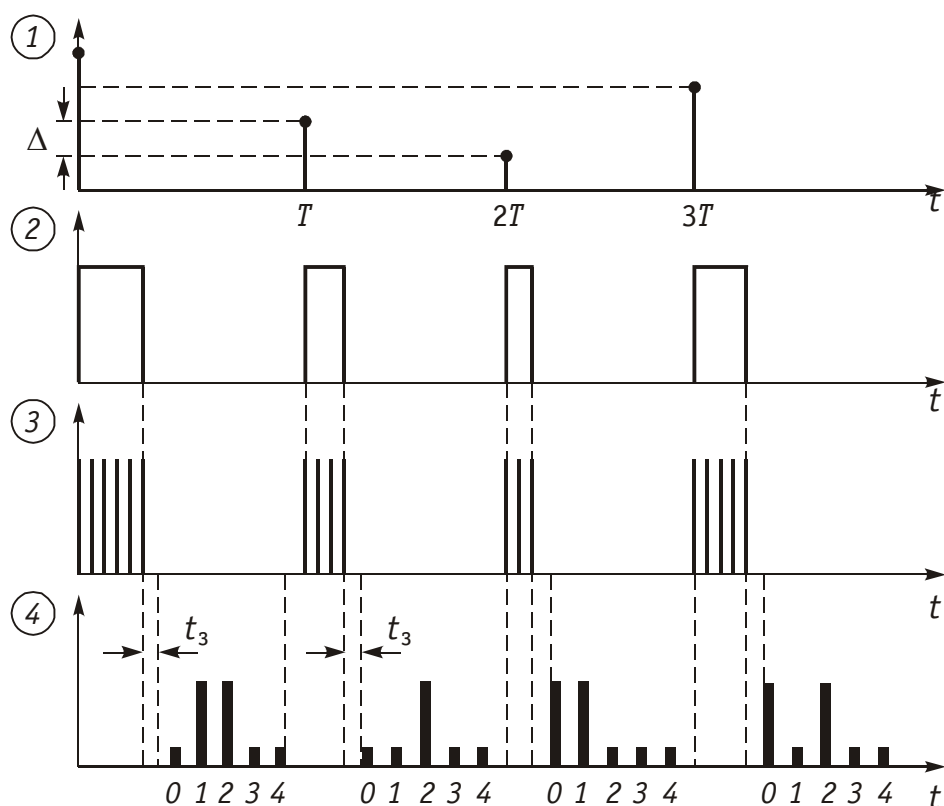


Рис. 19.65

разряду кода. В качестве эталонных напряжений используется геометрическая прогрессия вида

$$\frac{E}{2^0}; \frac{E}{2^1}; \frac{E}{2^2}; \dots \frac{E}{2^{N-1}},$$

где N — число разрядов в бинарном коде. Причем $E > u_{\max}$, где u_{\max} — максимально возможное значение кодирующего сигнала.

При поразрядном кодировании вначале формируется старший разряд кода путем сравнения $u(t)$ с $E/2$ (например, если $u(t) \geq E/2$, то формируется символ «1», в противном случае — «0»). Одновременно на выходе схемы сравнения образуется напряжение $u(t) - E/2$ при $u(t) \geq E/2$ или $u(t)$ при $u(t) < E/2$. Затем указанная процедура повторяется с полученным напряжением для эталонного напряжения $E/4$ и т.д. В результате N сравнений получается символ самого младшего разряда.

Цифро-аналоговое преобразование. Преобразование цифровых сигналов в аналоговый осуществляется с помощью различных цифро-аналоговых преобразователей (ЦАП). В основе простейшего ЦАП лежит принцип двоично-взвешенного суммирования напряжений или токов. На рис. 19.66 изображены схемы простейших ЦАП на базе резистивных цепей.

В ЦАП с двоично-весовыми резисторами (рис. 19.66, а) требуется меньшее число резисторов, однако при этом необходим целый ряд номиналов прецизионных сопротивлений. Аналоговое выходное напряжение $U_{\text{ан}}$ ЦАП определяется как функция двухуровневых входных напряжений:

$$U_{\text{ан}} = (U_A + 2U_B + 4U_C + \dots)/(1 + 2 + 4 + \dots).$$

На цифровых входах $U_A, U_B, U_C \dots$ напряжение может принимать лишь два фиксированных значения, например, либо 0, либо 1.

Для ЦАП, в котором используются резисторы R и $R/2$, требуется больше резисторов (рис. 19.66, б), но только с двумя номиналами. Аналоговое напряжение на выходе такого ЦАП определяется по формуле

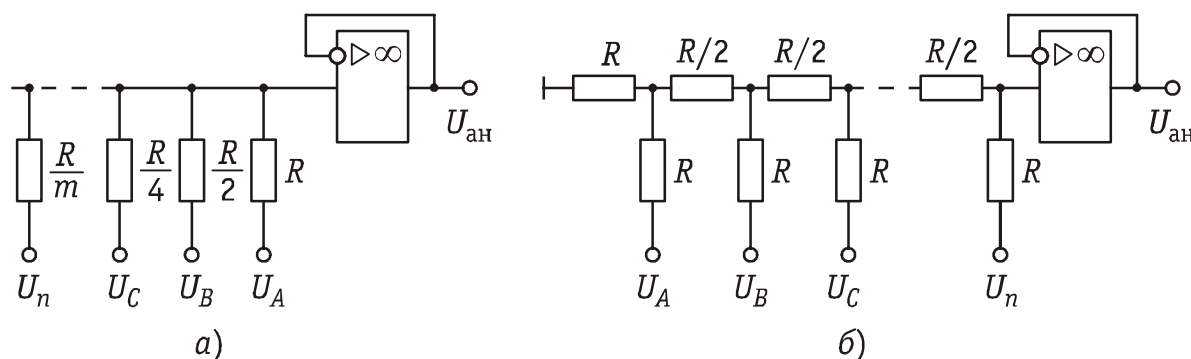


Рис. 19.66

$$U_{\text{ан}} = (U_A + 2U_B + 4U_C + \dots + mU_n)/2^n,$$

где n — число разрядов ЦАП; m — коэффициент, зависящий от числа разрядов ЦАП.

Для обеспечения высокой точности работы резистивные цепи ЦАП должны работать на высокоомную нагрузку. Чтобы согласовать резистивные цепи с низкоомной нагрузкой, используют буферные усилители на основе операционных усилителей, показанные на рис. 19.66, а, б.

Интерполяторы. На выходе ЦАП сигнал обычно имеет форму последовательности импульсов модулированных по амплитуде (АИМ-сигнал). Для восстановления (демодуляции) из АИМ-последовательности аналогового сигнала достаточно использовать ФНЧ с частотой среза $\omega_c = 2\pi/T$, где T — частота дискретизации АИМ-сигнала. Существуют и более сложные интерполирующие устройства, которые описаны в специальной литературе.

В заключение следует отметить, что в связи с бурным развитием вычислительной, микропроцессорной техники цифровые методы обработки сигналов получают все большее распространение. Они имеют более широкие возможности реализации сложных и эффективных алгоритмов обработки сигналов, которые в большинстве своем недоступны для реализации аналоговыми цепями.

