$$\rho_{km} = \frac{1}{2\sqrt{\mathscr{E}_m \mathscr{E}_k}} \int_{-\infty}^{\infty} s_{lm}^*(t) s_{lk}(t)\, dt. \qquad (4.2.45)$$

Тогда

$$\mathrm{Re}(\rho_{km}) = \frac{1}{\sqrt{\mathscr{E}_m \mathscr{E}_k}} \int_{-\infty}^{\infty} s_m(t) s_k(t)\, dt, \qquad (4.2.46)$$

или, что эквивалентно,

$$\mathrm{Re}(\rho_{km}) = \frac{\mathbf{s}_m \cdot \mathbf{s}_k}{\|\mathbf{s}_m\| \, \|\mathbf{s}_k\|} = \frac{\mathbf{s}_m \cdot \mathbf{s}_k}{\sqrt{\mathscr{E}_m \mathscr{E}_k}}. \qquad (4.2.47)$$

Коэффициенты взаимной корреляции между парами сигналов или сигнальных векторов определяют совокупность параметров, характеризующих похожесть ансамбля сигналов. Другой родственный параметр – расстояние Евклида $d_{km}^{(e)}$ между парой сигналов – определяется так:

$$d_{km}^{(e)} = \|\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_k\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [s_m(t) - s_k(t)]^2 \, dt \right\}^{1/2} = \left\{ \mathscr{E}_m + \mathscr{E}_k - 2\sqrt{\mathscr{E}_m \mathscr{E}_k}\, \mathrm{Re}(\rho_{km}) \right\}^{1/2}. \qquad (4.2.48)$$

Когда $\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_k = \mathscr{E}$ для всех m и k, это выражение упрощается:

$$d_{km}^{(e)} = \left\{ 2\mathscr{E}\left[1 - \mathrm{Re}(\rho_{km})\right] \right\}^{1/2}. \qquad (4.2.49)$$

Итак, расстояние Евклида является альтернативной мерой похожести (или несходства) совокупности сигналов или соответствующих сигнальных векторов.

В следующем разделе мы опишем сигналы цифровой модуляции и используем пространство сигналов для их представления. Можно заметить, что сигналы цифровой модуляции удобно представить через две ортонормированные базисные функции вида

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \sqrt{\tfrac{2}{T}} \cos 2\pi f_c t, \\ f_2(t) &= -\sqrt{\tfrac{2}{T}} \sin 2\pi f_c t. \end{aligned} \qquad (4.2.50)$$

Если $s_{lm}(t)$ выразить как $s_{lm}(t) = x_l(t) + jy_l(t)$, то следует, что $s_m(t)$ в (4.2.42) можно выразить так:

$$s_m(t) = x_l(t) f_1(t) + y_l(t) f_2(t), \qquad (4.2.51)$$

где $x_l(t)$ и $y_l(t)$ представляют модулирующие сигналы.

4.3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ ЦИФРОВОЙ МОДУЛЯЦИИ

При передаче цифровой информации по каналам связи модулятор является устройством отображения цифровой информации в форму аналоговых сигналов, которые согласованы с характеристиками каналов. Отображение обычно осуществляется посредством выбора блоков из $k = \log_2 M$ двоичных символов из символов информационной последовательности $\{a_n\}$ и выбора одного из $M = 2^k$ детерминированных сигналов с ограниченной энергией $\{s_m(t),\ m = 1,2,\ldots,M\}$, для передачи его по каналу за время передачи k информационных символов.

Когда отображение цифровой последовательности $\{a_n\}$ в сигнал осуществляется так, что сигнал, передаваемый на данном временном интервале, зависит от одного или более сигналов, переданных раньше, то говорят, что модулятор имеет *память*. С другой стороны, если отображение информационной последовательности $\{a_n\}$ в сигналы $\{s_m(t)\}$ осуществляется так, что передаваемые сигналы не зависят от ранее переданных, модулятор называют *без памяти*.

В дополнение к классификации модуляторов на модуляторы с памятью или без памяти мы их еще классифицируем как линейные или нелинейные. Линейность требует выполнения принципа суперпозиции (наложения) при отображении цифровой информационной последовательности в последовательные сигналы. При нелинейной модуляции принцип суперпозиций не применим для сигналов, передаваемых в последовательные временные интервалы.

Начнем с описания методов модуляции без памяти.

4.3.1. Методы модуляции без памяти

Как сказано выше, модулятор в цифровой системе связи отображает последовательность информационных символов в соответствующую последовательность сигналов. Эти сигналы могут отличаться по амплитуде, по фазе или по частоте или могут зависеть от двух или более сигнальных параметров. Мы рассмотрим каждый из этих видов сигналов отдельно, а начнём с линейной цифровой амплитудно-импульсной модуляции (АИМ), которую проще называют амплитудной модуляцией (АМ). Во всех случаях предполагаем, что информационная последовательность символов на входе модулятора является двоичной и появляется со скоростью R бит/с.

Амплитудно-импульсная модуляция. Цифровой АМ сигнал можно представить так:

$$\begin{aligned} s_m(t) &= \mathrm{Re}\left[A_m g(t) e^{j2\pi f_c t}\right] = \\ &= A_m g(t)\cos 2\pi f_c t, \qquad m = 1,2,\ldots,M, \qquad 0 \le t \le T, \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

где $\{A_m,\ 1 \le m \le M\}$ означает ряд из M возможных амплитуд, соответствующих $M = 2^k$ возможным k-битовым блокам или *символам*. Амплитуда сигнала A_m принимает дискретные значения (уровни)

$$A_m = (2m - 1 - M)d, \qquad m = 1,2,\ldots,M, \tag{4.3.2}$$

где $2d$ – расстояние между соседними амплитудами сигналов. Сигнал $g(t)$ является вещественным сигнальным импульсом, форма которого определяет спектр передаваемого сигнала, как мы увидим позже. Скорость передачи канальных символов при АМ равна R/k. Это скорость, с которой происходят изменения амплитуды гармонической несущей для того, чтобы отразить передачу новой информации. Временной интервал $T_b = 1/R$ называется информационным (*битовым*) *интервалом*, а временной интервал $T = k/R = kT_b$ называется *символьным интервалом* или *интервалом канального символа*.

