15. Ймовірність помилки детектування при багатопозиційній амплітудній модуляції. (ст. 224-226)

5.2.6. Вероятность ошибки для *M*-позиционной АМ

Напомним, что *M*-позиционные сигналы АМ представляются геометрически как *M* одномерных сигнальных точек со значениями

$$s_m = \sqrt{\tfrac{1}{2}\mathscr{E}_g}\,A_m, \quad m = 1,2,\ldots,M, \tag{5.2.37}$$

где $\mathscr{E}_g$ – энергия базового сигнального импульса $g(t)$. Значения амплитуд можно выразить так:

$$A_m = (2m-1-M)d, \quad m = 1,2,\ldots,M, \tag{5.2.38}$$

где евклидово расстояние между соседними сигнальными точками равно $d\sqrt{2\mathscr{E}_g}$.

Средняя энергия сигнала

$$\mathscr{E}_{\text{ср}} = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\mathscr{E}_m = \frac{d^2\mathscr{E}_g}{2M}\sum_{m=1}^{M}(2m-1-M)^2 = \frac{d^2\mathscr{E}_g}{2M}\left[\tfrac{1}{3}M\left(M^2-1\right)\right] = \tfrac{1}{6}\left(M^2-1\right)d^2\mathscr{E}_g. \tag{5.2.39}$$

Эквивалентно мы можем характеризовать эти сигналы их средней мощностью, которая равна

$$P_{\text{ср}} = \frac{\mathscr{E}_{\text{ср}}}{T} = \tfrac{1}{6}\left(M^2-1\right)\frac{d^2\mathscr{E}_g}{T}. \tag{5.2.40}$$

Средняя вероятность ошибки для *M*-позиционной АМ можно определить из правила выбора решения по максимуму метрик корреляции, определяемых (5.1.44). Эквивалентно детектор сравнивает выход демодулятора *r* с рядом *M*–1 порогов, которые располагаются в средних точках между соседними уровнями амплитуд, как показано на рис. 5.2.7.

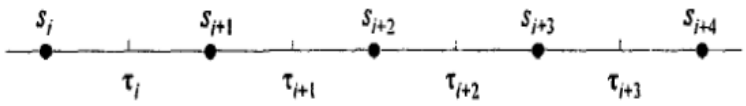


Рис. 5.2.7. Расположение порогов в средних точках между соседними уровнями амплитуд

Таким образом, решение выбирается в пользу уровня амплитуды, который расположен ближе всех к *r*.

Расположение порогов, указанных на рис. 5.2.7, помогает в вычислении вероятности ошибки. Заметим, что если передаётся *m*-й амплитудный уровень, то выход демодулятора равен

$$r = s_m + n = \sqrt{\tfrac{1}{2}\mathscr{E}_g}\,A_m + n, \tag{5.2.41}$$

где компонента шума n имеет нулевое среднее и дисперсию $\sigma_n^2 = \frac{1}{2}N_0$. В предположении, что все уровни амплитуд априори равновероятны, средняя вероятность ошибочного приёма символа равна вероятности того, что компонента шума n превосходит по амплитуде половину расстояния между соседними уровнями. Однако, когда передаётся один из двух крайних уровней $\pm(M-1)$, ошибка возникает только в одном направлении. Таким образом, мы имеем

$$P_{\text{M}} = \frac{M-1}{M} P\left(|r - s_m| > d\sqrt{\tfrac{1}{2}\mathscr{E}_g}\right) = \frac{M-1}{M}\frac{2}{\sqrt{\pi N_0}}\int_{d\sqrt{\mathscr{E}_g/2}}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/N_0}dx =$$

$$= \frac{M-1}{M}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\sqrt{d^2\mathscr{E}_g/N_0}}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}dx = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{d^2\mathscr{E}_g}{N_0}}\right). \qquad (5.2.42)$$

Вероятность ошибки (5.2.42) можно также выразить через среднюю переданную мощность. Из (5.2.40) видно, что

$$d^2\mathscr{E}_g = \frac{6}{M^2-1} P_{\text{ср}} T. \qquad (5.2.43)$$

Подставив $d^2\mathscr{E}_g$ в (5.2.42), получим среднюю вероятность ошибки на символ для АМ через среднюю мощность:

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6P_{\text{ср}}T}{(M^2-1)N_0}}\right) \qquad (5.2.44)$$

или, что эквивалентно,

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6\mathscr{E}_{\text{ср}}}{(M^2-1)N_0}}\right), \qquad (5.2.45)$$

где $\mathscr{E}_{\text{ср}} = P_{\text{ср}}T$ – средняя энергия. При построении зависимости вероятности ошибки на символ M-позиционной системы АМ обычно используется ОСШ на бит как базовый параметр. Так как $T = kT_b$ и $k = \log_2 M$, (5.2.45) можно преобразовать к

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{(6\log_2 M)\mathscr{E}_{b\text{ср}}}{(M^2-1)N_0}}\right), \qquad (5.2.46)$$

где $\mathscr{E}_{b\text{ср}} = P_{\text{ср}}T_b$ – средняя энергия на бит, а $\mathscr{E}_{b\text{ср}}/N_0$ – средняя ОСШ на бит.

