отражение на несколько разных высотах; точка M, в которой отражается луч, выходящий из A, лежит несколько выше точки N, в которой отражается луч, выходящий из B. Наблюдатель видит два изображения: прямое и обратное. Создается иллюзия водной поверхности, в которой, как в зеркале, видно изображение неба.

Аналогично объясняется и верхний мираж. Он наблюдается зимой в холодных странах, когда вблизи земной поверхности образуется холодный слой воздуха, в котором показатель преломления быстро убывает с высотой. В горах, хотя и очень редко, наблюдается *боковой мираж*, связанный с изменением показателя преломления воздуха в боковом направлении. Вообще, в зависимости от характера распределения показателя преломления воздуха, мираж проявляется в весьма разнообразных и часто причудливых формах.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что в пренебрежении кривизной земной поверхности справедлива формула

$$\alpha_\infty - \alpha_0 = (n_0 - 1)\operatorname{tg}\alpha_0. \tag{4.7}$$

2. Определить, при каких градиентах температуры T воздуха возможен нижний мираж.

Р е ш е н и е. Показатель преломления, а с ним и плотность воздуха ρ должны увеличиваться с высотой h (т.е. $d\rho/dh > 0$). Воспользуемся уравнением состояния $\rho = \mu P/(RT)$, где P — давление, μ — относительная молекулярная масса воздуха, а R — универсальная газовая постоянная. Из него находим

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dh} = \frac{1}{P}\frac{dP}{dh} - \frac{1}{T}\frac{dT}{dh}.$$

При механическом равновесии воздуха $dP/dh = -\rho g$, где g — ускорение свободного падения. В результате получаем

$$\frac{dT}{dh} < \frac{\mu g}{R}. \tag{4.8}$$

Используя соотношение $c_P - c_v = R/\mu$, этому условию можно придать вид

$$\frac{dT}{dh} < -\frac{g}{c_P - c_v} \approx -0{,}025 \text{ К/м}, \tag{4.9}$$

где c_P и c_v — удельные теплоемкости воздуха при постоянном давлении и постоянном объеме. Такое распределение температур *конвективно неустойчиво*, так как для конвективной устойчивости необходимо

$$\frac{dT}{dh} \geqslant -\frac{g}{c_P} \approx -0{,}01 \text{ К/м}$$

(см. т. II, § 121).

§ 5. Плоские электромагнитные волны

1. С электромагнитными волнами мы встречались уже в томе III нашего курса (гл. X). Выведем еще раз основные результаты, полученные в § 139 указанного тома, предполагая здесь,

что волны — *монохроматические*. Будем представлять их в комплексной форме. В связи с этим полезно еще раз обратиться к § 126 того же тома, где введены комплексные обозначения и изложены правила оперирования с ними. По причинам, которые выяснятся в ходе изложения, монохроматические волны и их комплексная форма имеют важнейшее значение в учении о волнах вообще, а в особенности в оптике.

Допустим, что волны распространяются в однородном незаряженном диэлектрике. Применим к ним фундаментальные уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t},\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{5.1}$$

и материальные уравнения

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E},\quad \mathbf{B}=\mu\mathbf{H}. \tag{5.2}$$

Пусть волна — плоская и монохроматическая. Запишем ее в комплексном виде

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0e^{i(\omega t-\mathbf{kr})},\quad \mathbf{H}=\mathbf{H}_0e^{i(\omega t-\mathbf{kr})}, \tag{5.3}$$

где ω — круговая частота, $\mathbf{k}$ — волновой вектор, а амплитуды $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ постоянны. Дифференцируя по времени, получаем $\partial\mathbf{E}/\partial t=i\omega\mathbf{E}$, т.е. операция дифференцирования в этом случае сводится к умножению на $i\omega$. Аналогично, дифференцирование по координатам x, y, z сводится к умножению на $-ik_x$, $-ik_y$, $-ik_z$. Заметив это и обозначая координатные орты через $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$, получаем

