ВСТУП

Створена в 1915 р. А.Ейнштейном релятивістська теорія гравітації, яка побудована на основі теорії відносності (тому й отримала назву загальної теорії відносності) та на основі використання принципів еквівалентності й загальної коваріантності, є однією із найкрасивіших фізичних теорій. Основою принципу еквівалентності є інтерпретація відомого ще з часів Галілея й Ньютона факту рівності інертної маси m_i (вона є коефіцієнтом пропорційності між силою та прискоренням у другому законі Ньютона) та гравітаційної маси m_g (вона розглядається в законі всесвітнього тяжіння $F = \Phi m_g$, де $\Phi = -Gm/r$ – ньютонівський центрально-симетричний потенціал тіла маси m). З позиції релятивістської методології його можна сформулювати таким чином: неінерціальна система відліку еквівалентна деякому гравітаційному полю. Але протилежне твердження, а саме: довільне гравітаційне поле еквівалентне деякій неінерціальній системі відліку, не буде справедливим. Наприклад, для реального гравітаційного поля, яке існує і в інерціальній системі відліку, неможливо запропонувати такої неінерціальної системи відліку, яка була б йому еквівалентна. Якщо ж застосовувати принцип еквівалентності до малих областей простору, в яких гравітаційне поле можна вважати однорідним, то пряме й протилежне твердження можливі. Це означає, що реальне гравітаційне поле в цьому випадку можна виключити при переході до рівномірно прискореної системи координат.

При переході від однієї системи координат до іншої координати точок простору-часу змінюються, але відстані між довільними точками є інваріантами. Наприклад, в інерціальній системі координат спеціальної теорії відносні (СТВ) відстань між двома нескінченно близькими точками задається інтервалом $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$. Якщо перейти в іншу інерціальну систему відліку, то інваріантним буде й вигляд інтервалу. Відмінна ситуація виникає, коли переходимо до неінерціальної системи відліку (наприклад, до системи координат, яка рівномірно обертається навколо довільної осі в просторі). У цьому випадку квадрат інтервалу є деякою квадратичною формою загального вигляду від диференціалів координат, тобто

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k , \qquad (1)$$

в якій величини g_{ik} визначають метрику простору-часу. Це можна твердити й про довільне реальне гравітаційне поле, тобто воно породжене зміною метрики простору-часу, визначається величинами g_{ik}. Експериментуючи з принципом еквівалентності в релятивістських умовах, Ейнштейн прийшов до неевклідовості просторової метрики, в якій квадрат інтервалу задається формулою (1). Слід зазначити, що повідомлення про відкриття неевклідової геометрії було вперше зроблене М.І.Лобачевським ще в 1826 р. на засіданні відділу фізико-математичних наук Казанського університету. У 1854 р. Бернгард Ріман, відповідаючи на запитання: як визначити відстань між двома точками багатовиду (наприклад, поверхня), абстрагуючись від простору, в якому він розташований, побудував геометрію, яка збігається з внутрішньою геометрією цього багатовиду.

При цьому розглядалися лише такі багатовиди, в яких достатньо малий окіл точки має евклідову метрику, а в загальному випадку метрика задається формулою (1). Простори, на яких має місце така метрика, називаються ріманових. Гіпотеза Лобачевського про можливу неевклідовість реального простору, а також висловлена Ріманом ще задовго до створення загальної теорії відносності думка відносно визначення метрики простору зовнішнім гравітаційним полем, отримали підтвердження в рівняннях Ейнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}, \qquad (2)$$

у лівій частині яких стоять тензорні величини, що задають метричні властивості простору (кривизну), а в правій частині стоїть тензор енергії-імпульсу, що описує розподіл мас, які є джерелами зовнішніх гравітаційних полів.

Оскільки релятивістські гравітаційні поля задовольняють принцип загальної коваріантності, тобто вони є інваріантними відносно довільних чотиривимірних криволінійних систем координат, математичною основою релятивістської теорії гравітації став тензорний аналіз, основи якого були закладені в працях італійських математиків Г.Річчі-Курбастро та Т.Леві-Чивіта.

1. ТЕНЗОРНИЙ ФОРМАЛІЗМ

Розглянемо чотиривимірний континуум, точки якого відрізняються одна від одної четвіркою координат x_1, x_2, x_3, x_4. Оскільки всі криволінійні системи координат рівноправні, можемо здійснити перетворення T від однієї системи координат X до іншої X'

$$T: x^i = x^i\left(x'^1, x'^2, x'^3, x'^4\right). \qquad (3)$$

Відмітимо, що використовуємо лише такі (допустимі) перетворення, для яких існують обернені перетворення T^{-1}. Сукупність всіх допустимих перетворень координат утворює групу.

Розглянемо тепер неперервно диференційовну функцію $f\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right)$, яка є скалярною, і знайдемо зв'язок між її частинними похідними $\partial f / \partial x''$, $\partial f / \partial x^k$ відповідно в системах X та X':

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}. \qquad (4)$$

Коваріантним 4-вектором називається сукупність чотирьох величин A_i, які при перетвореннях координат перетворюються як похідні (4) від скаляра, тобто

$$A_i(x) = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k(x'). \qquad (5)$$

При перетворенні координат (3) їх диференціали перетворюються відповідно до формул

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k . \tag{6}$$

Контраваріантним 4-вектором називається сукупність чотирьох величин A^i, які при перетвореннях координат перетворюються як їх диференціали (6), тобто

$$A^i(x) = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k(x') . \tag{7}$$

Скаляр – це тензор нульового рангу. Вектори A_i та A^i є відповідно коваріантним та контраваріантним тензорами рангу 1. Приведемо тепер як найбільш загальне означення тензора. Сукупність компонентів з 4^{r+s} величин, які позначено в системі X виразом $A^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}(x)$, представляють собою мішаний тензор коваріантний рангу r та контраваріантний рангу s, якщо відповідні величини $A'^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}(x')$ у координатній системі X' задаються законом

$$A^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}(x) = \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x'^{\alpha_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial x'^{\beta_s}} A'^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x') . \tag{8}$$

Усі інші тензорні закони є частинними випадками закону (8). Властивості законів перетворення тензорів пояснюються далі при їх використанні, а тепер зупинимося на властивостях метричного тензора g_{ik}. Із інваріанта (1) випливає, що g_{ik} – симетричний коваріантний тензор рангу 2

$$g_{ik} = g_{ki} , \tag{9}$$

оскільки контраваріантним тензором другого рангу є добуток диференціалів $dx^i dx^k$. Вважаючи систему координат X' псевдодекартовою (система координат у чотиривимірному просторі СТВ), знайдемо формули для обчислення компонентів тензора g_{ik} у довільній криволінійній системі координат X, тобто із ланцюжка рівностей

$$ds^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta} = g_{ik} dx^i dx^k = g_{ik} \left(\partial x^i / \partial x'^{\alpha} \right) \left(\partial x^k / \partial x'^{\beta} \right) dx'^{\alpha} dx'^{\beta}$$

маємо

$$g_{ik}(x) = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^k} \gamma_{\alpha\beta} , \tag{10}$$

де

$$\gamma_{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

– метричний тензор у псевдоевклідовому просторі (просторі Мінковського) СТВ (сигнатура вибрана +++–). Використовуючи (10), можна довести, що контраваріантний метричний тензор g^{ik} є оберненим до коваріантного тензора g_{ik}, тобто

$$g_{ik} g^{kl} = \delta_i^l . \qquad (11)$$

Із (11) отримуємо, що єдиними величинами, які пов'язують, наприклад, компоненти коваріантного та контраваріантного 4-векторів є компоненти метричного тензора. Такий зв'язок виражено формулами

$$A^i = g^{ik} A_k , \; A_i = g_{il} A^l , \qquad (12)$$

який перевіряється, наприклад, при обчисленні скалярного добутку

$$A^i A_i = g^{ik} A_k g_{il} A^l = \delta_l^k A_k A^l = A^k A_k .$$

Такі процедури підняття та опускання індексів можна застосовувати й для довільних тензорів.

