

1. Мат. модель джерела інформації. Дискретне джерело без пам'яті (с 74-75).

Системы связи предназначены для передачи информации, создаваемой источником, некоторого места назначения. Источники информации могут принимать множество различных форм. Например, в радиовещании источник выдает звуковой сигнал (речь и музыку). В телевизионном вещании выходом источника является, кроме звука, подвижное изображение. Выходы этих источников являются аналоговыми сигналами, и поэтому они называются *аналоговыми источниками*. В противоположность этому компьютеры устройства хранения информации, такие как магнитные или оптические диски, имеют дискретный выход (обычно двоичные или ASCII¹ символы), и поэтому их называют *дискретными источниками*. В то время как источники являются аналоговыми и дискретными, цифровая система связи предназначена для передачи информации цифровой форме. Следовательно, выход источника должен быть преобразован в форму, который может быть передан как цифровой. Это преобразование выхода источника цифровой формат обычно осуществляется кодером источника, выход которого может быть представлен последовательностью двоичных цифр.

3.1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ИСТОЧНИКОВ ИНФОРМАЦИИ

Произвольный источник информации создает выход, который является случайным, т.е. выход источника характеризуется статистически. Действительно, если выход источника известен точно, то нет нужды его передавать. В этом разделе мы рассмотрим дискретные аналоговые источники информации и сформулируем математические модели для каждого типа источника.

Простейший тип дискретного источника – это такой, который выдает последовательность букв (символов), выбираемых из определенного алфавита. Например, *двоичный источник* выдает двоичную последовательность вида 100101110..., причём алфавит состоит из двух символов $\{0, 1\}$. В более общем случае источник дискретной информации с алфавитом из L символов, скажем $\{x_1, x_2, \dots, x_L\}$, выдает последовательность букв, выбираемых из этого алфавита.

Чтобы конструировать математическую модель для дискретного источника предположим, что каждый символ алфавита $\{x_1, x_2, \dots, x_L\}$ имеет заданную вероятность выбора p_k , т.е.

$$p_k = P(X=x_k), 1 \leq k \leq L,$$

и последующих. Источник, выход которого удовлетворяет условиям статистической независимости символов в выбранной последовательности, называется источником *без памяти*. Такой источник называется *дискретным источником без памяти (ДИБП)*.

Если отдельные выходные символы дискретного источника статистически *взаимозависимы*, как, например, в английском тексте, мы можем сконструировать математическую модель, основанную на статической стационарности. По определению дискретный источник называется *стационарным*, если совместные вероятности двух последовательностей длины n , допустим a_1, a_2, \dots, a_n и $a_{1+m}, a_{2+m}, \dots, a_{n+m}$ одинаковые для всех $n \geq 1$ и при всех сдвигах m . Другими словами, совместные вероятности для последовательностей источника произвольной длины инвариантны по отношению к произвольному сдвигу во времени.

2. Кількість інформації, ентропія.(78)

Основоположник теорії інформації Клод Шеннон визначив інформацію, як зняту невизначеність. Точніше сказати, отримання інформації - необхідна умова для зняття невизначеності. Невизначеність виникає в ситуації вибору. Завдання, що вирішується в ході зняття невизначеності - зменшення кількості розглянутих варіантів (зменшення різноманітності), і в підсумку вибір одного відповідного ситуації варіанту з числа можливих. Зняття невизначеності дає можливість приймати обґрунтовані рішення і діяти. У цьому керуюча роль інформації.

Ситуація максимальної невизначеності припускає наявність декількох рівноймовірно альтернатив (варіантів), тобто жоден з варіантів не є кращим. Причому, чим більше рівноймовірно варіантів спостерігається, тим більше невизначеність, тим складніше зробити однозначний вибір і тим більше інформації потрібно для того мати. Для N варіантів ця ситуація описується наступним розподілом ймовірностей: $\{1/N, 1/N, \dots, 1/N\}$.

Мінімальна невизначеність дорівнює 0, тобто ця ситуація повної визначеності, що означає що вибір зроблено, і вся необхідна інформація отримана. Розподіл ймовірностей для ситуації повної визначеності виглядає так: $\{1, 0, \dots, 0\}$.

Величина, що характеризує кількість невизначеності в теорії інформації позначається символом H і має назву ентропія, точніше інформаційна ентропія.

Ентропія (H) - міра невизначеності, виражена в бітах. Так само ентропію можна розглядати як міру рівномірності розподілу випадкової величини.

Ентропія $H_r(X)$ (за основою r) джерела інформації обчислюється за формулою:

$$H_r(X) = \sum_{i=1}^q p_i \log_r \left(\frac{1}{p_i} \right)$$

Де — p_i ймовірність отримання символу S_i , q — кількість символів в алфавіті.

Найчастіше за основу вибирається число 2. В такому випадку інформаційна ентропія збігається з числом бітів, яким можна закодувати інформацію.

Наприклад, якщо однакова ймовірність запису в комірці пам'яті одиниці або нуля (ці дві цифри складають алфавіт), тоді

$$H_r(2) = \frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{1}{2} \log_2 2 = 1.$$

Тобто інформаційна ентропія такої комірки дорівнює 1.

Властивості

- Ентропія завжди невід'ємна
- Ентропія максимальна, якщо значення x_i випадкової величини X рівноймовірні
- Максимальне значення ентропії $H_{\max}(X) = \log_a N$

3. Задача оптимального кодирования дискретного джерела інформації.

Одно и то же сообщение можно закодировать различными способами. Оптимально закодированным будем считать такой код, при котором на передачу сообщений затрачивается минимальное время. Если на передачу каждого элементарного символа (0 или 1) тратится одно и то же время, то оптимальным будет такой код, который будет иметь минимально возможную длину. Большинство кодов, используемых при кодировании информации без учета статистических свойств источника и помех в канале связи, основано на системах счисления (двоичной, десятичной, восьмеричной, шестнадцатеричной).

Общепризнанным в настоящее время является позиционный принцип образования системы счисления. Значение каждого символа (цифры) зависит от его положения - позиции в ряду символов, представляющих число. Единица каждого следующего разряда больше единицы предыдущего в m раз, где m - основание системы счисления. Полное число получаем, суммируя значения по разрядам. (Пример: в десятичном коде 111_{10} . $m = 10$; младший разряд - 1, второй - 10, третий - 100, то есть единица старшего разряда в десять раз больше единицы предыдущего разряда - единицы, десятки, сотни; также и в других системах счисления.)

Чем больше основание системы счисления, тем меньшее число разрядов требуется для представления данного числа, а следовательно, и меньшее время для его передачи. Однако с ростом основания усложняются устройства передачи и приема сигналов, так как логические элементы в этом случае должны иметь большее число устойчивых состояний. Если учитывать оба обстоятельства, то целесообразно выбрать систему, обеспечивающую минимум произведения основания кода m на количество разрядов n для выражения любого числа. Найдем этот минимум по графику для большого числа 60000_{10} .

Задача оптимального кодирования при заданном ограничении на сложность декодирования приводит к конструктивному подходу к проблеме взаимной однозначности кодирования. При этом используются достаточные условия однозначности разложения слов в произведение элементарных кодов. Примером такого условия является префиксность кода.

Один из первых алгоритмов эффективного кодирования информации был предложен Д. А. Хаффманом в 1952 году. Идея алгоритма состоит в следующем: зная вероятности символов в сообщении, можно описать процедуру построения кодов переменной длины, состоящих из целого количества битов. Символам с большей вероятностью ставятся в соответствие более короткие коды.

Коды Хаффмана обладают свойством **префиксности** (т.е. ни одно кодовое слово не является префиксом другого), что позволяет однозначно их декодировать.

Классический алгоритм Хаффмана на входе получает таблицу частот встречаемости символов в сообщении. Далее на основании этой таблицы строится дерево кодирования Хаффмана (H-дерево).^[1]

1. Символы входного алфавита образуют список свободных узлов. Каждый лист имеет вес, который может быть равен либо вероятности, либо количеству вхождений символа в сжимаемое сообщение.

2. Выбираются два свободных узла дерева с наименьшими весами.
3. Создается их родитель с весом, равным их суммарному весу.
4. Родитель добавляется в список свободных узлов, а два его потомка удаляются из этого списка.
5. Одной дуге, выходящей из родителя, ставится в соответствие бит 1, другой — бит 0.
6. Шаги, начиная с второго, повторяются до тех пор, пока в списке свободных узлов не останется только один свободный узел. Он и будет считаться корнем дерева.

4. Код змінної довжини, вимоги, що ставляться до такого коду.

