Раздел 2.

Планарные диэлектрические волноводы. Решение характеристического уравнения. Модель зигзагообразной волны. Понятие моды волновода. УВР. Дисперсионная зависимость. Картина распределения поля для планарного волновода

Диэлектрические волноводы служат основой устройств интегральной оптики. Рассмотрим плоский несимметричный диэлектрический волновод $n_1 > n_2, \quad n_1 > n_3, \quad n_2 \neq n_3$.

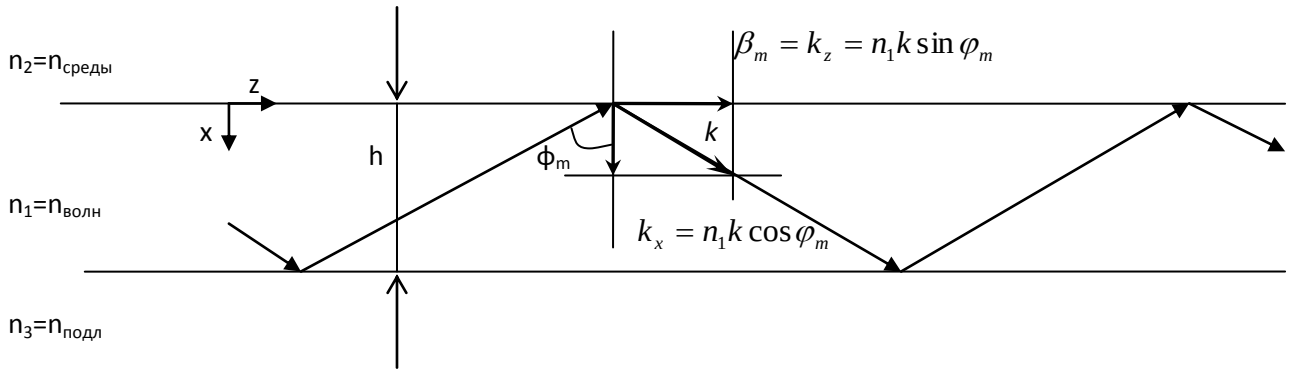


Рис. 2.1. Распространение зигзагообразных волн, соответствующих волноводным модам, в плоском планарном волноводе

Будем учитывать только те волны, которые распространяются вдоль волноводной системы (волны, которые проходят сквозь волновод либо отражаются от него, не рассматриваем). С точки зрения геометрической оптики предполагаем, что световые лучи (однородные плоские волны) отражаются поочередно от верхней и нижней границ раздела сред с различными показателями преломления, т.е. используем **модель зигзагообразной волны** (рис. 2.1). Для того чтобы картина была самосогласованной, сумма всех фазовых сдвигов в вертикальном направлении должна быть кратна 2π. После первого прохода волновода толщиной h фазовый сдвиг по вертикали оказывается равным $hn_1k\cos\varphi_m$, на границе волновод/подложка при ПВО имеем фазовый сдвиг $-\delta_{13}$, на обратном пути через пленку добавляется ещё $hn_1k\cos\varphi_m$ и при ПВО от

границы волновод/среда сдвиг фаз равен $-\delta_{12}$. Таким образом, получаем следующее условие самосогласования (или условие поперечного резонанса):

$$\delta_h - \delta_{13} - \delta_{12} = 2\pi m, \qquad (2.1)$$

В **характеристическом уравнении** (2.1) для ступенчатого планарного несимметричного волновода δ_h – сдвиг фаз за счет толщины волноводного слоя h, $\delta_h = 2hn_1 k\cos\varphi_m$; δ_{13}, δ_{12} – скачки фаз на нижней и верхней границах соответственно; m = 0, 1, 2, …. – квантовое число, которое определяет порядок моды. Сдвиги фаз вычисляются по формулам Френеля. Для ТЕ-волны фазовые сдвиги выражаются следующим образом:

$$\delta_{12} = 2arctg\left(\frac{\sqrt{\sin^2\varphi_m - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\cos\varphi_m}\right); \qquad \delta_{13} = 2arctg\left(\frac{\sqrt{\sin^2\varphi_m - \left(\frac{n_3}{n_1}\right)^2}}{\cos\varphi_m}\right)$$

Уравнение (2.1) является по существу **дисперсионным уравнением волновод**а, позволяющим находить *постоянную распространения* β_m как функцию частоты ω (длины волны λ) и толщины волновода h. В соответствии с **условием волноводного распространения** величина β_m для волноводных мод может изменяться в пределах, ограниченных значениями постоянных распространения плоской волны в материалах подложки и волновода:

$$kn_{подл} \le \beta_m \le kn_{волн}.$$

Волноводное распространение электромагнитной энергии в виде плоских однородных волн внутри слоя возможно только для дискретного набора углов падения за пределами критического угла полного отражения. Дискретность углов падения в волноводной пластинке связана с условием поперечного резонанса (2.1). По световоду могут распространяться только волны, удовлетворяющие характеристическому уравнению (2.1), остальные волны сами себя гасят. Уравнение (2.1) является трансцендентным, поэтому

ищем решение графически. Рассматриваем общий случай *асимметричного волновода* ($n_2 \neq n_3$) и ищем решение для основной моды (m=0):

$$\delta_h - (\delta_{13} + \delta_{12}) = 0 \qquad \text{(a)}$$

В качестве примера возьмем следующие параметры: n_1=1,47, n_3=1,467, n_2=1, h=3 мкм, λ=633 нм.