Приведені вище тензорні співвідношення відносяться до однієї й тієї ж точки чотиривимірного багатовиду. Немає сенсу виконувати операції над тензорами, які відносяться до різних точок, оскільки при перетвореннях координат тензорні співвідношення в різних точках перетворюються по-різному. Але при обчисленні градієнта треба порівнювати значення деякого інваріанта в різних точках, тобто виникає необхідність введення аналізу в континуум. Водночас виникає можливість розглядати похідні та інтеграли. Перейдемо до розгляду особливостей диференціювання тензорних полів у криволінійних координатах.

2. ІНВАРІАНТНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Як випливає з (4), комплект частинних похідних $A_i = \partial f / \partial x^i$ являє собою коваріантний вектор. Водночас, диференціал цього вектора

$$dA_i = d\left(\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k \right) = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} dx^l \qquad (13)$$

перетворюється не як вектор. Для того, щоб диференціал вектора в криволінійних координатах був теж вектором, необхідно від вектора $A_i + dA_i$ у точці Q з координатами $x_i + dx_i$ відняти деякий вектор у цій же точці, який виникає при паралельному перенесенні вектора A_i із точки P з координатами x_i. Компоненти вектора при паралельному перенесенні змінюються на величини δA_i

($\delta A_i = 0$ тільки у плоскому просторі з метричним тензором $\gamma_{\alpha\beta}$). Тоді різниця $DA_i = dA_i - \delta A_i$ між обома векторами, які розміщені в одній точці Q, теж є вектором. Величина δA_i має бути білінійною формою відносно самих складових A_i паралельно переміщуваного вектора (тому що для нульового вектора $\delta A_i \equiv 0$) і відносно зміщень dx^l (при $dx^l = 0$, $\delta A_i = 0$). Тому δA_i можна представити у вигляді

$$\delta A_i = \Gamma^k_{il} A_k dx^l, \tag{14}$$

де величини Γ^k_{il} називаються коефіцієнтами в'язей або символами Крістоффеля і залежать лише від координат x_i. Таким чином, з урахуванням позначення $DA_i = A_{i;l} dx^l$, отримуємо

$$\mathrm{D}A_i = dA_i - \Gamma^k_{il} A_k dx^l = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il} A_k \right) dx^l = A_{i;l} dx^l, \tag{15}$$

тобто коваріантна похідна коваріантного вектора A_i обчислюється за формулою

$$A_{i;l} = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il} A_k. \tag{16}$$

Коваріантна ж похідна контраваріантного вектора A^i обчислюється аналогічним чином

$$A^i_{;l} = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl} A^k. \tag{17}$$

Означення (16) і (17) можна поширити й на мішаний тензор $A^{j_1 j_2 \ldots j_s}_{i_1 i_2 \ldots i_r}(x)$:

$$A^{j_1 j_2 \ldots j_s}_{i_1 i_2 \ldots i_r ;l}(x) = \frac{\partial A^{j_1 j_2 \ldots j_s}_{i_1 i_2 \ldots i_r}}{\partial x^l} - \Gamma^{\alpha}_{i_1 l} A^{j_1 j_2 \ldots j_s}_{\alpha i_2 \ldots i_r} - \ldots - \Gamma^{\alpha}_{i_r l} A^{j_1 j_2 \ldots j_s}_{i_1 i_2 \ldots \alpha} + \tag{18}$$

$$+ \Gamma^{j_1}_{\alpha l} A^{\alpha j_2 \ldots j_s}_{i_1 i_2 \ldots i_r} + \ldots + \Gamma^{j_s}_{\alpha l} A^{j_1 j_2 \ldots \alpha}_{i_1 i_2 \ldots i_r}.$$

Піднімаючи в коваріантних похідних індекс, який вказує на диференціювання, отримуємо контраваріантні похідні

$$A^{;k}_{l} = g^{kl} A_{i;l}, \quad A^{i;k} = g^{kl} A^i_{;l}. \tag{19}$$

Покажемо, що коваріантна похідна метричного тензора g_{ik} дорівнює нулю (теорема Річчі). Для векторів DA_i і A_i маємо співвідношення $DA_i = g_{ik} DA^k$, $A_i = g_{ik} A^k$. Тоді на основі $DA_i = D\left(g_{ik} A^k\right) = g_{ik} DA^k + A^k Dg_{ik}$ отримуємо $Dg_{ik} = 0$ і відповідно

$$g_{ik;l} = 0. \tag{20}$$

Тобто при коваріантному (контраваріантному) диференціюванні g_{ik} (а також g^{ik}) виступають як сталі величини.

Виведемо тепер формули перетворення від однієї системи координат до іншої для символів Крістоффеля, виходячи із тензорного закону перетворення, наприклад, для коваріантної похідної (16)

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^r_{il} A_r = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\frac{\partial x'^m}{\partial x^l}\left(\frac{\partial A'_k}{\partial x'^m} - \Gamma'^s_{km} A'_s\right). \qquad (21)$$

Користуючись виразом (15), виключаємо з (21) частинні похідні $\partial A_i / \partial x^l$ і $\partial A'_k / \partial x'^m$, отримуючи закон перетворення для символів Крістоффеля

$$\Gamma^r_{il} = \Gamma'^s_{km}\frac{\partial x^r}{\partial x'^s}\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\frac{\partial x'^m}{\partial x^l} + \frac{\partial x^r}{\partial x'^k}\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l}, \qquad (22)$$

з якого видно, що величини Γ^r_{il} виступають як тензори лише відносно лінійних перетворень координат. Оскільки другий член у (22) симетричний за індексами i,l, він випадає при утворенні різниці $S^r_{il} = \Gamma^r_{il} - \Gamma^r_{li}$, яка є тензором. Цей тензор називається тензором кручення простору. Він має дорівнювати нулю, бо через принцип еквівалентності має існувати "галілеєва" система координат, в якій у даній точці перетворюються на нуль величини Γ^r_{il}, а значить і S^r_{il}. Відповідно до законів перетворення тензорів: якщо тензор дорівнює нулю в одній системі координат, то він дорівнюватиме нулю й у будь-якій іншій криволінійній системі координат. Це означає, що символи Крістоффеля симетричні за нижніми індексами

$$\Gamma^r_{il} = \Gamma^r_{li}. \qquad (23)$$

Покажемо тепер як можна пов'язати символи Крістоффеля з метричним тензором. Виконуючи циклічні перестановки індексів i, j, k, на основі (20) отримуємо такі похідні:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \Gamma_{k,il} + \Gamma_{i,kl},\ \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} = \Gamma_{i,kl} + \Gamma_{l,ik},\ \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = \Gamma_{i,kl} + \Gamma_{k,li}. \qquad (24)$$

Враховуючи властивість (23), із (24) знаходимо

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right). \qquad (25)$$

Піднімаючи у формулі (25) індекс i за допомогою контраваріантного метричного тензора, отримуємо

$$\Gamma^i_{kl} = g^{ij}\Gamma_{j,kl} = \frac{1}{2}g^{ij}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}\right). \qquad (26)$$

Сорок різних величин Γ^i_{kl} у кожній точці чотиривимірного багатовиду утворюють симетричну афінну в'язь.

Далі, перш ніж переходити до дослідження інтегровності цієї в'язі, отримаємо важливу формулу. Розкладемо визначник g метричного тензора g_{ik} за мінорами M^{lk}

$$g_{ik}M^{lk} = \delta^l_i g \tag{27}$$

або запишемо розклад з підсумовуванням за κ при фіксованому i

$$g = g_{ik}M^{ik}. \tag{28}$$

Порівнюючи розклад (27) з формулою (11), отримуємо вираз для мінорів M^{lk}

$$M^{lk} = gg^{lk}. \tag{29}$$

Використовуючи формули (27) – (29), обчислимо частинну похідну за координатою x^k від g

$$\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial g}{\partial g_{ij}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial g_{ij}}\left(g_{ik}M^{ik}\right) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}M^{ij} = gg^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}. \tag{30}$$

При диференціюванні в (30) було враховано, що в M^{lk} не входять g_{ij}, $\partial M^{ik}/\partial g_{ij} = 0$, і те, що g_{ij} є незалежними змінними, тобто $\partial g_{ik}/\partial g_{ij} = \delta^i_k$. Запишемо тепер вираз для спрощеного символу Крістоффеля

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2}g^{ij}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}\right). \tag{31}$$

Перестановка місцями індексів i та j у (31) (наприклад, у першому члені в дужках) приводить до його скорочення з третім членом. Тому, маємо

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2}g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}. \tag{32}$$

Виключаючи тепер $g^{ij}\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ з формул (30) та (32), отримуємо

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^k}, \tag{33}$$

де поява від'ємного знака пов'язана з тим, що $g<0$.

