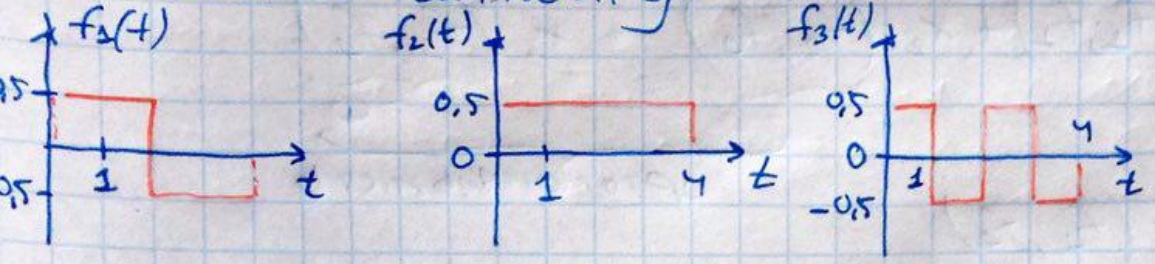
(29) Розглянуте три сигнали $f_n(t)$, що зображені на малюнку.



а) показати, що сигнали ортогональні.

Нам потрібно показати, що $(f_m, f_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f_m(t) \cdot f_n(t)\,dt = 0$ при $m \neq n$.

$$(f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1 \cdot f_2\,dt = \int_0^4 f_1 \cdot f_2\,dt = \int_0^2 0{,}5 \cdot 0{,}5\,dt + \int_2^4 (-0{,}5) \cdot 0{,}5 = \frac{1}{4}t\Big|_0^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)t\Big|_2^4 = \frac{1}{4}\cdot 2 - \frac{1}{4}(4-2) = 0$$

$$(f_1, f_3) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1 \cdot f_3\,dt = \int_0^4 f_1 \cdot f_3\,dt = \int_0^1 0{,}5 \cdot 0{,}5\,dt + \int_1^2 0{,}5 \cdot (-0{,}5)\,dt + \int_2^3 (-0{,}5) \cdot 0{,}5\,dt + \int_3^4 (-0{,}5) \cdot (-0{,}5)\,dt =$$

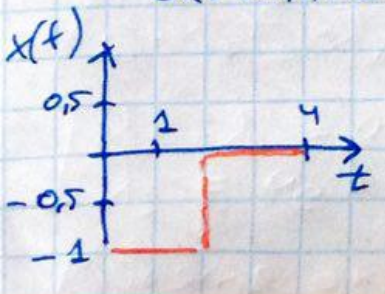
$$= \frac{1}{4}t\Big|_0^1 - \frac{1}{4}t\Big|_1^2 - \frac{1}{4}t\Big|_2^3 + \frac{1}{4}t\Big|_3^4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

$$(f_2, f_3) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2 \cdot f_3\,dt = \int_0^4 f_2 f_3\,dt = \int_0^1 0{,}5 \cdot 0{,}5\,dt + \int_1^2 0{,}5(-0{,}5)\,dt + \int_2^3 0{,}5 \cdot 0{,}5\,dt + \int_3^4 0{,}5(-0{,}5)\,dt = \frac{1}{4}t\Big|_0^1 -$$

$$- \frac{1}{4}t\Big|_1^2 + \frac{1}{4}t\Big|_2^3 - \frac{1}{4}t\Big|_3^4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

Отже, сигнали f_1, f_2, f_3 є ортогональними.

б) виразити сигнал $x(t)$ як лінійну комбінацію сигналів $f_n(t)$:



$$x(t) = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3$$

$$x_i = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot f_i(t)\,dt \leftarrow \text{вагові коефіцієнти}$$

Ця формула є результатом таких дій:

Домножимо $x(t)$ на f_1:

$$(x, f_1) = x_1 \cdot (f_1; f_1) + x_2 \cdot \underbrace{(f_2; f_1)}_{=0} + x_3 \cdot \underbrace{(f_3; f_1)}_{=0}$$

ортогональність

$$(x, f_1) = x_1 \cdot (f_1, f_1)$$

Тоді: $x_1 = \dfrac{(x, f_1)}{(f_1, f_1)}$

Знайдемо $(f_1, f_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1 \cdot f_1 \, dt = \int_0^2 \frac{1}{4} dt + \int_2^4 \frac{1}{4} dt =$

$= \frac{1}{4} t \Big|_0^2 + \frac{1}{4} t \Big|_2^4 = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 2 = 1$

$(f_2, f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2 \cdot f_2 \, dt = \int_0^4 \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} t \Big|_0^4 = 1$

$(f_3, f_3) = \int_{-\infty}^{\infty} f_3 \cdot f_3 \, dt = \int_0^1 \frac{1}{4} dt + \int_1^2 \frac{1}{4} dt + \int_2^3 \frac{1}{4} dt + \int_3^4 \frac{1}{4} dt =$

$= \frac{1}{4} t \Big|_0^1 + \frac{1}{4} t \Big|_1^2 + \frac{1}{4} t \Big|_2^3 + \frac{1}{4} t \Big|_3^4 = 1$

Отже: $x_i = (x, f_i) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_i \, dt$

Вагові коефіцієнти:

$x_1 = \int_0^4 x(t) \cdot f_1 \, dt = \int_0^2 (-1) \cdot 0{,}5 \, dt + \int_2^4 0 \cdot (-0{,}5) dt =$

$= -\frac{1}{2} t \Big|_0^2 = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$

$x_2 = \int_0^4 x(t) \cdot f_2 \, dt = \int_0^2 (-1) \cdot 0{,}5 \, dt + \int_2^4 0 \cdot 0{,}5 \, dt = -\frac{1}{2} t \Big|_0^2 = -1$

$x_3 = \int_0^3 x(t) \cdot f_3 \, dt = \int_0^1 (-1) \cdot 0{,}5 \, dt + \int_1^2 (-1) \cdot (-0{,}5) \, dt +$

$+ \int_2^3 0 \cdot 0{,}5 \, dt + \int_3^4 0 \cdot (-0{,}5) dt = -\frac{1}{2} t \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

$\underline{x(t) = -1 \cdot f_1 - 1 \cdot f_2 = -f_1 - f_2}$