Сигналы АМ имеют энергию

$$\mathscr{E}_m = \int_0^T s_m^2(t)\,dt = \tfrac{1}{2} A_m^2 \int_0^T g^2(t)\,dt = \tfrac{1}{2} A_m^2 \mathscr{E}_g, \tag{4.3.3}$$

где $\mathscr{E}_g$ означает энергию импульса $g(t)$.

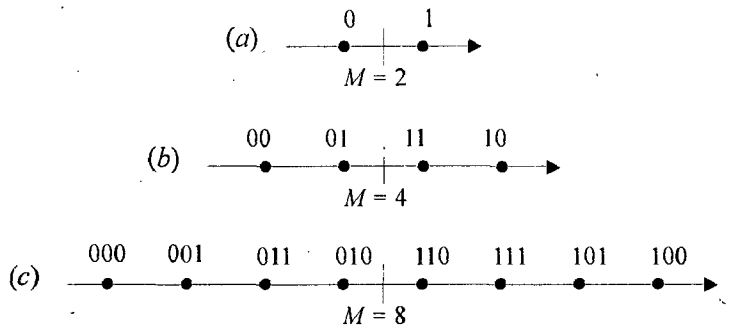


Рис. 4.3.1. Пространственная диаграмма сигналов цифровой АМ

Ясно, что сигналы АМ являются одномерными ($N=1$), и, следовательно, их можно представить в общем виде так:

$$s_m(t) = s_m f(t), \qquad (4.3.4)$$

где $f(t)$ определен как полосовой сигнал с единичной энергией:

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\mathscr{E}_g}} g(t)\cos 2\pi f_c t, \qquad (4.3.5)$$

и

$$s_m = A_m \sqrt{\tfrac{1}{2}\mathscr{E}_g}, \qquad m = 1,2,\ldots,M. \qquad (4.3.6)$$

На рис. 4.3.1 даны соответствующие пространственные диаграммы сигналов для $M=2$, $M=4$, $M=8$. Цифровая АМ называется также *модуляцией с амплитудным сдвигом* (MAC, ASK).

Отображение или задание k информационных бит $M=2^k$ возможными амплитудами сигнала можно сделать различными способами. Наилучшее задание – это такое, при котором соседние амплитуды сигналов соответствуют информационным двоичным блокам, различающимся в одном разряде, как показано на рис. 4.3.1. Это отображение называется кодом Грея. Он важен при демодуляции сигнала, поскольку наиболее вероятные ошибки вызывает ошибочный выбор амплитуды, соседней по отношению к той, которая действительно передана. В этом случае, в k-битовой информационной последовательности возникает ошибка только в одном бите.

Заметим, что евклидово расстояние между какой-либо парой сигнальных точек равно

$$d_{mn}^{(e)} = \sqrt{\left(s_m - s_n\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\mathscr{E}_g}\,|A_m - A_n| = d\sqrt{2\mathscr{E}_g}\,|m-n|. \qquad (4.3.7)$$

Следовательно, расстояние между парой соседних сигнальных точек, т.е. минимальное значение евклидова расстояния, равно

$$d_{\min}^{(e)} = d\sqrt{2\mathscr{E}_g}. \qquad (4.3.8)$$

Модулированные сигналы АМ, представленные (4.3.1), являются двухполосными (ДП) сигналами и требуют в два раза большую полосу частот, чем низкочастотный передаваемый сигнал. В качестве альтернативы можем использовать однополосную (одной боковой полосы, ОБП) АМ, которую можно представить (нижнюю или верхнюю полосу) так:

$$s_m(t) = \mathrm{Re}\left\{A_m\left[g(t) \pm j\hat{g}(t)\right]e^{j2\pi f_c t}\right\}, \qquad m = 1,2,\ldots,M, \qquad (4.3.9)$$

где $\hat{g}(t)$ – преобразование Гильберта от $g(t)$. Таким образом, полоса частот ОБП равна половине полосы частот, занимаемой сигналом ДП.

Рассмотренный сигнал цифровой АМ можно интерпретировать как передачу по эквивалентному каналу без несущей. В этом случае сигнал АМ можно представить в виде

$$s_m(t) = A_m g(t), \qquad m = 1,2,\ldots,M. \qquad (4.3.10)$$

Его называют *базовым* (низкочастотным) или *видеосигналом*. Для примера на рис. 4.3.2(*a*) показан четырехуровневый базовый сигнал АМ.

Модулированная по несущей версия этого сигнала дана на рис. 4.3.2 (*b*).

В частном случае $M=2$ рассматриваемая двоичная АМ имеет специальное свойство:

$$s_1(t) = -s_2(t).$$

Следовательно, эти два сигнала имеют одинаковую энергию и коэффициент их взаимной корреляции равен –1. Такие сигналы называют *противоположными*.

Сигналы фазовой модуляции. При цифровой фазовой (нелинейной) модуляции M сигналов можно представить в виде

$$s_m(t) = \mathrm{Re}\, g(t)\, e^{j2\pi(m-1)/M}\, e^{j2\pi f_c t} = g(t)\cos\left[2\pi f_c t + \frac{2\pi(m-1)}{M}\right] =$$

$$g(t)\cos\frac{2\pi(m-1)}{M}\cos 2\pi f_c t - g(t)\sin\frac{2\pi(m-1)}{M}\sin 2\pi f_c t, \qquad (4.3.11)$$

$$m = 1,2,\ldots,M, \qquad 0 \le t \le T,$$

где $g(t)$ определяет огибающую сигнала, а $\theta_m = 2\pi(m-1)/M$, $m = 1,2,\ldots,M$, определяет M возможных значений фазы несущей, которая переносит передаваемую информацию. Цифровую фазовую модуляцию (ФМ) называют также модуляцией с фазовым сдвигом (МФС, PSK).