3. ТЕНЗОР КРИВИЗНИ

Повернемося знову до поняття паралельного перенесення вектора. Вважатимемо, що це перенесення не буде залежати від шляху для довільного вектора h_ν. Це дозволяє "розмазати" h_ν, перетворивши його у векторне поле за допомогою паралельного перенесення. Тоді зміна цього вектора при переході від точки P з координатами x_ν до точки Q з координатами $x_\nu + dx_\nu$ дорівнює лише зміні при паралельному перенесенні $dh_\nu = \delta h_\nu$, або детальніше

$$\frac{\partial h_\nu}{\partial x^\lambda} dx^\lambda = \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} h_\alpha dx^\lambda . \tag{34}$$

Оскільки рівність (34) має існувати при будь-якому dx^λ, то виникає диференціальне рівняння для h_ν

$$\frac{\partial h_\nu}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} h_\alpha \tag{35}$$

разом з початковою умовою в точці P. Щоб вимога інтегрування виконувалась, рівняння (35) має допускати розв'язки для векторного поля h_ν з довільними початковими значеннями Тоді мішані другі похідні компонентів полів, утворених двома різними способами, мають збігатися. Таким чином, маємо

$$0 = \frac{\partial\left(\Gamma^\alpha_{\nu\lambda} h_\alpha\right)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\left(\Gamma^\alpha_{\nu\mu} h_\alpha\right)}{\partial x^\lambda} = \left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda}\right) h_\alpha + \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \frac{\partial h_\alpha}{\partial x^\mu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} \frac{\partial h_\alpha}{\partial x^\lambda} . \tag{36}$$

Після виключення з (36) за допомогою (35) перших похідних векторного поля h_ν, отримуємо

$$0 = \left(\frac{\partial \Gamma^\beta_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\beta_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\alpha_{\nu\lambda}\Gamma^\beta_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}\Gamma^\beta_{\alpha\lambda}\right) h_\beta = R^\beta_{\nu\mu\lambda} h_\beta . \tag{37}$$

Оскільки рівність (37) виконується при довільному h_β, має бути

$$R^\beta_{\nu\mu\lambda} = 0 \tag{38}$$

у будь-якій системі відліку. Таким чином, умова інтегровності симетричної афінної в'язі визначається тим, дорівнюєчи нулю чи ні мішаний тензор четвертого рангу

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{nk}\Gamma^n_{jl} - \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{jk} , \tag{39}$$

який називається тензором кривизни або тензором Рімана – Крістоффеля другого роду. Але більш цікавим для нас буде неінтегровний випадок, коли тензор R^i_{jkl} не перетворюється на нуль. Це реалізується у викривленому просторі-часі.

4. РІВНЯННЯ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ ЗА ВІДСУТНОСТІ МАТЕРІЇ

Із формули (39) видно, що тензор R^i_{jkl} є кососиметричний відносно двох останніх коваріантних індексів, тобто $R^i_{jkl} = -R^i_{jlk}$. Для подальшого дослідження властивостей симетрії тензора кривизни перейдемо від мішаних компонентів до коваріантних $R_{ijkl} = g_{i\alpha} R^\alpha_{jkl}$, скориставшись при цьому формулою (26)

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} \right) + g_{i\alpha}\left(\Gamma^\alpha_{\beta k}\Gamma^\beta_{jl} - \Gamma^\alpha_{\beta l}\Gamma^\beta_{jk} \right).$$

Звідси видно, що мають місце такі властивості:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl},\ R_{ijkl} = -R_{ijlk},\ R_{ijkl} = R_{klij},\ R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0. \tag{40}$$

Доведемо ще одну властивість тензора кривизни, тотожність Б'янки:

$$R^i_{jkl;m} + R^i_{jmk;l} + R^i_{jlm;k} = 0. \tag{41}$$

Оскільки співвідношення (41) є тензорним, то його зручно перевірити в локально-геодезичній системі координат, в якій символи Крістоффеля є нульовими. Тоді коваріантна похідна виразу (39) запишеться у вигляді

$$R^i_{jkl;m} = \frac{\partial R^i_{jkl}}{\partial x^m} = \frac{\partial^2 \Gamma^i_{jl}}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 \Gamma^i_{jk}}{\partial x^m \partial x^l}.$$

Використовуючи цей вираз, доводимо тотожність Б'янки (40). Оскільки, коваріантна похідна метричного тензора перетворюється на нуль, тотожність Б'янки можна записати й у вигляді

$$R_{ijkl;m} + R_{ijmk;l} + R_{ijlm;k} = 0. \tag{42}$$

Із тензора кривизни, як випливає з цих властивостей, можна лише єдиним способом побудувати тензор другого рангу, застосувавши процедуру згортки $R_{ij} = R^k_{ijk}$. Доведемо це. Записуємо закон перетворення тензора кривизни.

$$R^l_{ijk}(x) = \frac{\partial x^l}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^j}\frac{\partial x'^\delta}{\partial x^k} R'^\alpha_{\beta\gamma\delta}(x').$$

Прирівнюючи індекси l та k, після підсумовування отримуємо

$$R^k_{ijk}(x) = \frac{\partial x^k}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^j}\frac{\partial x'^\delta}{\partial x^k} R'^\alpha_{\beta\gamma\delta}(x') = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^j}\delta^\delta_\alpha R'^\alpha_{\beta\gamma\delta}(x') =$$

$$= \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^j} R'^\alpha_{\beta\gamma\alpha}(x'),$$

тобто отримуємо закон для коваріантного тензора другого рангу. Цей тензор R_{ik} називають *тензором Річчі*. Запишемо його в явному вигляді через детермінанти

$$R_{ik} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^k} & \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha} \\ \Gamma^\alpha_{ik} & \Gamma^\alpha_{i\alpha} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma^\alpha_{\beta k} & \Gamma^\alpha_{\beta\alpha} \\ \Gamma^\beta_{ik} & \Gamma^\beta_{i\alpha} \end{vmatrix}, \tag{43}$$

а з урахуванням виразу (33) для спрощених символів Крістоффеля тензор Річчі можна переписати у вигляді

$$R_{ik} = \frac{\partial^2 \ln\sqrt{-g}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{ik}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\beta k}\Gamma^\beta_{i\alpha} - \Gamma^\beta_{ik}\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^\beta}. \tag{44}$$

Запис тензора R_{ik} у формі (44) переконує, що він є симетричним: $R_{ik} = R_{ki}$. Це означає, що в чотиривимірному багатовиді цей тензор має десять незалежних складових. Якщо прирівняємо тензор Річчі до нуля, тобто запишемо

$$R_{ik} = 0, \tag{45}$$

то отримаємо десять диференціальних рівнянь у частинних похідних для знаходження десяти компонентів метричного тензора g_{ik}. Рівняння (45), як вказав Ейнштейн, описують гравітаційне поле у вільному просторі ЗТВ. Рівність нулю тензора R_{ik} не означає, що простір є плоским. Для цього, як було показано вище, необхідне виконання більш вагомої умови: $R_{ijkl} = 0$.

Рівняння руху частинки в гравітаційному полі запишемо у вигляді

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0. \tag{46}$$

Ці рівняння ще називають рівняннями геодезичної лінії в криволінійному просторі. Їх отримують при узагальненні рівняння вільного руху частинки в СТВ $du^i/ds = 0$ або $du^i = 0$, де $u^i = dx^i/ds$ – 4-швидкість. Очевидно, що в криволінійних координатах рівняння $du^i = 0$ узагальнюються, а саме

$$Du^i = du^i + \Gamma^i_{kl}u^k dx^l = 0. \tag{47}$$

Розділивши рівняння (47) на ds, приходимо до рівнянь (46). Таким чином, після знаходження компонентів метричного тензора g_{ik} унаслідок розв'язання рівнянь гравітації (45) за допомогою формул (33), підраховуємо символи Крістоффеля і далі за допомогою рівнянь руху (46) знаходимо траєкторію руху частинки в гравітаційному полі.

