Розділ XII

ВИБРАНІ ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ КВАНТОВОЇ ТЕОРІЇ

§ 33. Кореляція інтенсивностей хвиль де Бройля і тривимірна локація просторового положення джерела мікрочастинок

Реальність існування хвиль де Бройля, які відповідають руху матеріальних тіл, може бути використаною при створенні систем просторової (тривимірної або двовимірної) локації джерел іонізуючого випромінювання та ядерних частинок (зокрема нейтрино або нейтронів). До таких задач належить, наприклад, пошук джерел іонізуючого випромінювання, які невідомим чином розташовані в просторі. Подібні задачі нерідко виникають у прикладній фізиці та прикладній дозиметрії. Аналогічні проблеми виникають і в астрофізиці при дослідженні локальних імпульсних радіаційних процесів (зокрема т. зв. *гамма-спалахів*, які найімовірніше виникають при *гравітаційному колапсі* надважких зірок, що веде до утворення *нейтронних зірок* і *чорних дірок*), продукти яких невидимі в оптичному та мікрохвильовому діапазонах довжин хвиль.

Якщо ядерні процеси в джерелі іонізуючого випромінювання супроводжуються м'яким електромагнітним випромінюванням, то відновити положення цього джерела інколи можна за допомогою різних фазово-інтерференційних методів, які базуються на дослідженні різ-

ниці фаз сигналів з різних приймачів електромагнітних хвиль. Це добре відомий метод інтерференції амплітуд хвиль.

Зовсім інша ситуація буде в тому випадку, коли електромагнітні сигнали дуже слабкі й маскуються електромагнітними завадами або взагалі відсутні, а єдиним джерелом інформації є ядерні частинки, які вилітають із джерела випромінювання. Традиційний метод реєстрації ядерних частинок полягає у використанні віддалених лічильників, які фіксують послідовність вторинних імпульсних процесів (поява фотоелектронів, спалах світла, імпульс струму тощо), які супроводжують послідовність проходження мікрочастинок через детектор. На перший погляд здається, що за допомогою таких лічильників неможливо відновити просторовий розподіл джерел випромінювання. Однак детальний аналіз показує, що таке відновлення можна здійснити, якщо врахувати хвильові властивості мікрочастинок і використати метод інтерференції інтенсивностей для частинок, стан яких описується хвилями де Бройля [VII]. Розглянемо цей метод.

Рух кожної з ядерних мікрочастинок, що вилітають із джерела, на відстані, яка значно перевищує розмір джерела, описується нормованою сферичною хвильовою функцією. Якби процес випромінювання тривав нескінченно довго, то хвильова функція мала б вигляд монохроматичної сферичної хвилі на зразок (27.5):

$$\Psi(\vec{r},t) = f(\theta)\frac{e^{-i\{(Et-\vec{p}\vec{r})/\hbar+\varphi\}}}{r\sqrt{4\pi}}. \qquad (33.1)$$

У (33.1) величини $E, \vec{p}, \varphi_n$ – відповідно, енергія, імпульс частинки та початкова фаза хвильової функції.

Оскільки процес генерації кожної частинки є порівняно коротким, то хвильова функція відмінна від монохроматичної й має вигляд

$$\Psi(\vec{r},t) = f(\theta)\frac{F(\vec{r},t)e^{-i\varphi}}{r\sqrt{4\pi}}, \qquad (33.2)$$

де величина $f(\theta)$ характеризує кутовий розподіл вильоту частинок. Для ізотропних джерел випромінювання ця величина є константою $f(\theta) = f_0$.

Розглянемо випадок, коли всі частинки мають однакові характеристики (енергію та імпульс). Процес детектування цих частинок здійснюється двома просторово рознесеними детекторами j та i (рис. 33.1).

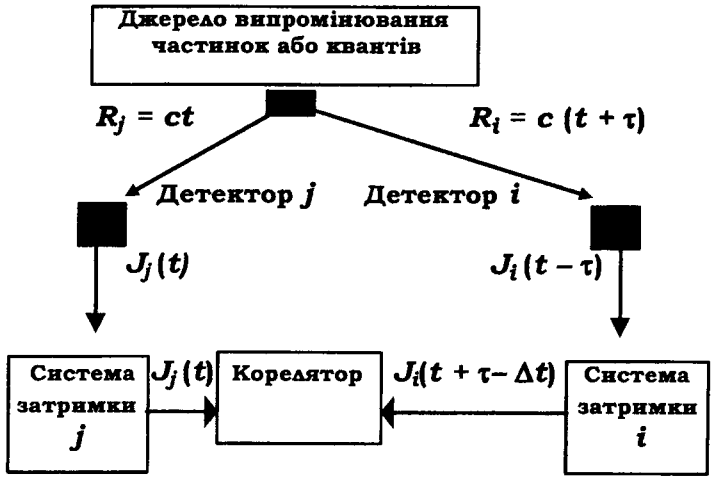


Рис. 33.1. Схема інтерферометра інтенсивностей хвиль де Бройля для просторової локації джерел мікрочастинок