Заметим, что рассматриваемые формы сигналов имеют одинаковую энергию, т.е.

$$\mathscr{E} = \int_0^T s_m^2(t)\,dt = \tfrac{1}{2}\int_0^T g^2(t)\,dt = \tfrac{1}{2}\mathscr{E}_g. \qquad (4.3.12)$$

Далее, ФМ сигналы можно представить как линейную комбинацию двух ортонормированных сигналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, т.е.

$$s_m(t) = s_{m1} f_1(t) + s_{m2} f_2(t), \qquad (4.3.13)$$

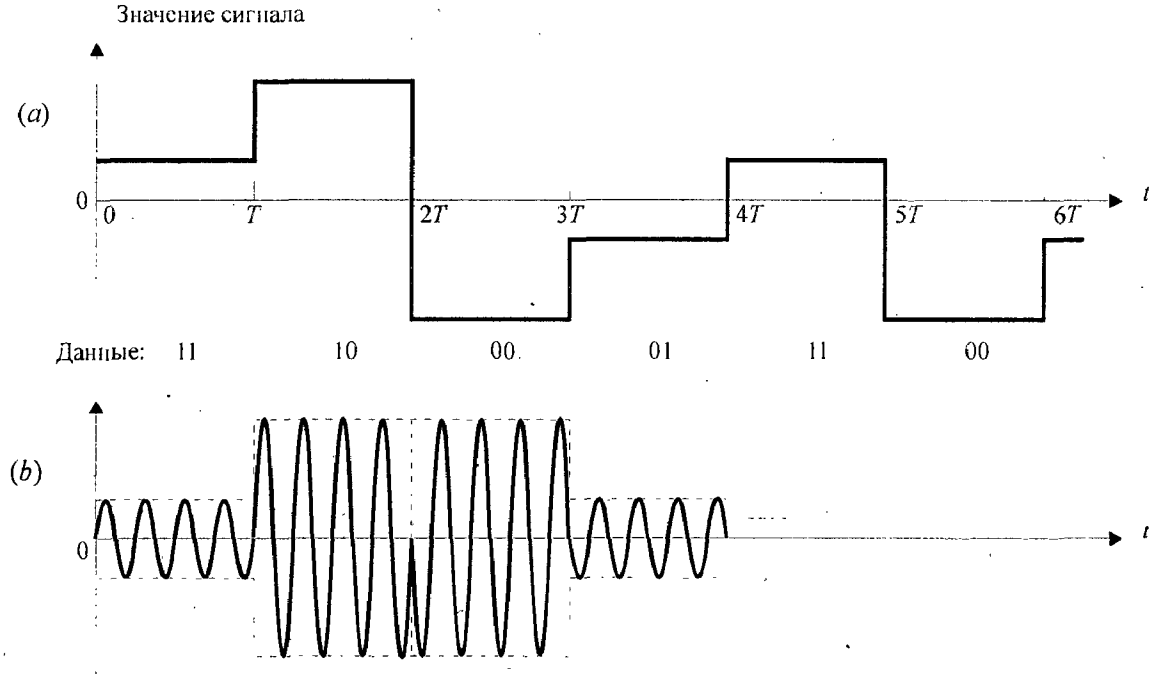


Рис. 4.3.2. Базовый АМ сигнал (видеосигнал) (*a*) и полосовой АМ сигнал (*b*)

где

$$f_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\mathscr{E}_g}}\, g(t)\cos 2\pi f_c t, \qquad (4.3.14)$$

$$f_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{\mathscr{E}_g}}\, g(t)\sin 2\pi f_c t. \qquad (4.3.15)$$

а двухмерные векторы $\mathbf{s}_m = \left[s_{m1}\ s_{m2}\right]$ определяются так:

$$\mathbf{s}_m = \left[\sqrt{\frac{\mathscr{E}_g}{2}}\cos\frac{2\pi(m-1)}{M}\quad \sqrt{\frac{\mathscr{E}_g}{2}}\sin\frac{2\pi(m-1)}{M}\right], \qquad m = 1,2,\ldots,M. \qquad (4.3.16)$$

Пространственные диаграммы ФМ сигналов для $M = 2, 4$ и 8 даны на рис. 4.3.3.

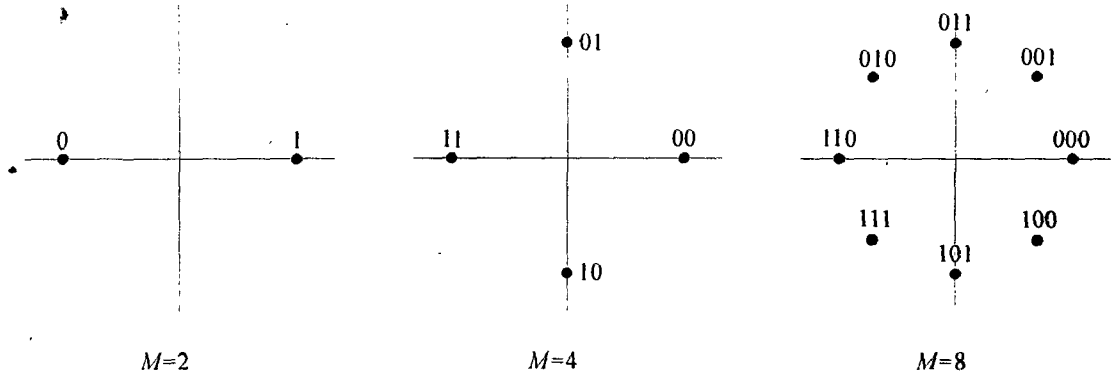


Рис. 4.3.3. Пространственная диаграмма для ФМ сигналов

Видим, что случаю $M=2$ соответствуют одномерные противоположные сигналы, которые идентичны рассмотренным двоичным сигналам АМ.

Как и в случае АМ, отображение или задание k информационных бит в $M=2^k$ возможных значений фаз можно сделать различными путями. Предпочтительное отображение – коды Грея, так что наиболее вероятные ошибки, вызываемые шумами, будут возникать в одном бите k-битового символа.

