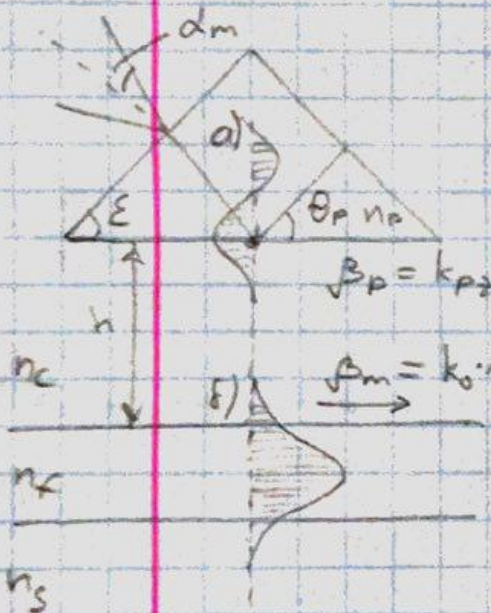
② Розрахувати призмений елемент збудження всього спектру хвилеводних мод в асиметричному планарному хвилеводі з параметрами $n_f = 2,2$; $n_s = 1,9$; $n_c = 1.0$; $\lambda = 1,5$ мкм.

Для збудження всього спектру хвилеводних мод планарного хвилеводу необхідно сформувати збуджуюче оптичне випромінювання, в якому в напрямку z існує випромінювання з хв. вектором, що змінюється в діапазоні зміни сталої розповсюдження хвилеводних мод.

Розглянемо призмений елемент збудження хвилеводних мод.



а) поле плоскої хвилі, що падає з більш густого середовища на повітряно відбивається на границі розділу з менш густим середовищем

б) – поле поверхневої хвилі, що розповсюджується вздовж тонкої плівки

n_p – показник заломлення призми
n_c – середовище між призмою та плівкою
n_f – плівки (film)
n_s – підкладки (substrate)

$\beta_p = \beta_m$ (рівність коефіцієнтів розповсюдження) – умова фазового синхронізму, утворення хвилеводної моди

$k_0 \cdot n_p \cdot \cos\theta_p = k_0 \cdot N_m = k_0 \cdot n_f \cdot \cos\theta_m$

N_m – ефективний показник заломлення

N_m можна виразити через параметри призми (n_p, ε — кут призми):

$$N_m = \sin\alpha_m \cdot \cos\varepsilon + \sqrt{n_p^2 - \sin^2\alpha_m} \cdot \sin\varepsilon$$

Тут α_m — кут падіння світла на грань призми.

Змінюючи кут від $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ отримуємо різні сталі розповсюдження N_m.

В нашій задачі маємо плівку n_f з підкладинкою n_s, тому діапазон можливих N_m:

$$n_f > N_m > n_s$$

Для розрахунку n_p та ε потрібно знайти екстремальні значення N_m та прирівняти їх до n_s та n_f.

Знайдемо точки екстремуму функції $N_m(\alpha_m)$:

$$\frac{\partial N_m}{\partial \alpha_m} = \cos\alpha_m \cdot \cos\varepsilon - \frac{2\sin\alpha_m \cdot \cos\alpha_m}{2\sqrt{n_p^2 - \sin^2\alpha_m}} \cdot \sin\varepsilon =$$

$$= \frac{2\sqrt{n_p^2 - \sin^2\alpha_m} \cdot \cos\alpha_m \cdot \cos\varepsilon - 2 \cdot \sin\alpha_m \cdot \cos\alpha_m \cdot \sin\varepsilon}{2\sqrt{n_p^2 - \sin^2\alpha_m}} = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{n_p^2 - \sin^2\alpha_m} \cdot \cos\varepsilon = \cancel{2} \cdot \sin\alpha_m \cdot \sin\varepsilon \\ \cos\alpha_m = 0 \end{array}\right.$$

Перший розв'язок: $\alpha_m = \pm\frac{\pi}{2}$ (інші кути не розглядаємо)

Другий розв'язок:

$$(n_p^2 - \sin^2\alpha_m) \cdot \cos^2\varepsilon = \sin^2\alpha_m \cdot \sin^2\varepsilon$$

$$n_p^2 \cdot \cos^2\varepsilon = \sin^2\alpha_m (\sin^2\varepsilon + \cos^2\varepsilon) = \sin^2\alpha_m$$

$$\sin\alpha_m = \pm n_p \cdot \cos\varepsilon$$

Тоді, якщо $n_p \cdot \cos\varepsilon > 1$, то є 2 точки екстремуму

Нам чому при $\alpha_m = -\frac{\pi}{2}$ – мінімум, при $\alpha_m = \frac{\pi}{2}$ – макс:

