1.3. Геометрические методы в теории сигналов

При решении многих теоретических и прикладных задач радиотехники возникают такие вопросы: 1) в каком смысле можно говорить о величине сигнала, утверждая, например, что один сигнал значительно превосходит другой; 2) можно ли объективно оценивать, насколько два неодинаковых сигнала «похожи» друг на друга?

В XX в. был создан функциональный анализ – раздел математики, обобщающий наши интуитивные представления о геометрической структуре пространства. Оказалось, что идеи функционального анализа дают возможность создать стройную теорию сигналов, в основе которой лежит концепция сигнала как вектора в специальным образом скоординированном бесконечномерном пространстве.

В этой книге при изложении методов функционального анализа мы будем вынуждены прибегать в ряде случаев к качественным представлениям. Читателю, интересующемуся этими методами более глубоко, можно рекомендовать [7, 8]

Линейное пространство сигналов. Пусть $M = \{s_1(t), s_2(t), \ldots\}$ – множество сигналов. Причина объединения этих объектов – наличие некоторых свойств, общих для всех элементов множества M.

Пример 1.4. *Множество M образовано всевозможными аналоговыми сигналами, отличными от нуля на интервале времени* (0, 15 мкс) *и равными нулю вне этого интервала.*

Пример 1.5. *Множество M состоит из сигналов вида $s_n(t) = A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$ – гармонических колебаний, отличающихся своими амплитудами, частотами и начальными фазами.*

Исследование свойств сигналов, образующих такие множества, становится особенно плодотворным тогда, когда удается выражать одни элементы множества через другие элементы. Принято говорить, что множество сигналов наделено при этом определенной *структурой*. Выбор той или иной структуры должен быть продиктован физическими соображениями. Так, применительно к электрическим колебаниям известно, что они могут складываться, а также умножаться на произвольный масштабный коэффициент. Это дает возможность в множествах сигналов ввести *структуру линейного пространства*.

■

структура линейного пространства

Множество сигналов M образует *вещественное линейное пространство*, если справедливы следующие аксиомы:

1. Любой сигнал $u \in M$ при любых t принимает лишь вещественные значения.

2. Для любых $u \in M$ и $v \in M$ существует их сумма $w = u + v$, причем w также содержится в M. Операция суммирования коммутативна: $u + v = v + u$ и ассоциативна: $u + (v + x) = (u + v) + x$.

3. Для любого сигнала $s \in M$ и любого вещественного числа α определен сигнал $f = \alpha s \in M$.

4. Множество M содержит особый нулевой элемент $\varnothing$, такой, что $u + \varnothing = u$ для всех $u \in M$.

Приведенная здесь система аксиом линейного пространства не является исчерпывающе полной. В математике, исходя из требований логической строгости, эту систему дополняют рядом вспомогательных утверждений

Правило сложения напряжений на элементах цепи, включенных последовательно, есть следствие второго закона Кирхгофа

Если математические модели сигналов приниимают комплексиые значения, то, допуская в аксиоме 3 умножение иа комплексиое число, приходим к понятию *комплексного линейного пространства.*

Введение структуры линейиого пространства является первым шагом иа пути к геометрической трактовке сигналов. Элементы линейных пространств часто называют *векторами*, подчеркивая аналогию свойств этих объектов и обычных трехмерных векторов.

Ограиичения, иалагаемые аксиомами лииейного пространства, весьма жестки. Далеко не каждое миожество сигналов оказывается линейным пространством.

Пример 1.6. *Множество M состоит из всевозможных прямоугольных видеоимпульсов напряжения, существующих на интервале времени* (0, 20 мкс), *причем амплитуды импульсов не превышают* 10 В.

Сложив, например, импульсы с амплитудами 6 и 8 В, получаем импульс, не принадлежащий миожеству M. Поэтому M не есть линейное пространство.

Понятие координатного базиса. Как и в обычном трехмерном пространстве, в линейном пространстве сигналов можно выделить специальиое подмножество, играющее роль координатных осей.

