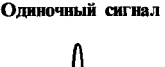
Одиночный сигнал



и периодическая последовательность



ченную ранее периодическую последовательность $s_{пер}(t)$, которая может быть представлена в виде комплексного ряда Фурье

$$s_{пер}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t} \qquad (2.13)$$

с коэффициентами

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\, e^{-jn\omega_1 t}\, dt. \qquad (2.14)$$

Для того чтобы вернуться к одиночному импульсному сигналу, устремим к бесконечности период повторения T. При этом, очевидно:

1. Частоты соседних гармоник $n\omega_1$ и $(n+1)\omega_1$ окажутся сколь угодно близкими, так что в формулах (2.13) и (2.14) дискретную переменную $n\omega_1$ можно заменить непрерывной переменной ω – текущей частотой.

2. Амплитудные коэффициенты C_n станут неограниченными малыми из-за наличия величины T в знаменателе формулы (2.14).

Наша задача состоит теперь в нахождении предельного вида формулы (2.13) при $T \to \infty$.

Понятие спектральной плотности сигнала. Воспользуемся тем, что коэффициенты ряда Фурье образуют комплексно-сопряженные пары:

$$C_n = A_n e^{j\varphi_n}, \quad C_{-n} = A_n e^{-j\varphi_n}.$$

Каждой такой паре отвечает гармоническое колебание

$$A_n e^{j(n\omega_1 t + \varphi_n)} + A_n e^{-j(n\omega_1 t + \varphi_n)} = 2A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

с комплексной амплитудой $2A_n e^{j\varphi_n} = 2C_n$.

В физике принято говорить, что при этом наблюдается когерентное сложение гармонических колебаний

Рассмотрим малый интервал частот $\Delta\omega$, образующий окрестность некоторого выбранного значения частоты ω_0. В пределах этого интервала будет содержаться $N = \Delta\omega/\omega_1 = \Delta\omega T/(2\pi)$ отдельных пар спектральных составляющих, частоты которых отличаются сколь угодно мало. Поэтому составляющие можно складывать так, *как будто все они имеют одну и ту же частоту и характеризуются одинаковыми комплексными амплитудами*

$$2C_k = \frac{2}{T}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-j\omega_0 t}\, dt.$$

В результате находим комплексную амплитуду эквивалентного гармонического сигнала, отображающего вклад всех спектральных составляющих, содержащихся внутри интервала $\Delta\omega$:

$$\Delta A_{\omega_0} = \frac{2N}{T}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-j\omega_0 t}\, dt = \frac{\Delta\omega}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-j\omega_0 t}\, dt. \qquad (2.15)$$

Функция

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \qquad (2.16)$$

носит название *спектральной плотности* сигнала $s(t)$. Формула (2.16) осуществляет *преобразование Фурье* данного сигнала.

Спектральную плотность называют также спектральной функцией или Фурье-образом сигнала

Физический смысл понятия спектральной плотности. Интерпретацию полученных результатов удобно провести, перейдя от угловой частоты ω к циклической частоте $f = \omega/(2\pi)$. При этом формула (2.15) приобретет вид

$$\Delta A_{f_0} = 2S(2\pi f_0)\,\Delta f. \qquad (2.17)$$

Ее надо трактовать так: спектральная плотность $S(2\pi f_0) = S(\omega_0)$ есть коэффициент пропорциональности между длиной малого интервала частот Δf и отвечающей ему комплексной амплитудой ΔA_{f_0} гармонического сигнала с частотой f_0. Коэффициент 2 означает, что вклад в амплитуду дают в равной мере и положительные и отрицательные частоты, образующие окрестности точек $\pm f_0$.

Принципиально важно, что спектральная плотность — комплекснозначная функция частоты, одновременно несущая информацию как об амплитуде, так и о фазе элементарных синусоид. На векториой диаграмме непериодического сигнала (рис. 2.5) длины элементарных векторов бесконечно малы, поэтому вместо ломаных линий (T конечно) получаются гладкие кривые ($T \to \infty$). Если на оси частот взять некоторую последовательность равноотстоящих точек $0 < \omega_1 < \omega_2 \ldots$, то модуль спектральной плотности $|S(\omega)|$ установит линейный масштаб вдоль кривых: чем больше модуль спектральной плотности в заданной области частот, тем реже будут располагаться частотные точки на векторной диаграмме.

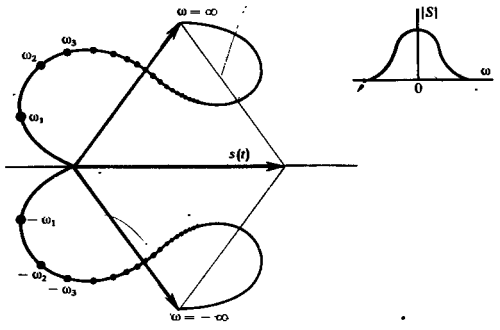


Рис. 2.5. Векторная диаграмма непериодического сигнала (справа изображена зависимость модуля спектральной плотности от частоты)

Данная диаграмма построена для некоторого фиксированного момента времени; с течением времени конфигурация кривых будет изменяться весьма сложным образом, поскольку чем выше частота, тем с большей угловой скоростью будут вращаться соответствующие участки кривых. Однако фактически важна не форма кривой, а лишь проекция на горизонтальную ось ее конечной точки (см. рисунок).

Обратное преобразование Фурье. Решим обратную задачу спектральной теории сигналов: найдем сигнал по его спектральной плотности, которую будем считать заданной.

Положим вновь, что непериодический сигнал получается из периодической последовательности, когда ее период устремляется к бесконечности. Воспользовавшись формулами (2.13) и (2.14), запишем

$$s(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} S(n\omega_1)\, e^{jn\omega_1 t}.$$

Входящий сюда коэффициент $1/T$ пропорционален разности между частотами соседних гармоник:

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}[n\omega_1 - (n-1)\omega_1]$$

при любом целом n. Таким образом,

$$s(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n\omega_1)\, e^{jn\omega_1 t}[n\omega_1 - (n-1)\omega_1].$$

Поскольку в пределе частотные интервалы между соседними гармониками неограниченно сокращаются, последнюю сумму следует заменить интегралом

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \qquad (2.18)$$

Эта важная формула называется *обратным преобразованием Фурье* для сигнала $s(t)$.

Один и тот же сигнал допускает две совершенно равноправные математические модели — функцию во временной области и функцию в частотной области

Сформулируем окончательно фундаментальный результат: сигнал $s(t)$ и его спектральная плотность $S(\omega)$ взаимнооднозначно связаны прямым и обратным преобразованиями Фурье:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-j\omega t}\, dt, \qquad (2.19)$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega.$$

▲ **решите задачу 3**

Метод спектральных разложений чрезвычайно обогащает теорию сигналов. Например, часто математическая модель сигнала, представленная функцией $s(t)$, т. е. во временной области, сложна и недостаточно наглядна. В то же время описание этого сигнала в частотной области посредством функции $S(\omega)$ может оказаться простым. Однако гораздо