Лекція № 7

Тема лекції:

Квантування солітонів

План лекції

1. Квантові флуктуації вакууму
   - Механічний приклад
   - Ефект Казіміра в квантовій механиці
   - Теорія ефекту Казіміра
2. Квантування солітонних розв'язків
   - Кінк–фононна взаємодія
   - Енергія Казіміра для 1D солітонів
3. Солітонна термодинаміка

План лекції

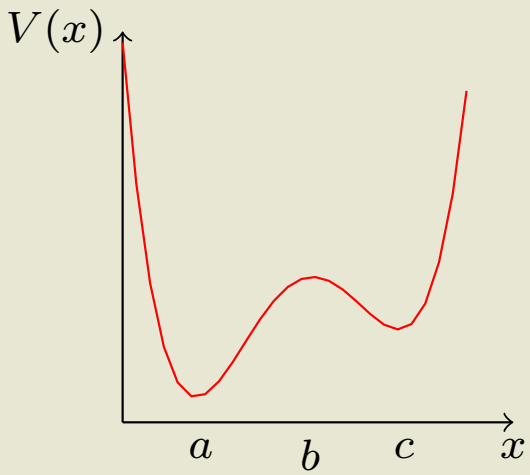
1. Квантові флуктуації вакууму
   - Механічний приклад
   - Ефект Казіміра в квантовій механиці
   - Теорія ефекту Казіміра
2. Квантування солітонних розв'язків
   - Кінк–фононна взаємодія
   - Енергія Казіміра для 1D солітонів
3. Солітонна термодинаміка

План лекції

1. Квантові флуктуації вакууму
   - Механічний приклад
   - Ефект Казіміра в квантовій механиці
   - Теорія ефекту Казіміра
2. Квантування солітонних розв'язків
   - Кінк–фононна взаємодія
   - Енергія Казіміра для 1D солітонів
3. Солітонна термодинаміка

Механічний приклад

Приклад потенціалу для 1D частинки

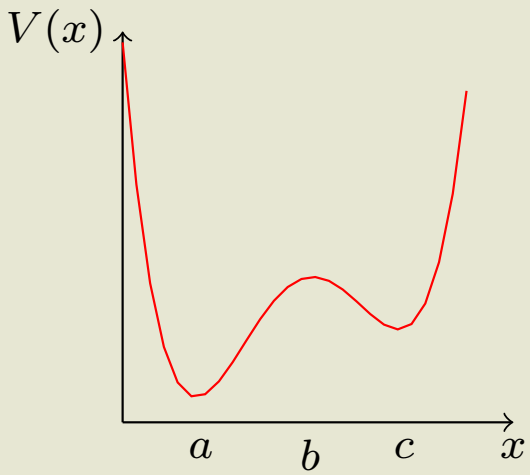


Класична частинка

Квантова частинка

Механічний приклад

Приклад потенціалу для 1D частинки



Класична частинка

- Рівняння руху $\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$
- Класичні статичні розв'язки:

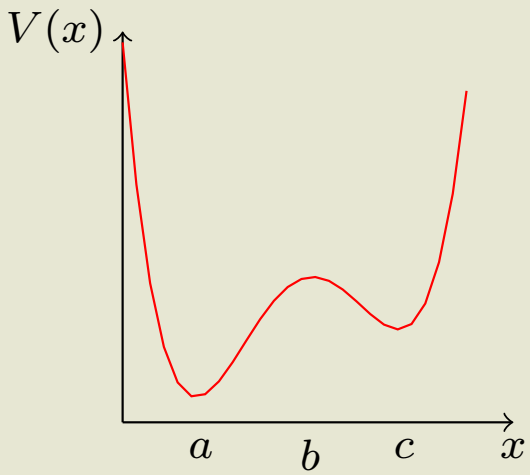
$$x(t) = a, \quad x(t) = b, \quad x(t) = c.$$

- Класичний основний стан: $\mathscr{E}_0^{clas} = V(a)$

Квантова частинка

Механічний приклад

Приклад потенціалу для 1D частинки



Класична частинка

- Рівняння руху $\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$
- Класичні статичні розв'язки:

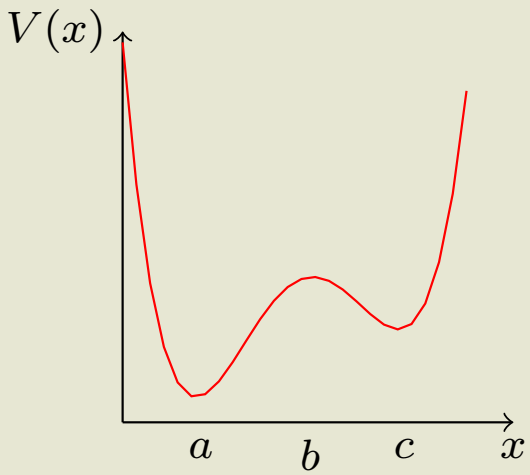
$$x(t) = a, \quad x(t) = b, \quad x(t) = c.$$

- Класичний основний стан: $\mathscr{E}_0^{clas} = V(a)$

Квантова частинка

Механічний приклад

Приклад потенціалу для 1D частинки



Класична частинка

- Рівняння руху $\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$
- Класичні статичні розв'язки:

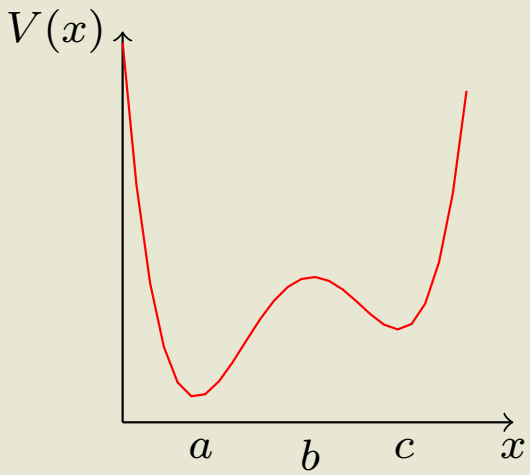
$$x(t) = a, \quad x(t) = b, \quad x(t) = c.$$