5. РІВНЯННЯ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ ЗА НАЯВНОСТІ МАТЕРІЇ

Перейдемо тепер до отримання рівнянь (2) гравітаційного поля за наявності матеріальних об'єктів. Будемо досягати цього за допомогою варіаційного принципу, який для гравітаційного поля був вказаний Д.Гільбертом. Усі основні етапи в створенні релятивістської теорії гравітації тісно пов'язані з іменем А.Ейнштейна: необхідність розширення СТВ при розгляді гравітації, принцип еквівалентності, ефекти гравітаційного "червоного зміщення" та відхилення світла, тензорний характер гравітаційних потенціалів, ідея ототожнення гравітації й геометрії простору-часу, принцип загальної відносності та його математичний вираз за допомогою вимоги загальної коваріантності, використання рімanової геометрії тощо. Слід також відмітити значну роль Гроссмана, який тісно співпрацював з Ейнштейном над створенням загальної теорії відносності (особливо важливим є його математичний внесок у цю теорію).

Дії S_g та S_m відповідно до гравітаційного поля та матерії виражаються інтегралами вигляду

$$\int A d^4x . \tag{48}$$

З погляду загальної коваріантності необхідно, щоб інтеграли типу (48) були інваріантними при переході від однієї криволінійної системи координат X до іншої X', тобто щоб виконувалась рівність

$$\int A d^4x = \int A' d^4x' . \tag{49}$$

Оскільки $d^4x = J d^4x'$, де $J = \left|\partial x^k / \partial x'^i\right|$ – якобіан перетворення $x \to x'$, то для виконання рівності (49) необхідно, щоб закон перетворення величини A був таким:

$$A' = JA . \tag{50}$$

Величину A, яка перетворюється відповідно до закону (50), будемо називати скалярною густиною. Наприклад, можна утворити скалярну густину з метричного тензора g_{ik}, закон перетворення для якого має вигляд

$$g'_{ik} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^k} g_{lm} . \tag{51}$$

Розглядаючи праву частину виразу (51) як добуток матриць $\partial x^l / \partial x'^i$, g_{lm}, $\partial x^m / \partial x'^k$, знаходимо визначник матриці g'_{ik}

$$g' = \left|\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\right|^2 g , \tag{52}$$

і, таким чином,

$$\sqrt{-g'} = J\sqrt{-g} . \tag{53}$$

Тобто корінь квадратний із величини $-g$ є скалярною густиною. Можна ввести й тензорну густину ваги w, закон перетворення для якої має вигляд

$$A'^{j_1 j_2 \dots j_s}_{i_1 i_2 \dots i_r}(x') = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^w \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial x'^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{\alpha_r}}{\partial x'^{i_r}} \frac{\partial x'^{j_1}}{\partial x^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x'^{j_s}}{\partial x^{\beta_s}} A^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}(x). \quad (54)$$

Комплекти величин $A^{\alpha_1 \dots \alpha_s}_{\beta_1 \dots \beta_r}(x)$, які перетворюються відповідно до закону (54), ще називаються компонентами відносного тензора ваги w. Можна сказати, що тензорні густини – це узагальнення тензорів. Тоді відповідно до означення (54) g – скалярна густина ваги 2 (див. (48)), а $\sqrt{-g}$ – скалярна густина ваги 1 (див. (53)).

Скалярна густина, яка входить до інтегралу для дії S_g гравітаційного поля, має, очевидно, залежати від десяти компонентів метричного тензора g_{ik}, їх похідних $g_{ik,l}$ і, можливо, також від більш високих похідних. Очевидно, що найбільш вдалим для такої скалярної густини буде такий вираз:

$$\Re = R\sqrt{-g}, \quad (55)$$

де $R = g^{ik} R_{ik}$ – скалярна кривизна. Тому розглянемо такий інтеграл

$$S_g = \int R\sqrt{-g}\, d^4x = \int g^{ik} R_{ik} \sqrt{-g}\, d^4x, \quad (56)$$

в якому інтегрування проведено за нескінченною областю простору-часу, що розташований між двома гіперплощинами $t = t_1$ і $t = t_2$. Обчислюючи його варіацію, маємо:

$$\delta \int g^{ik} R_{ik} \sqrt{-g}\, d^4x = \int \left(R_{ik} \sqrt{-g}\, \delta g^{ik} + R_{ik} g^{ik} \delta\sqrt{-g} + g^{ik} \sqrt{-g}\, \delta R_{ik} \right) d^4x. \quad (57)$$

Як випливає із (30)

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = -\frac{1}{2} \sqrt{-g}\, g_{ik} \delta g^{ik}. \quad (58)$$

Підставляючи (58) у (57), знаходимо

$$\delta \int R\sqrt{-g}\, d^4x = \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g}\, d^4x + \int g^{ik} \delta R_{ik} \sqrt{-g}\, d^4x. \quad (59)$$

При обчисленні δR_{ik} з'являються варіації $\delta\Gamma^i_{kl}$. Вони утворюють тензор. Дійсно, $\Gamma^i_{kl} A_k dx^l$ є зміна вектора A_k при паралельному перенесенні із точки P у нескінченно близьку до неї точку P'. Тому $\delta\Gamma^i_{kl} A_k dx^l$ є різниця двох векторів, які отримано при двох паралельних перенесеннях (з в'язями Γ^i_{kl} та $\Gamma^i_{kl} + \delta\Gamma^i_{kl}$ відповідно) із точки P в одну й ту саму точку P'. Різниця ж двох векторів в одній і тій же точці є вектором, а тому $\delta\Gamma^i_{kl}$ є тензором. Враховуючи це й використовуючи вираз (43) для R_{ik}, обчислимо тепер варіацію δR_{ik}:

$$\delta R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^k}\delta\Gamma^\alpha_{i\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\delta\Gamma^\alpha_{ik} + \Gamma^\beta_{i\alpha}\delta\Gamma^\alpha_{\beta k} + \Gamma^\alpha_{\beta k}\delta\Gamma^\beta_{i\alpha} - \Gamma^\beta_{ik}\delta\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} - \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\delta\Gamma^\beta_{ik} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\delta\Gamma^\alpha_{i\alpha} - \Gamma^\beta_{ik}\delta\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} - \Gamma^\beta_{\alpha k}\delta\Gamma^\alpha_{i\beta}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\delta\Gamma^\alpha_{ik} - \Gamma^\beta_{i\alpha}\delta\Gamma^\alpha_{\beta k} - \Gamma^\beta_{k\alpha}\delta\Gamma^\alpha_{i\beta}\right) + \quad (60)$$

$$+\left(\Gamma^\beta_{\alpha k} - \Gamma^\beta_{k\alpha}\right)\delta\Gamma^\alpha_{i\beta} = \left(\delta\Gamma^\alpha_{i\alpha}\right)_{;k} - \left(\delta\Gamma^\alpha_{ik}\right)_{;\alpha},$$

бо, як випливає з (23), символи Крістоффеля є симетричними за нижніми індексами. Співвідношення (60) називається рівнянням Палатіні. Підставляючи тепер вираз δR_{ik} у (59) й інтегруючи за частинами відносно інваріантних похідних, отримуємо нульове значення другого інтегралу в (59), тому що $\left(g^{ik}\sqrt{-g}\right)_{;\alpha} = 0$. Це справді так, бо, по-перше, відносно інваріантного диференціювання g^{ik} є сталими величинами, а, по-друге, $\sqrt{-g}_{;l} = 0$, що випливає з (33), якщо його переписати у вигляді $\partial\sqrt{-g}/\partial x^k - \sqrt{-g}\Gamma^i_{ki} = 0$. Таким чином, варіація δS_g буде

$$\delta S_g = \int\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d^4x. \quad (61)$$

Для варіації матерії δS_m можна записати аналогічний вираз $\delta S_m = \int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d^4x$, де T_{ik} – тензор енергії-імпульсу, який є тензорною характеристикою розподілу матерії в системі. Домножуючи, наприклад, δS_m на таку сталу к, щоб розмірність δS_m збігалася з розмірністю варіації поля δS_g, за принципом найменшої дії $\delta\left(S_g + \kappa S_m\right) = 0$ отримуємо тензорні рівняння гравітаційного поля за наявності матерії

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = -\kappa T_{ik}. \quad (62)$$

Цим демонструється, що тензор T_{ik} пропорційним не тензору Річчі R_{ik}, а тензору Ейнштейна $G_{ik} = R_{ik} - g_{ik}R/2$. Величину та знак сталої к знаходимо далі при граничному переході до нерелятивістської теорії гравітації Ньютона.

