Как и ранее, правило максимального правдоподобия указывает нам выбрать класс сигналов s_1. Заметим, что при принятии выборки z_b мы более уверены в точности нашего выбора, по сравнению с принятием сигнала z_a. Это объясняется тем, что отношение $p(z_b|s_1)$ к $p(z_b|s_2)$ существенно больше отношения $p(z_a|s_1)$ к $p(z_a|s_2)$.

Б.2. Теория принятия решений

Б.2.1. Элементы задачи теории принятия решений

После того как мы описали проверку гипотез на основе статистики Байеса, перейдем к рассмотрению элементов задачи теории принятия решений в контексте системы связи, как показано на рис. Б.3. Источник сигнала в передатчике содержит множество $\{s_i(t)\}$, $i = 1, \ldots, M$ сигналов (или гипотез). Принимается сигнал $r(t) = s_i(t) + n(t)$, где $n(t)$ — присутствующий в канале аддитивный белый гауссов шум (additive white Gaussian noise — AWGN). В приемнике сигнал сокращается до единственного числа $z(t = T)$, которое может принимать любое значение. Поскольку шум является гауссовым процессом и приемник предполагается линейным, выход $z(t)$ также есть гауссовым процессом [1], а число $z(T)$ — *случайной переменной, принимающей значения из непрерывного диапазона.*

$$z(T) = a_i(T) + n_0(T) \qquad (Б.5)$$

Выборка $z(T)$ состоит из сигнального компонента $a_i(T)$ и шумового компонента $n_0(T)$. Время T — это длительность символа. В каждый момент времени kT, где k — целое, приемник использует правило принятия решения для определения принадлежности принятого сигнала к определенному классу сигнала. Для простоты записи выражение (Б.5) иногда используют в виде $z = a_i + n_0$, где функциональная зависимость от T не выражается явно.

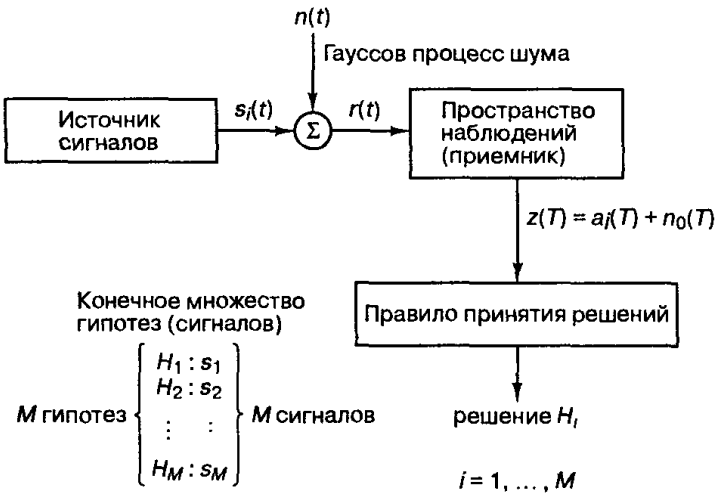


Рис. Б.3. Элементы задачи теории принятия решений в контексте системы связи

Б.2.2. Проверка методом отношения правдоподобий и критерий максимума апостериорной вероятности

При определении правила принятия решения для *двух* классов сигналов разумно начать со следующего соотношения:

$$P(s_1 \mid z) \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} P(s_2 \mid z) \tag{Б.6}$$

Выражение (Б.6) — это сокращенная запись следующего утверждения: "выбрать гипотезу H_1, если апостериорная вероятность $P(s_1|z)$ больше апостериорной вероятности $P(s_2|z)$; в противном случае выбрать гипотезу H_2".

Апостериорные вероятности в формуле (Б.6) можно заменить эквивалентными выражениями, полученными из теоремы Байеса (уравнение (Б.4)), что дает следующее:

$$P(z \mid s_1)P(s_1) \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} P(z \mid s_2)P(s_2)\,. \tag{Б.7}$$

Итак, у нас есть правило принятия решения, выраженное через плотности вероятности (правдоподобия). Если переписать выражение (Б.7) и привести его к следующему виду

$$\frac{P(z \mid s_1)}{P(z \mid s_2)} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(s_2)}{P(s_1)}, \tag{Б.8}$$

то отношение в левой части будет называться *отношением функций правдоподобия*, а все выражение часто именуют *критерием отношения функций правдоподобия*. Выражение (Б.8) — это принятие решений на основе сравнения принятого сигнала с порогом. Поскольку проверка опирается на выбор класса сигналов с максимальной апостериорной вероятностью, критерий принятия решения часто называется критерием *максимума апостериорной вероятности* (maximum a posteriori — MAP). Другое название — *критерий минимума ошибки*, поскольку в среднем он дает минимальное количество неверных решений. Стоит отметить, что данный критерий является оптимальным, только если ошибки всех типов наносят одинаковый вред (или имеют равную цену). Если ошибки некоторых типов обходятся дороже других, необходимо применять критерий, который учитывал бы относительные стоимости ошибок [1].

Б.2.3. Критерий максимального правдоподобия

Довольно часто сведения об априорных вероятностях гипотез или классов сигналов отсутствуют. Даже при наличии такой информации ее точность иногда вызывает сомнения. В таких случаях решения обычно принимаются исходя из предположения о возможности наиболее выгодной априорной вероятности; иными словами, значения априорных вероятностей выбираются так, чтобы классы были *равновероятными*. Если выбран такой подход, то критерий принятия решения является критерием максимального правдоподобия, и выражение (Б.8) записывается в следующем виде:

$$\frac{P(z \mid s_1)}{P(z \mid s_2)} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1\,. \tag{Б.9}$$

Отметим, что критерий максимального правдоподобия, приведенный в выражении (Б.9), аналогичен правилу максимального правдоподобия, описанному в примере Б.3.