- Класичний основний стан: $\mathscr{E}_0^{clas} = V(a)$

Квантова частинка

Механічний приклад

Приклад потенціалу для 1D частинки



Класична частинка

- Рівняння руху $\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$
- Класичні статичні розв'язки:

$$x(t) = a, \quad x(t) = b, \quad x(t) = c.$$

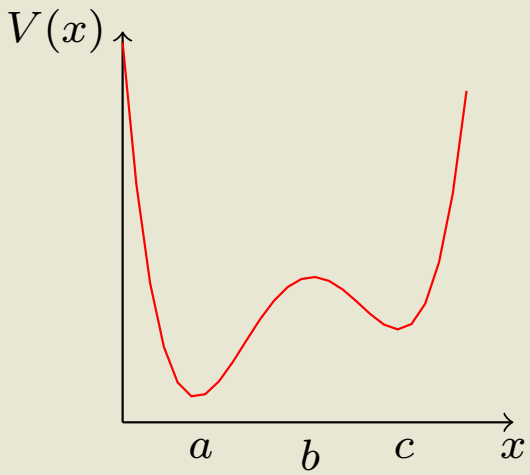
- Класичний основний стан: $\mathscr{E}_0^{clas} = V(a)$

Квантова частинка

- $\mathscr{E}_0^{quant} = \mathscr{E}_0^{clas} + \Delta\mathscr{E} = V(a) + \Delta\mathscr{E}$.
- Розкладаємо потенціал поблизу мінімуму: $V(x) = V(a) + \frac{1}{2}V''(a)(x-a)^2 + \ldots$
- Квантовий основний стан: $\mathscr{E}_0 = V(a) + \frac{\omega}{2}$

Механічний приклад

Приклад потенціалу для 1D частинки



Класична частинка

- Рівняння руху $\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$
- Класичні статичні розв'язки:

$$x(t) = a, \quad x(t) = b, \quad x(t) = c.$$

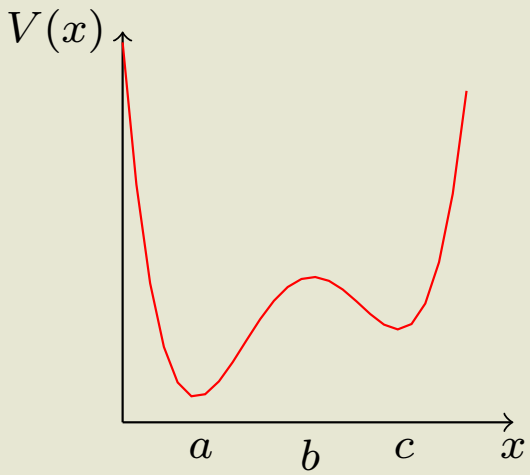
- Класичний основний стан: $\mathscr{E}_0^{clas} = V(a)$

Квантова частинка

- $\mathscr{E}_0^{quant} = \mathscr{E}_0^{clas} + \Delta\mathscr{E} = V(a) + \Delta\mathscr{E}.$
- Розклад за слабким зв'язком: $V(x) = V(a) + \frac{\omega^2(x-a)^2}{2} + \frac{k_3(x-a)^3}{3!} + \dots$
- Квантовий основний стан: $\mathscr{E}_0^{quant} = V(a) + \frac{\hbar\omega}{2}.$

Механічний приклад

Приклад потенціалу для 1D частинки



Класична частинка

- Рівняння руху $\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$
- Класичні статичні розв'язки:

$$x(t) = a, \quad x(t) = b, \quad x(t) = c.$$

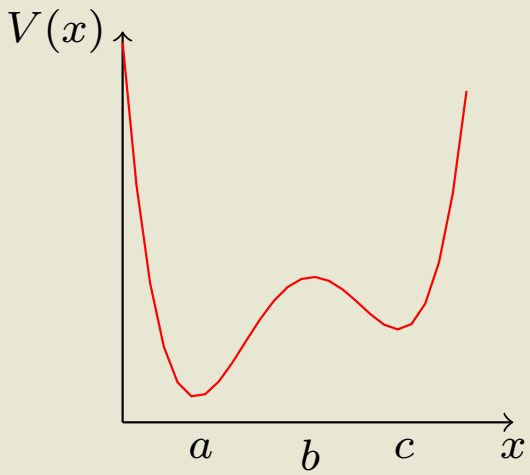
- Класичний основний стан: $\mathscr{E}_0^{clas} = V(a)$

Квантова частинка

- $\mathscr{E}_0^{quant} = \mathscr{E}_0^{clas} + \Delta\mathscr{E} = V(a) + \Delta\mathscr{E}.$
- Розклад за слабким зв'язком: $V(x) = V(a) + \frac{\omega^2(x-a)^2}{2} + \frac{k_3(x-a)^3}{3!} + \dots$
- Квантовий основний стан: $\mathscr{E}_0^{quant} = V(a) + \frac{\hbar\omega}{2}.$