На рис. 2.2 изображены зависимости от угла φ_m фазового сдвига за проход поперек волновода δ_h (пунктирная линия) и суммы фазовых сдвигов $(\delta_{13}+\delta_{12})$ (штрих-пунктирная линия) при отражениях от границ волновода. Ищем пересечение пунктирной и штрих-пунктирной линий (т.А) и опускаем перпендикуляр, определяя угол φ_m. Видно, что только часть кривой $(\delta_{13}+\delta_{12})$ лежит выше критического угла $\varphi_{кр}$ для границы волновод/подложка. При достаточно малой толщине волновода мы не получим пересечения кривых выше границы отсечки, следовательно в ассимнтричном волноводе не всегда могут распространяться волноводные моды, т.е. даже для основой моды существует условие отсечки.

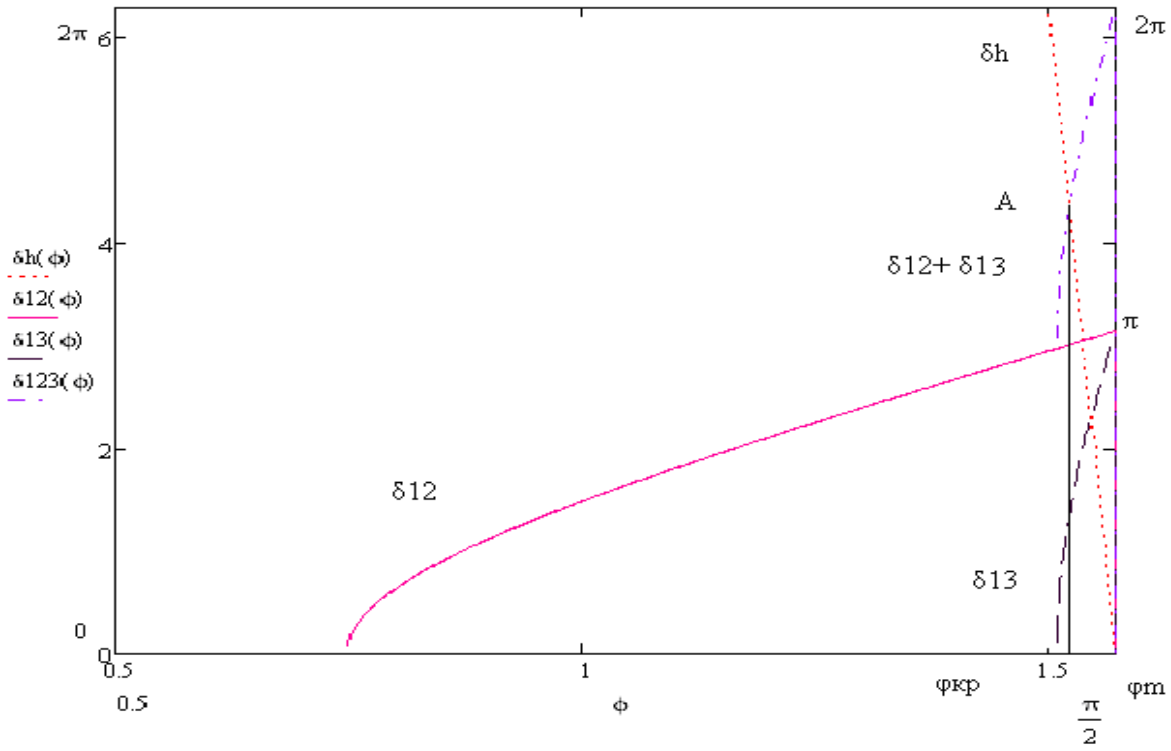


Рис. 2.2. Графическое решение дисперсионного уравнения для основной моды асимметричного планарного волновода.

Значение постоянной распространения позволяет оценить фазовую скорость моды

$$v_m = c/N_m$$

где

$$N_m = \beta_m/k_0 = n_f sin(\Phi_m)$$

эффективный показатель преломления, а также определить распределения поля стоячих волн, образующихся в направлении по оси *x*, определяющих квантование полей мод в поперечном направлении. И, таким образом описать *пространственную структуру* распространяющегося по волноводу оптического излучения. **Распределение полей мод в поперечном направлении** будет определяться компонентой

$$k_x = n_f k cos(\Phi_m)$$

однозначно связанной с постоянной распространения $\beta_m = n_f k_0 sin(\Phi_m)$. На приведенном ниже рис. 2.3 показано распределение полей TE_m мод (направление осей x и y повернуто по отношению к рис 2.1 на 90 градусов)

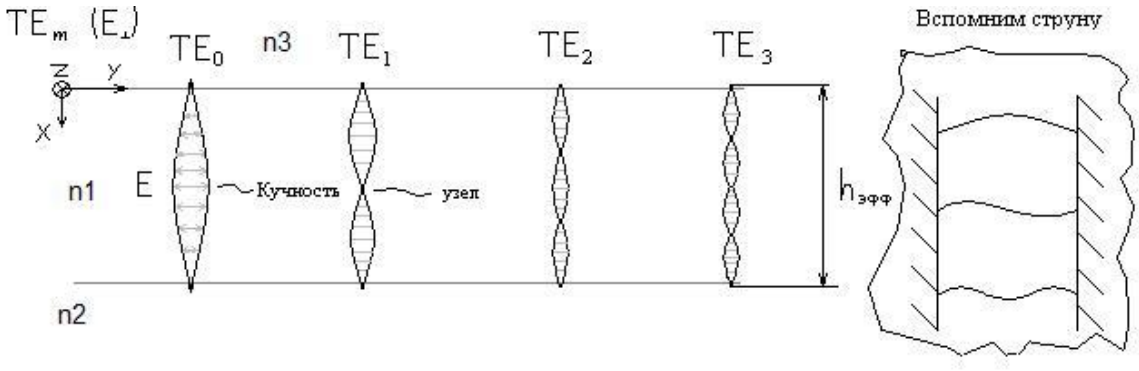


Рис. 2.3. Схема распределения электрического поля в модах волновода.

Индекс моды *m* определяет количество узловых точек стоячей волны между границами волновода. Справа приведена аналогия со струной.