Імпульсній послідовності частинок, які потрапляють у детектор j у випадкові моменти часу t_{jn}, відповідає повна хвильова функція

$$\xi_j(t) = \sum_n \Psi(\vec{R}_j, t - t_{jn}) = \sum_n f_0 \frac{F(R_j, t - t_{jn})}{\sqrt{4\pi} R_j} e^{-i\varphi_n}. \qquad (33.3)$$

Інтенсивність сигналу (фактично – послідовність імпульсів електричного струму), який реєструється цим детектором, визначається співвідношенням

$$J_j(t) = \varepsilon_j \,|\, \xi_j(t) \,|^2, \qquad (33.4)$$

у якому величина $|\,\xi_j(t)\,|^2$ характеризує інтенсивність потоку частинок від досліджуваного джерела в місці розташування детектора j, ε_j – ефективність реєстрації частинки в детекторі, яка залежить як від імовірності потрапляння частинки в детектор, так і від квантової ефективності детектора щодо перетворення процесу взаємодії частинки з детектором на електричний сигнал.

Аналогічна імпульсна послідовність частинок, що реєструються в місці розташування детектора i, та інтенсивність сигналу від нього визначаються формулами:

$$\xi_i(t-\tau) = \sum_n \Psi(\vec{R}_i, t - t_{in} - \tau) = \sum_n f_0 \frac{F(R_i, t - t_{in} - \tau)}{\sqrt{4\pi} R_i} e^{-i\varphi_n}, \qquad (33.5)$$

$$J_i(t-\tau) = \varepsilon_i \mid \xi_i(t-\tau) \mid^2 . \qquad (33.6)$$

Запізнення сигналу в другому детекторі на величину τ викликане тим, що джерело випромінювання розташоване несиметрично щодо обох детекторів.

Імпульси електричного струму від обох детекторів надходять на систему корелятора, який їх перемножує та усереднює. Спочатку розглянемо роботу системи кореляції інтенсивностей без урахування впливу систем затримки сигналу. Кореляційна функція інтенсивностей $J_j(t)$ і $J_i(t-\tau)$ на виході корелятора має вигляд

$$\begin{aligned} K_J(\tau) &= < J_j(t) J_i(t-\tau) > - < J_j(t) >< J_i(t-\tau) > = \\ &= \varepsilon_j \varepsilon_i < \xi_j(t) \xi_j^*(t) \xi_i(t-\tau) \xi_i^*(t-\tau) > - < J_j(t) >< J_i(t-\tau) > \end{aligned} \qquad (33.7)$$

і залежить від початкового моменту четвертого порядку випадкової величини $\xi_\alpha(t)$.

Процес спонтанного розпаду джерел радіоактивних частинок є *нормальним гауссовим процесом.* Для нього початкові парні моменти вищих порядків випадкових величин зводяться до всіх можливих комбінацій початкових моментів другого порядку незалежно від порядку розташування величин у кожному із цих моментів

$$< x_i x_j x_k x_l > = \sum_{i \neq j \neq k \neq l} < x_i x_j >< x_k x_l > . \qquad (33.8)$$

Використовуючи це правило, приведемо (33.7) до вигляду

$$\begin{aligned} K_J(\tau) &= \varepsilon_j \varepsilon_i \{ < \xi_j(t) \xi_j^*(t) >< \xi_i(t-\tau) \xi_i^*(t-\tau) > + \\ &+ < \xi_j(t) \xi_i(t-\tau) >< \xi_j^*(t) \xi_i^*(t-\tau) > + \\ &+ < \xi_j(t) \xi_i^*(t-\tau) >< \xi_j^*(t) \xi_i(t-\tau) > \} - < J_j(t) >< J_i(t-\tau) > . \end{aligned} \qquad (33.9)$$