Рівняння (62) можна ще трактувати не як рівняння поля, а як означення тензора матерії T_{ik}. Можна сказати, що матерія не змушує відрізнятися від нуля геометричну величину, яка утворює ліву частину рівняння (62), – вона і є цей ненульовий тензор, вона ним описується.

Рівняння (62) можна переписати в мішаних компонентах

$$R^k_i - \frac{1}{2}\delta^k_i R = -\kappa T^k_i. \quad (63)$$

Спрощуючи (63) за індексами *i* та *k*, тобто виконуючи операцію згортки, отримуємо

$$R = \kappa T, \quad (64)$$

де $T = T_i^i$ – слід тензора T_i^k. Використовуючи (64), рівняння (62) можна переписати у такому вигляді:

$$R_{ik} = -\kappa\left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T\right). \tag{65}$$

У порожньому просторі $T_{ik} = 0$ і рівняння гравітаційного поля (65) зводяться до раніше отриманих рівнянь (45) за відсутності матерії.

Слід зазначити, що рівняння гравітаційного поля є нелінійними. Тому для гравітаційних полів несправедливий принцип суперпозиції. Нелінійність рівнянь гравітаційного поля ще приводить до можливості отримання рівнянь руху (46) з рівнянь поля (62). У теорії гравітації Ньютона, де рівняння поля лінійні, отримані із варіаційного принципу рівняння руху не залежать від рівнянь поля.. На противагу до цього, з погляду ЗТВ рух і поле нерозривно пов'язані один з одним. Підтвердженням цього є те, що рівняння руху в гравітаційному полі є наслідком рівнянь гравітаційного поля. Іншими словами, рівняння руху є необхідною умовою інтегровності для рівнянь поля.

6. ОТРИМАННЯ РІВНЯНЬ РУХУ В ГРАВІТАЦІЙНОМУ ПОЛІ ІЗ РІВНЯНЬ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ

Візьмемо коваріантну похідну $_{;k}$ від лівої частини рівнянь поля (62). Із тотожності Б'янки (42) випливає, що ця похідна дорівнює нулю. Дійсно, якщо помножити (42) на $g^{il} g^{jk}$ і використати властивості симетрії (40), отримаємо вираз

$$g^{jk} R_{jk;m} - g^{jk} R_{jm;k} - g^{il} R_{im;l} = R_{,m} - 2R^k_{m;k} = 0. \tag{66}$$

Представляючи вираз (66) в іншому вигляді, отримаємо

$$\left(R^k_m - \frac{1}{2}\delta^k_m R\right)_{;k} = \left(g_{im} R^{ik} - \frac{1}{2} g_{im} g^{ik} R\right)_{;k} = \left(R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R\right)_{;k} = 0, \tag{67}$$

що й доводить вищенаведене. При перетвореннях у (67) знову скористаємося тим, що коваріантна похідна метричного тензора дорівнює нулю.

Таким чином, необхідну умову інтегровності рівнянь поля можна записати у вигляді рівності нулю коваріантної похідної правої частини рівнянь поля (62), тобто

$$T^{ik}_{;k} \equiv \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} + \Gamma^k_{mk} T^{im} + \Gamma^i_{lk} T^{lk} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g} T^{ik}\right) + \Gamma^i_{lk} T^{lk} = 0, \tag{68}$$

де використано формули (18), (30) та (32).

Розглянемо суцільне макроскопічне тіло, де вираз для тензора енергії-імпульсу записується у вигляді

$$T^{ik} = \mu c^2 u^i u^k = \mu c^2 \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds}, \tag{69}$$

де μ – густина маси тіла (сума мас спокою частинок тіла в одиниці об'єму). Підставляючи (69) у (68) і далі, якщо помножити на $dV = dx^1 dx^2 dx^3$ та інтегруючи за областями, на межі якої тензор T^{ik} зникає, отримуємо

$$\frac{d}{dt}\int \mu c u^0 u^i \sqrt{-g}\, dV + \int \Gamma^i_{lk} \mu c^2 u^l u^k \sqrt{-g}\, dV = 0 . \qquad (70)$$

Значення інтегралів у (70) знаходимо за допомогою використання рівняння неперервності

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\mu c u^k\right) = 0 , \qquad (71)$$

яке відрізняється від закону збереження маси $\left(\mu c u^k\right)_{,k} = 0$ у СТВ лише заміною похідних $_{,k}$ коваріантними похідними $_{;k}$. Інтегруючи (71) за цією ж областю, на межі якої μ дорівнює нулю, отримаємо

$$\frac{d}{dt}\int \mu u^0 \sqrt{-g}\, dV = 0 ,$$

тобто інтеграл $\int \mu u^0 \sqrt{-g}\, dV$ є сталою величиною. Користуючись цим фактом, а також замінюючи dt на $u^0 ds/c$, для випадку руху однієї матеріально точки співвідношення (70) переходить в таке рівняння:

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{lk} u^l u^k = \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{lk} \frac{dx^l}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0 , \qquad (72)$$

де в (72) усі величини беруться в одній точці, в якій розташована частинка. Рівняння (72) – це явна форма рівнянь геодезичної лінії.

Таким чином, ще раз переконалися, що рівняння руху матеріальної точки збігаються з рівняннями геодезичної лінії. Це доведення показує, що рівняння (72) можуть бути отримані безпосередньо із рівняння $T^{ik}_{;k} = 0$ шляхом інтегрування за об'ємом та наступним переходом до випадку зосередженої маси. Слід зазначити, що рівняння руху (72), як наслідок рівнянь поля (62), були вперше отримані Ейнштейном, Інфельдом та Фоком.

7. ЗАКОН НЬЮТОНА

В отриманих рівняннях гравітаційного поля невизначеними ще залишаються величина та знак сталої к. Дані про сталу к можна отримати, якщо поставити вимогу, щоб релятивістська теорія гравітаційного поля в граничному випадку переходила в теорію тяжіння Ньютона, тобто рівняння поля гравітації з рівняннями геодезичної лінії в першому наближенні мають приводити до закону руху Ньютона

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \tag{73}$$

та до рівняння Пуассона

$$\Delta\Phi = 4\pi G\mu\,, \tag{74}$$

де $G = 6{,}67\cdot 10^{-8}\,\text{см}^3\text{г}^{-1}\text{с}^{-2}$ – гравітаційна стала теорії Ньютона, μ – густина гравітаційної маси.

