что совпадает с нашим предыдущим результатом. Заметим также, что четыре возможных выхода двух согласованных фильтров, соответствующих передаваемым сигналам, равны

$$\left(r_1, r_2\right) = \left(\sqrt{\mathscr{E}} + n_1,\, n_2\right),\ \left(n_1,\, \sqrt{\mathscr{E}} + n_2\right),\ \left(-\sqrt{\mathscr{E}} + n_1,\, n_2\right) \text{ и } \left(n_1,\, -\sqrt{\mathscr{E}} + n_2\right).$$

5.1.3. Оптимальный детектор

Мы показали, что при передаче сигналов через канал с АБГШ демодулятор на основе корреляционной схемы или на основе согласованных фильтров выдаёт вектор $\mathbf{r} = \left[r_1\, r_2 \ldots r_N\right]$, который содержит всю доступную информацию о принимаемом сигнале. В этом разделе мы опишем оптимальные правила решения, основанные на наблюдаемом векторе $\mathbf{r}$. Предположим, что сигналы, передаваемые на последовательных сигнальных интервалах, не имеют памяти.

Мы желаем синтезировать детектор сигнала, который выносит решение о передаваемом сигнале на каждом сигнальном интервале, основываясь на наблюдении вектора $\mathbf{r}$ в каждом интервале, так, чтобы максимизировать среднюю вероятность правильного решения. С этой целью рассмотрим правило[1] решения, базирующееся на вычислении *апостериорных вероятностей*

$$P\left(\mathbf{s}_m|\mathbf{r}\right),\ \ m = 1, 2 \ldots, M,$$

и на выборе сигнала, соответствующего максимуму ряда апостериорных вероятностей $\left\{P\left(\mathbf{s}_m|\mathbf{r}\right)\right\}$. Позже покажем, что это правило максимизирует среднюю вероятность правильного решения и, следовательно, минимизирует среднюю вероятность ошибки. Такое правило решения названо правилом максимума апостериорной вероятности (МАВ).

Используя правило Байеса, апостериорную вероятность можно выразить так:

$$P\left(\mathbf{s}_m|\mathbf{r}\right) = \frac{p\left(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m\right)P\left(\mathbf{s}_m\right)}{p\left(\mathbf{r}\right)}, \qquad (5.1.38)$$

где $p\left(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m\right)$ – условная ФПВ наблюдаемого вектора при передаче $\mathbf{s}_m$, а $P\left(\mathbf{s}_m\right)$ – вероятность m-го передаваемого сигнала. Знаменатель (5.1.38) можно выразить так:

$$p\left(\mathbf{r}\right) = \sum_{m=1}^{M} p\left(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m\right)P\left(\mathbf{s}_m\right). \qquad (5.1.39)$$

Из (5.1.38) и (5.1.39) видим, что вычисление апостериорных вероятностей $P\left(\mathbf{s}_m|\mathbf{r}\right)$ требует знания *априорных вероятностей* $P\left(\mathbf{s}_m\right)$ и условных ФПВ $P\left(\mathbf{s}_m|\mathbf{r}\right)$ для $m = 1, 2 \ldots, M$.

Некоторое упрощение имеет место при использовании правила МАВ, когда M сигналов имеют одинаковую априорную вероятность, т.е. $P\left(\mathbf{s}_m\right) = 1/M$ для всех M. Более того, заметим, что знаменатель (5.1.38) не зависит от того, какой сигнал передается. Следовательно, правило решения, основанное на нахождении сигнала, который максимизирует $P\left(\mathbf{s}_m|\mathbf{r}\right)$, эквивалентно в рассмотренном случае нахождению сигнала, который максимизирует $p\left(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m\right)$.

Условную ФПВ $p\left(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m\right)$ или некоторую монотонную функцию от неё обычно называют *функцией правдоподобия*. Правило решения, основанное на максимизации $p\left(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m\right)$ по всем

---

[1] Автор здесь и в дальнейшем использовал термин «критерий решения», который представляется не подходящим (прп).

M сигналам, называют правилом максимального правдоподобия (МП). Видим, что детектор, основанный на правиле МАВ и тот, который основан на правиле МП, обеспечивают одинаковое решение при одинаковых априорных вероятностях $P(\mathbf{s}_m)$, т.е. при равновероятных сигналах $\{\mathbf{s}_m\}$.