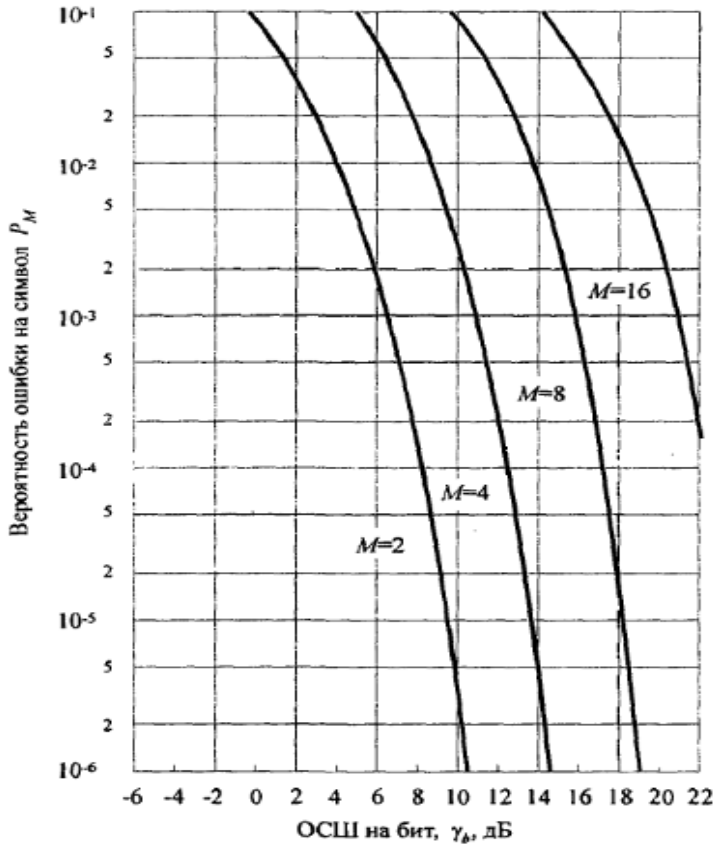


Рис. 5.2.8. Вероятность ошибки на символ для АМ

Рисунок 5.2.8 иллюстрирует зависимость вероятности ошибки на символ от $10\lg\left(\mathscr{E}_{b\text{ср}}/N_0\right)$ со значением M в качестве параметра.

Заметим, что случай $M = 2$ соответствует вероятности ошибки для двоичной системы противоположных сигналов. Также видим, что при фиксированной вероятности ошибки P_M ОСШ на бит возрастает более чем на 4 дБ при каждом удвоении числа M. При очень больших M требуемый рост ОСШ при удвоении числа M приближается к 6 дБ.

16. Ймовірність помилки детектування при ортогональній модуляції.

Цифроваясвязь. Прокис Дж. (Proakis). 2000, с 262

5.4.3. Вероятность ошибки при детектировании огибающей для M-позиционных ортогональных[1] сигналов

Рассмотрим передачу M ортогональных сигналов равной энергии по каналу с АБГШ с детектированием огибающей в приёмнике. Мы также предположим, что M сигналов априорно равновероятны и что сигнал $s_1(t)$ передается на интервал $0 \le t \le T$. В качестве M решающих метрик на входе детектора используются M огибающих:

$$|r_m| = \sqrt{r_{mc}^2 + r_{ms}^2}, \quad m = 1, 2, \ldots, M,$$

где (5.4.32)

$$r_{1c} = \sqrt{\mathscr{E}_b}\cos\phi_1 + n_{1c},$$

$$r_{1s} = \sqrt{\mathscr{E}_b}\sin\phi_1 + n_{1s}, \qquad (5.4.33)$$

$$r_{mc} = n_{mc}, \quad r_{ms} = n_{ms}, \quad m = 2, 3, \ldots, M. \qquad (5.4.34)$$