Якщо символи джерела нерівноімовірні, більш ефективний метод кодування зводиться до використання кодів змінної довжини. Прикладом такого кодування є код Морзе. У коді Морзе символам, що виникають частіше, зіставляються коротші кодові слова, а символам, які виникають менш часто, зіставляються довші кодові слова. Дотримуючись цієї загальної ідеї, ми можемо врахувати ймовірність різних символів джерела при виборі кодів слів. Проблема в тому, щоб запропонувати метод вибору кодів слів для символів джерела. Цей метод кодування названий ентропійним кодуванням.

Таблиця 1. Код змінної довжини

Символ	$P(a_k)$	Код I	Код II	Код III
a_1	1/2	1	0	0
a_2	1/4	00	10	01
a_3	1/8	01	110	011
a_4	1/8	10	111	111

Для прикладу припустимо, що вихідні символи дискретного джерела без пам'яті a_1, a_2, a_3, a_4 з відповідними ймовірностями $P(a_1)=1/2$, $P(a_2)=1/4$, $P(a_3)=P(a_4)=1/8$ кодуються так як це показано в таблиці 1. Код I має змінну довжину і має принциповий недолік. Щоб побачити цей недолік, припустимо, що ми прийняли послідовність 001001 ... Ясно, що 00 декодується як a_2 . Однак наступні чотири біта декодуються неоднозначно. Вони можуть декодуватися або як a_4a_3 , або як $a_1a_2a_1$. Можливо, неоднозначність може бути вирішена шляхом очікування подальших бітів, але таке декодування вкрай небажане. Ми повинні розглянути тільки коди, які допускають негайне декодування, тобто без затримки в декодері.

Код II в табл. 1 забезпечує однозначне і негайне декодування. Зручно представляти кодові слова цього коду графічно як вузли на дереві, як показано на мал. 1. Видно, що 0 вказує на закінчення кодового слова в перших трьох кодових словах. Ця характеристика разом з тією обставиною, що жодне кодове слово не містить більше трьох двійкових символів, робить цей код негайно декодуємим. Зауважимо, що жодне кодове слово цього коду не є префіксом (початком) іншого кодового слова. Загалом, префіксна умова коду вимагає, щоб для даного кодового слова C_k довжини k з елементами (b_1, b_2, \dots, b_k) не існувало інших кодів довжиною $l < k$ з елементами (b_1, b_2, \dots, b_k) для $1 \leq l \leq k-1$.

Іншими словами, немає кодів довжини $l < k$, які збігаються з першими l двійковими символами іншого кодового слова довжини $k > l$. Ця властивість робить кодові слова негайно декодуєними.

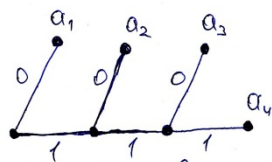
Код III з табл. 1 має кодове дерево, показане на рис. 2. Бачимо, що в цьому випадку має місце однозначне декодування, однак вимагає затримки.

Ясно, що цей код не задовольняє префіксній умові.

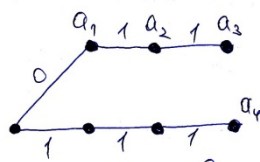
Наша головна мета - створити систематичну процедуру для конструювання однозначних декодуючих кодів змінної довжини, ефективних в тому сенсі, що середнє число біт на один символ джерела, яке визначається співвідношенням

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^L n_k P(a_k),$$

було б мінімальним. Умова існування коду змінної довжини, яке задовольняє префіксній умові, дається нерівністю Крафта.



Матч 1. Когда
здесь кто кого II
в матч. 1.



Матч 2. Когда
здесь кто кого III
в матч. 1.

5. Нерівність Крафта

Необхідною і достатньою умовою існування двійкового коду з кодovими символами довжиною $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_L$, що задовольняє умову префіксності є:

$$\sum_{k=1}^L 2^{-n_k} \leq 1. \quad (1)$$

Доведемо спочатку, що умова (1) є достатньою для існування префіксного коду. Щоб побудувати такий код, почнемо з повного двійкового дерева порядку $n=n_L$, яке має 2^n кінцевих вузлів, причому від кожного вузла порядку $k-1$ «ростуть» по два вузла порядком, $1 \leq k \leq n$.

Виберемо деякий вузол порядку n_1 в якості першого кодового слова C_1 . Цей вибір прибирає 2^{n-n_1} кінцевих вузлів (тобто долю від 2^{n-1} до 2^n кінцевих вузлів). Від лишившихся доступних вузлів порядку n_2 ми вибираємо один вузол для другого кодового слова C_2 . Цей вибір прибирає 2^{n-n_2} кінцевих вузлів (тобто долю від 2^{n-2} до 2^n кінцевих вузлів). Цей процес продовжується, поки останнє кодове слово не визначене у кінцевому вузлі $n=n_L$. З цього випливає, у вузлі порядку $j < L$ доля числа

$$\sum_{k=1}^j 2^{-n_k} < \sum_{k=1}^L 2^{-n_k} \leq 1. \quad (2)$$

відсічених кінцевих вузлів завжди знайдеться вузол порядку $k > j$, який може бути обраний для наступного слова. Таким чином, ми створили кодове дерево, яке вбудоване в повне дерево з 2^n вузлів.

Як ілюстрація: дерево має 16 кінцевих вузлів, джерело складається з 5 символів, відображаємих кодovими словами довжиною $n_1=1, n_2=2, n_3=3, n_4=n_5=4$.

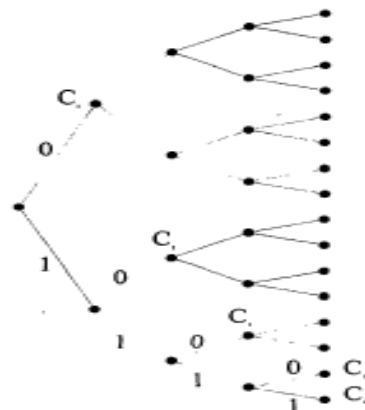


Рис. 3.3.3. Конструирование двоичного дерева, встроеного в полное дерево

Щоб довести, що умова (1) є достатньою умовою, помітимо, що у дереві порядку $n=n_L$ число кінцевих вузлів, відсічених від загального числа 2^n кінцевих вузлів рівне

$$\sum_{k=1}^L 2^{n-n_k} \leq 2^n \quad \sum_{k=1}^L 2^{-n_k} \leq 1$$

з цього випливає

Доведення (1) закінчене.

Префіксний код – це код зі словом змінної довжини, що має таку властивість: якщо в код входить слово a , то для будь-якої не пустої строки b слова ab не існує. Префіксний

код хоч і складається зі слів різної довжини, ці слова можна записувати без розділових знаків.

6. Теорема Шеннона про кодування дискретного джерела інформації.

Теперь предположим, что мы пытаемся уменьшить скорость кодирования R путем смягчения условия однозначности процесса кодирования. Например, предположим, что только доля L^J блоков символов источника кодируется однозначно. Конкретно, выберем 2^N 1 наиболее вероятных J -символьных блоков и будем кодировать каждый из них однозначно, в то время как оставшиеся $L^J - (2^N - 1)$ блоков длины J будем представлять одним оставшимся кодовым словом. Эта процедура кодирования вызовет ошибку декодирования каждый раз, когда источник выдаст такой маловероятный блок. Пусть P_e означает вероятность такой ошибки. Отталкиваясь от этой процедуры кодирования, Шеннон (1948) доказал следующую теорему кодирования источника.

Теорема кодирования источника I. Пусть X – это ансамбль символов ДИБП с конечной энтропией $H(X)$. Блоки из J символов источника кодируются в двоичные кодовые слова длиной N . Для любого $\varepsilon > 0$ вероятность P_e ошибки декодирования можно сделать сколь угодно малой, если

$$R = \frac{N}{J} \geq H(X) + \varepsilon \quad (3.3.5)$$

и J достаточно велико.

Наоборот, если

¹ Этот параметр не следует путать со скоростью передачи информации от двоичного источника, используемой, в частности, в гл. 4. По своему смыслу используемый здесь параметр R можно было бы назвать «затраты (на кодирование)» (прп).

$$R \leq H(X) - \varepsilon, \quad (3.3.6)$$

тогда P_e сколь угодно близка к 1 при достаточно больших J .

Исходя из этой теоремы мы видим, что среднее число бит на символ источника, требуемое для кодирования выхода ДИБП с произвольно малой вероятностью ошибки декодирования, ограничено снизу энтропией источника $H(X)$. С другой стороны, если $R < H(X)$, вероятность ошибки декодирования приближается к 100 %, если J произвольно увеличивать.

ДИБП – дескретне джерело без пам'яті.