В случае АБГШ в канале функции правдоподобия $p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)$ определяются (5.1.12). Для упрощения расчётов будем использовать натуральный логарифм от $p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)$, который является монотонной функцией. Таким образом,

$$\ln p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m) = -\tfrac{1}{2} N \ln(\pi N_0) - \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}(r_k - s_{mk})^2 . \qquad (5.1.40)$$

Максимизация $\ln p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)$ по $\mathbf{s}_m$ эквивалентна нахождению сигнала $\mathbf{s}_m$, который минимизирует евклидово расстояние

$$D(\mathbf{r},\mathbf{s}_m) = \sum_{k=1}^{N}(r_k - s_{mk})^2 . \qquad (5.1.41)$$

$D(\mathbf{r},\mathbf{s}_m)$, $m=1,2\ldots,M$, называют дистанционными характеристиками. Следовательно, для канала с АБГШ правило решения, основанное на правиле МП, сводится к нахождению сигнала $\mathbf{s}_m$, который наиболее близок по расстоянию к принимаемому сигнальному вектору $\mathbf{r}$. Мы будем ссылаться на это правило решения как на детектирование по минимуму расстояния.

Другую интерпретацию оптимального правила решения, основанного на правиле МП, можно получить путем раскрытия дистанционных метрик в (5.1.41):

$$D(\mathbf{r},\mathbf{s}_m) = \sum_{k=1}^{N} r_k^2 - 2\sum_{k=1}^{N} r_k s_{mk} + \sum_{k=1}^{N} s_{mk}^2 = |\mathbf{r}|^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}_m + |\mathbf{s}_m|^2, \quad m=1,2\ldots,M . \qquad (5.1.42)$$

Слагаемое $|\mathbf{r}|^2$ – общее для всех дистанционных метрик, и, следовательно, его можно не учитывать при вычислении метрик. Новый результат сводится к ряду модифицированных метрик

$$D'(\mathbf{r},\mathbf{s}_m) = -2\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}_m + |\mathbf{s}_m|^2 . \qquad (5.1.43)$$

Заметим, что выбор сигнала $\mathbf{s}_m$, который минимизирует $D'(\mathbf{r},\mathbf{s}_m)$, эквивалентен выбору сигнала, который максимизирует метрику $C(\mathbf{r},\mathbf{s}_m) = -D'(\mathbf{r},\mathbf{s}_m)$, т.е.

$$C(\mathbf{r},\mathbf{s}_m) = 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}_m - |\mathbf{s}_m|^2 . \qquad (5.1.44)$$

Слагаемое $\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}_m$ представляет проекцию принимаемого вектора сигнала на сигнальные векторы всех M возможных для передачи сигналов. Величина каждой такой проекции является мерой корреляции между принятым вектором и m-м сигналом. Из этих соображений мы называем $C(\mathbf{r},\mathbf{s}_m)$, $m=1,2\ldots,M$, *корреляционными метриками* для решения того, какой из M сигналов был передан. Наконец, слагаемые $|\mathbf{s}_m|^2 = \mathcal{E}_m$, $m=1,2\ldots,M$ можно рассматривать как пороговые слагаемые, которые служат компенсацией для ансамбля сигналов с неравными энергиями сигналов, такого, как при АМ. Если все сигналы имеют одинаковую энергию, $|\mathbf{s}_m|^2$, можно не учитывать при вычислении корреляционных метрик $C(\mathbf{r},\mathbf{s}_m)$ и дистанционных метрик $D(\mathbf{r},\mathbf{s}_m)$ или $D'(\mathbf{r},\mathbf{s}_m)$.

Легко показать (см. задачу 5.5), что корреляционные метрики $C(\mathbf{r},\mathbf{s}_m)$ можно также выразить так:

$$C(\mathbf{r},\mathbf{s}_m)=2\int_0^T r(t)s_m(t)dt-\mathcal{E}_m,\quad m=0,1,\ldots,M. \qquad (5.1.45)$$

Следовательно, эти метрики можно генерировать демодулятором, который определяет корреляцию принимаемого сигнала с каждым из M возможных к передаче сигналов и устанавливает для выхода коррелятора вычитаемый порог в случае сигналов с неравными энергиями. Эквивалентно принимаемый сигнал можно пропустить через блок из M фильтров, согласованных с возможными к передаче сигналами $\{s_m(t)\}$, и взять отсчёты в конце символьного интервала $t=T$. Следовательно, оптимальный приёмник (демодулятор и детектор) можно выполнить по альтернативной схеме, показанной на рис. 5.1.9.