Математически работа цифрового фильтра может быть описана уравнением, аналогичным уравнению (19.39), описывающему работу дискретного фильтра. Однако из-за квантования сигнала и весовых коэффициентов a_k и b_k алгоритм (19.39) лишь приближенно описывает работу цифрового фильтра. Следует также учитывать, что операция квантования сигнала является нелинейной, в связи с чем цифровой фильтр, реализующий алгоритм (19.39) является, строго говоря, нелинейной цепью, к которой неприменимы методы анализа и синтеза линейных цепей. Однако учитывая, что число разрядов цифровых кодов выбирается достаточно большим, то полученный квантованный сигнал можно считать приближенно дискретным, а цифровые фильтры, реализующие алгоритм (19.39) приближенно дискретными линейными устройствами. Это позволяет существенно упростить задачу анализа и синтеза цифровых фильтров, сведя их фактически к дискретным линейным фильтрам. Эффект же квантования и округления в цифровых фильтрах обычно учитывается отдельно.

19.9 Эффект квантования в цифровых фильтрах

При проектировании цифровых фильтров важным является аспект учета эффекта квантования, приводящий к определенным погрешностям при обработке сигналов.

Различают три основных источника погрешности сигнала в цифровых фильтрах [Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. — М.: Мир, 1978, — 848 с.]:

- 1) погрешности, обусловленные квантованием коэффициентов фильтра;
- 2) шумы АЦП;
- 3) шумы квантования результатов арифметических операций ВУ.

Погрешность первого типа возникает из-за представления коэффициентов a_k и b_l алгоритма цифрового фильтра конечным числом разрядов, что приводит к искажению частотных характеристик цифрового фильтра. Это обстоятельство обычно учитывается на этапе проектирования фильтра.

Второй вид погрешности, обусловленный погрешностью представления аналогового сигнала в АЦП при его квантовании, называют шумом квантования.

Наконец, третий тип погрешности вызван тем, что арифметические операции, осуществляемые согласно алгоритма (19.39), выполняются с определенной точностью, зависящей от числа разрядов ВУ.

Погрешности квантования коэффициентов ЦФ.

Значения коэффициентов a_k и b_l цифрового фильтра квантуются в ВУ, при этом точные значения коэффициентов a_k и b_l заменяют их приближенными значениями \tilde{a}_k и \tilde{b}_l :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{a}_k &= a_k + \delta_{a_k}, & k &= \overline{1, N}, \\ \tilde{b}_l &= b_l + \delta_{b_l}, & l &= \overline{1, M}, \end{aligned} \right\} \quad (19.72)$$

где $\delta_{a_k}, \delta_{b_l}$ — погрешность квантования коэффициентов цифрового фильтра.

При этом передаточная функция фильтра (19.41) принимает вид:

$$\tilde{H}(z) = \frac{\sum_{k=0}^N \tilde{a}_k z^{-k}}{1 - \sum_{l=1}^M \tilde{b}_l z^{-l}}. \quad (19.73)$$

Следует отметить, что изменение коэффициентов \tilde{a}_k и \tilde{b}_l в (19.73) приводит к изменению положения нулей и полюсов передаточной функции ЦФ, а, следовательно, к искажению АЧХ и ФЧХ и даже потере устойчивости ЦФ.

Пример. Рассмотрим передаточную функцию дискретной цепи

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 1,8z^{-1} + 0,97z^{-2}}.$$

Полюсы этой передаточной функции комплексно-сопряженные $z_{1,2} = 0,9 \pm j 0,4$, т.е. лежат внутри единичной окружности: $|z_1| = |z_2| < 1$, поэтому дискретная цепь — устойчива.

Осуществим квантование коэффициентов b_1 и b_2 , округлив их значения до величин: $\tilde{b}_1 = 2, \tilde{b}_2 = 1$. При этом полюса будут вещественными: $\underline{z}_1 = 1,5, \underline{z}_2 = -3,5$, т.е. лежат за пределами единичной окружности, поэтому цепь будет неустойчивой.

Следует подчеркнуть, что, несмотря на то, что сама операция квантования является нелинейной цифровой фильтр остается линейной цепью, но с характеристиками, определяемыми функцией (19.73). Очевидно, что при проектировании ЦФ коэффициенты a_k и b_k должны быть выбраны таким образом, чтобы характеристики цифрового фильтра с квантованными коэффициентами \tilde{a}_k и \tilde{b}_k удовлетворяли заданным требованиям. Для оценки влияния эффекта квантования коэффициентов ЦФ может быть использована функция чувствительности (см. п. 16.4).

Шумы квантования. При квантовании сигнала минимальный шаг квантования Δ (расстояние между смежными разрешенными уровнями) соответствует единице младшего двоичного разряда. Причем, поскольку при квантовании происходит округление значений сигнала до ближайшего дискретного уровня, то появляются ошибки округления $|\varepsilon| \leq \Delta/2$. Если $x(t)$ известен неточно, то ε — является случайной величиной и при малом Δ распределено по равномерному закону. Последовательность значений ошибки ε , возникающей при квантовании дискретного сигнала $x(kT)$ образует дискретный случайный процесс $\varepsilon(kT)$ называемый *шумом квантования* (рис. 19.67).

Дисперсия шума квантования определяется для равномерного закона распределения $p(\varepsilon)$ формулой

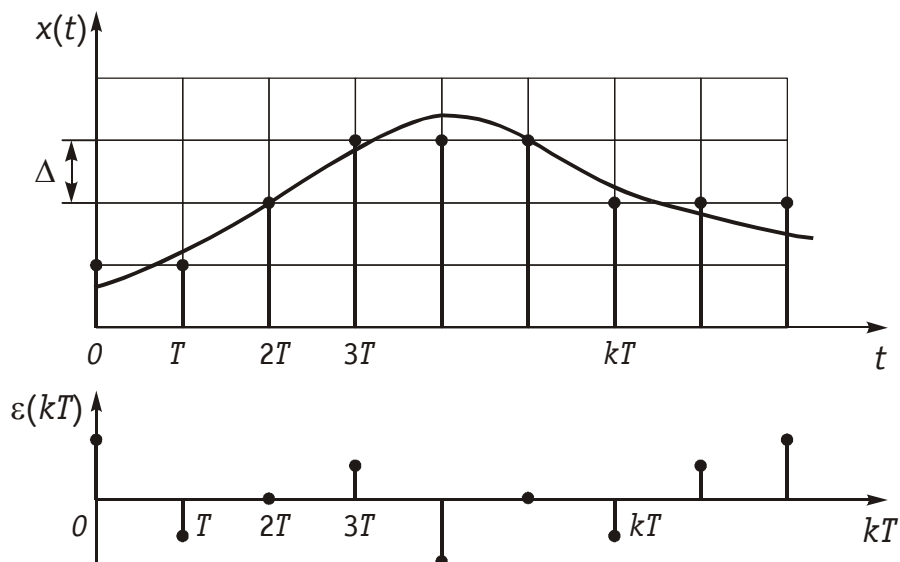


Рис. 19.67

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \varepsilon^2 p(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{\Delta^2}{12}. \quad (19.74)$$

Если шаг квантования Δ мал, то соседние значения $\varepsilon(kT)$ можно считать некоррелированными.