Середні значення від добутку функцій, які не є взаємно комплексно-спряженими, дорівнюють нулю

$$< \xi_j(t) \xi_i(t-\tau) > = 0, \quad < \xi_j^*(t) \xi_i^*(t-\tau) > = 0 . \qquad (33.10)$$

Для доведення досить використати явний вигляд функцій (33.3) та (33.5) і врахувати процедуру усереднення за випадковою фазою. Кожний з моментів (33.10) пропорційний величинам $< e^{\pm i(\varphi_n + \varphi_m)} >_{\varphi_n, \varphi_m}$, які для випадкової рівномірно розподіленої фази дорівнюють нулю

$$< e^{\pm i(\varphi_n + \varphi_m)} >_{\varphi_n, \varphi_m} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\pm i(\varphi_n + \varphi_m)} d\varphi_n d\varphi_m = 0 . \qquad (33.11)$$

Беручи до уваги, що

$$\varepsilon_j \xi_j(t)\xi_j^*(t) = J_j(t),\ \varepsilon_i \xi_i(t-\tau)\xi_i^*(t-\tau) = J_i(t-\tau);$$
$$\varepsilon_j < \xi_j(t)\xi_j^*(t) > \varepsilon_i < \xi_i(t-\tau)\xi_i^*(t-\tau) >=< J_j(t) >< J_i(t-\tau) >, \quad (33.12)$$

знаходимо остаточний вираз для кореляційної функції

$$K_J(\tau) = \varepsilon_j\varepsilon_i \mid< \xi_j(t)\xi_i^*(t-\tau) >\mid^2 = \varepsilon_j\varepsilon_i \mid \sum_n \Psi(R_j, t-t_{jn})\Psi^*(\vec{R}_i, t-t_{in}-\tau)\mid^2 . \quad (33.13)$$

Для стаціонарних процесів, які відповідають випадковим імпульсним послідовностям (33.3) і (33.5), центральний момент другого порядку $< \xi_j(t)\xi_i^*(t-\tau) >$ у (33.12) визначається виразом

$$< \xi_j(t)\xi_i^*(t-\tau) >=< n > \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(R_j,t)\Psi^*(\vec{R}_i, t-\tau)\,dt =$$
$$=< n > \frac{\mid f_0 \mid^2}{4\pi R_j R_i} \int_{-\infty}^{\infty} F(R_j,t)F^*(R_i,t-\tau)\,dt, \quad (33.14)$$

у якому $< n >$ є середньою частотою генерації частинок у джерелі випромінювання (кількість частинок, які генеруються за одиницю часу). Використовуючи формулу (33.14), знаходимо вираз для кореляційної функції (33.13)

$$K_J(\tau) =< n_j >< n_i >\mid \int_{-\infty}^{\infty} F(R_j,t)F^*(R_i,t-\tau)\,dt \mid^2,$$
$$< n_k >=< n > \frac{\varepsilon_k \mid f_0 \mid^2}{4\pi R_k^2}\sigma_k. \quad (33.15)$$

У (33.15) величина $< n_k >$ є середньою частотою реєстрації частинок k-м детектором, σ_k – геометричний переріз k-го детектора. Величина сигналу на виході корелятора визначається кореляційно, функцією (33.15).

Функції $F(R_j,t)$ і $F^*(R_i,t-\tau)$, що визначають (33.15), є комплексними знакозмінними функціями. Залежно від просторового положення джерела частинок відносно детекторів, а також від величини додаткового запізнення τ на шляху до різних детекторів, вихідний сигнал (33.15) буде змінюватись. Якщо в одне із плечей інтерферометра інтенсивностей ввести схему затримки електричного сигналу, то при оптимальній величині затримки $\Delta t = -\tau$ функція (33.15) досягне максимального значення

$$K_J(0) = < n_j >< n_i > | \int_{-\infty}^{\infty} | F(R_j,t) |^2 dt |^2 . \qquad (33.16)$$

Величина цієї затримки дозволяє визначити різницю відстаней від джерела до детекторів і розробити схему просторової локації положення джерела випромінювання.