Следует отметить, что при обратном развороте но 90^0 осей x и y, каждая узловая точка превращается в линию, поле данной моды равно нулю. Существенной особенностью волноводных мод является то, что поле моды не ограничено геометрической толщиной волновода h , проникает за его границу на некоторую величину Δx_{12} и Δx_{13} соответственно для верхней и нижней границ. Это связано с тем, что в условиях ПВО за границы раздела двух диэлектрических сред волна экспоненциально затухает

$$E = E_0 exp(-\alpha x)$$

с ***коэффициентом затухания***



где n_j - показатель преломления смежной среды. За эффективную толщину (см. Раздел 1), занимаемую полем данной моды принимается величина:

$$h_{m\,эфф} = h + \Delta x_{12} + \Delta x_{13}\,,$$

где $\Delta x = 1/\alpha$ т.е расстояние, на котором поле моды за границей раздела уменьшается в *e* раз. Из приведенных выше выражений выражений видно, что $h_{m\,эфф}$ зависит в данном волноводе на заданной частоте от индекса моды m, и является различным для разных мод.

Для волноводных мод условие ограничивающее величину постоянной распространения $\beta_m = n_f k_0 sin(\Phi_m)$

$$n_s\, k \le \beta_m \le n_f k$$

математически определяемой тем, что модовый угол может изменяться от угла ПВО до 90 градусов. Это выражение мы будем называть **условием волноводного распрстранения (УВР)**, которое можно записать через эффективный волноводный показатель преломления N_m

$$n_s \le N_m \le n_f$$

Это выражение позволяет дать *физическую интерпритацию УВР* :

Каждая мода в волноводе распространяется вдоль направления распространения z со своей фазовой скоростью $v_m = c/N_m$, которая должна быть меньше фазовой скорости в непрерывной среде с показателем преломления n_s $(v=c/n_s)$ и больше чем фазовая скорость в непрерывной среде с показателем n_f $(v=c/n_f)$, (т.к. проделывает больший путь)

$$v_s \geq v_m \geq v_f$$

Нарушение левой части УВР приводит к нарушению ПВО и излучению части света в смежную среду. *Волн с нарушением правой части не существует.*

Как раньше уже отмечалось к особенностям волоноводного распространения помимо пространственного квантования распространяющихся волн является также **нелинейная дисперсионная зависимость** для волноводных мод у которых нарушается линейная зависимость числа периодов в пространственном распределении световой волны k от частоты ($\omega=kc$). На приведенном ниже рис. 2.4 для $\omega = \omega(\beta)$ в увеличенном масштабе показана область волнового распространения расположенная в секторе между прямыми определяемые уравнениями $\omega=\frac{C}{n_s}\beta$ и $\omega=\frac{C}{n_f}\beta$, полученными из левой и правой частей УВР

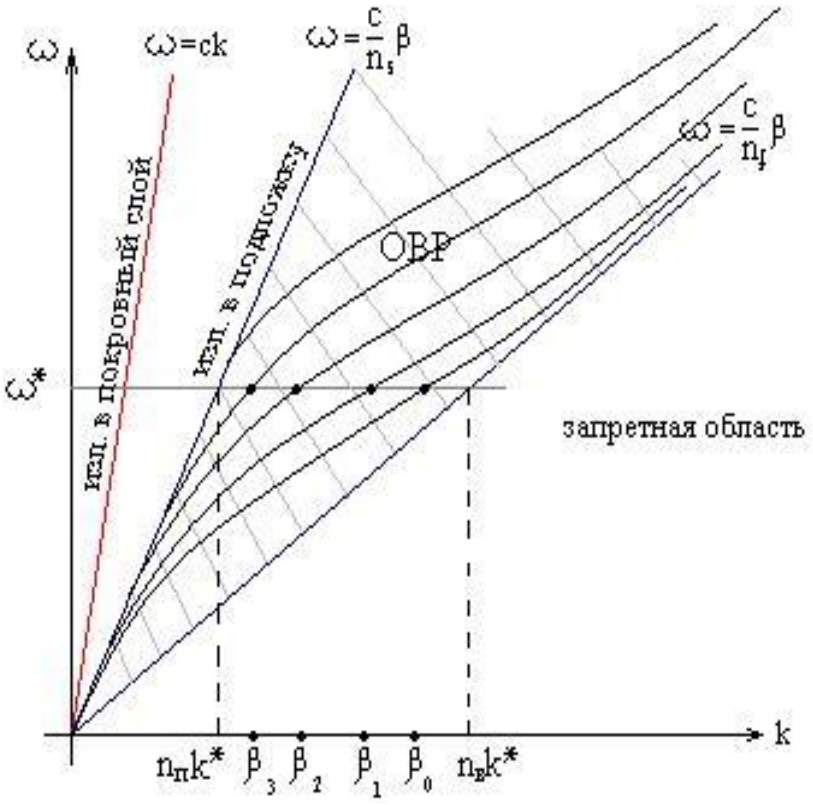


Рис. 2.4. Дисперсионная зависимость волноводных мод (диаграмма ω – β)

Нелинейность дисперсионной зависимости для волноводной моды определяется волновым уравнением и требует для нахождения $\beta=f(\omega)$ его решения, однако это уравнение не имеет аналитического решения и может быть решено либо численными либо графическими методами.

Наиболее простой случай графического решения этого уравнения может быть показан для основной моды (мода с наинизшим индексом m) симметричного планарного волновода

$$hk_x - 2\varphi_{12} = C$$

которое приводится на рис. 2.5 (здесь δ – фазовый двиг).