Більш детально можна почитати в розділі 3.3.1 «Цифровая связь», Прокис на **82 ст.**

7. Код Хаффмана.

Алгоритм кодирования Хаффмана. Хаффмен (1952) разработал алгоритм кодирования переменной длины, основанный на знании априорных вероятностей символов $p(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, L$. Этот алгоритм оптимален в том смысле, что среднее число двоичных символов, требуемых для представления исходных символов, минимально. Получаемые кодовые слова удовлетворяют префиксному условию, определенному выше, что позволяет уникально и мгновенно декодировать полученную последовательность. Мы иллюстрируем этот алгоритм кодирования посредством двух примеров.

Пример 3.3.1. Рассмотрим ДИБП с семью возможными символами x_1, x_2, \dots, x_7 , имеющими вероятности выбора, иллюстрируемые рис. 3.3.4.

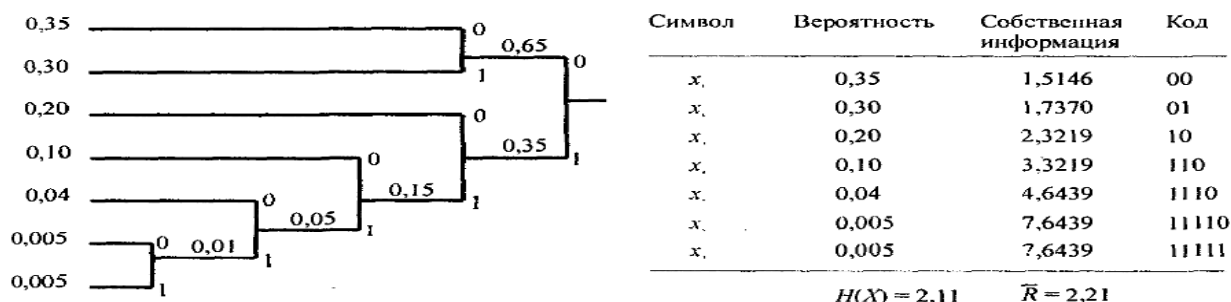


Рис. 3.3.4. Пример кодирования ДИБП кодом переменной длины

Мы упорядочили символы источника в порядке убывания вероятностей, т.е. $x_1 \geq P(x_2) \geq \dots \geq P(x_7)$. Процесс кодирования начинаем с двух наименее вероятных символов x_6 и x_7 . Эти два символа объединяем, как показано на рис. 3.3.4, причем верхнему ветвлению присваиваем «0», а нижнему — «1». Вероятности этих двух ветвей складываются, и общему узлу присваивается суммарная вероятность, равная в данном случае 0,01. Теперь мы имеем исходные символы x_1, x_2, \dots, x_5 плюс новый символ, означим его x'_6 , полученный объединением x_6 и x_7 . На следующем шаге снова объединяются два наименее вероятных символа из набора $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x'_6$. Это x_5 и x'_6 , которые имеют объединенную вероятность 0,05. Переходу от x_5 присваиваем «0», а переходу от x'_6 — «1». Эта процедура продолжается, пока мы не исчерпаем все возможные символы источника. Результат — кодовое дерево с ветвями, которые содержат требуемые

87

кодированные слова. Кодовые слова получаются, если двигаться от самого правого узла дерева переходя к самому левому узлу. Результирующие кодовые слова приведены на рис. 3.3.4. Среднее число двоичных элементов на символ этого кода $\bar{R} = 2,21$ бит/символ. Энтропия источника — 2,11 бит/символ.

Заметим, что полученный код не единственно возможный. Например, на предпоследнем шаге процедуры кодирования мы имеем равный выбор между x_1 и x_2 имеющими одинаковые вероятности. В этом пункте мы соединили x_1 и x_2 . В альтернативном коде мы можем соединить x_2 и x'_3 . Результирующий код для этого случая иллюстрируется на рис. 3.3.5.

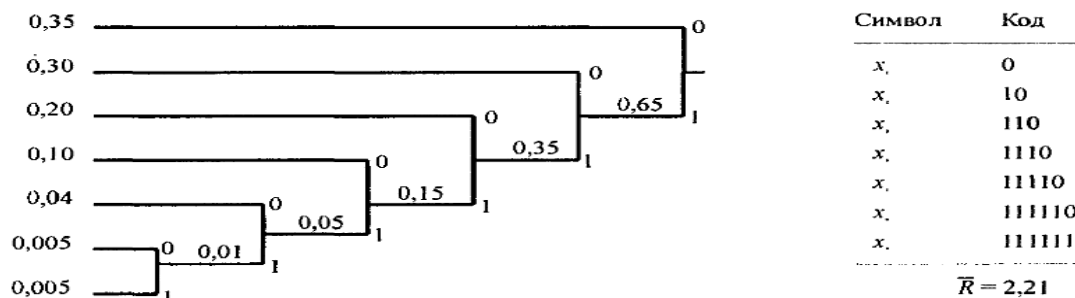


Рис. 3.3.5. Альтернативный код для ДИБП в примере 3.3.1

Среднее число бит на символ для этого кода также равно 2.21. Следовательно, полученные коды одинаково эффективны. Кроме того, назначение «0» верхнему переходу и «1» нижнему (менее вероятному) переходу выбрано произвольно. Мы можем поменять местами 0 и 1 и получить ещё эффективный код, удовлетворяющий префиксному условию.

8. Оптимальный приём сигнала. Демодуляция и детектирование

Цифровая связь. Проakis Дж. (Proakis). 2000, с 255.

5.4.1. Оптимальный приёмник двоичных сигналов

Рассмотрим двоичную систему связи, которую используют для передачи информации двух модулированных по несущей сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, где

$$s_m(t) = \operatorname{Re}[s_{lm}(t)e^{j2\pi f_c t}], \quad m = 1, 2, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.4.1)$$

а $s_{l,m}(t)$, $m = 1, 2$, – эквивалентные низкочастотные сигналы.

Считается, что два сигнала имеют равные энергии

$$\mathcal{E} = \int_0^T s_m^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T |s_{lm}(t)|^2 dt \quad (5.4.2)$$

и они характеризуются комплексным коэффициентом корреляции

$$\rho_{12} \equiv \rho = \frac{1}{\mathcal{E}} \int_0^T s_{l1}^*(t) s_{l2}(t) dt. \quad (5.4.3)$$

Считается, что принимаемый сигнал отличается от переданного случайной фазой и подвергается воздействию аддитивного шума

$$n(t) = \operatorname{Re}\{[n_c(t) + jn_s(t)]e^{j2\pi f_c t}\} = \operatorname{Re}[z(t)e^{j2\pi f_c t}]. \quad (5.4.4)$$

Таким образом, принимаемый сигнал можно выразить так:

$$r(t) = \operatorname{Re}\{[s_{lm}(t)e^{j\phi} + z(t)]e^{j2\pi f_c t}\}, \quad (5.4.5)$$

где

$$r_l(t) = s_{lm}(t)e^{j\phi} + z(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.4.6)$$

– эквивалентный низкочастотный принимаемый сигнал. Этот принимаемый сигнал теперь проходит через демодулятор, отсчёт которого при $t = T$ подается на детектор.

Оптимальный демодулятор. В разд. 5.1.1 мы показали, что, если принимаемый сигнал коррелируется с набором ортонормированных функций $\{f_n(t)\}$, на которые натянуто пространство сигналов, выходы набора корреляторов обеспечивают набор достаточных статистик для детектора с тем, чтобы сделать решение, которое минимизирует среднюю вероятность ошибки. Мы также показали, что набор согласованных фильтров может заменить набор корреляторов.

Похожее ортонормированное разложение можно выполнить по отношению к принимаемому сигналу с неизвестной фазой несущей. Однако математически удобнее иметь дело с эквивалентным низкочастотным сигналом и выполнить сигнальные корреляторы или согласованные фильтры по отношению к эквивалентным низкочастотным сигналам.