Шум квантования является одним из главных источников погрешности цифровой обработки сигнала. Шум на выходе цифрового фильтра $\xi(kT)$ при условии некоррелированности отсчетов $\varepsilon(kT)$ можно определить согласно (19.36)

$$\xi(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi(kT) h(nT - kT). \quad (19.75)$$

Откуда с учетом (19.75) получим для дисперсии шума на выходе цифрового фильтра:

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{\Delta^2}{12} \sum_{k=0}^{\infty} h^2(nT - kT) = \frac{\Delta^2}{12} \sum_{k=0}^{\infty} h^2(kT). \quad (19.76)$$

Поскольку для ЦФ обычно выполняется условие (19.37), то дисперсия шума квантования на выходе σ_{ξ}^2 всегда конечна.

Ошибки округления. При обработке цифрового сигнала в ВУ возникают дополнительные ошибки округления (усечения). Действительно, если при использовании в ВУ чисел с фиксированной запятой сложение чисел не приводит к увеличению разрядов, то при умножении число разрядов возрастает и возникает необходимость округления результата, что естественно приводит к ошибкам называемым *ошибками округления*. По своему характеру эти ошибки аналогичны шуму квантования. Для их учета обычно в схему ЦФ дополнительно вводят источники шума $e_i(kT)$, число которых равно числу умножителей. На рис. 19.68 изображена схема рекурсивного ЦФ звена 1-го порядка с учетом источников шума округления.

Источники шума $e(kT)$ имеют одинаковую дисперсию $\sigma^2 = \Delta^2/12$, где Δ определяется числом используемых разрядов. Если принять, что источники $e_0(kT)$, $e_1(kT)$ и $e_2(kT)$ независимы, то дисперсия суммарного шума округления будет равна

$$\sigma_0^2 = 3\sigma^2 = \Delta^2/4.$$

Для другой схемы реализации ЦФ результирующая σ_0^2 вычисляется в зависимости от того, куда будет подключен источник шума $e(kT)$ и в общем случае может быть найден по формуле (19.76) или с учетом равенства Парсеваля

$$\sum_{k=0}^{\infty} h^2(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} H(z) H(1/z) \frac{dz}{z} \quad (19.77)$$

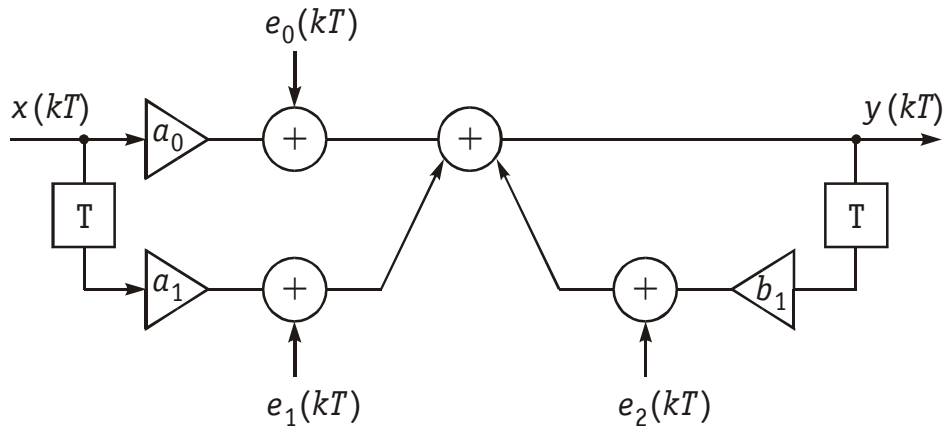


Рис. 19.68

из уравнения

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{\Delta^2}{12} \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} H(z) H(1/z) \frac{dz}{z}. \quad (19.78)$$

Пример. Определить дисперсию шума на выходе σ_{ξ}^2 ЦФ 1-го порядка с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{a}{1 - bz^{-1}}.$$

Для нахождения σ_{ξ}^2 воспользуемся формулой (19.78):

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{\Delta^2}{12} \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{a^2}{(1 - bz)(z - b)} dz = \frac{\Delta^2}{12} \cdot \frac{1}{1 - b^2}.$$

Кроме ошибок квантования и округления при синтезе ЦФ возникают ошибки, вызванные неточными значениями параметров фильтра. Эти ошибки особенно опасны в рекурсивных фильтрах высокого порядка, т.к. могут привести к потере устойчивости ЦФ, поэтому обычно используют звенья 1-го и 2-го порядков (см. § 19.5). Кроме рассмотренных выше при синтезе ЦФ возникают еще ряд дополнительных явлений, приводящих к погрешности цифровой фильтрации. К ним, например, относятся так называемые *предельные циклы низкого уровня*, представляющие собой периодические колебания, возникающие на выходе ЦФ при низком входном сигнале и обусловленные округлением результатов вычисления. Все эти явления и ошибки подробно исследуются в специальной литературе.

Вопросы и задания для самопроверки

1. Почему нельзя произвольно выбирать интервал дискретизации?

2. Найдите спектр дискретного сигнала, состоящего из одного отсчета $x\{k\} = \{2\}$.
3. Каким должно быть соотношение между интервалом дискретизации спектра по частоте ΔF и периодом повторения T_c сигнала?
4. Найдите частоту дискретизации и интервал дискретизации сигнала, имеющего спектр, ограниченный частотой $F_b = 10$ кГц.
5. Найти дискретную свертку сигналов $x_1\{k\} = \{1; 1\}$ и $x_2\{k\} = \{0,5; 0,5; 0,5\}$.

Ответ: $x_1\{k\} * x_2\{k\} = \{0,5; 1; 1; 0,5\}$.

6. Вычислить реакцию дискретной цепи с импульсной характеристикой $h(k)$ на входной дискретный сигнал $x(k)$:
 - а) $h\{k\} = \{2; 1; 0,5\}$, $x\{k\} = \{0,5; 0,5\}$
 - б) $h\{k\} = \{2; 2; 2\}$, $x\{k\} = \{1; 1; 1\}$.

Ответ: а) $y\{k\} = \{1; 1,5; 0,75; 0,25\}$

б) $y\{k\} = \{2; 4; 6; 4; 2\}$.

7. Найти z -преобразование дискретных сигналов

а) $x\{k\} = \{3; 2; 1\}$

б) $x\{k\} = \begin{cases} 1, & k - \text{четное} \\ 0, & k - \text{нечетное} \end{cases}$

в) $x\{k\} = (1/2)^k, k \geq 0$.

Ответ: а) $X(z) = 3 + 2z^{-1} + z^{-3}$

б) $X(z) = 1/(1 - z^{-2})$

в) $X(z) = 1/(1 - 0,5z^{-2})$.