Механічний приклад

Приклад потенціалу для 1D частинки



Класична частинка

- Рівняння руху $\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$
- Класичні статичні розв'язки:

$$x(t) = a, \quad x(t) = b, \quad x(t) = c.$$

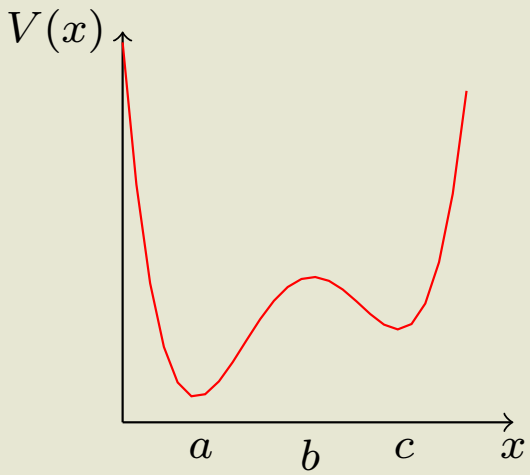
- Класичний основний стан: $\mathscr{E}_0^{clas} = V(a)$

Квантова частинка

- $\mathscr{E}_0^{quant} = \mathscr{E}_0^{clas} + \Delta\mathscr{E} = V(a) + \Delta\mathscr{E}.$
- Розклад за слабким зв'язком: $V(x) = V(a) + \frac{\omega^2(x-a)^2}{2} + \frac{k_3(x-a)^3}{3!} + \ldots$
- Квантовий основний стан: $\mathscr{E}_0^{quant} = V(a) + \frac{\hbar\omega}{2}.$

Механічний приклад

Приклад потенціалу для 1D частинки



Класична частинка

- Рівняння руху $\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$
- Класичні статичні розв'язки:

$$x(t) = a, \quad x(t) = b, \quad x(t) = c.$$

- Класичний основний стан: $\mathscr{E}_0^{clas} = V(a)$

Квантова частинка

- $\mathscr{E}_0^{quant} = \mathscr{E}_0^{clas} + \Delta\mathscr{E} = V(a) + \Delta\mathscr{E}.$
- Розклад за слабким зв'язком: $V(x) = V(a) + \frac{\omega^2(x-a)^2}{2} + \frac{k_3(x-a)^3}{3!} + \dots$
- Квантовий основний стан: $\mathscr{E}_0^{quant} = V(a) + \frac{\hbar\omega}{2}.$

Ефект Казіміра

Ефект Казіміра

- Поява сили притягання між двома металевими пластинами у вакуумі, що зумовлена квантуванням нульових коливань електромагнітного поля.
- Сукупність фізичних явищ, зумовлених поляризацією вакууму завдяки змінам спектру квантових флуктуацій вакууму в обмеженому просторі.

Hendrick Casimir



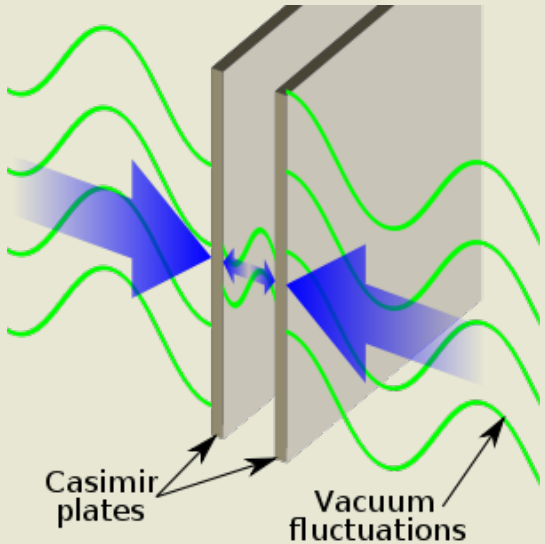
$$\frac{F}{S} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4}$$

Ефект Казіміра

Ефект Казіміра

- Поява сили притягання між двома металевими пластинами у вакуумі, що зумовлена квантуванням нульових коливань електромагнітного поля.
- Сукупність фізичних явищ, зумовлених поляризацією вакууму завдяки змінам спектру квантових флуктуацій вакууму в обмеженому просторі.

Пластинки Казіміра



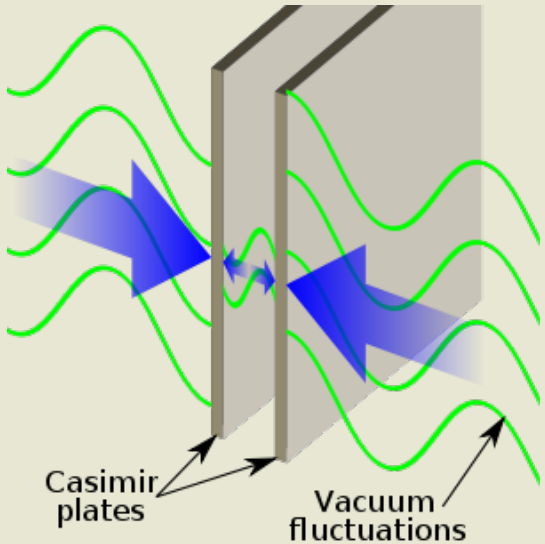
$$\frac{F}{S} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4}$$

Ефект Казіміра

Ефект Казіміра

- Поява сили притягання між двома металевими пластинами у вакуумі, що зумовлена квантуванням нульових коливань електромагнітного поля.
- Сукупність фізичних явищ, зумовлених поляризацією вакууму завдяки змінам спектру квантових флуктуацій вакууму в обмеженому просторі.