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ H_x & H_y & H_z\end{vmatrix}=-i\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ k_x & k_y & k_z\\ H_x & H_y & H_z\end{vmatrix}=-i[\mathbf{kH}]$$

и аналогично для $\operatorname{rot}\mathbf{E}$. В результате уравнения (5.1) перейдут в

$$[\mathbf{kH}]=-\frac{\omega}{c}\mathbf{D},\quad [\mathbf{kE}]=\frac{\omega}{c}\mathbf{B}. \tag{5.4}$$

Введем единичный вектор $\mathbf{N}$ нормали к фронту волны и скорость распространения последнего в направлении этой нормали — так называемую *нормальную скорость* v. Тогда

$$\mathbf{k}=\frac{\omega}{v}\mathbf{N}, \tag{5.5}$$

и предыдущие соотношения перейдут в

$$\mathbf{D}=-\frac{c}{v}[\mathbf{NH}],\quad \mathbf{B}=\frac{c}{v}[\mathbf{NE}]. \tag{5.6}$$

Отсюда видно, что векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{v}$ в плоской электромагнитной волне взаимно перпендикулярны. Их взаимное расположе-

ние представлено на рис. 18. Перпендикулярность векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ к вектору $\mathbf{v}$, или, что то же, к направлению распространения волны, означает, что *электромагнитные волны поперечны.* Таким образом, проблема поперечности световых волн, с которой не могли справиться теории механического эфира, совсем не возникает в электромагнитной теории света.

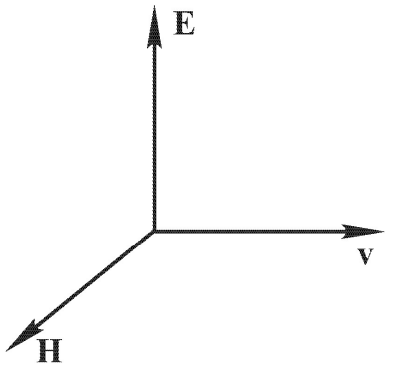


Рис. 18

Следует отметить, что между взаимно перпендикулярными составляющими, на которые можно разложить комплексные амплитуды $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$, может существовать какая-то разность фаз φ. Если она равна нулю или π, то вектор $\mathbf{E}$ во всех точках пространства и во все моменты времени будет находиться в одной и той же плоскости, проходящей через направление нормали $\mathbf{N}$, а вектор $\mathbf{H}$ — в плоскости, к ней перпендикулярной. Тогда волну называют *линейно-* или *плоскополяризованной.* Плоскость $(\mathbf{E}, \mathbf{N})$, в которой лежат векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{N}$, называется *плоскостью колебаний* или *плоскостью поляризации волны* [1]). Если φ не равна нулю или π, то возникает так называемая *эллиптическая поляризация.* Исследованием ее мы займемся в главах V, VI и VII.

Из уравнений (5.1) можно определить и скорость электромагнитной волны v. С этой целью запишем эти уравнения в скалярной форме:

$$D = \frac{c}{v} H, \quad B = \frac{c}{v} E, \tag{5.7}$$

или

$$\varepsilon E = \frac{c}{v} H, \quad \mu H = \frac{c}{v} E. \tag{5.8}$$

Отсюда после почленного перемножения и сокращения на EH получаем для v и показателя преломления $n = c/v$ следующие выражения:

$$v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}, \tag{5.9}$$

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{5.10}$$

Последнее соотношение называется *законом Максвелла.* Для немагнитных сред ($\mu = 1$) оно переходит в

$$n = \sqrt{\varepsilon}. \tag{5.11}$$

[1]) Раньше плоскостью поляризации называли плоскость $(\mathbf{H}, \mathbf{N})$, перпендикулярную к $(\mathbf{E}, \mathbf{N})$. Но этот термин в таком понимании выходит из употребления.