Компоненты аддитивного шума $\{n_{mc}\}$ и $\{n_{ms}\}$ – взаимно статистически независимые гауссовские величины с нулевым средним и одинаковой дисперсией $\sigma^2 = \frac{1}{2}N_0$. Таким образом, ФПВ для случайных величин на входе детектора равны

$$p_{r_1}(r_{1c}, r_{1s}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{r_{1c}^2 + r_{1s}^2 + \mathscr{E}^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\sqrt{\mathscr{E}_s\left(r_{2c}^2 + r_{2s}^2\right)}}{\sigma^2}\right), \qquad (5.4.35)$$

$$p_{r_m}(r_{mc}, r_{ms}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{r_{mc}^2 + r_{ms}^2}{2\sigma^2}\right), \qquad m = 2, 3, \ldots, M. \qquad (5.4.36)$$

Сделаем замену переменных в совместных ФПВ, определяемых (5.4.35) и (5.4.36). Определим нормированные величины

$$R_m = \frac{\sqrt{r_{mc}^2 + r_{ms}^2}}{\sigma}; \quad \Theta_m = \operatorname{arctg}\frac{r_{ms}}{r_{mc}}. \qquad (5.4.37)$$

Ясно, что $r_{mc} = \sigma R_m \cos\Theta_m$ и $r_{ms} = \sigma R_m \sin\Theta_m$. Якобиан этого преобразования

$$|\mathbf{J}| = \begin{vmatrix} \sigma\cos\Theta_m & \sigma\sin\Theta_m \\ -\sigma R_m \sin\Theta_m & \sigma R_m \cos\Theta_m \end{vmatrix} = \sigma^2 R_m. \qquad (5.4.38)$$

Следовательно,

$$p(R_1, \Theta_1) = \frac{R_1}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(R_1^2 + \frac{2\mathscr{E}_s}{N_0}\right)\right] I_0\left(\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_s}{N_0}}R_1\right), \qquad (5.4.39)$$

$$p(R_m, \Theta_m) = \frac{R_m}{2\pi}\exp\left(-\tfrac{1}{2}R_m^2\right), \quad m = 2, 3, \ldots, M. \qquad (5.4.40)$$

В заключение при усреднении $p(R_m, \Theta_m)$ по Θ_m множитель 2π исключается из (5.4.39) и (5.4.40). Таким образом находим, что R_1 имеет распределение Райса, а R_m, $m = 2, 3, \ldots, M$, имеет распределение Релея.

Вероятность правильного решения определяется вероятностью того, что $R_1 > R_2$ и $R_1 > R_3$ ... и $R_1 > R_M$. Следовательно,

$$P_c = P(R_2 < R_1, R_3 < R_1, \ldots, R_M < R_1) = \int_0^\infty P(R_2 < R_1, R_3 < R_1, \ldots, R_M < R_1 | R_1 = x) p_{R_1}(x)dx. \qquad (5.4.41)$$

Поскольку случайные величины R_m, $m = 2, 3, \ldots, M$, статистически независимы, совместная вероятность в (5.4.41) определяется произведением $M-1$ идентичных членов:

$$P_c = \int_0^\infty \left[P(R_2 < R_1 | R_1 = x)\right]^{M-1} p_{R_1}(x)dx, \qquad (5.4.42)$$

где

$$P(R_2 < R_1 | R_1 = x) = \int_0^x p_{R_2}(r_2)dr_2 = 1 - e^{-x^2/2}. \qquad (5.4.43)$$

Степень $M-1$ от (5.4.43) можно выразить, пользуясь биномом Ньютона, так:

$$\left(1 - e^{-x^2/2}\right)^{M-1} = \sum_{n=0}^{M-1}(-1)^n\binom{M-1}{n}e^{-nx^2/2} \qquad (5.4.44)$$

Подставив этот результат в (5.4.42) и интегрируя по x, получаем для вероятности правильного решения

$$P_c = \sum_{n=0}^{M-1}(-1)^n\binom{M-1}{n}\frac{1}{n+1}\exp\left[-\frac{n\mathscr{E}_s}{(n+1)N_0}\right], \qquad (5.4.45)$$

где $\mathscr{E}_s/N_0$ – ОСШ на символ. Тогда вероятность ошибки на символ $P_M = 1 - P_c$ равна[1]

$$P_M = \sum_{n=1}^{M-1}(-1)^{n+1}\binom{M-1}{n}\frac{1}{n+1}\exp\left[-\frac{nk\mathscr{E}_b}{(n+1)N_0}\right], \qquad (5.4.46)$$

где E_b/N_0 – ОСШ на бит.