Пластинки Казіміра



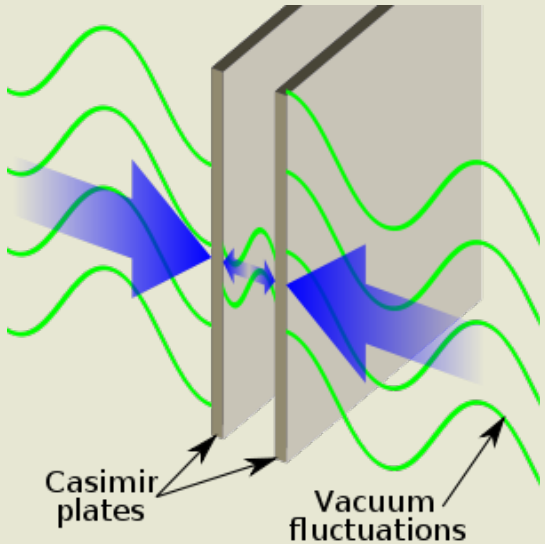
$$\frac{F}{S} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4}$$

Ефект Казіміра

Ефект Казіміра

- Поява сили притягання між двома металевими пластинами у вакуумі, що зумовлена квантуванням нульових коливань електромагнітного поля.
- Сукупність фізичних явищ, зумовлених поляризацією вакууму завдяки змінам спектру квантових флуктуацій вакууму в обмеженому просторі.

Пластинки Казіміра



$$\frac{F}{S} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4}$$

Ефект Казіміра: розрахунок

Ефект Казіміра

- Передбачено ефект Казіміра (1948)
- Загальна теорія для сил Казіміра та ван-дер-Ваальса: Є. Ліфшиць (1956)
- Перше експериментальне підтвердження: M. Sparnaay (Eindhoven, 1958)
- Сучасний експеримент: S. Lamoreaux (LANL, 1997)

Експеримент

[S. Lamoreaux (LANL, 1997)]

Ефект Казіміра: розрахунок

Ефект Казіміра

- Передбачено ефект Казіміра (1948)
- Загальна теорія для сил Казіміра та ван-дер-Ваальса: Є. Ліфшиць (1956)
- Перше експериментальне підтвердження: M. Sparnaay (Eindhoven, 1958)
- Сучасний експеримент: S. Lamoreaux (LANL, 1997)

Експеримент

[S. Lamoreaux (LANL, 1997)]

Ефект Казіміра: розрахунок

Ефект Казіміра

- Передбачено ефект Казіміра (1948)
- Загальна теорія для сил Казіміра та ван-дер-Ваальса: Є. Ліфшиць (1956)
- Перше експериментальне підтвердження: M. Sparnaay (Eindhoven, 1958)
- Сучасний експеримент: S. Lamoreaux (LANL, 1997)

Експеримент

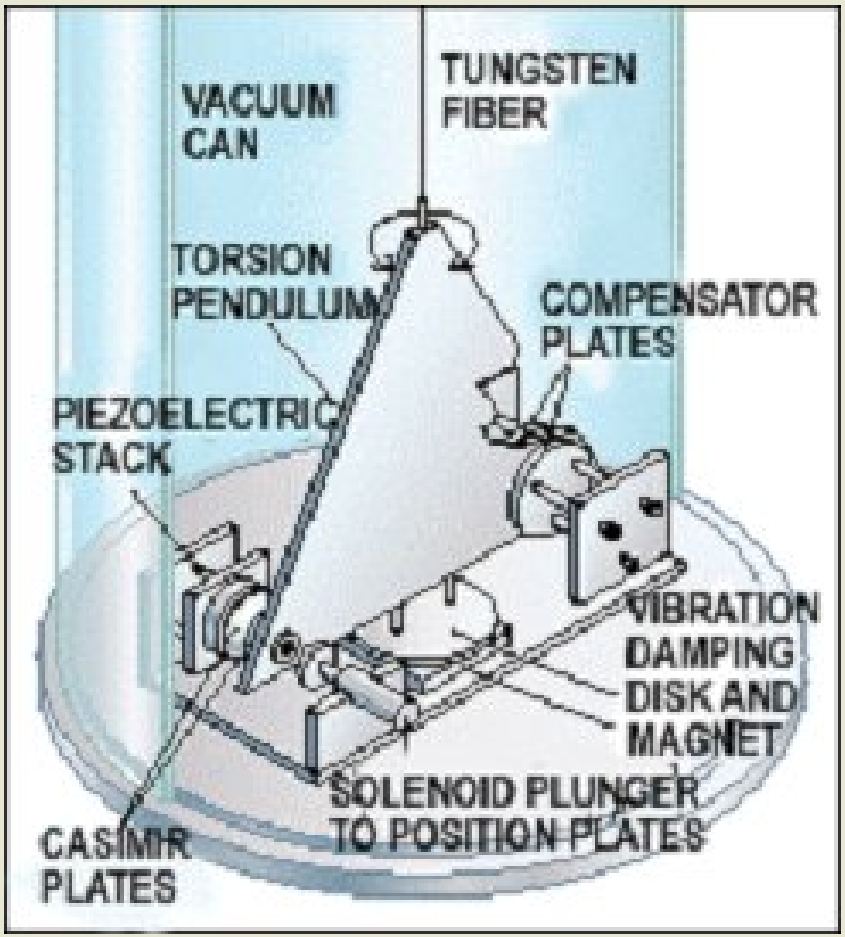
[S. Lamoreaux (LANL, 1997)]

Ефект Казіміра: розрахунок

Ефект Казіміра

- Передбачено ефект Казіміра (1948)
- Загальна теорія для сил Казіміра та ван-дер-Ваальса: Є. Ліфшиць (1956)
- Перше експериментальне підтвердження: M. Sparnaay (Eindhoven, 1958)
- Сучасний експеримент: S. Lamoreaux (LANL, 1997)