Для конкретности: импульсная характеристика фильтра, согласованного с комплексным эквивалентным низкочастотным сигналом $s_l(t)$, $0 \leq t \leq T$, определяется так (см. задачу 5.6):

$$h_l(t) = s_l^*(T-t), \quad (5.4.7)$$

а выход такого фильтра в момент $t = T$ равен

$$\int_0^T |s_l(t)|^2 dt = 2\mathcal{E}, \quad (5.4.8)$$

где \mathcal{E} – энергия сигнала. Аналогичный результат получается, если сигнал $s_i(t)$ коррелируется с $s_i^*(t)$, а коррелятор строится в момент времени $t = T$. Следовательно, оптимальный демодулятор для эквивалентного низкочастотного принимаемого сигнала $s_i(t)$ в (5.4.6) можно реализовать двумя согласованными фильтрами, работающими параллельно, один согласован с $s_{11}(t)$, а другой с $s_{12}(t)$. Он показан на рис. 5.4.1. Выходы согласованных фильтров или корреляторов в точках отсчёта являются двумя комплексными числами

$$r_m = r_{mc} + jr_{ms}, \quad m = 1, 2. \quad (5.4.9)$$

Предположим, что передаётся сигнал $s_1(t)$. Тогда легко показать (см. задачу 5.35), что

$$\begin{aligned} r_1 &= 2\mathcal{E} \cos \phi + n_{1c} + j(2\mathcal{E} \sin \phi + n_{1s}), \\ r_2 &= 2\mathcal{E}|\rho| \cos(\phi + \alpha_0) + n_{2c} + j(2\mathcal{E}|\rho| \sin(\phi + \alpha_0) + n_{2s}), \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

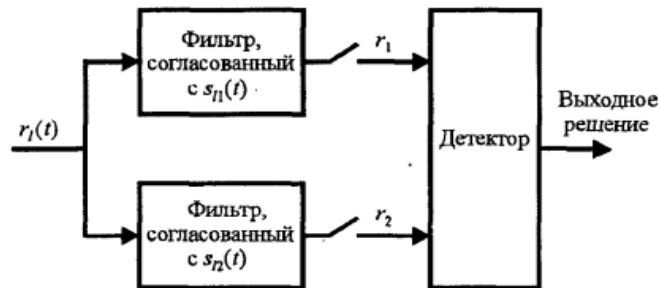


Рис. 5.4.1. Оптимальный приёмник для двоичных сигналов

где ρ – комплексный коэффициент корреляции двух сигналов $s_{11}(t)$ и $s_{12}(t)$, который можно выразить как $\rho = |\rho| \exp(j\alpha_0)$. Случайные величины шума n_{1c} , n_{1s} , n_{2c} и n_{2s} – совместно гауссовские с нулевыми средними и равными дисперсиями.

Оптимальный детектор. Оптимальный детектор наблюдает случайные величины $[r_{1c} \ r_{1s} \ r_{2c} \ r_{2s}] = \mathbf{r}$, где $r_1 = r_{1c} + jr_{1s}$ и $r_2 = r_{2c} + jr_{2s}$, и выносит свое решение на основе апостериорных вероятностей $P(\mathbf{s}_m | \mathbf{r})$, $m = 1, 2$. Эти вероятности можно выразить так:

$$P(\mathbf{s}_m | \mathbf{r}) = \frac{P(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) P(\mathbf{s}_m)}{p(\mathbf{r})}, \quad m = 1, 2, \quad (5.4.11)$$

Таким образом, оптимальный детектор вычисляет две огибающие $\sqrt{r_{1c}^2 + r_{1s}^2}$ и $\sqrt{r_{2c}^2 + r_{2s}^2}$ и соответствующие значения функции Бесселя $I_0(2\mathcal{E}\sqrt{r_{1c}^2 + r_{1s}^2}/\sigma^2)$ и $I_0(2\mathcal{E}\sqrt{r_{2c}^2 + r_{2s}^2}/\sigma^2)$ для того, чтобы сформировать отношение правдоподобия. Мы видим, что эти вычисления требуют знания дисперсии шума σ^2 . Затем отношение правдоподобия сравнивается с порогом $P(\mathbf{s}_2)/P(\mathbf{s}_1)$, чтобы определить, какой сигнал передан.

Существенные упрощения в реализации оптимального детектора возникают, когда оба сигнала равновероятны. В этом случае порог равен единице и с учетом монотонного изменения функции Бесселя, показанного на рис. 5.4.2, правило оптимального детектирования упрощается:

$$\sqrt{r_{1c}^2 + r_{1s}^2} \underset{s_2}{\overset{s_1}{>}} \sqrt{r_{2c}^2 + r_{2s}^2}. \quad (5.4.21)$$

Таким образом, оптимальный детектор основывает свое решение на двух огибающих $\sqrt{r_{1c}^2 + r_{1s}^2}$ и $\sqrt{r_{2c}^2 + r_{2s}^2}$, и поэтому он называется *детектором огибающей*.

9. Білий нормальний шум і його властивості.(138)

Представлення білого шуму. Білий шум є випадковим процесом, який має постійну спектральну щільність в необмеженому діапазоні частот. Цей вид шуму не може бути виражений через вузько смугові квадратурні компоненти внаслідок широкосмуговості процесу.

У питаннях, пов'язаних з демодуляцією вузько смугових сигналів на тлі шумів, математично зручно представити адитивний шум як білий і виразити його через квадратурні компоненти. Це можна виконати, припускаючи, що сигнал і шум на приймаючій стороні пройшли через ідеальний смуговий фільтр, який має смугу пропускання більш широку, ніж смуга сигналу. Такий фільтр може внести незначні спотворення в сигнал, але він виключає частотні компоненти шуму поза смуги пропускання фільтра.

Білий шум, який пройшов ідеальний смуговий фільтр називають смуговим білим шумом і він має спектральну густину виду показаному на малюнку. Спектральна автокореляційна функція еквівалентного білого низькочастотного шуму рівна

$$\Phi_{zz}(f) = \begin{cases} N_0 (f \leq \frac{1}{2}B) \\ 0 (f > \frac{1}{2}B) \end{cases}$$

$$\phi_{zz}(\tau) = N_0 \frac{\sin \pi B \tau}{\pi \tau}$$

Гранична форма $\phi_{zz}(\tau)$, коли смуга частот $B \rightarrow \infty$ виражається

$$\phi_{zz}(\tau) = N_0 \delta(\tau)$$

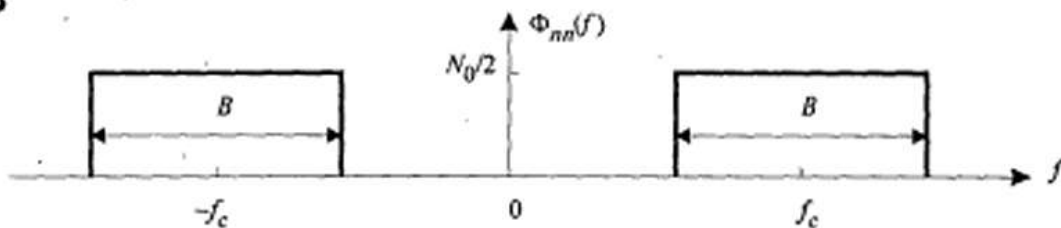


Рис. 4.1.3. Смуговий шум з рівномірним спектром

Спектральна густина потужності білого і смугового білого шуму симетрична відносно $f = 0$, так що $\phi_{yx}(\tau) = 0$ для всіх τ . Відповідно

$$\phi_{zz}(\tau) = \phi_{xx}(\tau) = \phi_{yy}(\tau)$$

Це означає, що квадратурні компоненти $X(t)$ і $Y(t)$ не корельовано при всіх часових зсувах $\phi_{zz}(\tau)$, а автокореляційні функції $Z(t)$, $X(t)$ і $Y(t)$ однакові

10.Проектування сигналів. Достатня статистика для розпізнавання. (точнобудет написано нижевозможновообще не подходит)

4.2.2. Концепция пространства сигналов

Как в случае векторов, мы можем провести параллельное рассмотрение ряда сигналов, определенных на некотором интервале $[a, b]$ ¹. Скалярное произведение двух, в общем случае комплексных сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ обозначается $\langle x_1(t), x_2(t) \rangle$ и определяется как

$$\langle x_1(t), x_2(t) \rangle = \int_a^b x_1(t) x_2^*(t) dt. \quad (4.2.16)$$

Сигналы ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю. Норма сигнала определяется так:

$$\|x(t)\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \quad (4.2.17)$$

Ансамбль m сигналов называется ортонормированным, если все сигналы попарно ортогональны, а их нормы равны 1. Сигналы линейно независимы, если ни один сигнал не выражается как линейная комбинация остальных сигналов. Неравенство треугольника для двух сигналов выражается подобно (4.2.5):

$$\|x_1(t) + x_2(t)\| \leq \|x_1(t)\| + \|x_2(t)\|, \quad (4.2.18)$$

а неравенство Коши-Шварца выражается подобно (4.2.6):

$$\left| \int_a^b x_1(t) x_2^*(t) dt \right| \leq \left| \int_a^b |x_1(t)|^2 dt \right|^{1/2} \left| \int_a^b |x_2(t)|^2 dt \right|^{1/2}, \quad (4.2.19)$$

причём равенство имеет место, если $x_2(t) = ax_1(t)$, где a – произвольное комплексное число.