У системі координат, де положення двох детекторів характеризується величинами $\vec{r}_j = \{x_j, 0\}$, $\vec{r}_i = \{x_i, 0\}$, координата джерела випромінювання частинок визначається рівнянням лінії на горизонтальній площині $z = 0$:

$$\sqrt{(x_j - x)^2 + y^2} + v\tau = \sqrt{(x_i - x)^2 + y^2} . \qquad (33.17)$$

Для визначення точного положення джерела мікрочастинок на площині $z = 0$ необхідно використати ще один детектор, розташований, наприклад, у точці $\vec{r}_k = \{x_k, 0\}$. При цьому координати джерела $\vec{r} = \{x, y\}$ визначаються як сумісний розв'язок системи з двох довільних рівнянь зі складу повної системи

$$\sqrt{(x_j - x)^2 + y^2} + v\tau_{ji} = \sqrt{(x_i - x)^2 + y^2} , \qquad (33.18, а)$$

$$\sqrt{(x_j - x)^2 + y^2} + v\tau_{jk} = \sqrt{(x_k - x)^2 + y^2} , \qquad (33.18, б)$$

$$\sqrt{(x_i - x)^2 + y^2} + v\tau_{ik} = \sqrt{(x_k - x)^2 + y^2} . \qquad (33.18, в)$$

У цих рівняннях $\tau_{\alpha\beta}$ – запізнення частинок на шляху від джерела щодо детекторів α та β.

У випадку тривимірного детектування необхідно використати чотири детектори, положення джерела $\vec{r} = \{x, y, z\}$ визначатиметься як сумісний розв'язок системи рівнянь:

$$\sqrt{(x_\alpha - x)^2 + (y_\alpha - y)^2 + (z_\alpha - z)^2} + v\tau_{\alpha\beta} = \sqrt{(x_\beta - x)^2 + (y_\beta - y)^2 + (z_\beta - z)^2}, \qquad (33.19)$$

$$\alpha \neq \beta = 1,2,3,4,$$

кожне з яких є рівнянням поверхні. Проаналізуємо характеристики такої системи.

Розкладемо випадкові функції $F(R_j,t)$ та $F^*(R_i,t-\tau)$ із формули (33.15) в інтеграли Фур'є:

$$F(R_j,t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(R_j,\omega_j)e^{i\omega_j t}d\omega_j,$$
$$F^*(R_i,t-\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}F^*(R_i,\omega_i)e^{-i\omega_i(t-\tau)}d\omega_i \qquad (33.20)$$

і підставимо їх у (33.15), отримавши рівняння

$$K_J(\tau)=<n_j><n_i>\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(R_j,\omega_j)F^*(R_i,\omega_i)e^{i(\omega_j-\omega_i)t}e^{i\omega_i\tau}d\omega_j d\omega_i dt\right|^2.$$

Це рівняння можна спростити, використовуючи співвідношення

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\omega_j-\omega_i)t}dt=\delta(\omega_j-\omega_i), \qquad (33.21)$$

після чого вираз для кореляційної функції набуває вигляду

$$K_J(\tau)=<n_j><n_i>(2\pi)^2\left|\int_{-\infty}^{\infty}F(R_j,\omega)F^*(R_i,\omega)e^{i\omega\tau}d\omega\right|^2. \qquad (33.22)$$

Фактично цей результат є певним узагальненням теореми Вінера – Хінчина про зв'язок спектра випадкового процесу з кореляційною функцією на випадок інтерференції інтенсивностей. Вираз (33.22) можна зробити більш конкретним, якщо врахувати особливості електронних систем обробки даних.

Зазвичай сигнали з детекторів ядерних частинок мають типову тривалість $\delta t \le 10^{-8}$ с (такою є, напр., тривалість імпульсів, які реєструються фотоелектронним підсилювачем). Ширина спектра такого імпульсу відповідає величині $\delta\omega \approx 2\pi/\delta t \approx 10^9\ \text{с}^{-1}$.

З урахуванням того, що електронна схема обробки радіотехнічних сигналів зазвичай характеризується смугою пропускання $\Delta\omega \le 10^{-7}-10^8\ \text{с}^{-1}$, можна вважати, що спектральна смуга сигналів від детекторів $F(R_j,\omega)$ і $F^*(R_i,\omega)$ є набагато більшою, ніж смуга пропускання електронної схеми обробки сигналів. Унаслідок цього при простому аналізі можна вважати, що спектральна густина сигналів, які пропускаються цією схемою, є постійною величиною, що дорівнює $F(R_j,0)$ і $F^*(R_i,0)$. Із виразу (33.22) отримуємо спрощене співвідношення

$$K_J(\tau) = < n_j >< n_i > (2\pi)^2 \left| \int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} F(R_j,\omega)F^*(R_i,\omega)e^{i\omega\tau}d\omega \right|^2 \approx$$

$$\approx < n_j >< n_i > (2\pi)^2 \left| F(R_j,0)F^*(R_i,0) \right|^2 \left\{ \frac{\sin(\Delta\omega\tau/2)}{\tau/2} \right\}^2 . \qquad (33.23)$$

Цю функцію зображено на рис. 33.2.