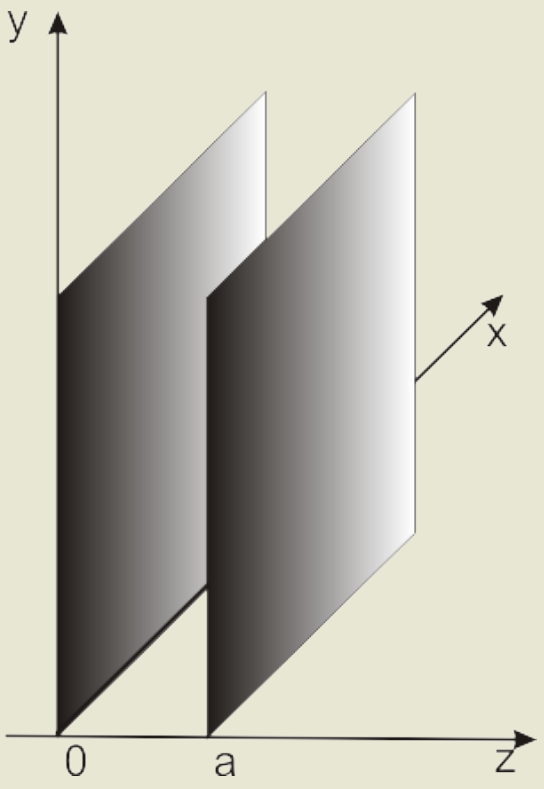
Експеримент



[S. Lamoreaux (LANL, 1997)]

Ефект Казіміра: розрахунок

Позначення



Теорія Казіміра

- Енергія нульових коливань без пластинок

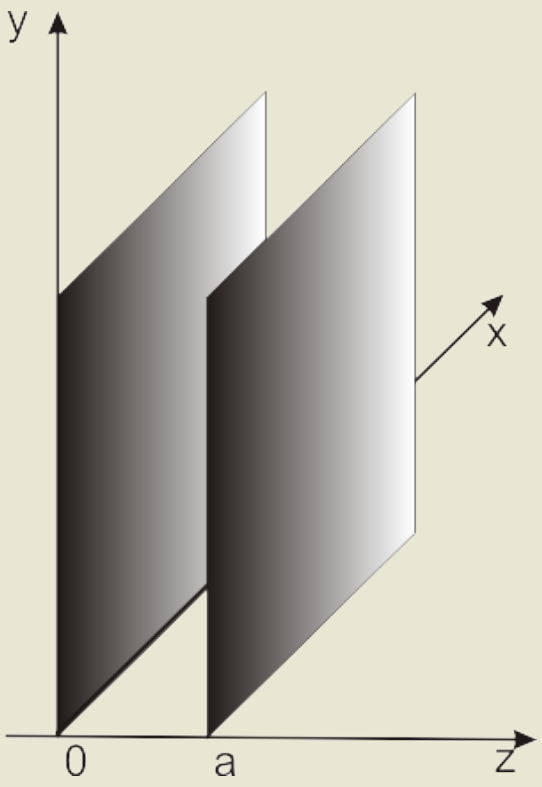
$$\mathscr{E}_{vac} = \sum_{\vec{k}^{vac}} \frac{\hbar\omega(\vec{k}^{vac})}{2}$$

- Пластинки $\Rightarrow$ стояча хвиля:
$\psi_n(x,y,z,t) = \sin(k_n z) e^{ik_x x + ik_y y - i\omega_n t}$
- Квантування станів: $k_n = n\pi/a$
- Закон дисперсії: $\omega_n = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}}$
- Енергія вакууму: $\mathscr{E} = \sum_n \frac{\hbar\omega_n}{2}$
- Енергія Казіміра $\mathscr{E}^{Casimir} = \mathscr{E} - \mathscr{E}_{vac}$
- Сила Казіміра $F = -\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}^{Casimir}}{\mathrm{d}a}$

$$\frac{F}{S} = -\frac{\pi^2\hbar c}{240a^4}$$

Ефект Казіміра: розрахунок

Позначення



Теорія Казіміра

- Енергія нульових коливань без пластинок

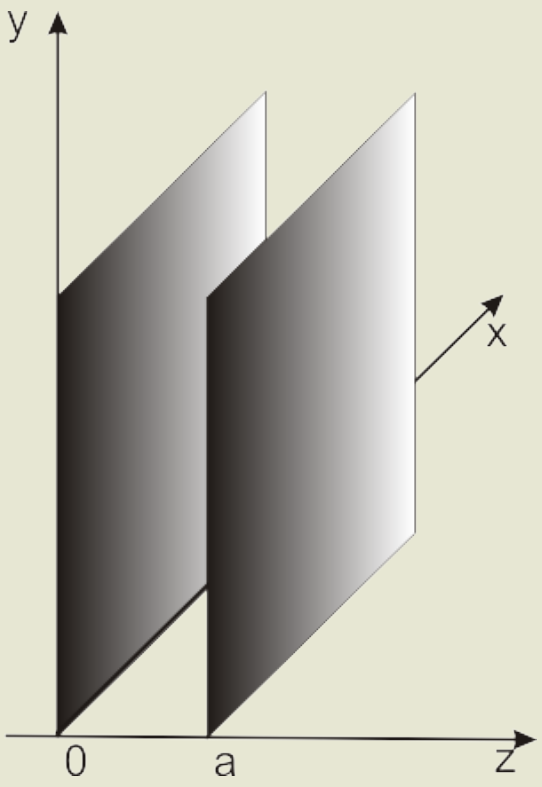
$$\mathscr{E}_{vac} = \sum_{\vec{k}^{vac}} \frac{\hbar\omega(\vec{k}^{vac})}{2}$$