Евклидово расстояние между точками ФМ сигналов равно

$$d_{mn}^{(e)} = |\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_n| = \left\{ \mathscr{E}_g \left[1 - \cos\frac{2\pi}{M}(m-n) \right] \right\}^{1/2} \qquad (4.3.17)$$

Минимальное расстояние по Евклиду соответствует случаю, когда $|m-n|=1$, т.е. соседним значениям фаз. При этом

$$d_{\min}^{(e)} = \sqrt{\mathscr{E}_g \left(1 - \cos\frac{2\pi}{M} \right)}. \qquad (4.3.18)$$

Квадратурная амплитудная модуляция. Хорошую частотную эффективность можно получить не только при АМ/ОБП, но и путём одновременной передачи двух отдельных k-битовых информационных блоков на двух несущих, находящихся в квадратуре ($\cos 2\pi f_c t$ и $\sin 2\pi f_c t$). Такая техника модуляции названа квадратурной АМ или КАМ (QAM), и соответствующие сигналы можно выразить так:

$$s_m(t) = \mathrm{Re}\left[(A_{mc} + jA_{ms}) g(t) e^{j2\pi f_c t} \right] = A_{mc} g(t) \cos 2\pi f_c t - A_{ms} g(t) \sin 2\pi f_c t, \qquad (4.3.19)$$
$$m = 1,2,\ldots,M, \qquad 0 \le t \le T,$$

где A_{mc} и A_{ms} – информационные амплитуды сигнала для квадратурных несущих, а $g(t)$ – форма импульса.

Альтернативно сигнал КАМ можно выразить так:

$$s_m(t) = \mathrm{Re}\left[V_m e^{j\theta_m} g(t) e^{j2\pi f_c t} \right] = V_m g(t) \cos\left(2\pi f_c t + \theta_m \right), \qquad (4.3.20)$$

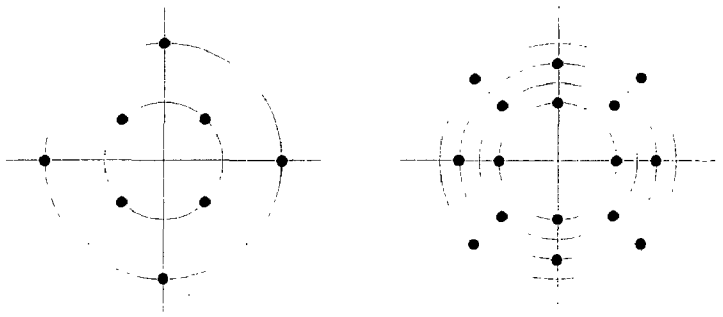
где $V_m = \sqrt{A_{mc}^2 + A_{ms}^2}$ и $\theta_m = \mathrm{arc\,tg}\left(A_{ms} / A_{mc} \right)$. Из этой формы представления видно, что сигнал КАМ можно рассматривать как комбинацию амплитудной и фазовой модуляции.

Действительно, мы можем образовать определенную комбинацию M_1-уровневой АМ и M_2-позиционной ФМ, чтобы сконструировать комбинированное АМ-МФ сигнальное созвездие, содержащее $M = M_1 M_2$ точек пространства сигналов. Если $M_1 = 2^n$ и $M_2 = 2^m$, то сигнальное созвездие комбинированной АМ-ФМ сводится к мгновенной передаче

$m+n=\log M_1 M_2$ двоичных символов, возникающих со скоростью $R/(m+n)$. Примеры сигнальных пространственных диаграмм для комбинированной АМ-МФ показаны на рис. 4.3.4 для M=8 и M=16.

Как в случае АМ сигналов, КАМ сигналы можно представить как линейную комбинацию двух ортонормированных сигналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, т.е.

$$s_m(t) = s_{m1} f_1(t) + s_{m2} f_2(t), \tag{4.3.21}$$



M=8 M=16

Рис. 4.3.4. Примеры пространственных диаграмм для комбинированной АМ-ФМ

где

$$f_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\mathscr{E}_g}} g(t)\cos 2\pi f_c t, \quad f_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{\mathscr{E}_g}} g(t)\sin 2\pi f_c t \tag{4.3.22}$$

и

$$\mathbf{s}_m = \left[s_{m1} \quad s_{m2}\right] = \left[A_{mc}\sqrt{\tfrac{1}{2}\mathscr{E}_g} \quad A_{ms}\sqrt{\tfrac{1}{2}\mathscr{E}_g}\right]. \tag{4.3.23}$$

Расстояние Евклида между произвольной парой сигнальных векторов равно

$$d_{mn}^{(e)} = \left|\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_n\right| = \sqrt{\tfrac{1}{2}\mathscr{E}_g\left[\left(A_{mc} - A_{nc}\right)^2 + \left(A_{ms} - A_{ns}\right)^2\right]}. \tag{4.3.24}$$

Для частного случая, когда амплитуда сигналов принимает ряд дискретных значений $\{(2m-1-M)d, \quad m=1,2,\ldots,M\}$, пространственная диаграмма сигналов является прямоугольной, как показано на рис. 4.3.5.

В этом случае минимальное расстояние Евклида (между смежными точками) равно

$$d_{\min}^{(e)} = d\sqrt{2\mathscr{E}_g}, \tag{4.3.25}$$

что является тем же результатом, что для АМ.

Многомерные сигналы. Из вышесказанного очевидно, что цифровая модуляция несущей по амплитуде и фазе позволяет конструировать сигналы, которые соответствуют двухмерным векторам и пространственным диаграммам сигналов. Если мы хотим сконструировать сигнал, соответствующий вектору большей размерности, можем использовать или временную, или частотную, или обе области для того, чтобы увеличить размерность пространства.

Предположим, что мы имеем N-мерные сигнальные векторы. Для любого N можем разделить интервал времени длины $T_1 = NT$ на N подынтервалов длиной $T = T_1/N$. В каждом интервале длины T можем использовать двоичную АМ (одномерный сигнал), чтобы передать элемент N-мерного сигнального вектора. Таким образом, N временных отрезков используется для передачи N-мерного сигнального вектора.

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{2} q_i \mathbf{T}_i , \qquad (4.3.47)$$

где $q_1 = P(a_k = 0)$ и $q_2 = P(a_k = 1)$.