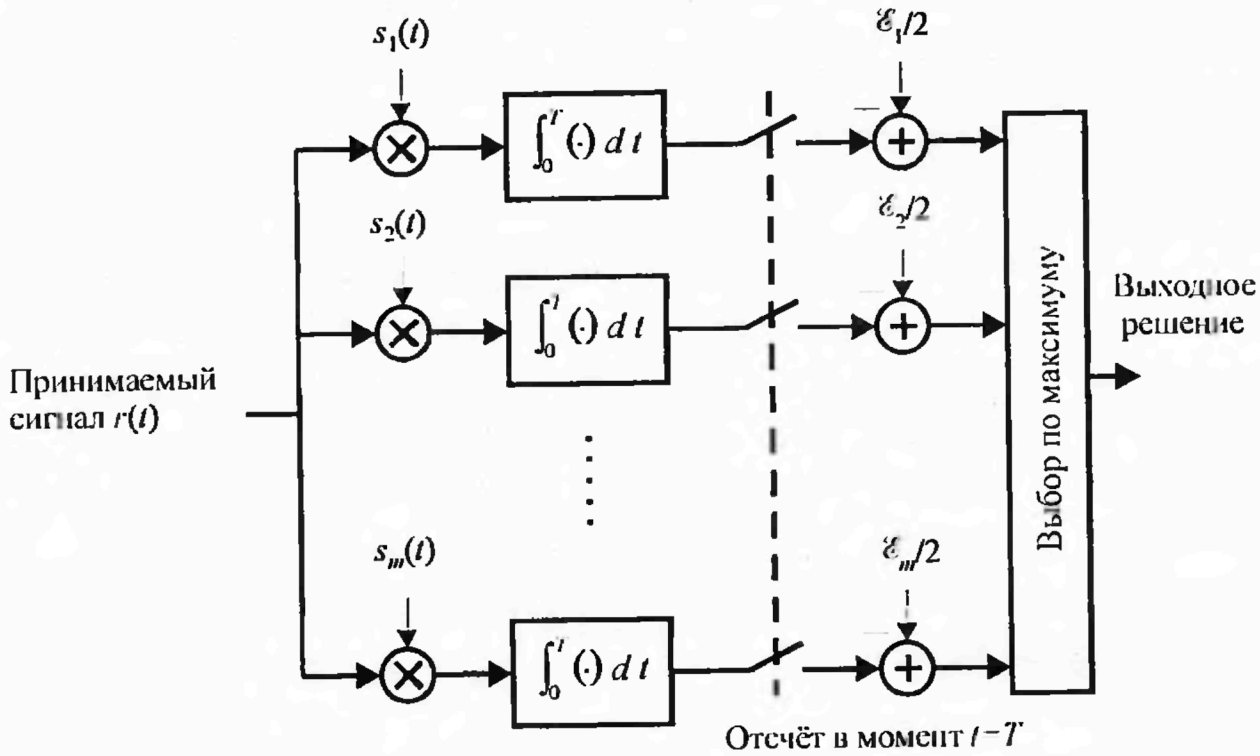


Рис. 5.1.9. Альтернативная реализация оптимального приемника при АБГШ

Суммируя, можно сказать, что мы показали, что оптимальный МП детектор вычисляет набор из M расстояний $D(\mathbf{r},\mathbf{s}_m)$ или $D'(\mathbf{r},\mathbf{s}_m)$ и выбирает сигнал, соответствующий минимальной (дистанционной) метрике. Эквивалентно оптимальный МП детектор вычисляет набор из M корреляционных метрик $C(\mathbf{r},\mathbf{s}_m)$ и выбирает сигнал, соответствующий наибольшей корреляционной метрике.

В вышеприведенном исследовании оптимального детектора рассмотрен важный случай, когда все сигналы равновероятны. В этом случае правило МАВ эквивалентно правилу МП. Однако, когда сигналы не равновероятны, оптимальный МАВ детектор основывает свои решения на вероятностях $P(\mathbf{s}_m|\mathbf{r})$, $m=1,2\ldots,M$, даваемых (5.1.38), или, что эквивалентно, на *метриках*

$$PM(\mathbf{r},\mathbf{s}_m)=p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)P(\mathbf{s}_m).$$

Следующие примеры иллюстрируют эти расчеты для сигналов двоичной АМ.

Пример 5.1.3. Рассмотрим случай двоичных сигналов АМ, когда две возможные сигнальные точки равны $s_1=-s_2=\sqrt{\mathcal{E}_b}$, где $\mathcal{E}_b$ – энергия на бит. Априорные вероятности равны $P(s_1)=p$ и $P(s_2)=1-p$. Определим метрики для оптимального МАВ детектора, когда передаваемые сигналы искажаются АБГШ.