- Пластинки $\Rightarrow$ стояча хвиля:
  $\psi_n(x,y,z,t) = \sin(k_n z) e^{ik_x x + ik_y y - i\omega_n t}$
- Квантування станів: $k_n = n\pi/a$
- Закон дисперсії: $\omega_n = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}}$
- Енергія вакууму: $\mathscr{E} = \sum_n \frac{\hbar\omega_n}{2}$
- Енергія Казіміра $\mathscr{E}^{Casimir} = \mathscr{E} - \mathscr{E}_{vac}$
- Сила Казіміра $F = -\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}^{Casimir}}{\mathrm{d}a}$

$$\frac{F}{S} = -\frac{\pi^2\hbar c}{240a^4}$$

Ефект Казіміра: розрахунок

Позначення



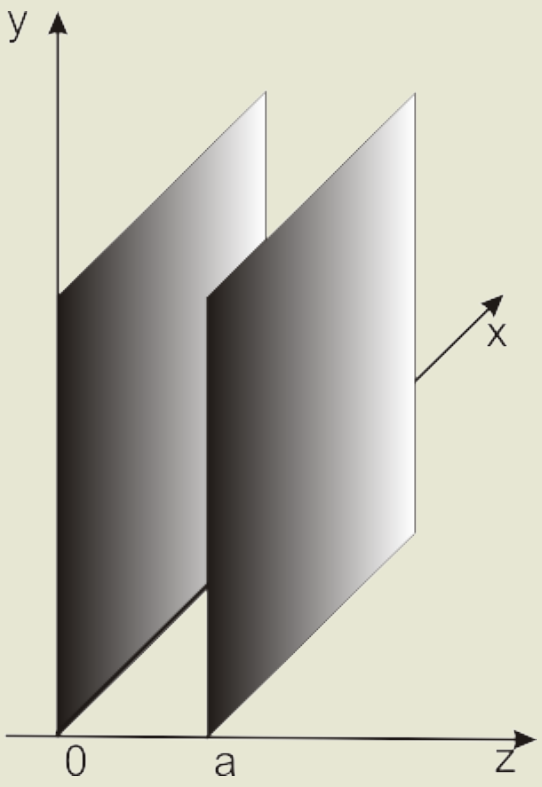
Теорія Казіміра

- Енергія нульових коливань без пластинок
$$\mathscr{E}_{vac} = \sum_{\vec{k}^{vac}} \frac{\hbar\omega(\vec{k}^{vac})}{2}$$
- Пластинки $\Rightarrow$ стояча хвиля:
$\psi_n(x,y,z,t) = \sin(k_n z)e^{ik_x x + ik_y y - i\omega_n t}$
- Квантування станів: $k_n = n\pi/a$
- Закон дисперсії: $\omega_n = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}}$
- Енергія вакууму: $\mathscr{E} = \sum_n \frac{\hbar\omega_n}{2}$
- Енергія Казіміра $\mathscr{E}^{Casimir} = \mathscr{E} - \mathscr{E}_{vac}$
- Сила Казіміра $F = -\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}^{Casimir}}{\mathrm{d}a}$

$$\frac{F}{S} = -\frac{\pi^2\hbar c}{240a^4}$$

Ефект Казіміра: розрахунок

Позначення



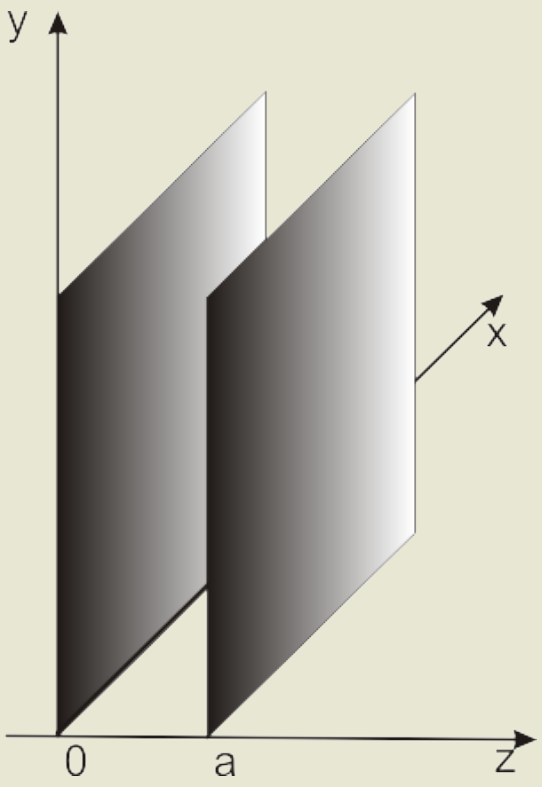
Теорія Казіміра

- Енергія нульових коливань без пластинок
$$\mathscr{E}_{vac} = \sum_{\vec{k}^{vac}} \frac{\hbar\omega(\vec{k}^{vac})}{2}$$
- Пластинки $\Rightarrow$ стояча хвиля:
$\psi_n(x,y,z,t) = \sin(k_n z)e^{ik_x x + ik_y y - i\omega_n t}$
- Квантування станів: $k_n = n\pi/a$
- Закон дисперсії: $\omega_n = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}}$
- Енергія вакууму: $\mathscr{E} = \sum_n \frac{\hbar\omega_n}{2}$
- Енергія Казіміра $\mathscr{E}^{Casimir} = \mathscr{E} - \mathscr{E}_{vac}$
- Сила Казіміра $F = -\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}^{Casimir}}{\mathrm{d}a}$