Розглянемо випадок слабких полів, коли геометрія простору-часу мало відрізняється від псевдоевклідової, тобто метричний тензор гравітаційного поля можна записати у вигляді

$$g_{ik} = \gamma_{ik} + h_{ik}\,, \tag{75}$$

де h_{ik} – малі величини, які характеризують відхилення простору-часу від псевдоевклідової метрики. Утримуючи тільки члени, що є лінійними відносно величин h_{ik} та їх похідних, а також нехтуючи добутками величин h_{ik} та їх похідних, рівняння геодезичної лінії можна записати у вигляді

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -c^2\Gamma^i_{44},\ x^4 = ct,\ i = 1,2,3\,, \tag{76}$$

оскільки квадрат лінійного елемента в цій метриці буде наближено дорівнювати $ds^2 \approx c^2\left(dt\right)^2\left(-1+h_{44}\right)$, а члени $\Gamma^i_{kk}\left(dx^k/dt\right)^2\ \ (k=1,2,3)$ у рівняннях (46) геодезичної лінії як добутки $\Gamma^i_{kk} \approx g^{im}\left(\partial h_{mk}/\partial x^k - \partial h_{kk}/2\partial x^m\right)$ на компоненти швидкостей dx^k/dt у цьому наближенні не враховуються. При цьому величини Γ^σ_{44} у цьому наближенні подано виразом

$$\Gamma^\sigma_{44} = g^{\sigma\sigma}\left(\frac{\partial g_{\alpha 4}}{\partial x^4} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^\alpha}\right) \approx \frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{c}\frac{\partial g_{\sigma 4}}{\partial t},\ \sigma = 1,2,3\,. \tag{77}$$

У випадку статичного поля компоненти метричного тензора є функціями лише координат і не залежать від часу, унаслідок чого другий член у (77) дорівнює нулю. Така сама ситуація має місце й у випадку змінного поля, якщо час входить у вирази h_{ik} не безпосередньо, а тільки через координати гравітаційного поля та їх похідні. Таким чином, (77) переписується у вигляді

$$\Gamma^\sigma_{44} \approx -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^\sigma} \tag{78}$$

і рівняння геодезичної лінії, як випливає із (76), набувають вигляду (73), якщо гравітаційний потенціал Φ вибрати таким чином:

$$\Phi = -\frac{1}{2}c^2\left(g_{44}+1\right). \tag{79}$$

із формули (79) видно, що у разі відсутності гравітаційного поля, коли $g_{44} = -1$, потенціал Φ дорівнює нулю.

Для того, щоб повністю довести, що теорія Ньютона є граничним випадком релятивістської теорії тяжіння, необхідно в цьому частинному випадку показати, що скалярний потенціал Φ задовольняє рівняння Пуассона (74). З цією метою шукаємо компоненту 44 рівняння гравітаційного поля (65) $R_{ik} = -\kappa\left(T_{ik} - g_{ik}T/2\right)$. Для T_{ik} можна взяти тензор енергії-імпульсу (69). Нехтуючи величинами порядку v/c, можна вибрати всі компоненти T_{ik}, крім T_{44}, рівними нулю. Це означає, що $T_{44} = \mu c^2$, і, відповідно, $T = g^{ik}T_{ik} = g^{44}T_{44} = -\mu c^2$, тобто компонента 44 рівняння (65) виражається таким чином:

$$R_{44} = -\frac{1}{2}\kappa\mu c^2 . \tag{80}$$

Значення R_{44} візьмемо із явного виразу для тензора Річчі (43), який запишемо ще раз у вигляді

$$R_{ik} = \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{i\alpha}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{ik}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\beta}_{i\alpha}\Gamma^{\alpha}_{k\beta} - \Gamma^{\alpha}_{ik}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} . \tag{81}$$

Оскільки похідними за часом і добутками Γ^{i}_{kl} нехтуємо в (81), отримуємо

$$R_{44} = -\frac{\partial\Gamma^{\sigma}_{44}}{\partial x^{\sigma}}, \tag{82}$$

а так як $\Gamma^{\sigma}_{44} \propto \Gamma_{\sigma,44} \propto -\partial g_{44}/2\partial x^{\sigma}$, приходимо до ланцюжка перетворень $R_{44} = \left(\sum_{\sigma}\partial^2 g_{44}/\partial x^{\sigma 2}\right)/2 = \Delta g_{44}/2 = -\Delta\Phi/c^2$. Підставляючи цей останній вираз у (80), знаходимо

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2}\kappa\mu c^4 . \tag{83}$$

Таким чином, приходимо до рівняння Пуассона. Порівнюючи (74) і (83), знаходимо сталу $\kappa = 8\pi G/c^4$, а рівняння гравітаційного поля за наявності матерії тепер набуває завершеного вигляду

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{ik} . \tag{84}$$

Оскільки величина κ є додатньою, то: по-перше, у нас реалізується ситуація гравітаційного притягування, а не відштовхування; по-друге, вибір від'ємного знаку в правій частині рівняння поля (62) був виправданий. Слід підкреслити, у від'ємності правої частини рівняння (84) може бути прихована одна із найбільших таємниць гравітації, як універсальнішої взаємодії природи. Ще Максвелл простими міркуваннями показав, що порожній простір має велику внутрішню енергію, а присутність матерії (відповідно до поля гравітації) впливає на середовище в бік зменшення цієї енергії.

8. ЦЕНТРАЛЬНО-СИМЕТРИЧНЕ ГРАВІТАЦІЙНЕ ПОЛЕ

Розглянемо зовнішній розв'язок рівнянь Ейнштейна $R_{ik}=0$ для гравітаційного поля, яке характеризується центральною симетрією. Таке поле може створюватися будь-яким центрально-симетричним розподілом речовини; при цьому центрально-симетричним має також бути і рух речовини, тобто швидкість у кожній точці має бути направлена за радіусом. Центральна симетрія поля означає, що метрика простору-часу має бути однаковою в усіх точках, які розташовані на однаковій відстані від центра, тобто метричний тензор g_{ik} має бути сферично-симетричним. Беручи до уваги ці вимоги, вибираємо систему координат таким чином, щоб на великій відстані від центра тяжіння мали місце рівності

$$x^1=r,\ x^2=\theta,\ x^3=\varphi,\ x^4=ct\,, \tag{85}$$

де r,φ,θ – звичайні сферичні координати. Просторово-часовий інтервал на достатньо великих відстанях від гравітуючої матерії записується у формі

$$ds^2=(dr)^2+r^2(d\theta)^2+r^2\sin^2\theta(d\varphi)^2-c^2(dt)^2\,, \tag{86}$$

а траєкторіями частинки на далеких відстанях є прямі лінії, де $R^i_{jkl}=0$. У присутності ж сферично-симетричного стаціонарного гравітаційного поля для цього інтервалу можна вибрати вираз

$$ds^2=f_1(r)(dr)^2+r^2(d\theta)^2+r^2\sin^2\theta(d\varphi)^2-f_2(r)c^2(dt)^2\,, \tag{87}$$

де $f_1(r),f_2(r)$ – функції, які підлягають визначенню. Члени, які утворюють перехресні добутки $drd\theta$, $d\varphi d\theta$ тощо, не враховуються в (87), оскільки через сферичну симетрію ds^2 не залежатиме від знаків $d\theta$ та $d\varphi$. З подібних же міркувань відкидаються й перехресні добутки, які містять dt (статичне гравітаційне поле не залежатиме від напрямку часу).

Зручно в подальших обчисленнях функції $f_1(r),f_2(r)$ вибрати у вигляді

$$f_1(r)=\exp(\lambda),\ f_2(r)=\exp(\mu)\,, \tag{88}$$

де нові функції $\lambda(r)$ і $\mu(r)$ при $r\to\infty$ мають прямувати до нуля. Перепишемо форму (87) у нових позначеннях (88) та з урахуванням (85) таким чином:

$$ds^2=\exp(\lambda)\left(dx^1\right)^2+r^2\left(dx^2\right)^2+r^2\sin^2\theta\left(dx^3\right)^2-\exp(\mu)\left(dx^4\right)^2\,, \tag{89}$$

тобто метричні коефіцієнти g_{ik} набувають значень:

$$g_{11}=\exp(\lambda),\ g_{22}=r^2,\ g_{33}=r^2\sin^2\theta,\ g_{44}=-\exp(\mu),\ g_{ik}=0,\ i\neq k\,. \tag{90}$$

Визначник g квадратичної форми (89) представлено у вигляді добутку

$$g=g_{11}g_{22}g_{33}g_{44}=-\exp(\lambda+\mu)r^4\sin^2\theta\,, \tag{91}$$

а контраваріантний тензор g^{ik} задається матрицею

$$\left(g^{ik}\right)=\begin{pmatrix}\exp(-\lambda) & 0 & 0 & 0\\ 0 & r^{-2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & r^{-2}\sin^{-2}\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\exp(-\mu)\end{pmatrix}. \tag{92}$$