Для сигнала NRZI с равновероятными состояниями $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ и матриц перехода, определяемых (4.3.42) и (4.3.42), матрица переходных вероятностей равна

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \qquad (4.3.48)$$

Аналогично матрица переходных вероятностей для сигналов, кодированных по Миллеру, при равновероятных символах ($q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$, или, что эквивалентно, $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$) равна

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}. \qquad (4.3.49)$$

Матрица переходных вероятностей используется при определении спектральных характеристик техники цифровой модуляции с памятью, как мы покажем в разд. 4.4.

4.3.3. Нелинейные методы модуляции с памятью

В этом разделе мы рассмотрим класс методов цифровой модуляции, в которых фаза сигнала поддерживается непрерывной. Такая поддержка приводит к модуляции по фазе или по частоте с памятью. Метод модуляции нелинеен.

Частотная модуляция с непрерывной фазой (ЧМНФ). Обычный сигнал ЧМ или модуляции с частотным сдвигом (МЧС или FSK) генерируется путём сдвига частоты несущей на величину $f_n = \frac{1}{2}\Delta f I_n$, $I_n = \pm 1, \pm 3, \ldots, \pm(M-1)$, чтобы отразить цифровую информацию, которую надо передать. Этот вид модуляции сигналов был описан в разделе 4.3.1 и он без памяти. Переход от одной частоты к другой может быть выполнен посредством $M = 2^k$ отдельных генераторов, настроенных на необходимые частоты, и выбора одной из M частот согласно частному значению k-битового символа (блока), который должен быть передан на сигнальном интервале длиной $T = k/R$ секунд.

Однако такое резкое переключение с выхода одного генератора на выход другого в смежных сигнальных интервалах приводит к относительно большим долям боковых частотных составляющих вне основной спектральной полосы сигнала, и, следовательно, этот метод требует большую полосу частот для передачи сигнала. Чтобы избежать использования сигналов с большими долями боковых полос, информационный сигнал может модулировать одну несущую, частота которая меняется непрерывно. Результирующий частотно-модулированный сигнал имеет в этом случае непрерывную фазу и поэтому назван ЧМ с непрерывной фазой (ЧМНФ, CPFSK). Этот вид ЧМ сигнала имеет память, обусловленную тем, что фазу несущей заставляют быть непрерывной.

Чтобы представить сигнал ЧМНФ, мы начнём с сигнала АМ

$$d(t) = \sum_n I_n g(t - nT), \qquad (4.3.50)$$

где $\{I_n\}$ означает последовательность амплитуд, полученную путём отображения k-битовых блоков двоичных символов от информационных последовательностей $\{a_n\}$ в уровни амплитуды $\pm 1, \pm 3, \ldots, \pm(M-1)$, $g(t)$ – прямоугольный импульс с амплитудой $1/2T$ и

длительностью T секунд. Сигнал $d(t)$ используется для частотной модуляции несущей. Следовательно, эквивалентный низкочастотный сигнал $\upsilon(t)$ можно в этом случае выразить так:

$$\upsilon(t)=\sqrt{\frac{2\mathscr{E}}{T}}\exp\left\{j\left[4\pi Tf_d\int_{-\infty}^{t}d(\tau)\,d\tau+\phi_0\right]\right\}, \qquad (4.3.51)$$

где f_d – максимальная девиация частоты, а ϕ_0 – начальная фаза несущей. Частотно-модулированный сигнал, соответствующий (4.3.51), можно выразить как

$$s(t)=\sqrt{\frac{2\mathscr{E}}{T}}\cos\left[2\pi f_c t+\phi(t;\mathbf{I})+\phi_0\right], \qquad (4.3.52)$$

где $\phi(t;\mathbf{I})$ представляет меняющуюся во времени фазу несущей:

$$\phi(t;\mathbf{I})=4\pi Tf_d\int_{-\infty}^{t}d(\tau)\,d\tau=4\pi Tf_d\int_{-\infty}^{t}\left[\sum_n I_n g(\tau-nT)\right]d\tau. \qquad (4.3.53)$$

Заметим, что $d(t)$ содержит разрывы, интеграл же от $d(t)$ непрерывен. Следовательно, мы имеем сигнал с непрерывной фазой. Фаза несущей на интервале $nT\le t\le(n+1)T$ определяется интегрированием (4.3.53) таким образом:

$$\phi(t;\mathbf{I})=2\pi f_d T\sum_{k=-\infty}^{n-1}I_k+2\pi f_d q(t-nT)I_n=\theta_n+2\pi hI_n q(t-nT), \qquad (4.3.54)$$

где h, θ_n и $q(t)$ определяются так:

$$h=2f_dT, \qquad (4.3.55)$$

$$\theta_n=\pi h\sum_{k=-\infty}^{n-1}I_k, \qquad (4.3.56)$$

$$q(t)=\begin{cases}0 & (t<0),\\ t/2T & (0\le t<T),\\ \frac{1}{2} & (t>T).\end{cases} \qquad (4.3.57)$$

Видим, что θ_n представляет накопление (память) от всех информационных символов, переданных до момента $(n-1)T$. Параметр h называется индексом модуляции.

Модуляция с непрерывной фазой (МНФ). Выраженный в виде (4.3.54) сигнал ЧМНФ является специальным случаем общего класса сигналов МНФ (модуляции с непрерывной фазой), в которой фаза несущей определяется так:

$$\phi(t;\mathbf{I})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{n-1}I_k h_k q(t-kT),\qquad nT\le t\le(n+1)T, \qquad (4.3.58)$$

где $\{I_k\}$ – последовательность информационных символов, выбранных из алфавита $\pm1,\pm3,\ldots,\pm(M-1)$, $\{h_k\}$ – последовательность индексов модуляции, а $q(t)$ – нормированная огибающая сигнала.