8. Найти z -преобразование дискретного сигнала $x_3(k)$, равного сумме сигналов $x_1\{k\} = \{1; 0; 1; -1\}$ и $x_2\{k\} = \{2; 1; 0; 1\}$

Ответ: $X(z) = 3 + z^{-1} + z^{-2}$.

9. Найти дискретные сигналы $x(k)$, имеющие z -преобразования

а) $X(z) = 1 + 2z^{-1} + 4z^{-3}$

б) $X(z) = z/(z - 2)$.

Ответ: а) $x\{k\} = \{1; 2; 0; 4\}$

б) $x\{k\} = 2^n, n \geq 0$.

10. Найти ДПФ дискретного сигнала $x\{k\} = \{0,5; 0,25; 0,0625\}$. Построить спектр амплитуд и спектр фаз дискретного сигнала.

Ответ: $X\{n\} = \{1,875; 0,838; 0,625; 0,838\}$

$\arg \underline{X}\{n\} = \{0; -0,464; 0,0464\}$.

11. Найти отсчеты дискретных сигналов $x(k)$, имеющих спектры

а) $X\{n\} = \{4; 0; 0; 0\}$

б) $X\{n\} = \{0; 4; 0; 0\}$.

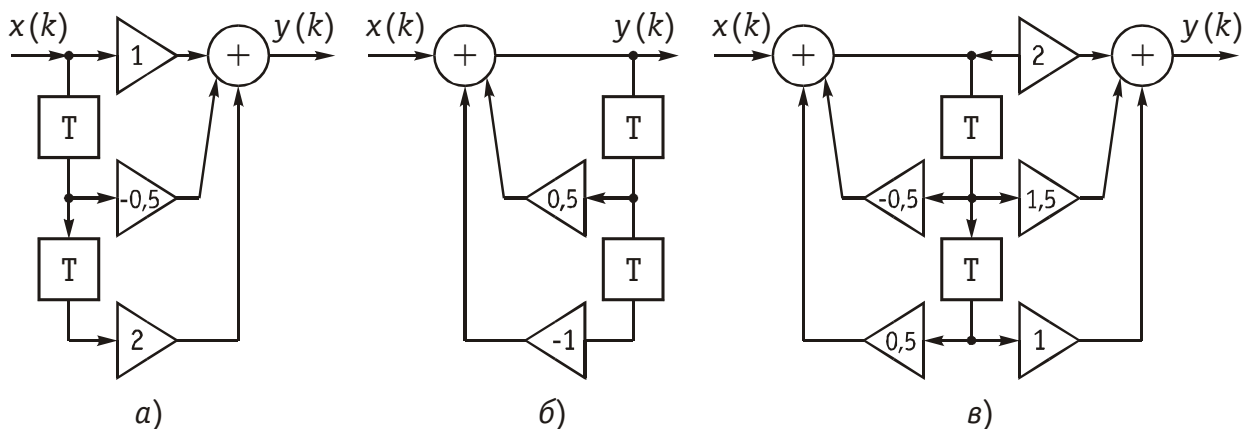


Рис. 19.69

Ответ: а) $x\{k\} = \{1; 1; 1; 1\}$
 б) $|x\{k\}| = \{1; 1; 1; 1\}$, $\arg x\{k\} = \{0; \pi/2; \pi; -\pi/2\}$.

12. Записать разностные уравнения для дискретных цепей, структурные схемы которых приведены на рис. 19.66.

Ответ: а) $y(k) = x(k) - 0,5x(k-1) + 2x(k-2)$
 б) $y(k) = x(k) + 0,5y(k-1) - y(k-2)$
 в) $y(k) = 2x(k) + 1,5x(k-1) + x(k-2) -$
 $-0,5y(k-1) + 0,5y(k-2)$.

13. Записать передаточные функции цепей, приведенных на рис. 19.66, и определить их импульсные характеристики.

Ответ: а) $H(z) = 1 - 0,5z^{-1} + 2z^{-2}$, $h\{k\} = \{1; -0,5; 2\}$
 б) $H(z) = 1/(1 - 0,5z^{-1} + z^{-2})$,
 $h\{k\} = \{1; 0,5; -0,75; -0,875; \dots\}$
 в) $H(z) = (2 + 1,5z^{-1} + 2z^{-2})/(1 + 0,5z^{-1} - 0,5z^{-2})$,
 $h\{k\} = \{2; 0,5; 1,75; -0,625; \dots\}$.

14. Рассчитать отсчеты $y(0)$, $y(1)$ и $y(2)$ выходных сигналов цепей, приведенных на рис. 19.66, если входной сигнал — ступенчатая последовательность $x\{k\} = u\{k\} = \{1; 1; 1; 1; \dots\}$.

Ответ: а) $y\{k\} = \{1; 0,5; 2,5\}$
 б) $y\{k\} = \{1; 1,5; 0,75\}$
 в) $y\{k\} = \{2; 2,5; 4,25\}$.

15. Определить импульсные характеристики цепей, описываемых разностными уравнениями:

а) $y(k) = 0,5x(k) - 2x(k-1) + x(k-2)$
 б) $y(k) = x(k) - 3y(k-1) + 2y(k-2)$
 в) $y(k) = x(k) - 0,5x(k-1) - 2y(k-1) + y(k-2)$.

Ответ: а) $h\{k\} = \{0,5; -2; 1\}$
 б) $h\{k\} = \{1; -3; 11; -39; \dots\}$

$$\text{в) } h\{k\} = \{1; -2,5; 6; -14,5; \dots\}.$$

16. Определить передаточные функции цепей, описываемых разностными уравнениями, приведенными в задаче 15.

Ответ: а) $H(z) = 0,5 - 2z^{-1} + z^{-2}$

б) $H(z) = 1/(1 + 3z^{-1} - 2z^{-2})$

в) $H(z) = (1 - 0,5z^{-1})/(1 + 2z^{-1} - z^{-2})$.

17. Составить структурные схемы, записать разностные уравнения и определить импульсные характеристики цепей, передаточные функции которых имеют вид

а) $H(z) = 5 - z^{-1} + 3z^{-2}$

б) $H(z) = 2/(1 - 2z^{-1})$

в) $H(z) = 2/(1 - 2z^{-1}) + 3/(1 + z^{-1})$.

Ответ: а) $y(k) = 5x(k) - x(k-1) + 3x(k-2)$,
 $h\{k\} = \{5; -1; 3\}$

б) $y(k) = 2x(k) + 2y(k-1)$,
 $h(k) = 2 \cdot 2^k = \{2; 4; 8; 16; \dots\}$

в) $y(k) = 5x(k) - 4x(k-1) + y(k-1) + 2y(k-2)$,
 $h\{k\} = \{5; 1; 11; 13; \dots\}$.

18. Определить устойчивость цепей, имеющих передаточные функции, приведенные в задаче 17.

Ответ: а) устойчивая
 б) неустойчивая
 в) неустойчивая.

19. Определить передаточную функцию цепи, если на ее входе и выходе действуют дискретные сигналы $x\{k\} = \{1; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 1; \dots\}$, $y\{k\} = \{1; 0; 1; 0; 1; 0; \dots\}$.