Достаточная статистика – статистика при которой становится ясно, что из сигнал+шум уже нельзя извлечь какую-то ещё дополнительную полезную информацию. (с 198-201)
Больше по этому вопросу мне ни хрена не ясно.

11. Критерій максимальної правдоподібності, метрична інтерпретація.

Критерий максимального правдоподобия получил наибольшее распространение потому, что он является относительно простым, не требует большого объема исходных данных, неплохо отражает большинство реальных условий передачи сообщений, аппаратная реализация алгоритмов максимального правдоподобия относительно проста, результаты применения этих алгоритмов во многом совпадают с теми, которые получают с помощью многих других критериев. Поэтому в дальнейшем основным критерием верности служит критерий максимального правдоподобия.

Удобным для практики является применение критерия максимального правдоподобия, который не требует большого количества исходных данных. оптимальное по критерию Неймана - Пирсона правило эквивалентно следующему правилу, оптимальному по критерию максимального правдоподобия.

Для определения помехоустойчивости передачи дискретных сообщений используют многие критерии верности: байесовский, идеального наблюдателя, максимального правдоподобия и др. Удобно применять критерий максимального правдоподобия, который не требует большого количества исходных данных.

При анализе помехоустойчивости применяют следующие критерии верности: среднего риска (байесовский критерий), полной вероятности правильного приема (критерий идеального наблюдателя или критерий Котельникова), а posteriorной вероятности правильного приема (критерий максимума а posteriorной вероятности), минимаксный критерий, критерий Неймана - Пирсона, информационный критерий, критерий максимального правдоподобия и др. Правило выбора решения предписывает вычисление разности этих расстояний и сравнение ее с порогом, зависящим от критерия и спектральной плотности белого шума. Для критерия максимального правдоподобия принимается решение о наличии того из двух сигналов, который ближе к наблюдаемой реализации. Это - правило, согласно которому строится так называемый идеальный (по Котельникову) приемник.

12. Узгоджена фільтрація сигналу в каналі з адитивним нормальним білим шумом

АБГШ

AWGN

Аддитивный белый гауссовский шум

Свойства согласованного фильтра. Согласованный фильтр имеет ряд интересных свойств. Докажем наиболее существенное свойство, которое состоит в следующем: если сигнал $s(t)$ подвергается воздействию АБГШ, то фильтр, согласованный с сигналом $s(t)$, максимизирует на выходе отношение сигнал / шум (ОСШ).

Чтобы доказать это свойство, предположим, что принимаемый сигнал $r(t)$ состоит из сигнала $s(t)$ и АБГШ $n(t)$ с нулевым средним и спектральной плотностью мощности $\Phi_{nn}(f) = \frac{1}{2} N_0$ Вт / Гц. Предположим, что сигнал $r(t)$ прошёл через фильтр с импульсной характеристикой $h(t)$, $0 \leq t \leq T$, и берётся отсчёт на выходе в точке $t = T$. Отклик фильтра на сигнальную и шумовую компоненту равен

$$y(t) = \int_0^t r(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^t s(\tau) h(t-\tau) d\tau + \int_0^t n(\tau) h(t-\tau) d\tau. \quad (5.1.18)$$

В точке отсчёта $t = T$ сигнальная и шумовая компоненты равны

$$y(T) = \int_0^T s(\tau) h(T-\tau) d\tau + \int_0^T n(\tau) h(T-\tau) d\tau = y_s(T) + y_n(T), \quad (5.1.19)$$

где $y_s(T)$ представляет сигнальную компоненту, а $y_n(T)$ – шумовую компоненту. Задача сводится к выбору импульсной характеристики фильтра, который максимизирует на выходе отношение сигнал / шум (ОСШ), определяемое так:

$$\text{ОСШ}_0 = \frac{y_s^2(T)}{E[y_n^2(T)]}. \quad (5.1.20)$$

Знаменатель в (5.1.20) определяет дисперсию шумовой компоненты на выходе фильтра. Определим $E[y_n^2(T)]$, т.е. дисперсию выходного шума. Имеем

$$\begin{aligned} E[y_n^2(T)] &= \int_0^T \int_0^T E[n(\tau)n(t)] h(T-\tau) h(T-t) dt d\tau = \\ &= \frac{1}{2} N_0 \int_0^T \int_0^T \delta(t-\tau) h(T-\tau) h(T-t) dt d\tau = \frac{1}{2} N_0 \int_0^T h^2(T-t) dt. \end{aligned} \quad (5.1.21)$$

Заметим, что эта дисперсия зависит от спектральной плотности шума на входе и энергии импульсной характеристики $h(t)$. Подставив $y_s(T)$ и $E[y_n^2(T)]$ в (5.1.20), получим для ОСШ на выходе фильтра выражение

$$\text{ОСШ}_0 = \frac{\left[\int_0^T s(\tau) h(T-\tau) d\tau \right]^2}{\frac{1}{2} N_0 \int_0^T h^2(T-t) dt} = \frac{\left[\int_0^T h(\tau) s(T-\tau) d\tau \right]^2}{\frac{1}{2} N_0 \int_0^T h^2(T-t) dt}. \quad (5.1.22)$$

Так как знаменатель в ОСШ зависит от энергии $h(t)$, максимум ОСШ по $h(t)$ можно получить максимизацией числителя в предположении, что знаменатель фиксирован. Максимизация числителя выполняется легко использованием неравенства Коши–Шварца, которое в общем гласит, что если $g_1(t)$ и $g_2(t)$ – сигналы с ограниченной энергией, то

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) g_2(t) dt \right]^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} g_1^2(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} g_2^2(t) dt \quad (5.1.23)$$

с равенством, когда $g_1(t) = C g_2(t)$, C – произвольная константа. Если положим $g_1(t) = h(t)$ и $g_2(t) = s(T-t)$, то ясно, что ОСШ максимизируется, когда $h(t) = C s(T-t)$, т.е. $h(t)$ согласовано с сигналом $s(t)$. Константа C^2 не входит в ОСШ, так как она одновременно присутствует в числителе и знаменателе. Выходное (максимальное) ОСШ, получаемое при помощи согласованного фильтра, равно

$$\text{ОСШ}_0 = \frac{2}{N_0} \int_0^T s^2(t) dt = 2\mathcal{E}/N_0. \quad (5.1.24)$$

Заметим, что выходное ОСШ у согласованного фильтра зависит только от энергии сигнала $s(t)$, но не от детальных характеристик $s(t)$. Это другое интересное свойство согласованного фильтра.

13. Ймовірність помилки детектування у системі з двома рівноймовірними сигналами.

Розглянемо сигнал двійкової АМ, де два сигнали - $s_1(t)=g(t)$, $s_2(t)=-g(t)$, а $g(t)$ – довільний імпульс, який не $=0$ на інтервалі $0 \leq t \leq T_b$ і рівний 0 в іншій області.

Оскільки $s_1(t)=-s_2(t)$, ці сигнали називають протилежними. Нехай енергія імпульсу $g(t)$ рівна ξ_b . Сигнали є одномірними і їх геометричне уявлення визначається одномірними векторами $s_1 = \sqrt{\xi_b}$,

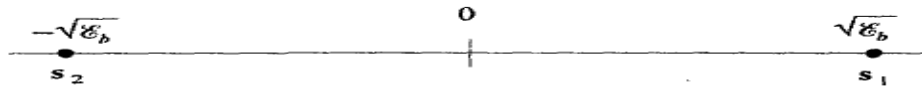


Рис. 5.2.1. Сигнальные точки для двоичных противоположных сигналов

$$s_2 = -\sqrt{\xi_b}$$

Припустимо, що два сигнали рівно імовірні і що передали сигнал $s_1(t)$. Тоді вихідний сигнал (на виході кореляційної системи) демодулятора рівний

$r = s_1 + n = \sqrt{\xi_b} + n$, де n являє компоненту адитивного гаусівського шуму, яка має нульове середнє і дисперсію $\sigma^2 = \frac{1}{2}N_0$. В такому випадку правило розв'язання порівнює r з нульовим порогом. Якщо $r > 0$, то розв'язання приймається на користь $s_1(t)$, а якщо $r < 0$

$$p(r|s_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-(r - \sqrt{\xi_b})^2 / N_0},$$

$$p(r|s_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-(r + \sqrt{\xi_b})^2 / N_0}$$