Когда $h_k=h$ для всех k, индекс модуляции фиксирован для всех символов. Когда индекс модуляции меняется от одного символа к другому, сигнал МНФ называется *многоиндексным* (*multi-h*). В этом случае $\{h_k\}$ меняется циклически, принимая значения ряда индексов. Форму сигнала $q(t)$ можно представить в общем виде как интеграл от импульса $g(t)$:

$$q(t)=\int_0^t g(\tau)\,d\tau. \qquad (4.3.59)$$

4.4. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИГНАЛОВ ЦИФРОВОЙ МОДУЛЯЦИИ

В большинстве систем цифровой связи имеющаяся в распоряжении полоса частот ограничена. Как следствие, проектировщик системы должен рассмотреть, как ограничение полосы частот канала влияет на выбор техники модуляции, используемой при передаче информации. Из этих соображений для нас важно определить спектральные характеристики сигналов цифровой модуляции, рассмотренных в разд. 4.3.

Поскольку информационная последовательность случайная, сигнал цифровой модуляции является случайным процессом. Мы интересуемся спектральной плотностью мощности такого процесса. Исходя из спектральной плотности мощности, мы можем определить полосу частот канала, необходимую для передачи информационного сигнала. Сначала определим спектральные характеристики класса сигналов с линейной модуляцией. Затем рассмотрим нелинейные ЧМНФ, МНФ и базовый модулирующий сигнал с памятью.

4.4.1. Спектр мощности сигналов линейной модуляции

Начиная с формы сигнала

$$s(t) = \mathrm{Re}\left[\upsilon(t)\,e^{j2\pi f_c t}\right],$$

которая отображает полосовой сигнал $s(t)$ через эквивалентный низкочастотный $\upsilon(t)$, можем выразить автокорреляционную функцию $s(t)$ так:

$$\phi_{ss}(\tau) = \mathrm{Re}\left[\phi_{\upsilon\upsilon}(\tau)e^{j2\pi f_c \tau}\right], \qquad (4.4.1)$$

где $\phi_{\upsilon\upsilon}(\tau)$ – автокорреляционная функция низкочастотного эквивалента $\upsilon(t)$.

Преобразование Фурье (4.4.1) даёт желаемое выражение для спектральной плотности мощности $\Phi_{ss}(f)$ в виде

$$\Phi_{ss}(f) = \tfrac{1}{2}\left[\Phi_{\upsilon\upsilon}(f - f_c) + \Phi_{\upsilon\upsilon}(-f - f_c)\right], \qquad (4.4.2)$$

где $\Phi_{\upsilon\upsilon}(f)$ – спектральная плотность мощности $\upsilon(t)$. Достаточно определить автокорреляционную функцию и спектральную плотность мощности для эквивалентного низкочастотного сигнала $\upsilon(t)$.

Сначала рассмотрим методы линейной цифровой модуляции, для которых $\upsilon(t)$ можно представить в общем виде так:

$$\upsilon(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n g(t - nT), \qquad (4.4.3)$$

где скорость передачи канальных символов равна $1/T = R/k$ симв./с, а $\{I_n\}$ представляет последовательность символов, которая возникает при отображении k-битовых блоков в соответствующие сигнальные точки, выбираемые по соответствующей диаграмме пространства сигналов. Отметим, что в АМ последовательность $\{I_n\}$ вещественна и соответствует значениям амплитуд передаваемого сигнала, но в ФМ, КАМ и комбинированной АМ-ФМ последовательность $\{I_n\}$ комплексная, так как точка сигналов имеет двухмерное представление. Автокорреляционная функция случайного процесса $\upsilon(t)$ равна

$$\begin{aligned}\phi_{\upsilon\upsilon}(t+\tau;\, t) &= \tfrac{1}{2}E\left[\upsilon^*(t)\,\upsilon(t+\tau)\right] = \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} E\left[I_n^* I_m\right] g^*(t - nT)\, g(t + \tau - mT).\end{aligned} \qquad (4.4.4)$$

Предположим, что последовательность информационных символов $\{I_n\}$ стационарна в широком смысле со средним μ_I и автокорреляционной функцией

$$\phi_{ii}(m) = \tfrac{1}{2} E\left[I_n^* I_{n+m}\right]. \tag{4.4.5}$$

Тогда (4.4.4) можно выразить так:

$$\begin{aligned}\phi_{\upsilon\upsilon}(t+\tau;\, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(m-n) g^*(t-nT) g(t+\tau-mT) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} g^*(t-nT) g(t+\tau-nT-mT).\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

Вторая сумма в (4.4.6), именно

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g^*(t-nT) g(t+\tau-nT-mT),$$

– периодическая функция по переменной t с периодом T. Следовательно, $\phi_{\upsilon\upsilon}(t+\tau;\, t)$ – также периодическая функция по переменной t с периодом T. Это означает, что

$$\phi_{\upsilon\upsilon}(t+T+\tau;\, t+T) = \phi_{\upsilon\upsilon}(t+\tau;\, t). \tag{4.4.7}$$

Кроме того, среднее значение $\upsilon(t)$, которое равно

$$E[\upsilon(t)] = \mu_I \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t-nT), \tag{4.4.8}$$

– периодическая функция по переменной t с периодом T. Следовательно, $\upsilon(t)$ является случайным процессом, имеющим периодические средние значения и автокорреляционную функцию. Такой процесс называется *циклостационарным процессом* или *периодически стационарным процессом в широком смысле*, как описано в разд. 2.2.6.