Ответ: $H(z) = 1 + z^{-2}$.

20. Найти импульсные характеристики дискретных цепей, имеющих передаточные функции

а) $H(z) = 1/(1 - z^{-1})$

б) $H(z) = (1 + z^{-1})/(1 - z^{-1}/2)$

Составить структурную схему каскадного соединения этих цепей, определить для нее передаточную функцию и записать разностное уравнение.

Ответ: а) $h(k) = 1, k \geq 0$

б) $h(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 3/2^k, & k > 0 \end{cases}$

$$H(z) = (1 + z^{-1})/(1 - 1,5z^{-1} + 0,5z^{-2})$$

$$y(k) = x(k) + x(k-1) + 1,5y(k-1) - 0,5y(k-2).$$

21. Найти передаточную функцию дискретной цепи с импульсной характеристикой

а) $h\{k\} = \{1; -1\}$

б) $h\{k\} = 0,2^k, 0 \leq k \leq N-1$.

Ответ: а) $H(z) = 1 - z^{-1}$

б) $H(z) = 1/(1 - 0,2z^{-1})$.

22. Определить сигнал на выходе дискретной цепи с импульсной характеристикой $h\{k\} = \{1; 0,5\}$, если на вход подается сигнал $x\{k\} = \{1; 1; 1\}$.

Ответ: $y\{k\} = \{1; 1,5; 1,5; 0,5\}$.

23. Определить передаточные функции и АЧХ дискретных цепей, имеющих разностные уравнения:

а) $y(k) = x(k) - 0,5x(k-1)$

б) $y(k) = x(k) + 0,3y(k-1)$.

Ответ: а) $H(z) = 1 - 0,5z^{-1}$

$$H(\Omega) = \sqrt{1,25 - \cos 2\pi\Omega}$$

б) $H(z) = 1/(1 - 0,3z^{-1})$

$$H(\Omega) = 1/\sqrt{1,09 - 0,6 \cos 2\pi\Omega}.$$

24. Вычислить дисперсию шума на выходе ЦФ первого порядка с передаточной функцией $H(z) = a/(1 - bz^{-1})$; ($b < 1$) с использованием формулы (19.60).

Ответ: $\sigma_{\xi}^2 = \frac{\Delta^2}{12} \cdot \frac{1}{1 - b^2}$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автогенератор 375
- Автоколебания 375
- Активная составляющая
 - приложенного напряжения 80
 - тока 82
- Амплитуда 73
 - тока комплексная 77
- Аппроксимация
 - кусочно-линейная 252
 - полиномиальная 246
- Аттенюаторы 60
- Баланс
 - амплитуд 370, 379
 - мощности 39
 - фаз 370, 379
- Бел 316
- Биения 175
- Ветвь 25
- Включение
 - встречное 90
 - согласное 90
 - согласованное 312
- Волны
 - бегущие 345
 - отраженные 335
 - падающие 335
 - смешанные 350
 - стоячие 347
- Вольтметр линейный 353
- Гиратор 107, 438
- Годограф 112, 359
- Граф
 - цепи 25
 - — ориентированный 25
- Групповое время прохождения 479
- Двухполюсник
 - активный 35
 - пассивный 35
- Двухполюсники
 - обратные 135
 - пассивные реактивные 134
 - потенциально обратные 135
 - эквивалентные 135
- Декремент
 - затухания 171
 - — логарифмический 171
- Дерево графа 26
- Децибел 316
- Диаграмма
 - векторная 76
 - полюсно-нулевая 136
 - спиральная 340
- Дискретное преобразование Фурье
 - обратное 523
 - прямое 523
- Длина волны 344
- Добротность
 - контура 114
 - полюса 421
- Дополнение 26
- Емкость 15
 - дифференциальная 237
 - статическая 237
- Задача
 - анализа 28
 - аппроксимации 414
 - реализации 414
 - синтеза 28
 - — электрических цепей 412
- Задачи с нулевыми
 - начальными условиями 159
- Зажим одноименный 91
- Зажимы
 - входные 291
 - выходные 291
- Закон
 - второй коммутации 159
 - Максвелла — Фарадея 89
 - напряжений Кирхгофа 29, 194, 222
 - Ома в операторной форме 194
 - первый коммутации 158
 - токов Кирхгофа 28, 194
- Затухание контура 114
- Значение
 - действующее 74
 - напряжения мгновенное 11
 - среднее 75
 - среднеквадратическое 74
 - тока мгновенное 10
- Избирательность
 - связанных контуров 128
- Изображение
 - по Лапласу 186, 528
- Изохронизм 174
- Инвертор сопротивления
 - положительный 107

- Индуктивность 14
 - взаимная 17, 89
 - дифференциальная 236
 - статическая 236
- Интеграл
 - наложения 207
- Интервал
 - дискретизации 516
- Интерполяция 246, 423
- Искажение сигнала 476
- Искажения
 - амплитудно-частотные 476
 - нелинейные 268
 - фазо-частотные 478
- Источник 12
 - зависимый 19
 - напряжения независимый 18
 - тока независимый 18
- Катушка
 - вторичная 98
 - первичная 98
- Квадрат модуля
 - передаточной функции 417
- Квазипериод 171
- Коды двоичные 568
- Коммутация 158
- Компоненты гибридные 12
- Конвертор 64
- Контур 26
 - колебательный 113
 - — связанный 128
 - параллельный 113
 - последовательный 113
- Корректоры
 - амплитудные 453
 - линейных искажений 413
 - фазовые 479
- Коэффициент
 - амплитуды 150
 - бегущей волны 351
 - взаимной индукции 382
 - гармоник 150
 - затухания контура 168
 - искажений 150
 - мощности 102, 150
 - нелинейности 269
 - неравномерности ослабления 447
 - ослабления 339
 - отражения по напряжению 336
 - — по току 336
 - распространения 332
 - рассеяния 91
 - связи 90
 - стоячей волны 351
 - трансформации 101
 - фазы 339
 - формы 150
- Коэффициенты А.И. Берга 273
- Крутизна
 - дифференциальная 236
 - средняя ВАХ 383
- Линии
 - длинные 327
 - задержки 413, 505
 - однородные 328, 330
- Матрица
 - редуцированная 27
 - сечений 27
 - структурная 27
 - — редуцированная 56
- Метод
 - выравнивания коэффициентов 439
 - Гаусса 67
 - Дарлингтона 458
 - комплексных амплитуд 76
 - контурных токов 49
 - матричных экспонент 180
 - медленно меняющихся амплитуд 405
 - переменных состояния 178
 - разряженных матриц 68
 - Рунге-Кутта 181
 - символический 83
 - токов ветвей 42
 - узловых потенциалов 53
- Методы
 - матрично-топологические 25
 - обращения 67
 - — матрицы узловой проводимости 68
 - разностные 183
- Микросхема 24
- Модели дискретные 68
- Мощность
 - активная 102
 - комплексная 102
 - мгновенная 11
 - полная 102
 - реактивная 102
- Напряжение
 - контурное задающее 49
 - операторное 194
 - расчетное 194
 - электрическое 11
- Непер 316
- Обратная связь