Говорят, что совокупность векторов $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$, принадлежащих M, является *линейно независимой*, если равенство

$$\sum_i \alpha_i e_i = \varnothing$$

возможно лишь в случае одиовремеиного обращения в нуль всех числовых коэффициентов α_i.

Система линейно независимых векторов образует *координатный базис* в линейиом пространстве. Если даио разложение иекоторого сигиала $s(t)$ в виде

$$s(t) = \sum_i c_i e_i,$$

Какой-либо элемент координатного базиса не может быть выражен в виде линейной комбинации оставшихся элементов

то числа $\{c_1, c_2, c_3, \ldots\}$ являются *проекциями* сигнала $s(t)$ отиосительно выбраиного базиса.

В задачах теорни сигналов число базисиых векторов, как правило, неограиичению велико. Такие лиинейные пространства называют *бесконечномерными.* Естествеиио, что теорня этих пространств не может быть вложена в формальиую схему линейной алгебры, где число базисных векторов всегда конечно.

Пример 1.7. *Линейное пространство образовано сигналами, которые описываются многочленами неограниченно высокого порядка:*

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n t^n$$

(такие функции называются аналитическими).

Координатным базисом в этом пространстве служит система одночленов $\{e_0 = 1;\ e_1 = t;\ e_2 = t^2;\ \ldots\}$.

Нормированное линейное пространство. Энергия сигнала. Для того чтобы продолжить и углубить геометрическую трактовку теории сигналов, необходимо ввести новое понятие, которое по своему смыслу соответствует длине вектора. Это позволит не только придать точный смысл высказыванию вида «первый сигнал больше второго», но и указать, на сколько он больше.

Длину вектора в математике называют его *нормой*. Линейное пространство сигналов L является *нормированным*, если каждому вектору $s(t) \in L$ однозначно сопоставлено число $\| s \|$ – норма этого вектора, причем выполняются следующие аксиомы нормированного пространства:

1. Норма неотрицательна, т. е. $\| s \| \geqslant 0$. Норма $\| s \| = 0$ тогда и только тогда, если $s = \varnothing$.

2. Для любого числа α справедливо равенство $\| \alpha s \| = |\alpha| \cdot \| s \|$.

3. Если $s(t)$ и $p(t)$ – два вектора из L, то выполняется неравенство треугольника: $\| s + p \| \leqslant \| s \| + \| p \|$.

Можно предложить разные способы введения нормы сигналов. В радиотехнике чаще всего полагают, что вещественные аналоговые сигналы имеют норму

$$\| s \| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\, dt} \qquad (1.15)$$

(из двух возможных значений корня выбирается положительное). Для комплексных сигналов норма

$$\| s \| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, s^*(t)\, dt},$$

где * – символ комплексно-сопряженной величины.

Квадрат нормы носит название *энергии сигнала*

$$E_s = \| s \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\, dt. \qquad (1.16)$$

Именно такая энергия выделяется в резисторе с сопротивлением 1 Ом, если на его зажимах существует напряжение $s(t)$.

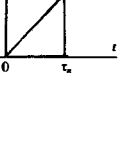
Данная аксиоматика в равной мере относится как к аналоговым, так и к дискретным сигналам

норма сигнала

Если сигнал дискретен, то операция интегрирования должна быть заменена суммированием по всем отсчетам сигнала

энергии сигнала

Пример 1.8. *Сигнал $s(t)$ представляет собой треугольный импульс напряжения с амплитудой U и длительностью $\tau_и$. Вычислить энергию и норму такого сигнала.*



На интервале времени $(0, \tau_и)$ сигнал описывается функцией

$$s(t) = Ut/\tau_и.$$

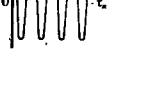
Энергия сигнала

$$E_s = (U^2/\tau_и^2)\int_0^{\tau_и} t^2\,dt = U^2\tau_и/3.$$

Норма сигнала

$$\|s\| = \sqrt{E_s} = U\sqrt{\tau_и}/\sqrt{3}.$$

Пример 1.9. *Вычислить энергию радиоимпульса с прямоугольной формой огибающей. Импульс существует на интервале времени $(0, \tau_и)$ и описывается функцией $s(t) = U_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.*