$$\frac{F}{S} = -\frac{\pi^2\hbar c}{240a^4}$$

Ефект Казіміра: розрахунок

Позначення



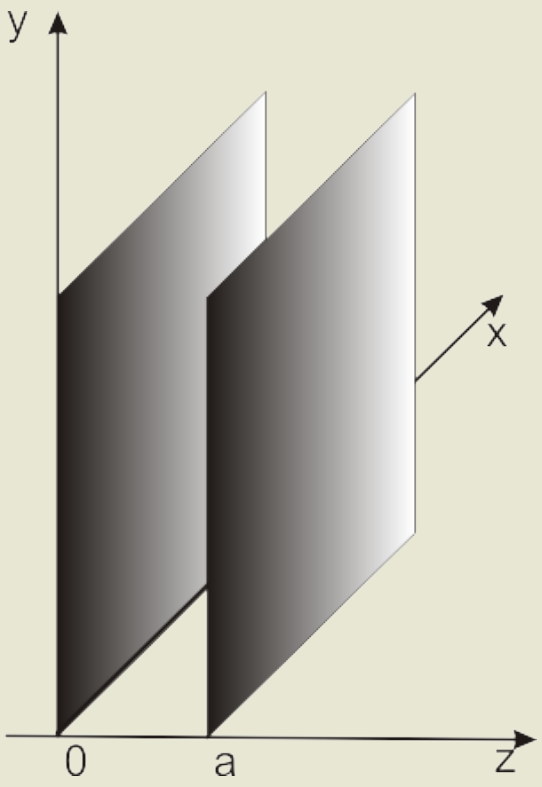
Теорія Казіміра

- Енергія нульових коливань без пластинок
$$\mathscr{E}_{vac} = \sum_{\vec{k}^{vac}} \frac{\hbar\omega(\vec{k}^{vac})}{2}$$
- Пластинки $\Rightarrow$ стояча хвиля:
$\psi_n(x,y,z,t) = \sin(k_n z)e^{ik_x x + ik_y y - i\omega_n t}$
- Квантування станів: $k_n = n\pi/a$
- Закон дисперсії: $\omega_n = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}}$
- Енергія вакууму: $\mathscr{E} = \sum_n \frac{\hbar\omega_n}{2}$
- Енергія Казіміра $\mathscr{E}^{Casimir} = \mathscr{E} - \mathscr{E}_{vac}$
- Сила Казіміра $F = -\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}^{Casimir}}{\mathrm{d}a}$

$$\frac{F}{S} = -\frac{\pi^2\hbar c}{240a^4}$$

Ефект Казіміра: розрахунок

Позначення



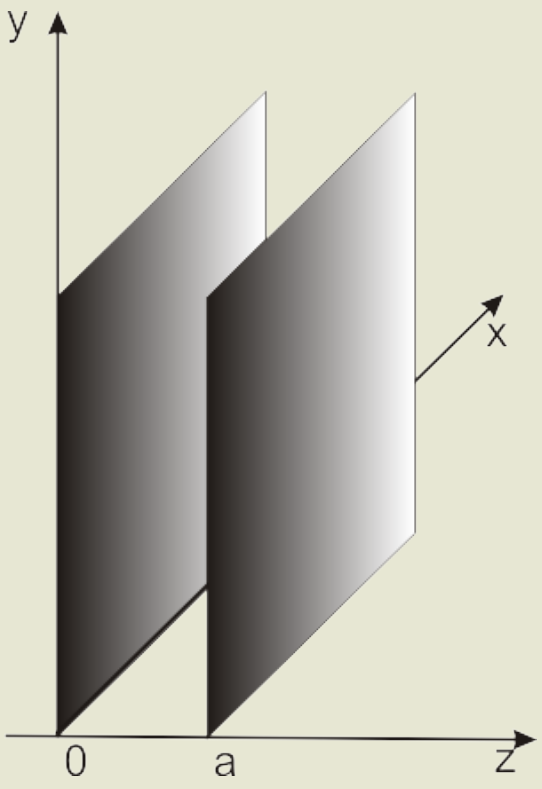
Теорія Казіміра

- Енергія нульових коливань без пластинок
$$\mathscr{E}_{vac} = \sum_{\vec{k}^{vac}} \frac{\hbar\omega(\vec{k}^{vac})}{2}$$
- Пластинки $\Rightarrow$ стояча хвиля:
$\psi_n(x,y,z,t) = \sin(k_n z) e^{ik_x x + ik_y y - i\omega_n t}$
- Квантування станів: $k_n = n\pi/a$
- Закон дисперсії: $\omega_n = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}}$
- Енергія вакууму: $\mathscr{E} = \sum_n \frac{\hbar\omega_n}{2}$
- Енергія Казіміра $\mathscr{E}^{Casimir} = \mathscr{E} - \mathscr{E}_{vac}$
- Сила Казіміра $F = -\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}^{Casimir}}{\mathrm{d}a}$

$$\frac{F}{S} = -\frac{\pi^2\hbar c}{240a^4}$$

Ефект Казіміра: розрахунок

Позначення



Теорія Казіміра

- Енергія нульових коливань без пластинок
$$\mathscr{E}_{vac} = \sum_{\vec{k}^{vac}} \frac{\hbar\omega(\vec{k}^{vac})}{2}$$
- Пластинки $\Rightarrow$ стояча хвиля:
$\psi_n(x,y,z,t) = \sin(k_n z)e^{ik_x x + ik_y y - i\omega_n t}$
- Квантування станів: $k_n = n\pi/a$
- Закон дисперсії: $\omega_n = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}}$
- Енергія вакууму: $\mathscr{E} = \sum_n \frac{\hbar\omega_n}{2}$
- Енергія Казіміра $\mathscr{E}^{Casimir} = \mathscr{E} - \mathscr{E}_{vac}$
- Сила Казіміра $F = -\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}^{Casimir}}{\mathrm{d}a}$
$$\frac{F}{S} = -\frac{\pi^2\hbar c}{240a^4}$$