$N_m^{max} = \sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\varepsilon + \sqrt{n_p^2 - \sin^2\frac{\pi}{2}}\cdot\sin\varepsilon = \cos\varepsilon + \sqrt{n_p^2-1}\cdot\sin\varepsilon$

$N_m^{min} = -\cos\varepsilon + \sqrt{n_p^2-1}\cdot\sin\varepsilon.$

Підставимо значення $N_m^{max} = n_f = 2{,}2$

$N_m^{min} = n_s = 1{,}9$

$$\begin{cases} \cos\varepsilon + \sqrt{n_p^2-1}\cdot\sin\varepsilon = 2{,}2 \\ -\cos\varepsilon + \sqrt{n_p^2-1}\cdot\sin\varepsilon = 1{,}9 \end{cases}$$

Відніємо 2 рівняння.

$2\cos\varepsilon = 0{,}3 \qquad \cos\varepsilon = \frac{0{,}3}{2} = 0{,}15 \qquad \underline{\varepsilon = \arccos 0{,}15 = 81{,}37^\circ}$

Знайдемо n_p: $\sqrt{n_p^2-1}\cdot\sin\varepsilon = 2{,}2 - \cos\varepsilon$

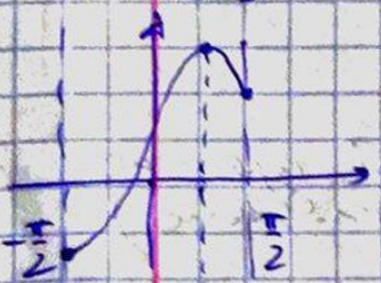
$$\sqrt{n_p^2-1} = \frac{2{,}2-\cos(81{,}37^\circ)}{\sin(81{,}37^\circ)} = \frac{2{,}2-0{,}15}{0{,}9887} = 0{,}708$$

$n_p^2 = 1 + 0{,}501264 = 1{,}501264 \Rightarrow \underline{n_p = 1{,}225}$

Тут $n_p\cdot\cos\varepsilon = 1{,}225\cdot 0{,}15 = 0{,}18375 < 1$

Отже, для цього розв'язку спостерігається не 1 екстремум.

Так як $\varepsilon \in [0, \frac{\pi}{2}]$, то екстремуми будуть в точці максимумів:



Підставимо $\sin\alpha_m = n_p\cdot\cos\varepsilon$:

$N_m = n_p\cdot\cos^2\varepsilon + \sqrt{n_p^2 - n_p^2\cdot\cos^2\varepsilon}\cdot\sin\varepsilon =$

$= n_p\cdot\cos^2\varepsilon + n_p\cdot\sin^2\varepsilon = n_p = n_f = 2{,}2$

$N_m^{min} = n_s = -\cos\varepsilon + \sqrt{n_p^2 - \sin^2\alpha_m}\cdot\sin\varepsilon =$

$= -\cos\varepsilon + \sqrt{n_p^2-1}\cdot\sin\varepsilon =$

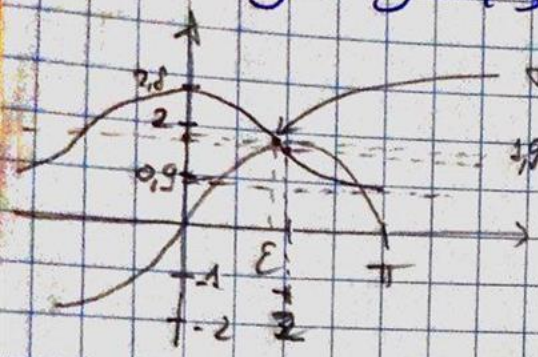
~~$-\cos\varepsilon + 2{,}2\cdot\sin^2\varepsilon = 1{,}9$~~

$= -\cos\varepsilon + \sqrt{2{,}2^2-1}\cdot\sin\varepsilon = 1{,}9$; $-\cos\varepsilon + \sqrt{3{,}84}\cdot\sin\varepsilon = 1{,}9$

$1{,}96\cdot\sin\varepsilon = 1{,}9 + \cos\varepsilon$

↑ розв'язок можна знайти графічно

Розв'язком буде перетин синусоїди та косинусоїди, що лежить на 1,9:



точка буде менше $\frac{\pi}{2}$, оск як при $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ синусоїда матиме значення 1,96, а косинусоїда 1,9.

Отже, в якому випадку $n_p = 2,2$; ε – задовольняє графічно, ε – близький до $\pi/2$.