(10) Знайти зсув фаз між власними оптичними хвилями $\Delta\varphi_e$ оптичного випромінювання, що розповсюджується ортогонально до оптичної осі кристала $LiNbO_3$ з довільною лінійною поляризацією. Електричне поле прикладене вздовж оптичної осі.

Тензор поляризаційних констант кристалу $LiNbO_3$ при прикладенні поля вздовж оптичної осі ($E_1 = E_2 = 0$, $E_3 \neq 0$) матиме вигляд:

$$\begin{vmatrix} a_{11}^0 + r_{13}E_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^0 + r_{13}E_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^0 + r_{33}E_3 \end{vmatrix}$$

Оскільки кристал одновісний, то $a_{11}^0 = a_{22}^0 = \frac{1}{n_0^2} = a_0$

$a_{33}^0 = \frac{1}{n_e^2} = a_e$ (для додатного кристалу)

Головні напрямки тензора $\bar{x}$: $[\{a_{ij}\} \cdot \bar{x}] = \lambda \cdot \bar{x}$

λ – головні значення.

$$(a_{11}^0 + r_{13}E_3)x_1 = \lambda x_1 \qquad (a_0 + r_{13}E_3)x_1 = \lambda x_1$$
$$(a_{22}^0 + r_{13}E_3)x_2 = \lambda x_2 \qquad (a_0 + r_{13}E_3)x_2 = \lambda x_2$$
$$(a_{33}^0 + r_{33}E_3)x_3 = \lambda x_3 \qquad (a_e + r_{33}E_3)x_3 = \lambda x_3$$

Система має ненульові розв'язки тоді, коли визначник системи дорівнює 0:

$$\begin{vmatrix} a_0 + r_{13}E_3 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a_0 + r_{13}E_3 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & a_e + r_{33}E_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(a_0 + r_{13}E_3 - \lambda)^2 (a_e + r_{33}E_3 - \lambda) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 = a_0 + r_{13}E_3 \\ \lambda_3 = a_e + r_{33}E_3 \end{array}\right\} \text{корені системи}$$

Рівняння оптичної індикатриси:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1$$

$$(a_0 + r_{13} E_3)(x_1^2 + x_2^2) + (a_e + r_{33} E_3) z^2 = 1$$

При введені електричним полем показників заломлення:

$$n_1' = n_2' = n_0' = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{1,2}}} = \frac{1}{\sqrt{a_0 + r_{13} E_3}} = (a_0 + r_{13} E_3)^{-1/2} \approx$$

розклали в ряд

$$\approx a_0^{-1/2} - \frac{1}{2} a_0^{-\frac{1}{2}-1} r_{13} E_3 = n_0 - \frac{1}{2} n_0^3 r_{13} E_3$$

$$n_e' = \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} = \frac{1}{\sqrt{a_e + r_{33} E_3}} \approx n_e - \frac{1}{2} n_e^3 r_{33} E_3$$

Зсув фаз між власними хвилями при проходженні ними деякої відстані ℓ в кристалі:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e' - n_o')\ell = \frac{2\pi}{\lambda}\ell\left(n_e - \frac{1}{2} n_e^3 r_{33} E_3 - n_o + \frac{1}{2} n_o^3 r_{13} E_3\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)\ell + \underbrace{\frac{2\pi}{\lambda}\left(n_e^3 r_{33} - n_o^3 r_{13}\right) E_3 \ell}$$

$\Delta\varphi_E$ - фазовий зсув, введений електричним полем