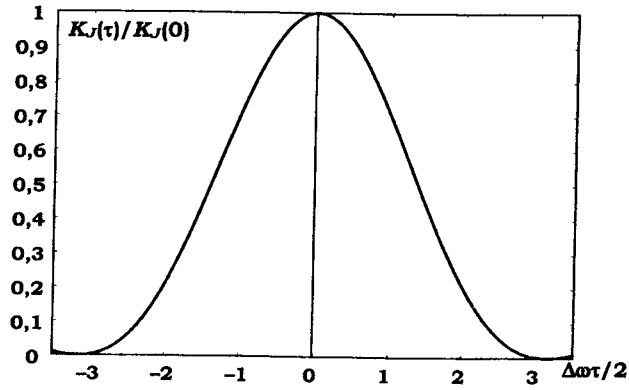


Рис. 33.2. Залежність нормованої кореляційної функції $K_J(\tau)$ від часу запізнення τ і смуги пропускання $\Delta\omega$ системи електронної обробки даних інтерферометра інтенсивностей

Із виразу (33.23) випливає, що можливість застосування методу кореляції інтенсивностей (і пов'язана з ним можливість визначення положення джерела мікрочастинок) обмежена областю можливих затримок імпульсів $\tau_{max} = \pi/\Delta\omega \approx 3\cdot(10^{-7} - 10^{-8})$ с, що відповідає максимально можливій різниці шляхів від детекторів до джерела $\Delta R_{max} = v\tau_{max}$. При реєстрації нейтрино, для яких $v = c$, ця величина дорівнює $\Delta R_{max} = c\tau_{max} = 100 - 10$ м. При зменшенні смуги пропускання електронних пристроїв $\Delta\omega$ можливе відповідне збільшення ΔR_{max}. За допомогою даного методу можлива просторова локація та аналіз різних джерел радіоактивного випромінювання (зокрема аналіз роботи ядерного реактора в аварійних умовах [VII]).

З аналізу співвідношень (33.17) – (33.19) і (33.23) випливає, що максимальна відстань до досліджуваного джерела випромінювання та відносна похибка у вимірюванні цієї відстані рівні:

$$L_{max} \approx a^2\Delta\omega/4c\sqrt{\delta}, \quad \Delta L/L \approx c\sqrt{\delta}/a\Delta\omega, \qquad (33.24)$$

де a – відстань між двома детекторами, $\delta = |K(0) - K(\tau_{min})| / K(0)$ – відносна точність вимірювання кореляційної функції біля її максимального значення $K(0)$, $\tau_{min} = a^2 / 2L_{max}c$.

Прості оцінки показують, що, наприклад, при $a = 10$ м і реальних значеннях $\delta \approx 10^{-4}$ та $\Delta\omega = 10^8$ с$^{-1}$ можлива реалізація таких параметрів системи: $L_{max} \approx 1000$ м, $\Delta L \approx 3$ м, $\Delta L / L \approx 0{,}3\%$.

При збільшенні відстані між детекторами до величини $a \approx 10^4$ км (це відповідає розташуванню швидкодіючих зв'язаних детекторів у різних частинах Землі) і при використанні широкосмугових електронних пристроїв з $\Delta\omega \approx 10^9$ с$^{-1}$ (або відповідних швидкодіючих систем цифрової обробки інформації) розглянута система може досліджувати просторове положення джерел випромінювання, розташованих на відстані до $L_{max} \approx 10^{13}$ км, з точністю до $\Delta L / L \approx 10^{-9}$. Слід зазначити, що ключова умова при проведенні таких досліджень (особливо в масштабі реального часу) пов'язана з необхідністю швидкої реєстрації детекторами великої кількості імпульсів від досліджуваного джерела випромінювання.

Додаткова література: [VII].

§ 34. Ефект Допплера для швидкого джерела випромінювання за екстремальної умови Вавилова – Черенкова з урахуванням частоти та імпульсу фотона

34.1. Кінематичний ефект Допплера

Ефект Допплера, який визначає залежність частоти випромінювання від швидкості та напрямку руху джерела цього випромінювання v, належить до найважливіших явищ фізики. Уперше він був обґрунтований (у найпростішій формі) у 1842 р., а в остаточному вигляді був визначений А. Ейнштейном у 1905 р. Важко переоцінити