За допомогою формули (26) будуємо тепер символи Крістоффеля Γ^i_{kl}, серед яких залишаються ненульовими лише наступні дев'ять:

$$\begin{aligned}&\Gamma^1_{11}=2^{-1}\lambda',\ \Gamma^2_{12}=r^{-1},\ \Gamma^3_{13}=r^{-1},\\ &\Gamma^4_{14}=2^{-1}\mu',\ \Gamma^1_{22}=-r\exp(-\lambda),\ \Gamma^3_{23}=\operatorname{ctg}\theta,\\ &\Gamma^1_{33}=-r\sin^2\theta\exp(-\lambda),\ \Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta,\ \Gamma^1_{44}=2^{-1}\mu'\exp(\mu-\lambda),\end{aligned} \tag{93}$$

де λ',μ' – похідні за r. Підставляємо (91) та (93) у рівняння гравітації $R_{ik}=0$, використовуючи явний вираз (44) для тензора Річчі, тобто отримуємо систему із трьох диференціальних рівнянь для знаходження функцій λ та μ

$$\begin{aligned}&\frac{\mu''}{2}-\frac{\lambda'\mu'}{4}+\frac{\mu'^2}{4}-\frac{\lambda'}{r}=0,\\ &\exp(-\lambda)\left[1+\frac{r}{2}(\mu'-\lambda')\right]-1=0,\\ &-\frac{\mu''}{2}+\frac{\lambda'\mu'}{4}-\frac{\mu'^2}{4}-\frac{\mu'}{r}=0.\end{aligned} \tag{94}$$

Із першого та третього рівнянь системи (94) отримуємо $\lambda+\mu=C_1$, а з граничних умов на нескінченності для функцій λ та μ знаходимо $C_1=0$. Друге рівняння системи (94) тепер набуває вигляду

$$\exp(-\lambda)(1-\lambda' r)=1. \tag{95}$$

Рівняння (95) легко інтегрується, і отримуємо

$$\exp(-\lambda)=\exp(\mu)=1+\frac{C_2}{r}. \tag{96}$$

Сталу інтегрування C_2 шукаємо на основі вимоги, щоб на великих відстанях, де гравітаційне поле послаблюється, мав місце закон Ньютона, а саме, як випливає із (79), повинно бути

$$g_{44}=-1-\frac{2\Phi}{c^2}, \tag{97}$$

де потенціал Φ дорівнює ньютонівському виразу $\Phi=-Gm/r$, в якому m – повна маса тіла, яка є джерелом гравітаційного поля. Оскільки, як видно із (89), $g_{44}=-\exp(\mu)$, то порівнюючи (96) та (97), отримуємо

$$C_2 = \frac{2Gm}{c^2}. \qquad (98)$$

Ця величина, що має розмірність довжини, називається гравітаційним радіусом тіла r_g:

$$r_g = \frac{2Gm}{c^2}. \qquad (99)$$

Таким чином, з урахуванням (96) – (99), просторово-часову метрику (89) запишемо у вигляді

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-\frac{r_g}{r}} + r^2\left(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2\right) - \left(1-\frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2. \qquad (100)$$

Цей розв'язок рівнянь Ейнштейна знайдений Шварцшільдом у 1916 р. Він є єдиним стаціонарним розв'язком гравітаційних рівнянь $R_{ik}=0$, який приводить до плоскої псевдоевклідової метрики (86) на нескінченності.

9. ТРИ ПІДТВЕРДЖЕННЯ ЗАГАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

Траєкторію руху частинки маси m у центрально-симетричному гравітаційному полі, створюваного тілом маси M, можна знайти внаслідок розв'язування системи рівнянь $d^2x^i/ds^2 + \Gamma^i_{kl}\left(dx^k/ds\right)\left(dx^l/ds\right) = 0$. При цьому за допомогою використання метрики Шварцшільда можна показати, що траєкторією є еліпс, перигелій якого за один оберт повертається на кут $\delta\varphi = 6\pi GM\Big/\left[ac^2\left(1-e^2\right)\right]$, де a – довжина великої напівосі еліпса, e – його ексцентриситет. Якщо M вважати масою Сонця, то можна підрахувати значення $\delta\varphi$ для різних планет. Наприклад, для Меркурію величина $\delta\varphi$ становить $4{,}9\cdot10^{-7}$ рад. Цей кут дуже малий, але якщо помножити його на 415 обертів, які здійснює Меркурій за століття, то отримаємо $42''$. Ця величина з великою точністю збігається з даними астрономічних спостережень. Це було першим і єдиним експериментальним підтвердженням правильності релятивістської теорії гравітації Ейнштейна на момент її створення в 1915 р.

Іншим експериментальним підтвердженням теорії гравітації можна вважати розрахунок відхилення променів світла від прямолінійного шляху, які проходять мимо великих мас. Викривлення променів світла вперше спостерігали в 1919 р. Це відхилення для променів світла, що проходять на відстані ρ від центра поля, становить кут $\delta\theta = 4GM/c^2\rho$. Наприклад, для променів, які проходять мимо краю Сонця, $\delta\theta = 1{,}75''$. Розрахунок же на основі ньютонівської теорії тяжіння давав лише половину від цього значення.

У 1922 р. радянський математик О.О.Фрідман показав, що рівняння гравітаційного поля $R_{ik} - g_{ik}R/2 = -8\pi GT_{ik}/c^4$ допускають нестаціонарний розв'язок для ізотропного однорідного розподілу речовини в просторі. Цим самим Фрідман зро-

бив одне із найважливіших теоретичних відкриттів в астрономії – він передбачив розширення Всесвіту (яке за сучасними астрономічними даними розпочалося приблизно 15 млрд років тому). Із розв'язку Фрідманом космологічних рівнянь Ейнштейна випливала можливість зміни з часом радіуса кривизни Всесвіту. Можна сказати, що якраз з цього часу починається формуватися сучасне уявлення про виникнення та будову нашого Всесвіту. Через декілька років після робіт Фрідмана американський астроном Е.Хаббл відкрив "розбігання" галактик – наслідок розширення Всесвіту. Це випливало із явища "червоного зміщення" ліній у спектрах галактик, тобто вважаючи це зміщення доплерівським, маємо зробити висновок про "розбігання" галактик, або про те, що в даний час Всесвіт розширюється. Можна показати, що відношення величини зміни частоти описується формулою $z = (\omega_D - \omega)/\omega_D = Hl/c$, де l – відстань до астрономічного джерела випромінювання, H – так звана стала Хаббла. Розглядаючи червоне зміщення як результат ефекта Доплера, можна визначити швидкість v галактики, з якою вона віддаляється від спостерігача. Оскільки в цьому випадку $z = v/c$, значення $v = Hl$, тобто чим далі від спостерігача галактика, тим з більшою швидкістю вона віддаляється.

Таким чином, ці три емпіричних факти – поворот перигелію планети, викривлення променів світла в полі тяжіння масивних тіл та існування "червоного зміщення" ліній у спектрах астрономічних об'єктів, знайшли найбільш правильне пояснення в межах створеної релятивістської теорії гравітації, що і підтверджує її правильність.

ПІСЛЯМОВА

Теорія гравітації Ейнштейна з самого початку була релятивістською, але досі залишається неквантованою. Хоча релятивізація її є більш радикальною, ніж, наприклад, релятивізація квантової механіки, електродинаміки та інших теорій, які не виходять за межі СТВ і тим самим плоского чоторивимірного простору-часу. Релятивістська ж теорія тяжіння при послідовному розвитку ідеї релятивізму приводить до викривленого ріманового простору-часу. Таким чином, релятивізм у цій теорії є двоступінчастим: локально теорія є лоренц-коваріантна, а в цілому – загальноковаріантна, тобто в нескінченно малих областях простір-час є псевдоевклідовий, як у СТВ, а в цілому структура простору-часу є псевдоріманової. Тому релятивістська теорія гравітації ще називається загальною теорією відносності. Ріманова структура простору-часу приводить до рівноцінності будь-яких систем координат, тобто ні одна з них не має привілегії, що і є суттю загального принципу відносності.