Для двоичных ортогональных сигналов ($M = 2$) (5.4.46) приводится к простому виду

$$P_2 = \tfrac{1}{2} e^{-\mathcal{E}/2N_0}. \qquad (5.4.47)$$

Для $M > 2$ мы можем вычислить вероятность ошибки на бит, используя соотношение

$$P_b = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} P_M, \qquad (5.4.48)$$

которое было установлено в разд. 5.2. Рисунок 5.4.5 показывает вероятность ошибки на бит как функцию ОСШ на бит γ_b для $M = 2$, 4, 8, 16 и 32. Для случая когерентного детектирования M-позиционных ортогональных сигналов (см. разд. 5.2.2) мы видели, что для любой заданной вероятности ошибки ОСШ на бит уменьшается по мере роста M. В гл. 7 будет показано, что в пределе, когда $M \to \infty$ (или $k = \log_2 M \to \infty$), вероятность ошибки на бит P_b можно сделать сколь угодно малой при условии, что ОСШ на бит превышает предел Шеннона $-1{,}6$ дБ. Цена роста M – увеличение полосы, требуемой для передачи сигнала. Для M-позиционной ЧМ разнос частот между соседними частотами равен $\Delta f = 1/T$ для ортогональности сигналов. Полоса частот, требуемая для M сигналов, $W = M\Delta f = M/T$. Таким образом, битовая скорость $R = k/T$, где $k = \log_2 M$. Следовательно, отношение битовой скорости к полосе равно

$$\frac{R}{W} = \frac{\log_2 M}{M}. \qquad (5.4.49)$$

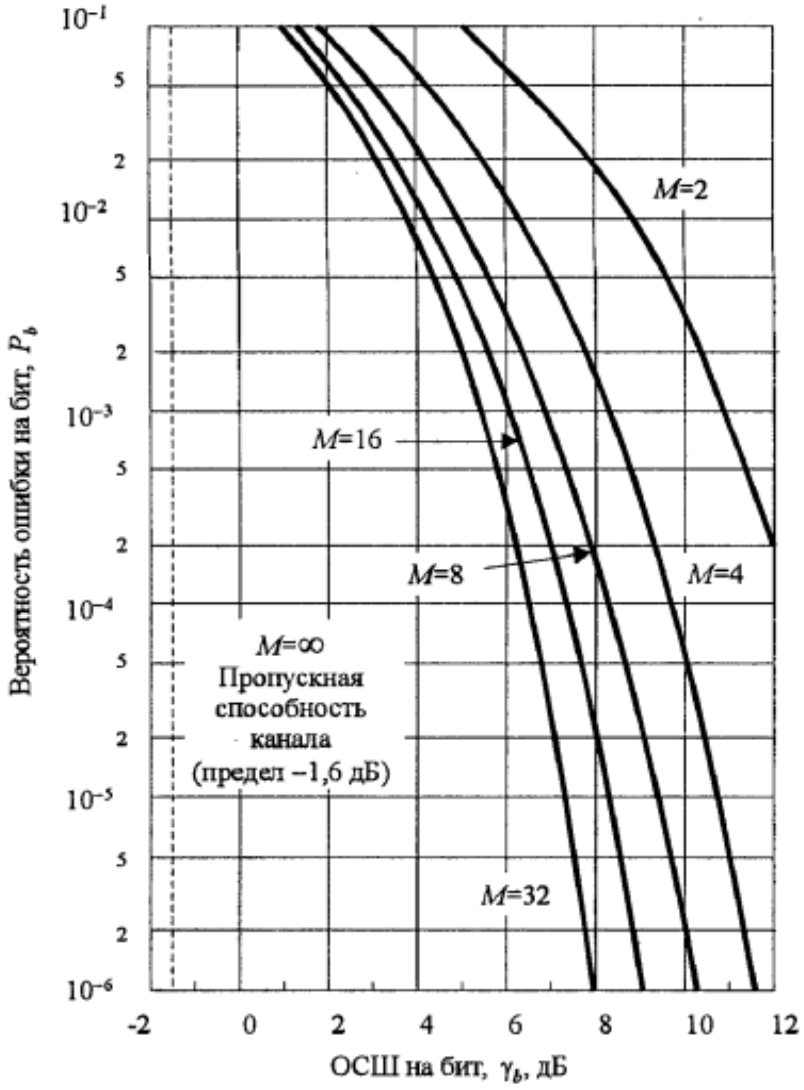


Рис. 5.4.5. Вероятность ошибки на бит для некогерентного детектирования ортогональных сигналов