- внешняя 378
- отрицательная 359, 360, 377
- параллельная по напряжению 357
- — — току 357
- положительная 359, 360, 377
- последовательная по напряжению 357
- — — току 357
- Ограничитель 283
- Оператор единичной задержки 535
- Ослабление
 - цепи 112
 - четырехполюсника рабочее 320
 - — характеристическое 316
- Отсчеты непрерывного сигнала 513
- Ошибки
 - наложения 521
 - округления 579
- Падение напряжения 11
- Параметры
 - вторичные 115
 - короткого замыкания 311
 - обобщенные 295
 - первичные 115, 328
 - проводимостей 295
 - сопротивлений 295
 - холостого хода 311
 - четырехполюсника 294
 - — характеристические 317
- Параметры-коэффициенты 296
- Передаточная функция
 - комплексная 322
 - рабочая 323
 - четырехполюсника 321
- Переменные состояния 178
- Период 73
- Плотность спектральная
 - амплитуд сигнала 211
 - комплексная 211
 - энергии сигнала 217
- Подграф 26
 - связный 26
- Полиномы
 - Баттерворта 447
 - Бесселя 507
 - Гурвица 368
- Полоса
 - задерживания 413
 - непропускания 443
 - пропускания 413, 443
 - — абсолютная 118
- Последовательность
 - дискретизирующая 513
- Постоянная характеристическая
 - передачи линии 341
 - — четырехполюсника 321
 - фазы линии 341
- Поток рассеяния 91
- Правило Ленца 89
- Преобразование
 - билинейное 563
 - Лапласа обратное 185
 - — прямое 185
 - Фурье быстрое 526
 - — дискретное 522
 - — обобщенное 217
 - — обратное 210
 - — одностороннее 214
 - — прямое 210
 - частоты 287, 447
- Приближение
 - среднеквадратическое 425
 - функций по Тейлору 424
 - — по Чебышеву 424
- Приемник 12
- Принцип
 - взаимности 53
 - дуальности 37
 - моделирования 12
 - непрерывности 158
 - эквивалентности 30
- Проводимость 13
 - взаимная 54
 - комплексная 85
 - операторная 194
 - передаточная комплексная 110
 - полная 82
 - реактивная 82
 - собственная 54
- Путь простой 25
- Пучность напряжения 346
- Равенство
 - Парсеваля 149, 217, 579
- Радян 317
- Расстройка
 - абсолютная 118
 - обобщенная 118
 - относительная 118
- Реакция линейной цепи 33
- Реализация каскадная 440
- Ребро графа 26
- Режим
 - бегущей волны 345
 - работы основной 42
 - самовозбуждения жесткий 387

- — мягкий 386
- смешанных волн 350
- согласованного включения
- — — четырехполюсника 313
- статический 41
- стационарный 377
- — устойчивый 385
- стоячих волн 348, 349
- Резонанс 113
 - безразличный 124
 - второй частный 131
 - напряжений 113
 - первый частный 130
 - полный 131
 - сложный 131
 - токов 113
- Самовозбуждение 360, 376, 377
- Свертка
 - дискретная 539
 - функций 188
- Свойство
 - коммутативности 187
 - линейности 524
 - фильтрующее 189
- Связь
 - жесткая 91
 - критическая 132
 - обратная 356
 - сильная 132
 - слабая 132
- Сдвиг дискретного сигнала 524
- Сечение
 - главное 26
 - графа 26
- Сжатие сигнала 215
- Сигнал 12
 - непериодический 211
- Сигналы
 - аналоговые 512
 - дискретные 512
 - узкополосные 275
 - цифровые 512
- Сила электродвижущая 18
- Синтез ARC-цепей по моделям 439
- Скважность импульсов 150
- Скин-эффект 17
- Скорость
 - распространения фазовая 335
- Соединение
 - каскадное 302
 - параллельное 25, 303
 - параллельно-последовательное 303
 - последовательное 302
 - последовательно-параллельное 303
- Соотношения предельные 188
- Сопротивление 13
 - дифференциальное 235
 - емкостное 79
 - индуктивное 79
 - комплексное 84
 - контура критическое 172
 - контурное 49
 - линии волновое 333, 337, 338
 - передаточное комплексное 110
 - полное 81
 - реактивное 81
 - резистивное 13
 - резонансное эквивалентное 122
 - собственное 49
 - статическое 235
 - характеристическое 114, 312
 - цепи операторное 194
- Составляющая
 - напряжения реактивная 80
 - тока реактивная 82
- Спектр
 - дискретного сигнала 518
 - линейчатый фазовый 146
 - сигнала амплитудный 211
 - — обобщенный 214
 - — фазовый 211
- Стабилизатор
 - постоянного напряжения 258
- Схема
 - вторая Кауэра 137
 - — Фостера 137
 - емкостной трехточки 395
 - индуктивной трехточки 391
 - каноническая 548
 - Кауэра 137
 - первая Кауэра 137
 - — Фостера 137
 - Фостера 137
- Схемы
 - замещения эквивалентные 21
 - нерекурсивные 545
 - рекурсивные 545
 - эквивалентные операторные 195
- Тангенс угла
 - диэлектрических потерь 330
- Тангенс-функция 417
- Теорема
 - задержки 534
 - замещения 34

- запаздывания 187
- Котельникова 516
- — обратная 523
- линейности 215
- — (суперпозиции) 531
- обратимости 53
- опережающего сдвига 534
- отсчетов 517
- подобия 187
- Рэлея 217
- свертки 215, 524, 535
- смещения 187
- Телледжена 38
- умножения 535
- Ток электрический 10
- Токи задающие узловые 54
- Трансформатор 98
- идеальный 101
- совершенный 101
- Треугольник
- напряжений 81
- сопротивлений 81
- с ферромагнитным сердечником 101
- Треугольники
- мощностей 103
- токов и проводимостей 82
- Угол
- отсечки 272
- потерь 101
- Узел
- базисный 27
- интерполяции 246
- простой 25
- Узлы напряжения (тока) 346
- Уравнение
- Ван-дер-Поля 407
- реакции цепи 179
- состояния цепи 178
- Уравнения
- компонентные 65
- передачи длинной линии 332
- — четырехполюсника 294
- разностные 545
- телеграфные 331
- топологические 65
- Уровни квантования 512
- Усиление
- логарифмическое 112
- петлевое 358
- Условие
- безыскаженной передачи 226
- самовозбуждения
- — LC -автогенератора 382
- Условия
- задачи начальные 159
- — зависимые 159
- — независимые 159
- Фиалкова — Герста 415
- физической реализуемости 415, 426
- Фаза
- текущая 73
- характеристическая 317
- Фазовая постоянная
- четырехполюсника 317
- Фактор связи 132
- Фильтр
- Баттерворта 447
- Золотарева 446
- НЧ-прототипа 447
- трансверсальный 544
- Чебышева 451
- Фильтры
- Баттерворта и Чебышева 446
- кварцевые 473
- магнитострикционные 473
- пьезоэлектрические 472
- с изоекстремальными
- — характеристиками 457
- со всплесками
- — рабочего ослабления 454
- электрические 413
- электромеханические 473
- Форма каноническая 49
- Функции
- вещественные положительные 419
- передаточные операторные 196
- цепей передаточные 545
- Функция
- Дирака 189
- передаточная комплексная 110, 230
- — по напряжению 110
- — по току комплексная 110
- цепи входная комплексная 112
- Характеристика
- вебер-амперная 14
- вольт-амперная 13
- вольт-кулонная 15
- группового времени прохождения 478
- импульсная бесконечная 546
- — конечная 546
- логарифмическая
- — амплитудно-частотная 112
- цепи амплитудно-частотная 111
- — импульсная 200

