1. НАПРАВЛЯЕМЫЕ ВОЛНЫ

Направляемая волна – это волна, которая распространяется вдоль заданного направления. Приоритетность направления обеспечивается направляющей системой. К направляющим системам относятся: металлические плоскости, металлические или диэлектрические стержни, металлические трубки и т.д. Конструктивно эти системы реализуются в виде волноводов, коаксиальных и полосковых линий.

1.1. Особенности направляемой волны. Волновое уравнение

Волна, которая распространяется в направляющей структуре, называется направляемой волной. Направляемая волна – неоднородная: в плоскости фронта волны ее компоненты E и H не постоянны, поскольку изменяются по закону стоячей волны. В такой волне поверхности равных фаз и равных амплитуд не совпадают. Изменения амплитуды волны определяются необходимостью выполнения граничных условий на поверхности, которая ограничивает эту структуру.

На рис. 1.1 показана произвольная односвязная направляющая система, где ΔS – поперечное сечение направляющей системы, S – плоскость фронта (XOY), Z – направление распространения.

В общем виде комплексная амплитуда направляемой волны имеет два сомножителя:

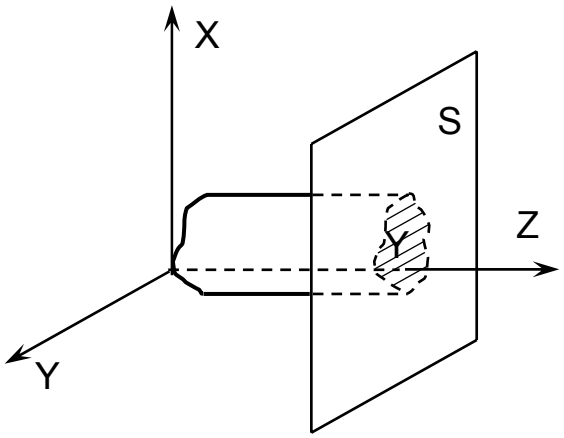


Рис. 1.1

$$\dot{\bar{E}}_m = \dot{\bar{E}}_0(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}hz}, \qquad (1.1)$$

где $\dot{\bar{E}}_0(x,y)$ – амплитудный множитель, то есть функция распределения напряженности поля в плоскости поперечного сечения волны;

e^{-jhz} – фазовый множитель;

h – продольное волновое число.

Волновое уравнение (Гельмгольца) для монохроматической волны в неограниченном пространстве имеет следующий вид:

$$\nabla^2 \dot{\bar{E}}_m + k^2 \dot{\bar{E}}_m = 0,$$

где волновое число $\mathrm{k} = \frac{\omega}{\vartheta} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{2\pi}{\lambda}.$

В ограниченной направляющей структуре решение уравнения имеет вид (1.1), что позволяет упростить исходное уравнение.

Разобьем пространственный лапласиан на два слагаемых, тогда получим

$$\nabla_s^2 \dot{\bar{E}}_m + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \dot{\bar{E}}_m + k^2 \dot{\bar{E}}_m = 0,$$

где $\nabla_S^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – двумерный лапласиан в плоскости фронта волны.

Вторая производная по продольной координате с учетом (1.1) заменяется в соответствии со следующим равенством:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \dot{\bar{E}}_m = (-jh)^2 \dot{\bar{E}}_m = -h^2 \dot{\bar{E}}_m.$$

Тогда волновое уравнение примет такой вид:

$$\nabla_s^2 \dot{\bar{E}}_m + \left(k^2 - h^2\right)\dot{\bar{E}}_m = 0.$$

Если в уравнение ввести обозначение $g = \sqrt{k^2 - h^2}$ – поперечное волновое число, то получим

$$\nabla_s^2 \dot{\bar{E}}_m + g^2 \dot{\bar{E}}_m = 0, \qquad (1.2)$$

а если сократить его на экспоненту, то –

$$\nabla_s^2 \dot{\bar{E}}_0(x,y) + g^2 \dot{\bar{E}}_0(x,y) = 0.$$

Таким образом, волновое уравнение для направляемой волны зависит только от поперечных пространственных координат.