– на користь $s_2(t)$. Ясно, що умовні ФПВ для r рівні

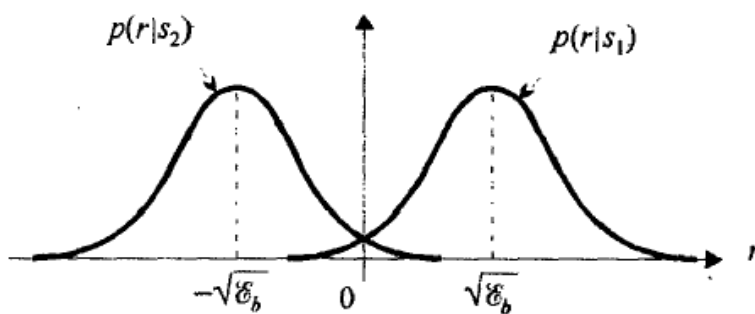


Рис. 5.2.2. Условные ФПВ для двух сигналов

При умові, що переданий сигнал $s_1(t)$, імовірність помилки визначається імовірністю

$$P(e|s_1) = \int_{-\infty}^0 p(r|s_1) dr = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^0 \exp\left[-\frac{(r - \sqrt{\xi_b})^2}{N_0}\right] dr =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2\xi_b}/N_0} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2\xi_b}/N_0}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = Q\left(\sqrt{\frac{2\xi_b}{N_0}}\right),$$

того, що $r > 0$, тобто

Де $Q(x)$ - Q функція. Аналогічно, якщо припустимо, що був переданий сигнал $s_2(t)$, то $r = -\sqrt{\xi}$, +n і імовірність, що $r > 0$, таке рівна $P(e|s_2) = Q\left(\sqrt{2\xi_b/N_0}\right)$. Оскільки $s_1(t)$ і $s_2(t)$

рівноімовірні, то середня імовірність похибки $P_b = \frac{1}{2} P(e|s_1) + \frac{1}{2} P(e|s_2) = Q\left(\sqrt{\frac{2\xi_b}{N_0}}\right)$

. Імовірність похибки залежить лише від співвідношення ξ/N_0 , і не залежить від інших більш детальних характеристик сигналів і шуму. ξ/N_0 називається відношення сигнал/шум на біт.

14. Ймовірність помилки детектування: роль відстані між сигналами у просторі сигналів

(Див. розділ 5.1.3 «Оптимальний детектор» «Цифровая связь», Прокис, 206 ст.)

В случае АБГШ в канале функции правдоподобия $p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)$ определяются (5.1.12). Для упрощения расчётов будем использовать натуральный логарифм от $p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)$, который является монотонной функцией. Таким образом,

$$\ln p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m) = -\frac{1}{2} N \ln(\pi N_0) - \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^N (r_k - s_{mk})^2. \quad (5.1.40)$$

Максимизация $\ln p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)$ по \mathbf{s}_m эквивалентна нахождению сигнала \mathbf{s}_m , который минимизирует евклидово расстояние

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = \sum_{k=1}^N (r_k - s_{mk})^2. \quad (5.1.41)$$

$D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$, $m=1, 2, \dots, M$, называют дистанционными характеристиками. Следовательно, для канала с АБГШ правило решения, основанное на правиле МП, сводится к нахождению сигнала \mathbf{s}_m , который наиболее близок по расстоянию к принимаемому сигнальному вектору \mathbf{r} . Мы будем ссылаться на это правило решения как на детектирование по минимуму расстояния.

Другую интерпретацию оптимального правила решения, основанного на правиле МП, можно получить путем раскрытия дистанционных метрик в (5.1.41):

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = \sum_{k=1}^N r_k^2 - 2 \sum_{k=1}^N r_k s_{mk} + \sum_{k=1}^N s_{mk}^2 = |\mathbf{r}|^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m + |\mathbf{s}_m|^2, \quad m=1, 2, \dots, M. \quad (5.1.42)$$

Слагаемое $|\mathbf{r}|^2$ – общее для всех дистанционных метрик, и, следовательно, его можно не учитывать при вычислении метрик. Новый результат сводится к ряду модифицированных метрик

$$D'(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = -2\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m + |\mathbf{s}_m|^2. \quad (5.1.43)$$

Заметим, что выбор сигнала \mathbf{s}_m , который минимизирует $D'(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$, эквивалентен выбору сигнала, который максимизирует метрику $C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = -D'(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$, т.е.

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m - |\mathbf{s}_m|^2. \quad (5.1.44)$$

Слагаемое $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m$ представляет проекцию принимаемого вектора сигнала на сигнальные векторы всех M возможных для передачи сигналов. Величина каждой такой проекции является мерой корреляции между принятым вектором и m -м сигналом. Из этих соображений мы называем $C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$, $m=1, 2, \dots, M$, *корреляционными метриками* для решения того, какой из M сигналов был передан. Наконец, слагаемые $|\mathbf{s}_m|^2 = \mathcal{E}_m$, $m=1, 2, \dots, M$ можно рассматривать как пороговые слагаемые, которые служат компенсацией для ансамбля сигналов с неравными энергиями сигналов, такого, как при АМ. Если все сигналы имеют одинаковую энергию, $|\mathbf{s}_m|^2$, можно не учитывать при вычислении корреляционных метрик $C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$ и дистанционных метрик $D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$ или $D'(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$.

15. Ймовірність помилки детектування при багатопозиційній амплітудній модуляції. (ст. 224-226)

5.2.6. Вероятность ошибки для M -позиционной АМ

Напомним, что M -позиционные сигналы АМ представляются геометрически как M одномерных сигнальных точек со значениями

$$s_m = \sqrt{\frac{1}{2} \mathcal{E}_g} A_m, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (5.2.37)$$

где \mathcal{E}_g – энергия базового сигнального импульса $g(t)$. Значения амплитуд можно выразить так:

$$A_m = (2m - 1 - M)d, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (5.2.38)$$

где евклидово расстояние между соседними сигнальными точками равно $d\sqrt{2\mathcal{E}_g}$.

Средняя энергия сигнала

$$\mathcal{E}_{\text{ср}} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathcal{E}_m = \frac{d^2 \mathcal{E}_g}{2M} \sum_{m=1}^M (2m - 1 - M)^2 = \frac{d^2 \mathcal{E}_g}{2M} \left[\frac{1}{3} M(M^2 - 1) \right] = \frac{1}{6} (M^2 - 1) d^2 \mathcal{E}_g. \quad (5.2.39)$$

Эквивалентно мы можем характеризовать эти сигналы их средней мощностью, которая равна

$$P_{\text{ср}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ср}}}{T} = \frac{1}{6} (M^2 - 1) \frac{d^2 \mathcal{E}_g}{T}. \quad (5.2.40)$$

Средняя вероятность ошибки для M -позиционной АМ можно определить из правила выбора решения по максимуму метрик корреляции, определяемых (5.1.44). Эквивалентно детектор сравнивает выход демодулятора r с рядом $M-1$ порогов, которые располагаются в средних точках между соседними уровнями амплитуд, как показано на рис. 5.2.7.

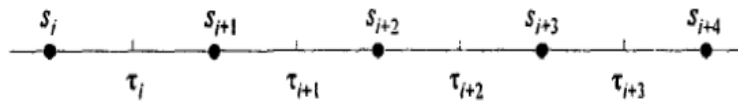


Рис. 5.2.7. Расположение порогов в средних точках между соседними уровнями амплитуд

Таким образом, решение выбирается в пользу уровня амплитуды, который расположен ближе всех к r .