Чтобы рассчитать спектральную плотность мощности циклостационарного процесса зависимость $\phi_{\upsilon\upsilon}(t+\tau;\, t)$ от переменной t должна быть исключена. Это можно сделать просто путём усреднения $\phi_{\upsilon\upsilon}(t+\tau;\, t)$ по t по одному периоду T. Таким образом,

$$\begin{aligned}\overline{\phi}_{\upsilon\upsilon}(\tau) &= \tfrac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \phi_{\upsilon\upsilon}(t+\tau;t)\, dt = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^*(t-nT) g(t+\tau-nT-mT)\, dt = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{T} \int_{-T/2-nT}^{T/2-nT} g^*(t) g(t+\tau-mT)\, dt.\end{aligned} \tag{4.4.9}$$

Мы интерпретируем интеграл в (4.4.9) вместе с суммой по n как временную автокорреляционную функцию $g(t)$ и определим её как

$$\phi_{gg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t) g(t+\tau)\, dt. \tag{4.4.10}$$

Следовательно, (4.4.9) можно выразить так:

$$\overline{\phi}_{\upsilon\upsilon}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(m) \phi_{gg}(\tau-mT). \tag{4.4.11}$$

Преобразование Фурье (4.4.11) даёт (среднюю) спектральную плотность мощности $\upsilon(t)$ в виде

$$\Phi_{\upsilon\upsilon}(f) = \frac{1}{T} |G(f)|^2 \Phi_{ii}(f), \tag{4.4.12}$$

где $G(f)$ – преобразованное Фурье для $g(t)$, а $\Phi_{ii}(f)$ определяет спектральную плотность

мощности информационной последовательности, определяемую как

$$\Phi_{ii}(f)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\phi_{ii}(m)\,e^{-j2\pi fmT}. \qquad (4.4.13)$$

Результат (4.4.12) иллюстрирует зависимость спектральной плотности мощности $\upsilon(t)$ от спектральных характеристик импульса $g(t)$ и информационной последовательности $\{I_n\}$. Это означает, что спектральными характеристиками $\upsilon(t)$ можно управлять через огибающую импульса $g(t)$ и корреляционные характеристики информационной последовательности.

В то время как зависимость $\Phi_{\upsilon\upsilon}(f)$ от $G(f)$ легко понять в (4.4.12), влияние корреляционных свойств информационной последовательности более тонкое. Прежде всего заметим, что для произвольной автокорреляционной функции $\phi_{ii}(m)$ соответствующая спектральная плотность мощности $\Phi_{ii}(f)$ – периодическая функция по частоте с периодом $1/T$. Действительно выражение (4.4.13), определяющее спектр $\Phi_{ii}(f)$ по $\phi_{ii}(m)$, является комплексным рядом Фурье с коэффициентами Фурье $\{\phi_{ii}(m)\}$. Как следствие, автокорреляционная последовательность $\phi_{ii}(m)$ определяется так:

$$\phi_{ii}(m)=T\int_{-T/2}^{T/2}\Phi_{ii}(f)e^{j2\pi f_m T}df. \qquad (4.4.14)$$

Во-вторых, рассмотрим случай, когда информационные символы в последовательности вещественные и взаимно некоррелированные. В этом случае автокорреляционную функцию $\phi_{ii}(m)$ можно выразить так:

$$\phi_{ii}(m)=\begin{cases}\sigma_i^2+\mu_i^2, & m=0,\\ \mu_i^2, & m\neq 0,\end{cases} \qquad (4.4.15)$$

где σ_i^2 означает дисперсию информационных символов. Если (4.4.15) подставить в (4.4.13), получим

$$\Phi_{ii}(f)=\sigma_i^2+\mu_i^2\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-j2\pi fmT}. \qquad (4.4.16)$$

Сумма в (4.4.16) – периодическая функция частоты с периодом $1/T$. Её можно рассмотреть как комплексный ряд Фурье для периодической последовательности δ-импульсов с периодом $1/T$. Следовательно, (4.4.16) можно также выразить в виде

$$\Phi_{ii}(f)=\sigma_i^2+\frac{\mu_i^2}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{m}{T}\right). \qquad (4.4.17)$$

Подстановка (4.4.17) в (4.4.12) определяет спектральную плотность мощности $\upsilon(t)$ для случая, когда информационные символы не коррелированы. Получаем

$$\Phi_{\upsilon\upsilon}(f)=\frac{\sigma_i^2}{T}\left|G(f)\right|^2+\frac{\mu_i^2}{T^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left|G\left(\frac{m}{T}\right)\right|^2\delta\left(f-\frac{m}{T}\right). \qquad (4.4.18)$$

Выражение (4.4.18) для спектральной плотности мощности специально разделено на два слагаемых, чтобы подчеркнуть два различных вида спектральных компонент. Первое определяет непрерывный спектр, и его огибающая зависит только от спектральной характеристики сигнального импульса $g(t)$. Второе слагаемое состоит из дискретных частотных компонент, появляющихся через интервал $1/T$. Каждая такая компонента имеет мощность, пропорциональную $\left|G(f)\right|^2$ при $f=m/T$. Заметим, что дискретные частотные

компоненты исчезают, когда информационные символы имеют нулевое среднее, т.е. $\mu_i = 0$. Это условие обычно желательно для техники цифровой модуляции. Оно выполняется, когда информационные символы равновероятны и симметрично расположены на комплексной плоскости. Таким образом, проектировщик системы может управлять спектральными характеристиками сигналов цифровой модуляции путём специального подбора характеристик информационной последовательности, которую нужно передать.

Пример 4.4.1. Чтобы проиллюстрировать влияние $g(t)$ на огибающую спектра, рассмотрим прямоугольный импульс, показанный на рис. 4.4.1(а). Преобразование Фурье от $g(t)$ равно

$$G(f) = AT\frac{\sin \pi f T}{\pi f T} e^{-j\pi f T}.$$

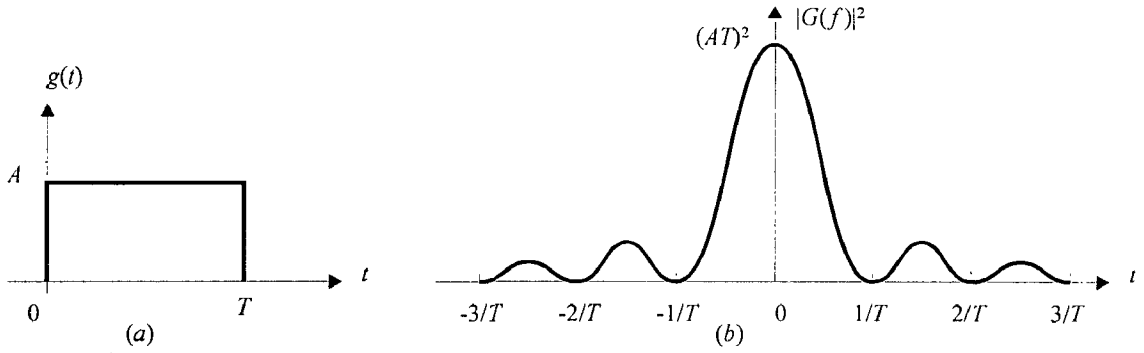


Рис. 4.4.1. Прямоугольный импульс и его спектральная плотность энергии $|G(f)|^2$