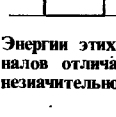
В соответствии с формулой (1.16)

$$E_s = U_0^2\int_0^{\tau_и}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)\,dt = \frac{U_0^2}{\omega_0}\int_0^{\omega_0\tau_и+\varphi_0}\cos^2 x\,dx.$$

Выполнив интегрирование, получаем

$$E_s = \frac{U_0^2}{4\omega_0}\left[2(\omega_0\tau_и + \varphi_0) + \sin 2(\omega_0\tau_и + \varphi_0)\right].$$

Если внутри импульса содержится много периодов высокочастотного заполнения, так что $\omega_0\tau_и \gg 1$, то $E_s \approx U_0^2\tau_и/2$ независимо от выбора параметров ω_0 и φ_0.



Энергии этих сигналов отличаются незначительно

Определять норму сигнала с помощью формулы (1.15) целесообразно по следующим причинам:

1. В радиотехнике о величине сигнала часто судят, исходя из суммарного энергетического эффекта, например количества теплоты, выделяемой в резисторе.

2. Энергетическая норма оказывается «нечувствительной» к изменениям формы сигнала, может быть, и значительным, но происходящим на коротких отрезках времени.

Линейное нормированное пространство с конечной величиной нормы вида (1.15) носит название *пространства функций с интегрируемым квадратом* и кратко обозначается L_2.

Метрическое пространство. Теперь необходимо ввести еще одно фундаментальное понятие, которое обобщало бы наше обычное представление о расстоянии между точками в пространстве.

метрика

Говорят, что линейное пространство L становится *метрическим пространством*, если каждой паре элементов u, $v \in L$ сопоставлено неотрицательное число $\rho(u, v)$, называемое *метрикой*, или *расстоянием* между этими элементами. Метрика, независимо от способа ее определения, должна подчиняться аксиомам метрического пространства:

1. $\rho(u, v) = \rho(v, u)$ (**рефлексивность метрики**).
2. $\rho(u, u) = 0$ при любых $u \in L$.

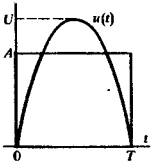
3. Каков бы ни был элемент $w \in L$, всегда $\rho(u, v) \leqslant \leqslant \rho(u, w) + \rho(w, v)$.

Обычно метрику определяют как норму разности двух сигналов:

$$\rho(u, v) = \| u - v \|. \qquad (1.17)$$

Норму, в свою очередь, можно понимать как расстояние между выбранным элементом пространства и нулевым элементом: $\| u \| = \rho(u, \varnothing)$.

Зная метрику, можно судить, например, о том, насколько хорошо одни из сигналов аппроксимирует другой.



Пример 1.10. *Сигнал $u(t)$ представляет собой отрезок синусоиды, обращающейся в нуль на концах отрезка $[0, T]$. Высота импульса U известна. Выбрать амплитуду A прямоугольного импульса $v(t)$ той же длительности так, чтобы расстояние между этими двумя сигналами было минимальным.*

Сигнал $u(t)$ представляется формулой

$$u(t) = U \sin \frac{\pi t}{T}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Квадрат расстояния между сигналами

$$\rho^2(u, v) = \int_0^T \left(U \sin \frac{\pi t}{T} - A \right)^2 \mathrm{d}t.$$

Проведя интегрирование, имеем

$$\rho^2(u, v) = U^2 T/2 - 4AUT/\pi + A^2 T.$$

То, что в точке экстремума действительно достигается минимум, вытекает из неположительности второй производной исследуемой функции

Исследуя это выражение на экстремум, убеждаемся, что минимум расстояния будет достигнут, если $A = 2U/\pi \approx 0.637U$. При этом

$$\rho^2_{\min} = U^2 T(1/2 - 4/\pi^2) \approx 0.095 U^2 T,$$

$$\rho_{\min} \approx 0.308 U \sqrt{T}.$$

Заметим, что энергия синусоидального импульса

$$E_u = U^2 \int_0^T \sin^2 \frac{\pi t}{T} \mathrm{d}t = \frac{U^2 T}{2},$$

▲

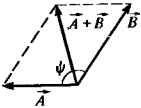
решите задачу 8

его норма $\| u \| = 0.707 U \sqrt{T}$.