Расположение порогов, указанных на рис. 5.2.7, помогает в вычислении вероятности ошибки. Заметим, что если передаётся m -й амплитудный уровень, то выход демодулятора равен

$$r = s_m + n = \sqrt{\frac{1}{2} \mathcal{E}_g} A_m + n, \quad (5.2.41)$$

где компонента шума n имеет нулевое среднее и дисперсию $\sigma_n^2 = \frac{1}{2} N_0$. В предположении, что все уровни амплитуд априори равновероятны, средняя вероятность ошибочного приёма символа равна вероятности того, что компонента шума n превосходит по амплитуде половину расстояния между соседними уровнями. Однако, когда передаётся один из двух крайних уровней $\pm(M-1)$, ошибка возникает только в одном направлении. Таким образом, мы имеем

$$P_M = \frac{M-1}{M} P(|r - s_m| > d\sqrt{\frac{1}{2}\mathcal{E}_g}) = \frac{M-1}{M} \frac{2}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{d\sqrt{\mathcal{E}_g/2}}^{\infty} e^{-x^2/N_0} dx =$$

$$= \frac{M-1}{M} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{d^2\mathcal{E}_g/N_0}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{d^2\mathcal{E}_g}{N_0}}\right). \quad (5.2.42)$$

Вероятность ошибки (5.2.42) можно также выразить через среднюю переданную мощность. Из (5.2.40) видно, что

$$d^2\mathcal{E}_g = \frac{6}{M^2-1} P_{cp} T. \quad (5.2.43)$$

Подставив $d^2\mathcal{E}_g$ в (5.2.42), получим среднюю вероятность ошибки на символ для АМ через среднюю мощность:

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6P_{cp}T}{(M^2-1)N_0}}\right) \quad (5.2.44)$$

или, что эквивалентно,

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6\mathcal{E}_{cp}}{(M^2-1)N_0}}\right), \quad (5.2.45)$$

где $\mathcal{E}_{cp} = P_{cp} T$ – средняя энергия. При построении зависимости вероятности ошибки на символ M -позиционной системы АМ обычно используется ОСШ на бит как базовый параметр. Так как $T = kT_b$ и $k = \log_2 M$, (5.2.45) можно преобразовать к

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{(6\log_2 M)\mathcal{E}_{bcp}}{(M^2-1)N_0}}\right), \quad (5.2.46)$$

где $\mathcal{E}_{bcp} = P_{cp} T_b$ – средняя энергия на бит, а \mathcal{E}_{bcp}/N_0 – средняя ОСШ на бит.

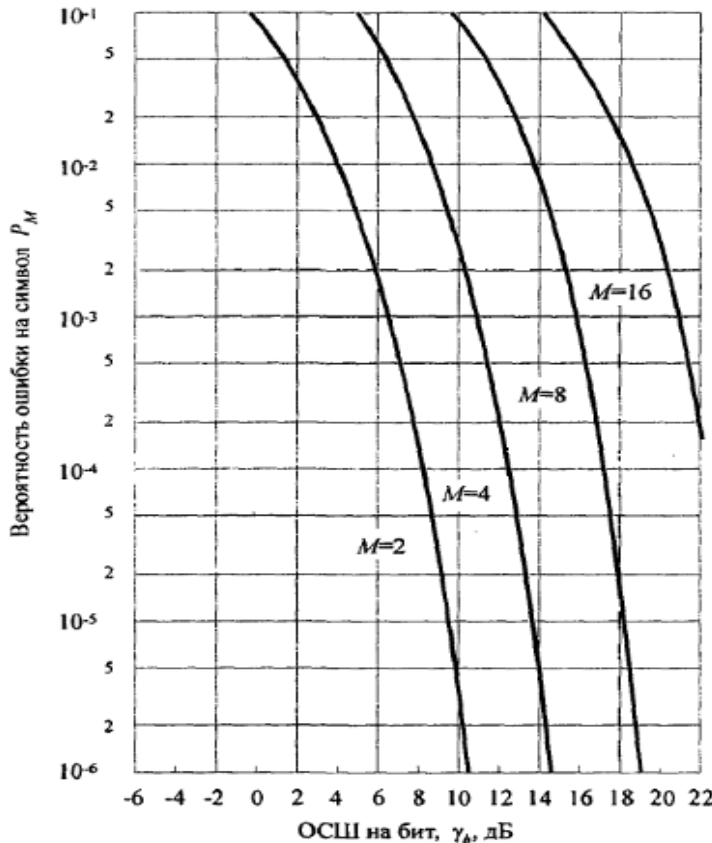


Рисунок 5.2.8 иллюстрирует зависимость вероятности ошибки на символ от $10\lg(\mathcal{E}_{bcp}/N_0)$ со значением M в качестве параметра.

Заметим, что случай $M=2$ соответствует вероятности ошибки для двоичной системы противоположных сигналов. Также видим, что при фиксированной вероятности ошибки P_M ОСШ на бит возрастает более чем на 4 дБ при каждом удвоении числа M . При очень больших M требуемый рост ОСШ при удвоении числа M приближается к 6 дБ.

Рис. 5.2.8. Вероятность ошибки на символ для АМ

16. Ймовірність помилки детектування при ортогональній модуляції.

Цифровая связь. Прокис Дж. (Proakis). 2000, с 262

5.4.3. Вероятность ошибки при детектировании огибающей для M -позиционных ортогональных¹ сигналов

Рассмотрим передачу M ортогональных сигналов равной энергии по каналу с АБГШ с детектированием огибающей в приёмнике. Мы также предположим, что M сигналов априорно равновероятны и что сигнал $s_1(t)$ передается на интервал $0 \leq t \leq T$. В качестве M решающих метрик на входе детектора используются M огибающих:

$$|r_m| = \sqrt{r_{mc}^2 + r_{ms}^2}, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (5.4.32)$$

где

$$r_{1c} = \sqrt{\mathcal{E}_b} \cos \phi_1 + n_{1c}, \quad (5.4.33)$$

$$r_{1s} = \sqrt{\mathcal{E}_b} \sin \phi_1 + n_{1s}, \quad (5.4.34)$$

$$r_{mc} = n_{mc}, \quad r_{ms} = n_{ms}, \quad m = 2, 3, \dots, M.$$

Компоненты аддитивного шума $\{n_{mc}\}$ и $\{n_{ms}\}$ – взаимно статистически независимые гауссовские величины с нулевым средним и одинаковой дисперсией $\sigma^2 = \frac{1}{2} N_0$. Таким образом, ФПВ для случайных величин на входе детектора равны

$$p_{r_1}(r_{1c}, r_{1s}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_{1c}^2 + r_{1s}^2 + \mathcal{E}_b}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}_b}(r_{1c}^2 + r_{1s}^2)}{\sigma^2}\right), \quad (5.4.35)$$

$$p_{r_m}(r_{mc}, r_{ms}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_{mc}^2 + r_{ms}^2}{2\sigma^2}\right), \quad m = 2, 3, \dots, M. \quad (5.4.36)$$

Сделаем замену переменных в совместных ФПВ, определяемых (5.4.35) и (5.4.36). Определим нормированные величины

$$R_m = \frac{\sqrt{r_{mc}^2 + r_{ms}^2}}{\sigma}, \quad \Theta_m = \arctg \frac{r_{ms}}{r_{mc}}. \quad (5.4.37)$$

Ясно, что $r_{mc} = \sigma R_m \cos \Theta_m$ и $r_{ms} = \sigma R_m \sin \Theta_m$. Якобиан этого преобразования

$$|J| = \begin{vmatrix} \sigma \cos \Theta_m & \sigma \sin \Theta_m \\ -\sigma R_m \sin \Theta_m & \sigma R_m \cos \Theta_m \end{vmatrix} = \sigma^2 R_m. \quad (5.4.38)$$

Следовательно,

$$p(R_1, \Theta_1) = \frac{R_1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(R_1^2 + \frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}\right)\right] I_0\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}} R_1\right), \quad (5.4.39)$$

$$p(R_m, \Theta_m) = \frac{R_m}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} R_m^2\right), \quad m = 2, 3, \dots, M. \quad (5.4.40)$$

В заключение при усреднении $p(R_m, \Theta_m)$ по Θ_m множитель 2π исключается из (5.4.39) и (5.4.40). Таким образом находим, что R_1 имеет распределение Райса, а R_m , $m = 2, 3, \dots, M$, имеет распределение Релея.

Вероятность правильного решения определяется вероятностью того, что $R_1 > R_2$ и $R_1 > R_3 \dots$ и $R_1 > R_M$. Следовательно,

$$P_c = P(R_2 < R_1, R_3 < R_1, \dots, R_M < R_1) = \int_0^\infty P(R_2 < R_1, R_3 < R_1, \dots, R_M < R_1 | R_1 = x) p_{R_1}(x) dx. \quad (5.4.41)$$

Поскольку случайные величины R_m , $m = 2, 3, \dots, M$, статистически независимы, совместная вероятность в (5.4.41) определяется произведением $M-1$ идентичных членов:

$$P_c = \int_0^\infty \left[P(R_2 < R_1 | R_1 = x) \right]^{M-1} p_{R_1}(x) dx, \quad (5.4.42)$$

где

$$P(R_2 < R_1 | R_1 = x) = \int_0^x p_{R_2}(r_2) dr_2 = 1 - e^{-x^2/2}. \quad (5.4.43)$$

Степень $M-1$ от (5.4.43) можно выразить, пользуясь биномом Ньютона, так:

$$(1 - e^{-x^2/2})^{M-1} = \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^n \binom{M-1}{n} e^{-nx^2/2} \quad (5.4.44)$$

Подставив этот результат в (5.4.42) и интегрируя по x , получаем для вероятности правильного решения

$$P_c = \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^n \binom{M-1}{n} \frac{1}{n+1} \exp\left[-\frac{n\mathcal{E}_b}{(n+1)N_0}\right], \quad (5.4.45)$$

где \mathcal{E}_b/N_0 – ОСШ на символ. Тогда вероятность ошибки на символ $P_M = 1 - P_c$ равна¹

$$P_M = \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{n+1} \binom{M-1}{n} \frac{1}{n+1} \exp\left[-\frac{nk\mathcal{E}_b}{(n+1)N_0}\right], \quad (5.4.46)$$

где E_b/N_0 – ОСШ на бит.