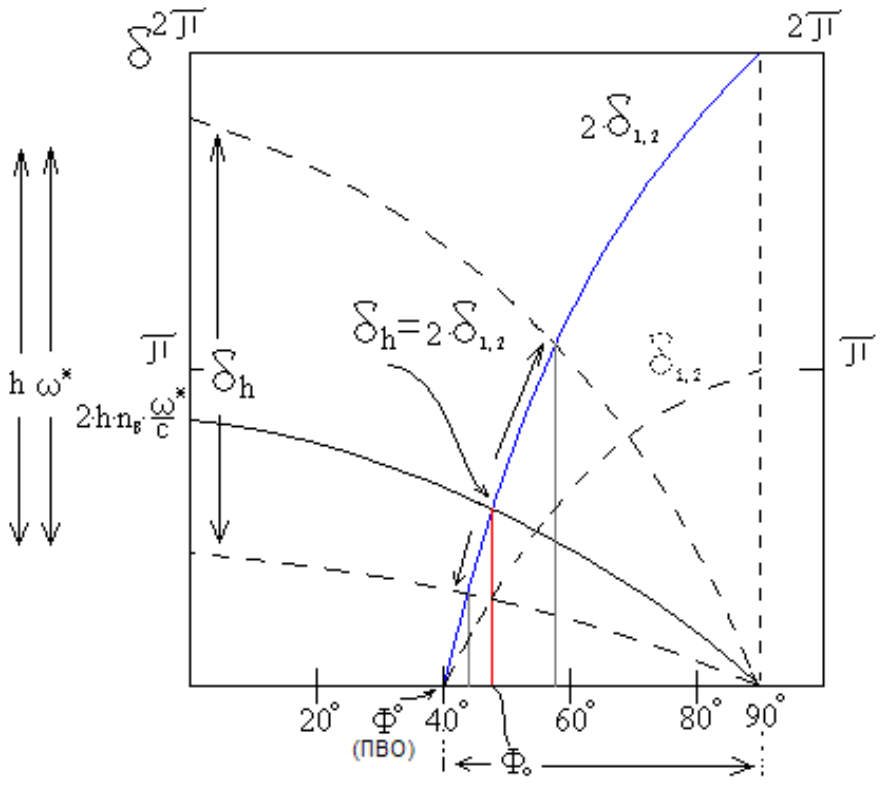


Рис. 2.5. Решение характеристического уравнения для симметричного волновода

Пользуясь этим графиком на пересечении зависимости $\delta_h = h_x k h_y k^* \cos\phi$ и зависимости фазового сдвига возникающего при угле ϕ больше угла ПВО ϕ^0, определяется уравнением :

$$\cos\phi = \sqrt{\frac{\delta_h^2 + \delta_{1,2}^2 + \delta_{1,2}^2}{2\delta_h \delta_{1,2}}}$$

получим значение модового угла для основной моды ϕ_0, которое позволяет нам узнать $\beta_0 = n_y k_x \sin\phi_0$, эффективный волноводный показатель $N_0 = \beta_0 / k^*$ и фазовую скорость моды $\upsilon_0 = \dfrac{C}{N_0}$

На диаграмме ω – β – это даст одну точку на частоте ω^x . Чтобы узнать всю зависимость β(ω) нужно проследить изменение ϕ_0 при изменении частоты от 0 до ∞

При уменьшении частоты тока δ_h на вертикальной оси будет опускаться в низ и в пределе при $\omega \to 0$ $\phi_0 \to \pi/2$, $\beta_0 \to n_f k$, $N_0 \to n_f$ и $\upsilon_0 \to \frac{C}{n_f}$

Получив таким образом всю зависимость β(ω) мы видим характер ее нелинейности : при низких частотах фазовая скорость стремится к фазовой скорости света в материале подложки, при высоких частотах фазовая скорость моды стремиться к фазовой скорости света в материале волновода. Наше решение относится к TE_0 моде, поэтому следует отметить отличия существующие для мод ТМ. На рис. 2.5 пунктиром приводится зависимость фазового сдвига в условиях ПВО для ТМ моды, определяемая уравнением :



Здесь видно, что при тех же условиях в том же волоноводе модовый угол ϕ_0, β_0, N_0 для ТМ мод будут меньше, а, следовательно, их фазовая скорость $\upsilon_{0TM} > \upsilon_{0TE}$ – больше .

Используя рис 2.5 можно видеть, что для заданной частоты ω^* любое возможное значение β_0 можно получить изменяя от 0 до ∞ толщину волновода h таким образом, что можно заключить: ***основная мода симметричного планарного существует при любых сколь угодно малых толщинах волновода h и частоте света ω.*** Следует отметить, однако, что при этом h - бесконечно увеличивается. *Для ассиметричного волновода существует некоторое пороговое значение* $(^{nh_f k})_{критическое}$, ниже которого решения не существует, т.к. для уравнения



ПВО на границе с подложкой возникает только тогда ($^{hh_f k}$) прежнее пороговое значение . Для возникновения мод более высокого порядка

отношение $h/\lambda \propto h_f k$ должно быть еще больше и тоже будет иметь пороговый уровень.

Для решения характеристического уравнения в общем случае вводятся специальные **нормированные переменные**

1. Нормированная частота

$$V = k h \sqrt{n_f^2 - n_s^2}$$

– это безразмерная величина, определяющая волновод и рабочую длину волны с область изменения

$$0 < V < \infty$$

2. Нормированный показатель преломления

$$b = \frac{N_m^2 - n_s^2}{n_f^2 - n_s^2}$$

– также безразмерный в соответствии с УВР $n_s \leq N_m \leq n_f$ лежит в пределах

$$0 \leq b \leq 1$$

3. Степень ассимметрии

$$a = \frac{n_s^2 - n_c^2}{n_f^2 - n_s^2}$$

В случае, когда $n_s = n_c$ - симметричный волновод $a = 0$, в случае сильной асимметрии $a \rightarrow \infty$ т.е.