1.2. Взаимосвязь поперечных и продольных компонент волны

Особенность направляемой волны (1.1) позволяет выразить поперечные компоненты волны через продольные. Поэтому взаимосвязи

$$\dot{E}_X, \dot{E}_Y = f_1\left(\dot{E}_Z, \dot{H}_Z\right), \qquad \dot{H}_X, \dot{H}_Y = f_2\left(\dot{E}_Z, \dot{H}_Z\right)$$

можно получить исходя из уравнений Максвелла, записанных в комплексной форме для диэлектрической среды:

$$rot\ \dot{\bar{H}} = j\omega\varepsilon\ \dot{\bar{E}};$$

$$rot\ \dot{\bar{E}} = -j\omega\mu\ \dot{\bar{H}}.$$

Запишем компоненты ротора и приравняем составляющие векторов в левой и правой частях уравнений:

$$rot\dot{\bar{E}} = \begin{vmatrix} \vec{X}_0 & \vec{Y}_0 & \vec{Z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{E}_x & \dot{E}_y & \dot{E}_z \end{vmatrix};$$

$$rot_x\dot{\bar{E}} = \frac{\partial\dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial\dot{E}_y}{\partial z} = -j\omega\mu\dot{H}_x,$$

$$rot_y\dot{\bar{E}} = -\left(\frac{\partial\dot{E}_z}{\partial x} - \frac{\partial\dot{E}_x}{\partial z}\right) = -j\omega\mu\dot{H}_y,$$

$$rot_z\dot{\bar{E}} = \frac{\partial\dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial\dot{E}_x}{\partial y} = -j\omega\mu\dot{H}_z.$$

Заменим производную $\frac{\partial}{\partial z} = -(jh)$ и выберем первое и второе равенства:

$$\left\{\begin{array}{l} j\omega\mu\dot{H}_X + jh\dot{E}_Y = -\frac{\partial\dot{E}_Z}{\partial y}, \\ j\omega\mu\dot{H}_Y - jh\dot{E}_X = \frac{\partial\dot{E}_Z}{\partial x}, \end{array}\right| \begin{array}{l} \mu\to-\varepsilon \\ \\ \mathrm{E}\leftrightarrow\mathrm{H} \end{array} \left|\left\{\begin{array}{l} -j\omega\varepsilon\dot{E}_X + jh\dot{H}_Y = -\frac{\partial\dot{H}_Z}{\partial y}, \\ -j\omega\varepsilon\dot{E}_Y - jh\dot{H}_X = \frac{\partial\dot{H}_Z}{\partial x}. \end{array}\right.\right.$$

В связи с симметрией уравнений Максвелла вторую пару уравнений получим с использованием принципа эквивалентных замен. Из полученных уравнений выберем пару уравнений, в которые входят компоненты $\dot{H}_x$, $\dot{E}_y$. Решим выбранную систему уравнений относительно этих переменных. Для этого умножим обе части уравнений на соответствующие коэффициенты, а затем сложим эти уравнения:

$$\left\{\begin{array}{l} j\omega\mu\dot{H}_X + jh\dot{E}_Y = -\frac{\partial\dot{E}_Z}{\partial y}, \\ jh\dot{H}_X + j\omega\varepsilon\dot{E}_Y = -\frac{\partial\dot{H}_Z}{\partial x}, \end{array}\right| \begin{array}{l} jh \\ \\ -j\omega\mu \end{array} \left|\begin{array}{l} j\omega\varepsilon, \\ \\ -jh. \end{array}\right.$$

Тогда

$$-h^2\dot{E}_Y + k^2\dot{E}_Y = -jh\frac{\partial\dot{E}_Z}{\partial y} + j\omega\mu\frac{\partial\dot{H}_Z}{\partial x},$$

$$-k^2\dot{H}_X + h^2\dot{H}_X = -j\omega\varepsilon\frac{\partial\dot{E}_Z}{\partial y} + jh\frac{\partial\dot{H}_Z}{\partial x}.$$

Учитывая, что $k^2 - h^2 = g^2$, получим

$$\dot{E}_Y = \frac{j}{g^2}\left(-h\frac{\partial \dot{E}_Z}{\partial y} + \omega\mu\frac{\partial \dot{H}_Z}{\partial x} \right),$$

$$\dot{H}_X = -\frac{j}{g^2}\left(-\omega\varepsilon\frac{\partial \dot{E}_Z}{\partial y} + h\frac{\partial \dot{H}_Z}{\partial x} \right). \qquad (1.3)$$