Для двоичных ортогональных сигналов ($M = 2$) (5.4.46) приводится к простому виду

$$P_2 = \frac{1}{2} e^{-\gamma_b/2} \quad (5.4.47)$$

Для $M > 2$ мы можем вычислить вероятность ошибки на бит, используя соотношение

$$P_b = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} P_M, \quad (5.4.48)$$

которое было установлено в разд. 5.2. Рисунок 5.4.5 показывает вероятность ошибки на бит как функцию ОСШ на бит γ_b для $M = 2, 4, 8, 16$ и 32. Для случая когерентного детектирования M -позиционных ортогональных сигналов (см. разд. 5.2.2) мы видели, что для любой заданной вероятности ошибки ОСШ на бит уменьшается по мере роста M . В гл. 7 будет показано, что в пределе, когда $M \rightarrow \infty$ (или $k = \log_2 M \rightarrow \infty$), вероятность ошибки на бит P_b можно сделать сколь угодно малой при условии, что ОСШ на бит превышает предел Шеннона $-1,6$ дБ. Цена роста M – увеличение полосы, требуемой для передачи сигнала. Для M -позиционной ЧМ разнос частот между соседними частотами равен $\Delta f = 1/T$ для ортогональности сигналов. Полоса частот, требуемая для M сигналов, $W = M\Delta f = M/T$. Таким образом, битовая скорость $R = k/T$, где $k = \log_2 M$. Следовательно, отношение битовой скорости к полосе равно

$$\frac{R}{W} = \frac{\log_2 M}{M}. \quad (5.4.49)$$

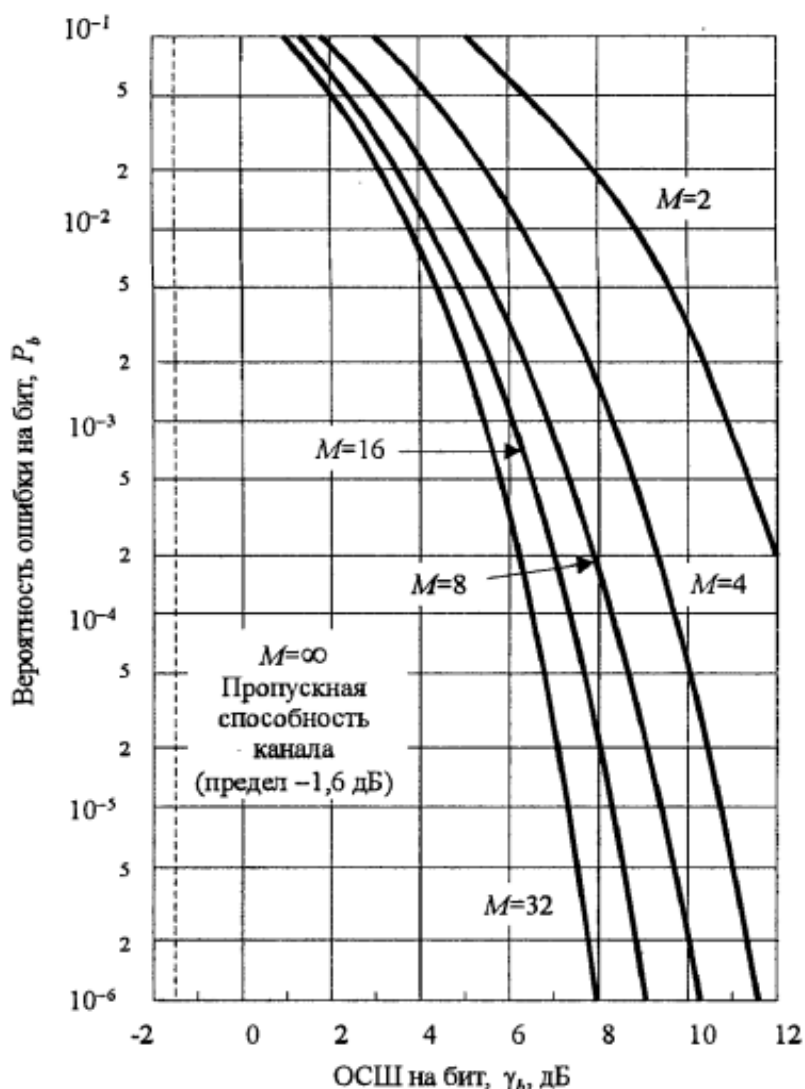


Рис. 5.4.5. Вероятность ошибки на бит для некогерентного детектирования ортогональных сигналов

17. Мінімальна енергія біту для безпомилкової передачі даних у каналі з адитивним нормальним білим шумом.(328.)

Теорема Шеннона–Хартлі теорії інформації – застосування теорем кодування каналу з шумом до архітипічного випадку безперервного тимчасового аналогового каналу комунікацій, спотвореного гаусовим шумом. Теорема встановлює Шенонівську ємність каналу, верхню межу максимальної кількості безпомилкових цифрових даних (тобто, інформації), яке може бути передано за такого зв'язку комунікації із зазначеною смугою пропускання в присутності шумового втручання, згідно припущенням, що потужність сигналу обмежена, і гаусовий шум характеризується певною потужністю або потужністю спектральної густини.

Якщо W стає необмеженою, пропускна здатність каналу наближується до граничної величини

$$C = \frac{P_{cp}}{N_0} \log_2 e = \frac{P_{cp}}{N_0 \ln 2}$$

Виразимо номінальну пропускну здатність каналу C/W як функцію від ОСШ (співвідношення сигнал/шум) на біт. Оскільки P_{cp} представляє середню потужність (у ватах) а C біт/символ то слідує

$$P_{cp} = C \varepsilon_b$$

Де – ε_b енергія сигналу на біт. Тоді

$$\frac{C}{W} = \log_2 \left(1 + \frac{C}{W} \frac{\varepsilon_b}{N_0} \right)$$

Відповідно

$$\frac{\varepsilon_b}{N_0} = \frac{2^{C/W} - 1}{C/W}$$

Коли $C/W = 1 \frac{\varepsilon_b}{N_0} = 1$ (0 дБ) при $C/W \rightarrow \infty$

$$\frac{\varepsilon_b}{N_0} \approx \frac{2^{\frac{C}{W}}}{\frac{C}{W}} \approx \exp \left(\frac{C}{W} \ln 2 - \ln \frac{C}{W} \right)$$

Таким чином $\frac{\varepsilon_b}{N_0}$ росте експоненційно коли $C/W \rightarrow \infty$, з іншого боку, коли $C/W \rightarrow 0$

$$\frac{\varepsilon_b}{N_0} = \lim_{C/W \rightarrow 0} \frac{2^{C/W} - 1}{C/W} = \ln 2$$

яке рівне – 1.6 дБ.

Оглавление

1. Мат. модель джерела інформації. Дискретне джерело без пам'яті (с 74-75).	1
2. Кількість інформації, ентропія.(78)	2
3. Задача оптимального кодування дискретного джерела інформації.	3
4. Код змінної довжини, вимоги, що ставляться до такого коду.	5
5. Нерівність Крафта	7
6. Теорема Шеннона про кодування дискретного джерела інформації.....	9
7. Код Хафмана.....	10
8. Оптимальний прийом сигналу. Демодуляція і детектування.....	11
9. Білий нормальний шум і його властивості.(138)	13
10. Проектування сигналів. Достатня статистика для розпізнавання. (точтобудет написано нижевозможновообще не подходит)	14
11. Критерій максимальної правдоподібності, метрична інтерпретація.	15
12. Узгоджена фільтрація сигналу в каналі з адитивним нормальним білим шумом. 16	
13. Ймовірність помилки детектування у системі з двома рівноймовірними сигналами.	17
14. Ймовірність помилки детектування: роль відстані між сигналами у просторі сигналів.....	19
15. Ймовірність помилки детектування при багатопозиційній амплітудній модуляції. (ст. 224-226)	20
16. Ймовірність помилки детектування при ортогональній модуляції.	22
17. Мінімальна енергія біту для безпомилкової передачі даних у каналі з адитивним нормальним білим шумом.(328.).....	24