Итак, при выбранной метрике минимально достижимое расстояние между рассматриваемыми сигналами составляет 44% от нормы синусоидального импульса.

1.4. Теория ортогональных сигналов

Введя в множестве сигналов структуру линейного пространства, определив норму и метрику, мы, тем не менее, лишены возможности вычислить такую характеристику, как угол между двумя векторами. Это удается сделать, сформу-



В задачах физики скалярное произведение векторов возникает всегда при вычислении работы сил поля при заданном перемещении в пространстве

линровав важное понятие скалярного произведения элементов линейного пространства.

Скалярное произведение сигналов. Напомним, что если в обычном трехмерном пространстве известны два вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$, то квадрат модуля их суммы

$$|\vec{A}+\vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2(\vec{A},\vec{B}), \tag{1.18}$$

где $(\vec{A},\vec{B}) = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cos\psi$ – скалярное произведение этих векторов, зависящее от угла ψ между ними.

Действуя по аналогии, вычислим энергию суммы двух сигналов u и v:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} (u+v)^2\,dt = E_u + E_v + 2\int_{-\infty}^{\infty} uv\,dt. \tag{1.19}$$

В отличие от самих сигналов их энергии неаддитивны – энергия суммарного сигнала содержит в себе так называемую *взаимную энергию*

$$E_{uv} = 2\int_{-\infty}^{\infty} uv\,dt.$$

Сравнивая между собой формулы (1.18) и (1.19), определим *скалярное произведение* вещественных сигналов u и v:

$$\boxed{(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,v(t)\,dt}, \tag{1.20}$$

Следует отметить, что в соответствии с формулой (1.21) угол между двумя сигналами должен лежать в интервале от 0 до 180°

а также косинус угла между ними:

$$\cos\psi = \frac{(u,v)}{\|u\|\cdot\|v\|}. \tag{1.21}$$

Скалярное произведение обладает свойствами:

1. $(u,u) \geqslant 0$;
2. $(u,v) = (v,u)$;
3. $(\lambda u, v) = \lambda\,(u,v)$, где λ – вещественное число;
4. $(u+v, w) = (u,w) + (v,w)$. (1.22)

Давид Гильберт (1862—1943) — известный немецкий математик

Линейное пространство с таким скалярным произведением, полное в том смысле, что оно содержит в себе все предельные точки любых сходящихся последовательностей векторов из этого пространства, называется *вещественным гильбертовым пространством H*.

Справедливо фундаментальное неравенство Коши – Буняковского

$$\boxed{|(u,v)| \leqslant \|u\|\cdot\|v\|}. \tag{1.23}$$

Из данного неравенства вытекает, в частности, что косинус угла между векторами в пространстве сигналов не превышает единицы

Если сигналы принимают комплексные значения, то можно определить *комплексное гильбертово пространство*, введя в нем скалярное произведение по формуле

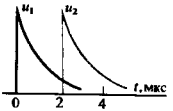
$$(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,v^*(t)\,dt, \tag{1.24}$$

такое, что $(u,v) = (v,u)^*$.

Пример 1.11. *Имеются два смещенных во времени экспоненциальных импульса* (**В**):

$u_1(t) = 5\exp(-10^5 t)\,\sigma(t)$,

$u_2(t) = 5\exp[-10^5 (t - 2\cdot 10^{-6})]\,\sigma(t - 2\cdot 10^{-6})$.