$$0 < a < \infty$$

Для случая ТЕ мод **дисперсионное урав**нение можно записать **через нормированные переменные** в следующем виде

 (2.1)

Полученное уравнение позволяет легко определить *критические условия (условие отсечки) появления (и исчезновения) любых мод планарного волновода.*

Как было показано ранее, критические условия определяются левой частью условия волноводного распространения $N_m = n_s$ ($\beta_m = n_s k$). Условие $b=0$ также является критическим. Подставляя его в уравнение (2.1) получим выражение для нахождения критических параметров существования ТЕ моды (условия отсечки)

$$V_{кр}=m\pi+arctg(\sqrt{a})$$

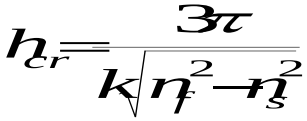
Для симметричного волновода а=0 критическое условие упрощается:

$$V_{кр}=m\pi$$

Пользуясь этим условием, для заданной рабочей частоты (длины волны) и показателя преломления, можно определить толщину волновода, начиная с которой появится нужная мода. Рассмотрим для примера моду TE_3 .



откуда



Для асимметричного волновода к критическому значению $m\pi$ добавляется $arctg(\sqrt{a})$, который в пределе $a \to \infty$ дает увеличение V_{cr} на $\pi/2$. С помощью дисперсионного уравнения в нормированных переменных можно получить **нормированную диаграмму** $\boldsymbol{b = b(V)}$ (рис 2.6), используя которую для заданного волновода на заданной частоте по уравнению

$$V_{cr} = k\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}$$

можно определить количество распространяющихся мод и их постоянные распространения, определив на графике значения b_m и, соответственно N_m и постоянную распространения $\beta_m = N_m\, k$

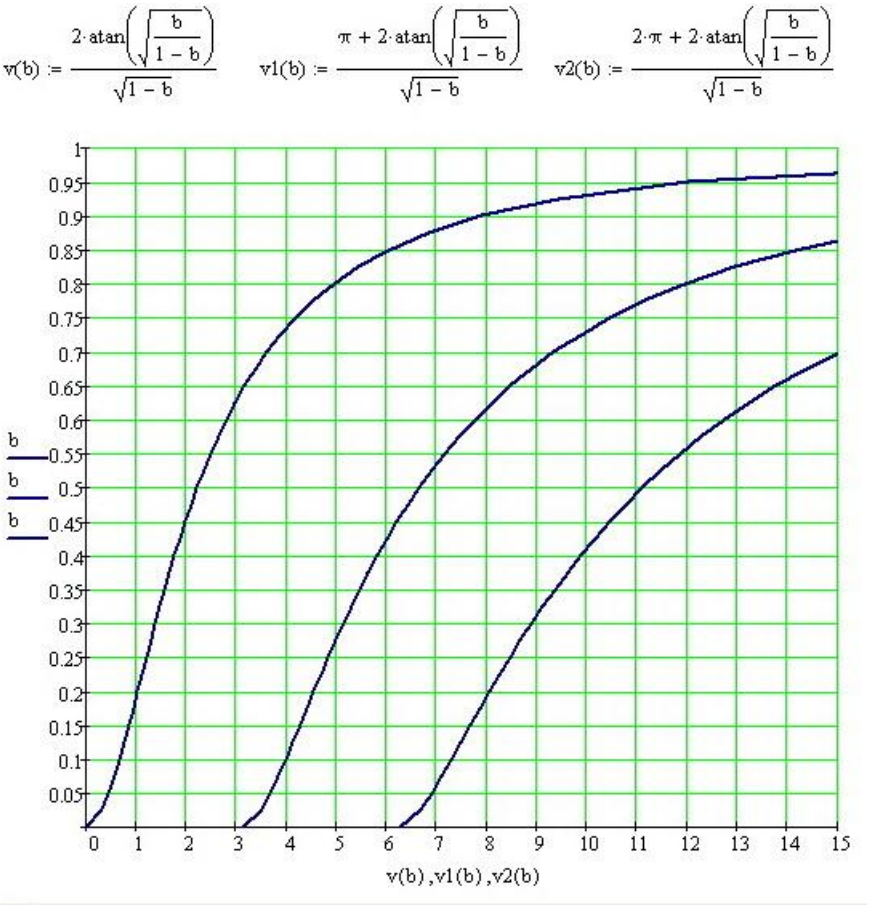


Рис. 2.6. Определение критических параметров существования ТЕ моды (условия отсечки)

В случае ТМ моды условия отсечки имеют точно такой же вид, что и для ТЕ моды, если степень асимметрии определить как:

$$a = \frac{n_f^4 n_s^2 - n_c^2}{n_c^4 n_f^2 - n_s^2}$$

Общий вид нормированных диаграмм b = b(V) представлен на рис. 2.7.

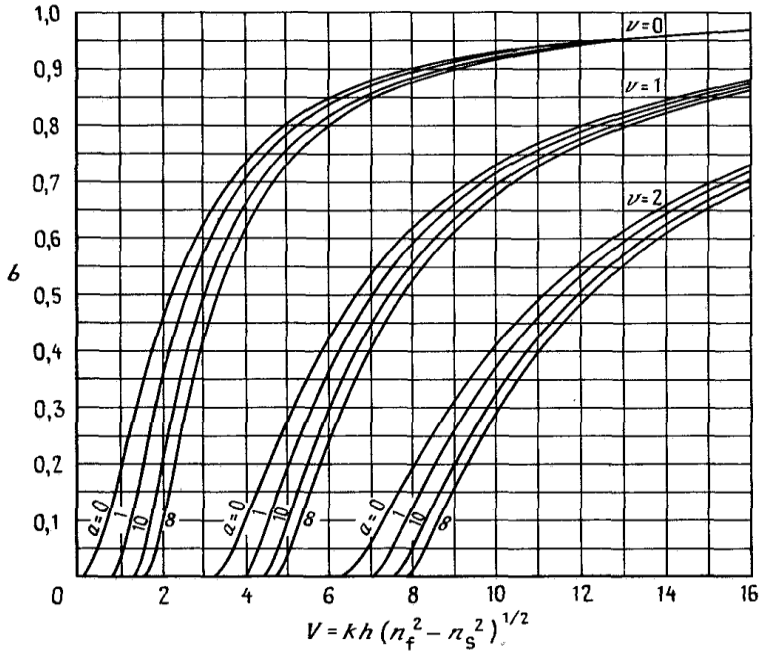


Рис. 2.7. Решение характеристического уравнения в нормированных переменных.