У ЗТВ уперше знайшли втілення ідеї геометризації фізичної взаємодії: фізичні величини, що характеризують гравітацію (потенціал, напруженість тощо), збігаються з суто просторово-часовими характеристиками (метрика, в'язь тощо). Геометрична природа тяжіння пояснює універсальність гравітаційної взаємодії. Як випливає із принципу еквівалентності прискорення й гравітаційного поля, не має місця будь-яким силам, що викликають прискорення, крім гравітації, яку, у свою чергу, необхідно розглядати не як силу, а як властивість геометрії простору-часу. Це означає, що будь-які причини, які викликають прискорення, вносять свій вклад у тензор енергії-імпульсу через посередництво пов'язаного з ними гравітаційного поля. Це означає, що ці причини зводяться до геометрії простору-

часу. Наприклад, такою причиною є енергія гравітаційного поля, яка робить внесок в тензор енергії-імпульсу, а значить і в гравітаційне поле, тобто можна сказати, що гравітація гравітує, або, що еквівалентно, викривлення простору-часу викривляє простір-час і т. д. Всі ці міркування приводять до того, що будь-яку взаємодію (чи то електромагнітну, чи то слабку, чи то сильну) можна в кінцевому випадку звести до властивості геометрії простору-часу. Ще можна доповнити, що причиною руху є сам рух, тобто там, де є викривлення простору-часу, там існує рух, який і є це викривлення простору-часу, або, навіть: простір-час і рух взаємно породжують один одного і не існують один без одного. Всі ці модифікації принципу еквівалентності, як фізичної причини теорії гравітації, знаходять і математичну адекватність з нелінійністю рівнянь гравітаційного поля. Таким чином, неквантованість ЗТВ якоюсь мірою компенсується її геометризованістю (ріманові структури, загальна коваріантність, ототожнення потенціалів з метрикою тощо) та нелінійністю.

Можливість об'єднання ЗТВ і теорії квантованих полів донедавна була лише далекою мрією. І тільки в 70 роках намітився прогрес у цій галузі фізики у зв'язку зі знаменитою роботою Хокінга про спектр випромінювання чорної діри, яка відкрила новий шлях у новий розділ квантових ефектів, у формули, до яких одночасно входять усі сталі величини: гравітаційна стала Ньютона (G), стала Планка ($\hbar$) та стала Больцмана (k). Це означає, що існує глибокий зв'язок між гравітацією, квантовою механікою та термодинамікою. Дійсно, у 1974 р. англійський фізик Хокінг показав, що вакуум у гравітаційному полі чорної діри нестійкий. Народження частинки в такому полі призводить до появи випромінювання чорної діри. Спектр такого випромінювання має тепловий вигляд, а температура випромінювання, вимірювана спостерігачем на великій відстані від чорної діри, дорівнює $T_{\kappa} = \hbar\kappa/2\pi kc$, де $\kappa = Gm/r_g^2 = c^2/4Gm$. Ця температура формально збігається з температурою Унру для величини прискорення $a = \kappa$. У 1976 р. канадський фізик Унру показав, що внаслідок взаємодії з вакуумними нульовими коливаннями атом, який розташований у рівномірно прискореній системі координат (з прискоренням a), збуджується, причому розподіл за рівнями в результаті збудження є тепловим і при температурі T_a.

Вище йшлося про так звані чорні діри. Одне із найдивовижніших передбачень теорії гравітації Ейнштейна пов'язане з можливістю існування чорних дір – об'єктів з таким сильним гравітаційним полем, що ніякі фізичні тіла, ніякі сигнали не можуть вийти назовні. Як показано за допомогою метрики Шварцшільда, чорна діра утворюється при зменшенні тіла маси M до розмірів, менших гравітаційного радіуса r_g. Швидкість, яка необхідна, для того, щоб полетіти в нескінченність з поверхні чорної діри (друга космічна швидкість), у цьому випадку дорівнює швидкості світла.

Електромагнітна та слабка взаємодії описуються теорією Вайнберга – Салама. Відкривається шлях до включення в ширшу калібровочну теорію й сильній взаємодії, яка описується квантовою хромодинамікою. Лише гравітація не входить в це об'єднання. Але і в цьому напрямі досягнуто деякого прогресу. Основними кандидатами на реалізацію такої програми є теорія супергравітації, яка являє собою "корінь квадратний із ЗТВ" тою мірою, в якій рівняння Дірака є коренем квадратним із рівняння Клейна – Гордона, а також теорія суперструн, яка ще називається теорією всього існуючого (тут розглянуто можливість існування 26-вимірності в мікросвіті).

Логічно, очевидно, що можлива одна загальна теорія елементарних частинок і силових полів – фізична, яка б узагальнювала релятивістської квантової теорії на область гравітаційних явищ, або, навпаки, узагальненням ЗТВ на область квантових явищ. Можна представити собі такі фізичні умови й процеси, при яких суттєву роль відіграють і сильні гравітаційні поля, і квантові явища. Такі умови, очевидно, реалізуються в чорних дірах. При великих густинах матерії ні релятивістська квантова теорія, ні ЗТВ не можуть бути достатніми. Для побудови загальної фізичної теорії можна з деякою імовірністю спробувати дати кількісні характеристики тих фізичних умов, при яких вона стає необхідною, оскільки для такої теорії мають бути суттєвими всі світові сталі – гравітаційна (G), релятивістська (1/c) і квантова ($\hbar$). Як вперше показав Планк, із них можна скласти комбінації, що мають розмірність довжини (планківська довжина $\sqrt{G\hbar/c^3} = 1{,}616 \cdot 10^{-33}$ см), часу (планківський час $\sqrt{G\hbar/c^5} = 5{,}39 \cdot 10^{-44}$ с), а також інші фізичні величини. Можна сказати, що планківські величини позначають ту межу, за якою має використовуватися повна, непертурбативна за своїм характером квантова теорія гравітації. На планківських масштабах відбуваються флуктуації метрики, топології і, можливо навіть флуктуації числового поля. Геометрія стає неархімедовою й тому підхід до вивчення фізичних явищ на таких малих масштабах простору й часу розробляють у межах p-адичних струн.

Існує надія, що на відстанях, набагато більших від планківських, квантові ефекти гравітаційного поля будуть нескінченно малими, тобто має існувати широка область, в якій можливе застосування напівкласичної теорії. Але всі види матерії і енергії, на що раніше акцентувалося, гравітують. У термінах квантової теорії гравітаційне поле діє на гравітон так само, як, наприклад, на фотон. Таким чином, коли класичне гравітаційне поле приводить до суттєвих ефектів, в яких беруть участь (реальні чи віртуальні) фотони, необхідно враховувати також аномальні процеси за участю гравітонів. Звідси випливає, що квантова гравітація має проявлятися нетривіально на всіх масштабах відстаней та часу. Тобто нелінійність, яка лежить в основі гравітаційної взаємодії, перекреслює всі спроби нехтування квантовою гравітацією. А нелінійність є одночасно причиною й наслідком принципу еквівалентності.

Теорія гравітації є також основою розуміння цікавих астрофізичних відкриттів – нейтронних зірок, "чорних дір", космологічних процесів розширення Всесвіту, реліктового випромінювання, яке було теоретично передбачене Гамовим у побудованій ним теорії гарячого Всесвіту. Реліктове випромінювання несе інформацію про перші моменти існування нашого Всесвіту. Так, наприклад, останні дані астрономічних спостережень 2000-го року з дослідження варіації інтенсивності реліктового випромінювання відповідно до передбачення Е.Гліннера дають підтвердження існуванню у Всесвіті так званої фази інфляції. Згідно з ідеєю Гліннера перед початком розширення (через 10^{-43} с після народження Всесвіту) матерія перебувала у вакуумному стані (інфлантон) і через 10^{-36} с унаслідок величезного від'ємного тиску, спричиненого гравітаційним відштовхуванням, квантово розпалася, перетворившись у гарячу плазму – звичайну матерію. Можна вважати, що розширення Всесвіту є найвидатнішим тестом для геометродинаміки Ейнштейна, а космологія – найширшою лабораторією застосування релятивістської теорії гравітації.