Используя эквивалентные замены $\mu \to -\varepsilon, E \to H$, имеем еще пару уравнений:

$$\dot{H}_Y = \frac{j}{g^2}\left(-h\frac{\partial \dot{H}_Z}{\partial y} - \omega\varepsilon\frac{\partial \dot{E}_Z}{\partial x} \right),$$

$$\dot{E}_X = -\frac{j}{g^2}\left(\omega\mu\frac{\partial \dot{H}_Z}{\partial y} + h\frac{\partial \dot{E}_Z}{\partial x} \right). \qquad (1.4)$$

Эта система из четырех уравнений определяет взаимосвязь поперечных компонент направляемой волны через продольные. В свою очередь, продольные составляющие $\dot{H}_z, \dot{E}_z$ определяются из решения одномерных (скалярных) волновых уравнений

$$\nabla_S^2 \dot{E}_Z + g^2 \dot{E}_Z = 0, \qquad \nabla_S^2 \dot{H}_Z + g^2 \dot{H}_Z = 0$$

с учетом граничных условий $E_\tau = 0,\ H_n = 0$ (краевая задача Дирихле).

1.3. Типы направляемых волн

Проанализируем особенности волнового уравнения в двухсвязных и односвязных направляющих структурах.

1. В первом варианте волновое уравнение

$$\nabla_s^2 \dot{\bar{E}} + g^2 \dot{\bar{E}} = 0$$

удовлетворяется в частном случае при двух условиях:

$$\nabla_s^2 \dot{\bar{E}} = 0, \qquad g = 0.$$

Равенство нулю плоского лапласиана соответствует статическому полю. Действительно, из уравнения Максвелла

$$rot\dot{\bar{E}} = -\frac{\partial \dot{\bar{B}}}{\partial t},$$

а при статическом поле $\frac{\partial \dot{\bar{B}}}{\partial t} = 0$ получим

$$rot\dot{\bar{E}} = 0.$$

Тогда, используя тождество, имеем

$$rotrot\dot{\bar{E}} = graddiv\dot{\bar{E}} - \nabla^2 \dot{\bar{E}} = 0,$$

причем в свободном от зарядов пространстве $div\dot{\bar{E}} = 0,$ следовательно, $\nabla^2 \dot{\bar{E}} = 0.$

Вывод: этот тип волн существует в направляющих системах, по которым можно передавать постоянный ток (двусвязные системы). В таких структурах $g = 0,$ поэтому волновое число $k^2 = g^2 + h^2$ совпадает с волновым числом для неограниченного пространства, т.е. $k = h.$ В этом случае волна является поперечной ($E_Z = 0, H_Z = 0$), т.е. линии векторов E и H лежат в плоскости поперечного сечения волны. Такая волна обозначается как ТЕМ-волна (transvers – поперечный).

В односвязных направляющих системах распространяются волны поперечно-магнитного (ТН) или поперечно-электрического (ТЕ) типа.

2. Электрическая (Е-волна), или ТМ (ТН), – это поперечно-магнитная волна, в которой отсутствует продольная магнитная составляющая $H_Z = 0.$

3. Магнитная (Н-волна), или ТЕ, – это поперечно-электрическая волна, в которой продольная составляющая $E_Z = 0$.

В таких структурах плоский лапласиан и поперечное волновое число отличны от нуля:

$$\nabla_s^2 \dot{\bar{E}} \neq 0, \qquad g \neq 0.$$

Постоянная распространения h отличается от волнового числа неограниченного пространства k, то есть

$$h = \sqrt{k^2 - g^2}. \tag{1.5}$$

В предельном случае при

$$k = g = k_K, \qquad h = 0$$

исчезает волновой процесс. Введя понятие критической длины волны, постоянную распространения можно представить в таком виде:

$$h = \sqrt{k^2 - k_K{}^2} = k\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_K}\right)^2}, \tag{1.6}$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}, \; k_K = \frac{2\pi}{\lambda_K}$ – текущее волновое число и его критическое значение соответственно.