- — переходная 200
- — фазо-частотная 111
- Характеристики
 - напряжения резонансные 116
 - статические 235
 - тока резонансные 116
- Характеристическая постоянная
 - передачи четырехполюсника 314
- Хорды 26
- Цепи
 - автоколебательные 375
 - дифференцирующие 104
 - интегрирующие 104
 - с параметрами
 - — распределенными 17, 327
 - — сосредоточенными 17, 326
 - электрические нелинейные 266
- Цепь
 - дискретная 539
 - неустойчивая 367
 - параметрическая 160
 - резонансная 113
 - с постоянными параметрами 160
 - устойчивая 367, 368, 370, 373
 - электрическая 12
- Циклы
 - низкого уровня предельные 580
- Частота
 - дискретизации 516
 - колебаний
 - — собственных затухающих 170
 - комбинационная 286
 - нормированная 446
 - резонансная 113
 - циклическая 73
- Четырехполюсники 291
 - активные 293
 - линейные 292
 - нелинейные 292
 - необратимые 294
 - несимметричные 293
 - неуравновешенные 293
 - обратимые 294
 - пассивные 293
 - симметричные 293
 - уравновешенные 293
 - эквивалентные 296
- Чувствительность
 - характеристики 421
- Шум квантования 578
- Элемент
 - емкостной 15

- индуктивный 14
- Элементы
 - двухполюсные 17
 - многополюсные 17
 - трехполюсные 17
 - четырехполюсные 17
- Энергия электрическая 11
- Z-преобразование 528

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Бакалов В.П., Дмитриков В.Ф., Крук Б.И.** Основы теории цепей. — М.: Радио и связь, 2000. — 592 с.
2. **Белецкий А.Ф.** Теория линейных электрических цепей. — М.: Радио и связь 1986. — 544 с.
3. **Воробийенко П.П.** Теория линейных электрических цепей. Сб. задач и упражнений. — М.: Радио и связь, 1989. — 328 с.
4. **Шебес М.Р., Каблукова М.В.** Задачник по теории линейных электрических цепей: Учеб. пособие для вузов. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Высшая школа, 1990. — 544 с.

Дополнительная

5. **Андреев Б.С.** Теория нелинейных электрических цепей. — М.: Радио и связь 1982. — 280 с.
6. **Бакалов В.П., Воробийенко П.П., Крук Б.И.** Теория электрических цепей. — М.: Радио и связь, 1998. — 444 с.
7. **Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И.** Основа теории электрических цепей и электроники. — М.: Радио и связь, 1989. — 528 с.
8. **Гоноровский И.С., Демин М.П.** Радиотехнические цепи и сигналы: [Учеб. пособие для вузов по направлению «Радиотехника»]. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Радио и связь, 1994. — 481 с.
9. **Добротворский И.Н.** Теория электрических цепей. — М.: Радио и связь, 1989. — 472 с.
10. **Карташкин А.С.** Линейные цифровые фильтры. Вопросы и задачи: Учеб. пособие. — М.: Радио и связь, 1995. — 133 с.
11. **Сборник** задач по теоретическим основам электротехники: Учеб. пособие /Под. ред. Л.А. Бессонова. — М.: Высшая школа, 2000.
12. **Яцкевич В.В.** Теория линейных электрических цепей: Справ. пособие. — М.: Высшая школа, 1990. — 264 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к 3-му изданию	3
Предисловие ко 2-му изданию	4
Введение	5
Глава 1. Основные понятия и законы теории электрических цепей	10
1.1. Ток, напряжение, мощность	10
1.2. Электрическая цепь, ее элементы и модели	12
1.3. Электрическая схема, топология электрической цепи	24
1.4. Законы Кирхгофа	28
1.5. Принцип эквивалентности. Преобразования электрических схем	30
1.6. Принцип наложения	33
1.7. Теорема замещения	34
1.8. Теорема об активном двухполюснике	35
1.9. Принцип дуальности	37
1.10. Теорема Телледжена. Баланс мощности	38
Вопросы и задания для самопроверки	40
Глава 2. Линейные электрические цепи в режиме постоянного тока	41
2.1. Метод законов Кирхгофа	41
2.2. Преобразование резистивных электрических цепей	43
2.3. Метод наложения	47
2.4. Метод контурных токов	49
2.5. Метод узловых потенциалов	53
2.6. Метод эквивалентного генератора	57
2.7. Примеры применения резистивных цепей	60
2.8. Алгоритмы анализа линейных резистивных цепей на ЭВМ	65
Вопросы и задания для самопроверки	71
Глава 3. Линейные электрические цепи в режиме гармонических колебаний	72
3.1. Гармонические колебания. Основные понятия и определения	72
3.2. Способы представления гармонических колебаний	75
3.3. Гармонические колебания в резистивных, индуктивных и емкостных элементах	78
3.4. Гармонические колебания в цепи при последовательном соединении R , L , C -элементов	80
3.5. Гармонические колебания в цепи при параллельном соединении R , L , C -элементов	81
3.6. Символический метод расчета разветвленных цепей	83
3.7. Электрические цепи с индуктивными связями	89
3.8. Особенности анализа индуктивно связанных цепей	96
3.9. Трансформатор	98
3.10. Баланс мощности	102
3.11. Модели электрических цепей с зависимыми источниками	104
Вопросы и задания для самопроверки	108
Глава 4. Частотные характеристики электрической цепи	110
4.1. Комплексные передаточные функции линейных электрических цепей	110
4.2. Частотные характеристики последовательного колебательного контура	113
4.3. Частотные характеристики параллельного колебательного контура ...	121