Найти скалярное произведение данных сигналов, а также угол ψ *между ними.*

Энергии этих сигналов одинаковы:

$$\|u_1\|^2 = \|u_2\|^2 = 25\int_0^{\infty} e^{-2\cdot 10^5 t}\,dt = 1.25\cdot 10^{-4}\ \text{В}^2\cdot\text{с}.$$

Скалярное произведение

$$(u_1, u_2) = 25\int_0^{\infty} e^{-10^5 t} e^{-10^5 (t + 2\cdot 10^{-6})}\,dt = 1.023\cdot 10^{-4}\ \text{В}^2\cdot\text{с}.$$

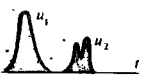
Отсюда $\cos\psi = 0.819$ и $\psi = 35°$.

Ортогональные сигналы и обобщенные ряды Фурье. Два сигнала u и v называются *ортогональными*, если их скалярное произведение, а значит, и взаимная энергия равны нулю:

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,v(t)\,dt = 0. \qquad (1.25)$$

■ **принцип ортогональности**

Пусть H – гильбертово пространство сигналов с конечным значением энергии. Эти сигналы определены на отрезке времени $[t_1, t_2]$, конечном или бесконечном. Предположим, что на этом же отрезке задана бесконечная система функций $\{u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots\}$, ортогональных друг другу и обладающих единичными нормами:



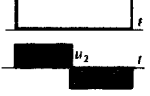
Два таких импульса разнесены во времени и заведомо ортогональны

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \qquad (1.26)$$

Говорят, что при этом в пространстве сигналов задан *ортонормированный базис*.

Разложим произвольный сигнал $s(t) \in H$ в ряд:

$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i u_i(t). \qquad (1.27)$$

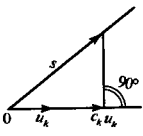


Два таких импульса также ортогональны

Представление (1.27) называется *обобщенным рядом Фурье* сигнала $s(t)$ в выбранном базисе.

Коэффициенты данного ряда находят следующим образом. Возьмем базисную функцию u_k с произвольным номером k, умножим на нее обе части равенства (1.27) и затем проинтегрируем результаты по времени:

$$\int_{t_1}^{t_2} s(t)\,u_k(t)\,dt = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \int_{t_1}^{t_2} u_i u_k\,dt. \qquad (1.28)$$



На геометрическом языке интерпретация формулы (1.29) такова: коэффициент обобщенного ряда Фурье есть проекция вектора на базисное направление

Ввиду ортонормированности базиса в правой части равенства (1.28) остается только член суммы с номером $i = k$, поэтому

$$c_k = \int_{t_1}^{t_2} s(t)\, u_k(t)\, dt = (s, u_k). \qquad (1.29)$$

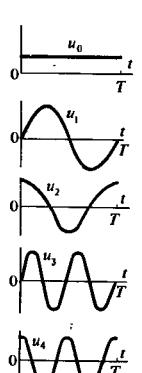
Возможность представления сигналов посредством обобщенных рядов Фурье является фактом большого принципиального значения. Вместо того чтобы изучать функциональную зависимость в несчетном множестве точек, мы получаем возможность характеризовать эти сигналы счетной (но, вообще говоря, бесконечной) системой коэффициентов обобщенного ряда Фурье c_k.

Примеры ортонормированных базисов. Способы построения систем взаимно ортогональных функций подробно изучены в математике (см., например, [7]). Здесь в качестве примеров будут описаны две наиболее важные и распространенные системы.

Ортонормированная система гармонических функций. Читатель может самостоятельно убедиться в том, что на отрезке $[0, T]$ система тригонометрических функций с кратными частотами, дополненная постоянным сигналом.

$$\begin{aligned} u_0 &= 1/\sqrt{T}, \\ u_1 &= \sqrt{2/T}\sin 2\pi t/T, \\ u_2 &= \sqrt{2/T}\cos 2\pi t/T, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ u_{2m-1} &= \sqrt{2/T}\sin 2\pi m t/T, \\ u_{2m} &= \sqrt{2/T}\cos 2\pi m t/T, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (1.30)$$

образует ортонормированный базис.