Следовательно,

$$|G(f)|^2 = (AT)^2\left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T}\right)^2. \qquad (4.4.19)$$

Этот спектр показан на рис. 4.4.1(b). Заметим, что спектральная плотность принимает нулевые значения в точках оси частот, кратных $1/T$, и убывает обратно квадрату частоты. Как следствие наличия нулей в $G(f)$, все дискретные спектральные компоненты в (4.4.18), кроме одной, исчезают. Подставляя (4.4.19) в (4.4.18), имеем

$$\Phi_{vv}(f) = \sigma_i^2 A^2 T\left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T}\right)^2 + A^2\mu_i^2\delta(f). \qquad (4.4.20)$$

Пример 4.4.2. В качестве второй иллюстрации влияния на огибающую спектра импульса $g(t)$ рассмотрим импульс приподнятого косинуса

$$g(t) = \frac{A}{2}\left[1 + \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{T}{2}\right)\right], \qquad 0 \le t \le T. \qquad (4.4.21)$$

График этой функции дан на рис. 4.4.2(a). Его преобразование Фурье легко получить, и его можно выразить в виде

$$G(f) = \frac{AT}{2}\frac{\sin \pi f T}{\pi f T(1 - f^2T^2)} e^{-j\pi f T}. \qquad (4.4.22)$$

Квадрат амплитуды $G(f)$ показан на рис. 4.4.2(b). Интересно отметить, что спектр имеет нули в точках $f = n/T$, $n = \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots$. Следовательно, все дискретные

спектральные компоненты в (4.4.18), кроме тех, которые на частотах $f = 0$ и $f = \pm 1/T$, исчезают. По сравнению со спектром при прямоугольном импульсе спектр приподнятого косинуса имеет более широкий главный лепесток, но хвосты уменьшаются обратно f^6.

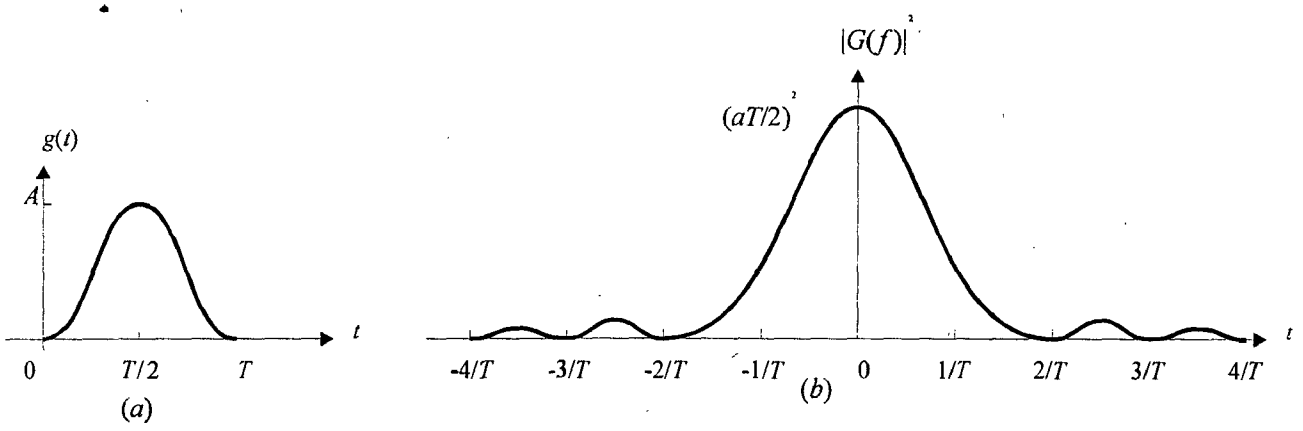


Рис. 4.4.2. Импульс приподнятого косинуса и его спектральная плотность энергии $|G(f)|^2$

Пример 4.4.3. Чтобы проиллюстрировать влияние на огибающую спектра операций, выполняемых по отношению к информационной последовательности, рассмотрим двоичную последовательность $\{b_n\}$, по которой формируем символы информационной последовательности

$$I_n = b_n + b_{n-1}. \tag{4.4.23}$$

Предполагается, что последовательность $\{b_n\}$ содержит некоррелированные случайные величины, каждое с нулевым средним и единичной дисперсией. Тогда автокорреляционная функция последовательности $\{I_n\}$ равна

$$\phi_{ii}(m) = E\left(I_n I_{n+m}\right) = \begin{cases} 2 & m = 0, \\ 1 & m = \pm 1, \\ 0 & \text{другие } m. \end{cases} \tag{4.4.24}$$

Следовательно спектральная плотность мощности входной последовательности равна

$$\Phi_{ii}(f) = 2\left(1 + \cos 2\pi f T\right) = 4\cos^2 \pi f T, \tag{4.4.25}$$

и соответствующая спектральная плотность мощности для (низкочастотного) модулирующего сигнала

$$\Phi_{\upsilon\upsilon}(f) = \frac{4}{T}\left|G(f)\right|^2 \cos^2 \pi f T. \tag{4.4.26}$$

4.4.2. Спектр мощности для сигналов ЧМНФ и МНФ

В этом разделе мы получим спектральную плотность мощности для класса сигналов МНФ с постоянной амплитудой, которые были описаны в разд. 4.3.3. Начнём с расчёта автокорреляционной функции и её преобразования Фурье, как мы это сделали в случае линейной модуляции. Сигнал МНФ с постоянной амплитудой выражается так:

$$s(t;\mathbf{I}) = A\cos\left[2\pi f_c t + \phi(t;\mathbf{I})\right], \tag{4.4.27}$$

где

$$\phi(t;\mathbf{I}) = 2\pi h \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k q(t - kT). \tag{4.4.28}$$