4.4. Частотные характеристики связанных колебательных контуров	128
4.5. Частотные характеристики реактивных двухполюсников	134
4.6. Машинные методы анализа частотных характеристик электрических цепей	137
Вопросы и задания для самопроверки	143
Глава 5. Линейные электрические цепи в режиме периодических негармонических воздействий	144
5.1. Негармонические периодические сигналы. Разложение в ряд Фурье .	144
5.2. Действующее, среднее значение и мощность периодического негармонического сигнала	148
5.3. Спектры периодических негармонических сигналов	150
5.4. Расчет цепей при периодических негармонических воздействиях	152
Вопросы и задания для самопроверки	156
Глава 6. Переходные процессы в линейных электрических цепях. Классический метод анализа	157
6.1. Переходный режим электрических цепей. Законы коммутации	157
6.2. Классический метод расчета переходных процессов	159
6.3. Переходные процессы в цепях первого порядка	161
6.4. Переходные процессы в цепях второго порядка	167
6.5. Включение RLC -контра на постоянное и гармоническое напряжение	172
6.6. Переходные процессы в разветвленных цепях	175
6.7. Метод переменных состояния	178
Вопросы и задания для самопроверки	183
Глава 7. Операторный метод анализа переходных процессов в линейных цепях	185
7.1. Преобразование Лапласа и его свойства	185
7.2. Теорема разложения	191
7.3. Расчет переходных процессов операторным методом	193
7.4. Операторные передаточные функции	196
Вопросы и задания для самопроверки	199
Глава 8. Временной метод анализа переходных процессов в линейных электрических цепях	200
8.1. Переходные и импульсные характеристики электрических цепей	200
8.2. Интеграл Дюамеля	204
8.3. Интеграл наложения	206
Вопросы и задания для самопроверки	208
Глава 9. Частотный метод анализа переходных процессов в линейных цепях	209
9.1. Интеграл Фурье	209
9.2. Основные теоремы спектрального анализа	215
9.3. Распределение энергии в спектре непериодического сигнала	216
9.4. Спектры типовых сигналов	217
9.5. Частотный анализ линейных электрических цепей при непериодических воздействиях	222
9.6. Условия безыскаженной передачи сигналов через линейную цепь	225
9.7. Связь между временными и частотными характеристиками электрических цепей	229

Вопросы и задания для самопроверки	232
Глава 10. Нелинейные электрические цепи в режиме постоянного тока	233
10.1. Нелинейные элементы. Их характеристики и свойства	233
10.2. Графические методы расчета цепей с нелинейными резистивными двухполюсниками	237
10.3. Графические методы расчета цепей с нелинейными резистивными четырёхполюсниками	241
10.4. Эквивалентные преобразования схем с нелинейными элементами	242
10.5. Аналитическое представление вольт-амперных характеристик	245
10.6. Аналитические методы расчета нелинейных резистивных цепей	254
10.7. Стабилизация постоянного напряжения нелинейными резистивными цепями	258
Вопросы и задания для самопроверки	259
Глава 11. Нелинейные электрические цепи при гармонических воздействиях	262
11.1. Нахождение реакции нелинейной резистивной цепи на заданное воздействие	262
11.2. Режим малых колебаний в нелинейных электрических цепях	265
11.3. Воздействие гармонического колебания на нелинейный резистивный элемент	267
11.4. Резонансное усиление и умножение частоты колебаний	275
11.5. Выпрямление гармонических колебаний	279
11.6. Ограничение мгновенных значений гармонических колебаний	283
11.7. Воздействие суммы гармонических колебаний на нелинейный резистивный элемент	285
11.8. Преобразование частоты гармонического колебания	287
Вопросы и задания для самопроверки	290
Глава 12. Основы теории четырехполюсников	291
12.1. Общие положения	291
12.2. Уравнения передачи четырехполюсника	294
12.3. Применение матриц к расчету четырехполюсников	301
12.4. Параметры холостого хода и короткого замыкания четырёхполюсника	310
12.5. Характеристические параметры четырехполюсника	312
12.6. Внешние характеристики четырехполюсника	320
Вопросы и задания для самопроверки	324
Глава 13. Цепи с распределенными параметрами	326
13.1. Общие положения	326
13.2. Уравнения передачи однородной линии	328
13.3. Падающие и отраженные волны	333
13.4. Вторичные параметры однородной линии	337
13.5. Входное сопротивление линии	341
13.6. Линия без потерь	343
13.7. Применение отрезков линий с пренебрежимо малыми потерями	352
Вопросы и задания для самопроверки	355
Глава 14. Цепи с обратной связью	356
14.1. Определение и классификация обратных связей	356

14.2. Передаточная функция цепи с обратной связью	357
14.3. Примеры цепей с обратной связью	363
14.4. Устойчивость цепи с обратной связью	367
Вопросы и задания для самопроверки	374
Глава 15. Автоколебательные цепи	375
15.1. Физические процессы в автоколебательных цепях	375
15.2. Обобщенная схема автогенератора	378
15.3. LC -генератор с трансформаторной обратной связью. Классический метод анализа	380
15.4. LC -генератор с трансформаторной обратной связью. Операторный и частотный методы анализа	388
15.5. Трехточечные схемы генераторов	391
15.6. RC -генераторы	396
15.7. Автогенераторы с внутренней обратной связью	402
15.8. Анализ переходных процессов в автогенераторе методом медленно меняющихся амплитуд	404
Вопросы и задания для самопроверки	411
Глава 16. Проблема синтеза линейных электрических цепей	412
16.1. Постановка задачи синтеза	412
16.2. Условия физической реализуемости	414
16.3. Нормирование элементов и частоты	419
16.4. Чувствительность характеристик электрических цепей	420
16.5. Задача аппроксимации в синтезе электрических цепей	422
16.6. Задача реализации в синтезе электрических цепей. Синтез реактивных двухполюсников	425
16.7. Задача реализации в синтезе электрических цепей. Синтез четырехполюсников	432
Вопросы и задания для самопроверки	440
Глава 17. Фильтрующие цепи и их синтез	443
17.1. Классификация фильтров	443
17.2. Аппроксимация характеристик фильтров нижних частот	446
17.3. Реализация фильтров нижних частот	457
17.4. Переход от фильтров нижних частот к другим типам фильтров	464
17.5. Резонаторные фильтры	472
Вопросы и задания для самопроверки	474
Глава 18. Корректирующие цепи и их синтез	475
18.1. Принцип корректирования искажений	475
18.2. Амплитудные корректоры	481
18.3. Фазовые корректоры	496
18.4. Гармонические корректоры	505
Вопросы и задания для самопроверки	510
Глава 19. Дискретные сигналы и цепи	512
19.1. Дискретные сигналы	512
19.2. Спектр дискретного сигнала	517
19.3. Z -преобразование и его свойства	528
19.4. Дискретные цепи	538

19.5. Типовые звенья дискретных цепей	555
19.6. Метод переменных состояния дискретных цепей	559
19.7. Дискретные фильтры и их синтез	562
19.8. Цифровые фильтры	572
19.9. Эффект квантования в цифровых фильтрах	576
Вопросы и задания для самопроверки	580
Предметный указатель	585
Список литературы	591

Учебное издание

Бакалов Валерий Пантелеевич
Дмитриков Владимир Федорович
Крук Борис Иванович

Основы теории цепей

Учебник

Редактор
Технический редактор
Корректор
Обложка художника

ИБ №

ЛР №

Подписано в печать с оригинал-макета

Формат

Усл. печ. л. 37,0

Тираж 5000 экз.

Гарнитура

Усл. кр.-отт. 37,5

Изд. №

Печать

Уч.-изд. л. 32,48

Зак. тип. №

Издательство «Горячая линия – Телеком», Москва,
Типография