Сигналы, соответствующие функциям Уолша, легко генерируются с помощью микроэлектронных переключательных схем

Разложение периодических функций в ряды Фурье по этой системе будет подробно рассмотрено в гл. 2.

Ортонормированная система функций Уолша. В последнее время под влиянием методов обработки дискретных сигналов большое внимание уделяют ортонормированной системе функций Уолша, которые на отрезке своего существования $[-T/2, T/2]$ принимают лишь значения ± 1.

Введем безразмерное время $\vartheta = t/T$ и будем обозначать k-ю функцию Уолша, как это принято, символом $\mathrm{wal}(k, \vartheta)$. Аналитическое описание данных функций довольно сложно (см. Приложения). Однако идею построения этой системы легко усмотреть из рис. 1.4, на котором изображены графики нескольких первых функций Уолша.

Очевидна нормированность функций Уолша при любом значении k:

$$\|\mathrm{wal}(k, \vartheta)\|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{wal}^2(k, \vartheta)\, d\vartheta = 1.$$

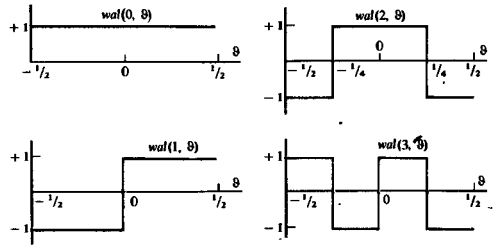


Рис. 1.4. Графики нескольких первых функций Уолша

Ортогональность этих функций следует из принципа их построения и может быть проверена непосредственно. Например:

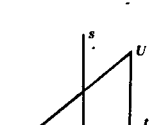
▲ решите задачу 10

$$\int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{wal}\,(1,\ \vartheta)\,\mathrm{wal}\,(2,\ \vartheta)\,d\vartheta = \int_{-1/2}^{-1/4} (-1)^2\,d\vartheta + \int_{-1/4}^{0} \cdot(-1)\cdot 1\,d\vartheta +$$

$$+ \int_{0}^{1/4} 1^2\,d\vartheta + \int_{1/4}^{1/2} 1\cdot(-1)\,d\vartheta = 0.$$

Разложение сигнала с конечной энергией, заданного на отрезке времени $[-T/2,\ T/2]$, в обобщенный ряд Фурье по функциям Уолша имеет вид

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,\mathrm{wal}\,(k,\ t/T). \qquad (1.31)$$



Пример 1.12. *Найти первые два коэффициента в разложении импульса треугольной формы по системе функций Уолша.*

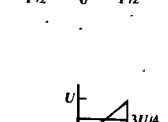
На отрезке времени $[-T/2,\ T/2]$ разлагаемый сигнал описывается функцией $s(t) = U\,(t/T + 1/2)$.

Вычисляем коэффициенты обобщенного ряда Фурье:

$$c_0 = \int_{-1/2}^{1/2} s(\vartheta)\,\mathrm{wal}\,(0,\vartheta)\,d\vartheta = U \int_{-1/2}^{1/2} (\vartheta + 1/2)\,d\vartheta = U/2,$$

$$c_1 = \int_{-1/2}^{1/2} s(\vartheta)\,\mathrm{wal}\,(1,\ \vartheta)\,d\vartheta = -U \int_{-1/2}^{0} (\vartheta + 1/2)\,d\vartheta +$$

$$+ U \int_{0}^{1/2} (\vartheta + 1/2)\,d\vartheta = U/4.$$



Итак, при аппроксимации колебания треугольной формы двумя первыми членами ряда по системе функций Уолша получается приближенное представление ступенчатой формы. Отметим, что с точки зрения введенной выше энергетической нормы уже такая грубая аппроксимация является удовлетворительной. Действительно, энергия исходного сигнала