(34) Цифрова система зв'язку використовує двохпозиційну амплітудну модуляцію та цифровий імпульс з такою формою огинаючої $x(t) = \exp(-\pi a^2 t^2)$. Параметр a обмежує 3 умови: $x(T) = 0{,}01\, x(0)$, T – символьний інтервал.

Смуга W визначається умовою $X(W) = 0{,}01\, X(0)$, де $X(f)$ – Фур'є спектр $x(t)$. Знаходимо R/W, $T = 10^{-4}$ с. R – швидкість передачі.

$\frac{R}{W}$ – спектральна ефективність цифрової системи

$R = \frac{1}{T} = \frac{1}{10^{-4}\,c} =$ Так як модуляція двохпозиційна то символ складається з 2 біт.

За час T передається 2 біти

$$R = \frac{2\,біт}{T\,c} = \frac{2}{10^{-4}}\,\frac{біт}{c} = 2\cdot 10^4\,\frac{біт}{c}$$

Використаємо умову $x(T) = 0{,}01 \cdot x(0)$ для знаходження коефіцієнту a:

$$\exp(-\pi a^2 T^2) = 0{,}01 \cdot \exp(0) = 0{,}01$$

$$-\pi a^2 T^2 = \ln(0{,}01)$$

$$\pi a^2 T^2 = \ln\left(\frac{1}{0{,}01}\right) = \ln(100)$$

$$a^2 = \frac{\ln(100)}{\pi T^2}; \quad a = \sqrt{\frac{\ln(100)}{\pi T^2}} = \sqrt{\frac{4{,}60517}{3{,}14 \cdot 10^{-8}}} = 12110{,}4$$

Для знаходження W використаємо другу умову:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi a^2 t^2} e^{-j2\pi ft}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi a^2 \left(t^2 + j\frac{2ft}{a^2}\right)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi a^2 t^2 + 2\pi j ft + \left(j\frac{ft}{a^2}\right)^2} e^{\pi a^2 \left(j\frac{f}{a^2}\right)^2} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi a^2 \left(t + j\frac{f}{a^2}\right)^2} e^{-\pi a^2 \frac{f^2}{a^4}} dt = e^{-\pi \frac{f^2}{a^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi a^2 \left(t + j\frac{f}{a^2}\right)^2} dt =$$

$$= e^{-\pi \frac{f^2}{a^2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi a^2}} = \frac{e^{-\pi \frac{f^2}{a^2}}}{a}$$

$$X(w) = \frac{e^{-\pi \frac{w^2}{a^2}}}{a} = 0{,}01 \cdot X(0) = 0{,}01 \cdot \frac{1}{a}$$

$$0{,}01 = e^{-\pi \frac{w^2}{a^2}} \qquad \ln(0{,}01) = -\pi \frac{w^2}{a^2}$$

$$a^2 = \frac{\ln(100)}{\pi T^2}, \text{ підставимо} \rightarrow$$

$$-\ln(100) = -\pi w^2 \cdot \frac{\pi T^2}{\ln(100)}; \quad [\ln(100)]^2 = \pi^2 w^2 T^2$$

$$w = \frac{\ln(100)}{\pi T}$$

$$\frac{R}{W} = \frac{2/T}{\frac{\ln(100)}{\pi T}} = \frac{2}{T} \cdot \frac{\pi T}{\ln(100)} = \frac{2\pi}{\ln(100)} = \underline{1{,}364}$$