Ещё одним удобным и наглядным способом решения характеристического уравнения является метод решения **через переменные u, v, w.** Рассмотрим этот способ решения на примере расчета конкретного волновода:

n_n	$n_в$	$\lambda, мкм$	V	h/f	a/f	$\frac{A-a}{A}, \%$	L
1,68	1,70	1,06	3.2	2,6	2,5	10	10

1.1. Нахождение толщины планарного волновода.

а) симметричный волновод ($n_n = n_c$).

Для нахождения толщины планарного волновода воспользуемся формулой нормированной частоты:

$V = kh\sqrt{n_в^2 - n_п^2}$, т.к. $kh = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} h = 2\pi \frac{h}{\lambda}$.

Значит подставив *kh* получим: $V = 2\pi \frac{h}{\lambda} \sqrt{n_в^2 - n_п^2}$

Отсюда, толщина волновода равна: $h = \frac{V}{2\pi \frac{1}{\lambda} \sqrt{n_в^2 - n_п^2}} = \frac{V\lambda}{2\pi \sqrt{n_в^2 - n_п^2}} =$

$= \frac{3{,}2 \cdot 1{,}06 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot \sqrt{1{,}70^2 - 1{,}68^2}} = 2{,}08 \cdot 10^{-6} = 2{,}08(мкм)$

б) асимметричный волновод.($n_c = 1$)

Для нахождения толщины планарного волновода воспользуемся формулой нормированной частоты:

$V = kh\sqrt{n_в^2 - n_п^2}$, т.к. $kh = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} h = 2\pi \frac{h}{\lambda}$.

Значит подставив *kh* получим: $V = 2\pi \frac{h}{\lambda} \sqrt{n_в^2 - n_п^2}$

Отсюда, толщина волновода равна: $h = \frac{V}{2\pi \frac{1}{\lambda} \sqrt{n_в^2 - n_п^2}} = \frac{V\lambda}{2\pi \sqrt{n_в^2 - n_п^2}} =$

$= \frac{3{,}2 \cdot 1{,}06 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot \sqrt{1{,}70^2 - 1{,}68^2}} = 2{,}08 \cdot 10^{-6} = 2{,}08(мкм)$

1.2. Нахождение постоянной распространения первых двух мод (β_{TE}) в критических условиях третьей моды.
а) симметричный волновод $n_п = n_c$

Применим второй способ определения постоянной распространения, решая характеристическое уравнения через переменные u, v, w.

Общее характеристическое уравнение имеет вид:

$$arctg\frac{v}{u}+arctg\frac{w}{u}=u-m\pi$$

Для симметричного волновода а=0, $n_n=n_c$. Следовательно, характеристическое уравнение примет вид:

$$2arctg\frac{v}{u}=u-m\pi=arctg\frac{v}{u}=\frac{u}{2}-m\frac{\pi}{2}$$

Если взять световод, у которого $d=\frac{h}{2}\Rightarrow h=2d$. То, характеристическое уравнение будет иметь вид:

$$arctg\frac{v}{u}=u-m\pi$$

В случае моды TE_0, m=0, характеристическое уравнение примет вид:

$$arctg\frac{v}{u}=u$$

Откуда получаем: $v=u\cdot tg(u)$

В случае моды TE_1, m=1, характеристическое уравнение примет вид:

$$arctg\frac{v}{u}=u-\pi$$

Откуда получаем: $v=u\cdot tg(u-\pi)$

В случае моды TE_2, m=2, характеристическое уравнение примет вид:

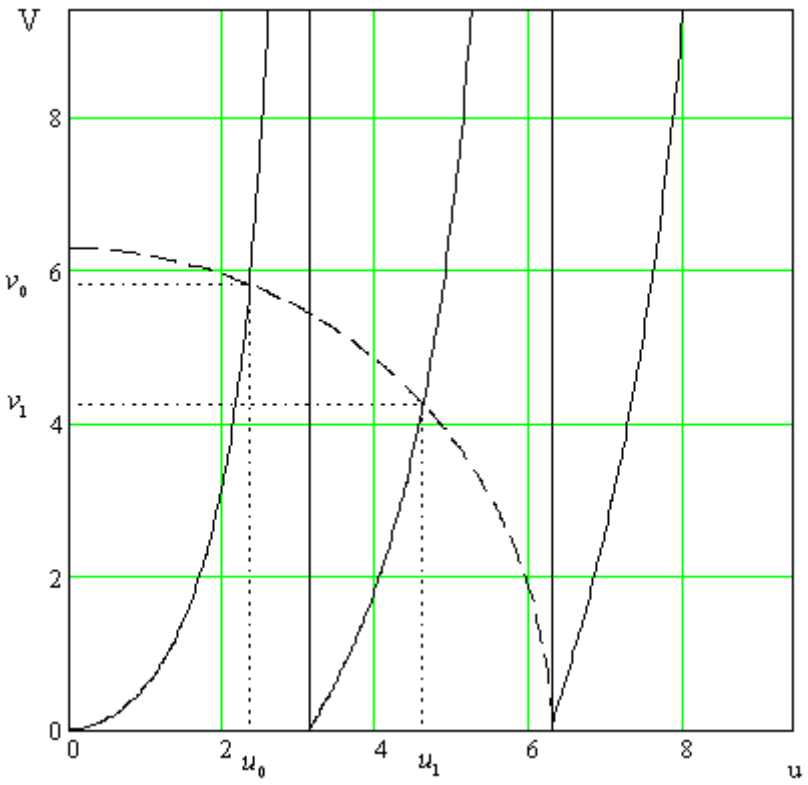
$$arctg\frac{v}{u}=u-2\pi$$

Откуда получаем: $v=u\cdot tg(u-2\pi)$

Введем параметр R, определяющий окружность в плоскости вспомогательных координат $X=u$ и $Y=v$:

$$v^2+u^2=h^2(\beta^2-k_2^2+k_1^2-\beta^2)=h^2(k_2^2-k_1^2)=h^2k^2(n_в^2-n_c^2)=R^2$$

Построим на одном графике кривые: $v^2+u^2=R^2, v=u\cdot tg(u), v=u\cdot tg(u-\pi)$, $v=u\cdot tg(u-2\pi)$, считая, что критическое условие третьей моды равно: $V^{кр}=R=2\pi$



По графику видно, что: $v_0 = 5.82 \qquad v_1 = 4.25$
$u_0 = 2.369 \qquad u_1 = 4.627$

По определению мы имеем: $v_m = h\sqrt{\beta_m^2 - k_2^2}$
$u_m = h\sqrt{k_1^2 - \beta_m^2}$

Здесь, h – неизвестна, поэтому для нахождения β_m будет рассматривать соотношение

$$\frac{v_m}{u_m} = \frac{h\sqrt{\beta_m^2 - k_2^2}}{h\sqrt{k_1^2 - \beta_m^2}} = \frac{\sqrt{\beta_m^2 - k_2^2}}{\sqrt{k_1^2 - \beta_m^2}}$$

Отсюда находим β_{TE_m}:

$$\beta_{TE_m} = \sqrt{\frac{\left(\frac{v_m}{u_m}k_1\right)^2 + k_2^2}{\left(\frac{v_m}{u_m}\right)^2 + 1}} \qquad (1)$$

где
$$k_2 = \frac{2\pi}{\lambda} n_n = \frac{2 \cdot 3{,}14}{1{,}06 \cdot 10^{-6}} \cdot 1{,}68 = 9{,}958 \cdot 10^6 (м^{-1})$$
$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda} n_в = \frac{2 \cdot 3{,}14}{1{,}06 \cdot 10^{-6}} \cdot 1{,}70 = 10{,}077 \cdot 10^6 (м^{-1})$$

Вот теперь можно найти β_{TE} для нулевой и первой моды:

$$\beta_{TE_0} = \sqrt{\frac{\left(\frac{5{,}82}{2{,}369} \cdot 10{,}077 \cdot 10^6\right)^2 + (9{,}958 \cdot 10^6)^2}{\left(\frac{5{,}82}{2{,}369}\right)^2 + 1}} = 10{,}06 \cdot 10^6 = 10{,}06(мкм^{-1})$$

$$\beta_{TE_1} = \sqrt{\frac{\left(\frac{4{,}25}{4{,}627} \cdot 10{,}077 \cdot 10^6\right)^2 + (7{,}13 \cdot 10^6)^2}{\left(\frac{4{,}25}{4{,}627}\right)^2 + 1}} = 10{,}013 \cdot 10^6 = 10{,}013(мкм^{-1})$$

$10.06 * 10^6 < \beta < 10{,}013 * 10^6$

$$N_0 = \frac{\beta_0}{k} = \frac{10{,}06 \cdot 10^6}{5{,}92 \cdot 10^6} = 1{,}690$$

$$N_1 = \frac{\beta_1}{k} = \frac{10{,}013 \cdot 10^6}{5{,}92 \cdot 10^6} = 1{,}691$$

$1{,}68 = n_n < N_1 < N_0 < n_B = 1.70$ **(**т.е. выполняется УВР**)**

$n_n < N_m < n_B$

Проверка **УВР**

$1.68 < N_0 < 1{,}70$ $1.68 < N_1 < 1{,}70$

1,68<1,690<1,70 1,68<1,691<1,70

б) асимметричный волновод ($n_c = 1$)

Применим второй способ определения постоянной распространения, решая характеристическое уравнения через переменные u, v, w.

Общее характеристическое уравнение имеет вид:

$$arctg\frac{v}{u}+arctg\frac{w}{u}=u-m\pi$$

Степень асимметрии равна: $a=\frac{n_n^2-n_c^2}{n_в^2-n_n^2}=\frac{1{,}76^2-1}{1{,}79^2-1{,}76^2}=26{,}95$

Характеристическое уравнение для асимметричного волновода имеет вид:

$$arctg\frac{w}{u}=u-\frac{\pi}{2}-m\pi$$

В случае моды TE_0, m=0, характеристическое уравнение примет вид:

$$arctg\frac{w}{u}=u-\frac{\pi}{2}$$

Откуда получаем: $w=-u\cdot ctg(u)$

В случае моды TE_1, m=1, характеристическое уравнение примет вид:

$$arctg\frac{w}{u}=u-\frac{\pi}{2}-\pi$$

Откуда получаем: $w=-u\cdot ctg(u-\pi)$

В случае моды TE_2, m=2, характеристическое уравнение примет вид:

$$arctg\frac{w}{u}=u-\frac{\pi}{2}-2\pi$$

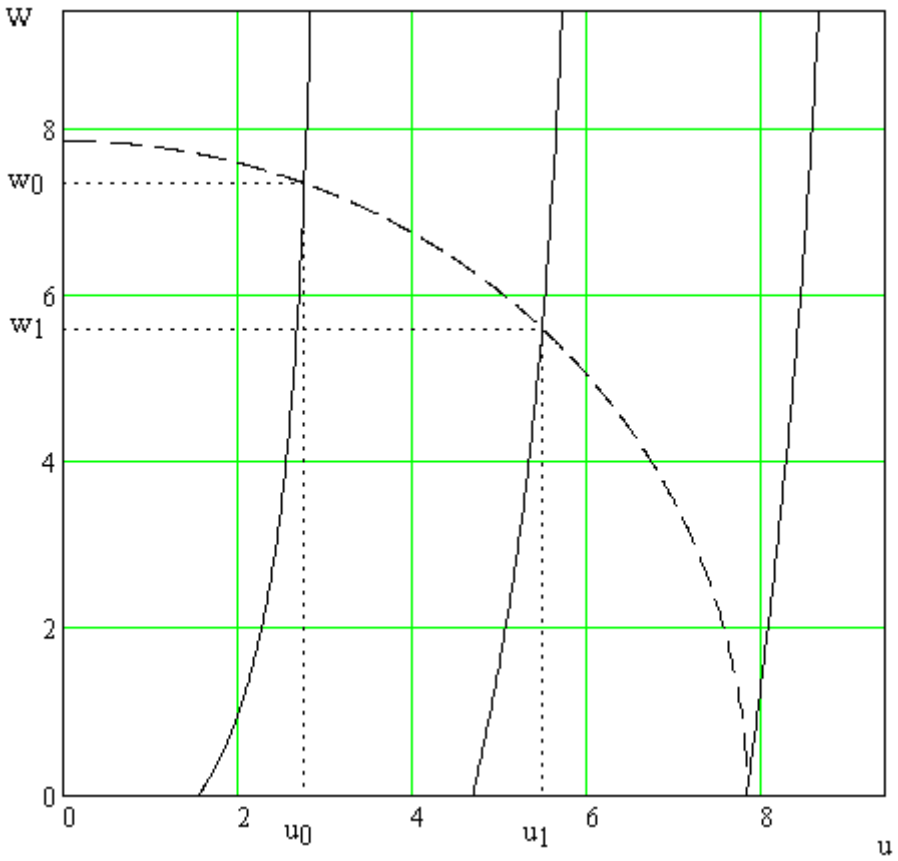
Откуда получаем: $w=-u\cdot ctg(u-2\pi)$

Введем параметр R, определяющий окружность в плоскости вспомогательных координат $X=u$ и $Y=w$:

$$v^2+w^2=h^2(\beta^2-k_3^2+k_1^2-\beta^2)=h^2(k_3^2-k_1^2)=h^2k^2(n_в^2-n_n^2)=R^2$$

Построим на одном графике кривые: $v^2+w^2=R^2$, $w=-u\cdot ctg(u)$, $w=-u\cdot ctg(u-\pi)$, $w=-u\cdot ctg(u-2\pi)$, считая, что критическое условие третьей моды равно:

$$V^{кр}=R=\frac{5\pi}{2}$$



По графику видно, что: $w_0 = 7.346 \qquad w_1 = 5.601$
$u_0 = 2.78 \qquad u_1 = 5.506$

По определению мы имеем: $w_m = h\sqrt{\beta_m^2 - k_3^2}$
$u_m = h\sqrt{k_1^2 - \beta_m^2}$

Здесь, h – неизвестна, поэтому для нахождения β_m будет рассматривать соотношение

$$\frac{v_m}{u_m} = \frac{h\sqrt{\beta_m^2 - k_3^2}}{h\sqrt{k_1^2 - \beta_m^2}} = \frac{\sqrt{\beta_m^2 - k_3^2}}{\sqrt{k_1^2 - \beta_m^2}}$$

Отсюда находим β_{TE_m}:

$$\beta_{TE_m} = \sqrt{\frac{\left(\frac{v_m}{u_m} k_1\right)^2 + k_3^2}{\left(\frac{v_m}{u_m}\right)^2 + 1}}$$

где
$$k_2 = \frac{2\pi}{\lambda} n_n = \frac{2 \cdot 3{,}14}{1{,}06 \cdot 10^{-6}} \cdot 1{,}68 = 9{,}958 \cdot 10^6 (м^{-1})$$
$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda} n_в = \frac{2 \cdot 3{,}14}{1{,}06 \cdot 10^{-6}} \cdot 1{,}70 = 10{,}077 \cdot 10^6 (м^{-1})$$

Вот теперь можно найти β_{TE} для нулевой и первой моды:

$$\beta_{TE_0} = \sqrt{\frac{\left(\frac{7.346}{2.78} \cdot 10{,}077 \cdot 10^6\right)^2 + (9{,}958 \cdot 10^6)^2}{\left(\frac{7.346}{2.78}\right)^2 + 1}} = 10{,}062 \cdot 10^6 = 10{,}062(мкм^{-1})$$

$$\beta_{TE_1} = \sqrt{\frac{\left(\frac{5.601}{5.506} \cdot 10{,}077 \cdot 10^6\right)^2 + (9{,}958 \cdot 10^6)^2}{\left(\frac{5.601}{5.506}\right)^2 + 1}} = 10{,}019 \cdot 10^6 = 10{,}019(мкм^{-1})$$

$10.019 < \beta < 10{,}062$

$$N_0 = \frac{\beta_0}{k} = \frac{10{,}062 \cdot 10^6}{5{,}92 \cdot 10^6} = 1{,}6996$$

$$N_1 = \frac{\beta_1}{k} = \frac{10{,}013 \cdot 10^6}{5{,}92 \cdot 10^6} = 1{,}692$$

$n_n < N_m < n_B$

Проверка **УВР**

$1.68 < N_0 < 1{,}70$ $1.68 < N_1 < 1{,}70$

1,68<1,6996<1,70 1,68<1,692<1,70