Квантування солітонних розв'язків

Кінк–фононна взаємодія

Кінк в рівняння СҐ

- Рівняння СҐ: $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Кінк u^K : $\operatorname{tg} \dfrac{u^K}{4} = \exp\left(\pm \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}\right)$
- Фонон Ψ : $\Psi(x, t) = \exp(ikx - i\omega t)$
- Дисперсія фононів: $\omega(k) = \sqrt{1 + k^2}$

Взаємодія кінків і фононів: ідеї

- Кінк не змінює закону дисперсії фононів
- Кінк зрушує закону дисперсії фононів
- Кінк зрушує закону дисперсії фононів

Квантова поправка до енергії кінка — енергія Казіміра фононів завдяки присутності кінка

Квантування солітонних розв'язків

Кінк–фононна взаємодія

Кінк в рівняння СҐ

- Рівняння СҐ: $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Кінк u^K : $\operatorname{tg} \dfrac{u^K}{4} = \exp\left(\pm \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}\right)$
- Фонон Ψ : $\Psi(x,t) = \exp(ikx - i\omega t)$
- Дисперсія фононів: $\omega(k) = \sqrt{1 + k^2}$

Взаємодія кінків і фононів: ідеї

- Кінк не змінює закону дисперсії фононів
- Кінк зрушує закон дисперсії фононів
- Квантова поправка до енергії кінка — енергія Казіміра фононів завдяки присутності кінка

Квантування солітонних розв'язків

Кінк–фононна взаємодія

Кінк в рівняння СҐ

- Рівняння СҐ: $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Кінк u^K : $\operatorname{tg} \dfrac{u^K}{4} = \exp\left(\pm \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}\right)$
- Фонон Ψ : $\Psi(x,t) = \exp(ikx - i\omega t)$
- Дисперсія фононів: $\omega(k) = \sqrt{1 + k^2}$

Взаємодія кінків і фононів: ідеї

- Кінк не змінює закон дисперсії фононів
- Кінк зумовлює ефективний безпрофільний потенціал для фононів
- Розсіяння фононів — ортогональне відображення

Квантова поправка до енергії кінка — енергія Казіміра фононів завдяки присутності кінка

Квантування солітонних розв'язків

Кінк–фононна взаємодія

Кінк в рівняння СҐ

- Рівняння СҐ: $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Кінк u^K : $\operatorname{tg} \dfrac{u^K}{4} = \exp\left(\pm \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}\right)$
- Фонон Ψ : $\Psi(x, t) = \exp(ikx - i\omega t)$
- Дисперсія фононів: $\omega(k) = \sqrt{1 + k^2}$

Взаємодія кінків і фононів: ідеї

- Кінк не змінює закон дисперсії фононів
- Кінк зручно розглядати як нерухомий бесконечний потенціал для фононів
- Розглядаємо взаємодію — зручно розглядати як прикладну задачу

Квантова поправка до енергії кінка — енергія Казіміра фононів завдяки присутності кінка

Квантування солітонних розв'язків

Кінк–фононна взаємодія

Кінк в рівняння СҐ

- Рівняння СҐ: $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Кінк u^K : $\operatorname{tg} \dfrac{u^K}{4} = \exp\left(\pm \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}\right)$
- Фонон Ψ : $\Psi(x,t) = \exp(ikx - i\omega t)$
- Дисперсія фононів: $\omega(k) = \sqrt{1 + k^2}$

Взаємодія кінків і фононів: ідеї

- Кінк не змінює закон дисперсії фононів
- Кінк зумовлює ефективний безвідбивальний потенціал для фононів
- Результат взаємодії — асимптотичний зсув фази фонону

Квантова поправка до енергії кінка — енергія Казіміра фононів завдяки присутності кінка

Квантування солітонних розв'язків

Кінк–фононна взаємодія

Кінк в рівняння СҐ

- Рівняння СҐ: $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Кінк u^K : $\operatorname{tg} \dfrac{u^K}{4} = \exp\left(\pm \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}\right)$
- Фонон Ψ : $\Psi(x,t) = \exp(ikx - i\omega t)$
- Дисперсія фононів: $\omega(k) = \sqrt{1 + k^2}$

Взаємодія кінків і фононів: ідеї

- Кінк не змінює закон дисперсії фононів
- Кінк зумовлює ефективний безвідбивальний потенціал для фононів
- Результат взаємодії — асимптотичний зсув фази фонону

Квантова поправка до енергії кінка — енергія Казіміра фононів завдяки присутності кінка

Квантування солітонних розв'язків

Кінк–фононна взаємодія

Кінк в рівняння СҐ

- Рівняння СҐ: $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Кінк u^K : $\operatorname{tg} \dfrac{u^K}{4} = \exp\left(\pm \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}\right)$
- Фонон Ψ : $\Psi(x,t) = \exp(ikx - i\omega t)$
- Дисперсія фононів: $\omega(k) = \sqrt{1 + k^2}$

Взаємодія кінків і фононів: ідеї

- Кінк не змінює закон дисперсії фононів
- Кінк зумовлює ефективний безвідбивальний потенціал для фононів
- Результат взаємодії — асимптотичний зсув фази фонону

Квантова поправка до енергії кінка — енергія Казіміра фононів завдяки присутності кінка

Квантування солітонних розв'язків

Кінк–фононна взаємодія

Кінк в рівняння СҐ

- Рівняння СҐ: $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Кінк u^K : $\operatorname{tg} \dfrac{u^K}{4} = \exp\left(\pm \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}\right)$
- Фонон Ψ : $\Psi(x,t) = \exp(ikx - i\omega t)$
- Дисперсія фононів: $\omega(k) = \sqrt{1 + k^2}$

Взаємодія кінків і фононів: ідеї

- Кінк не змінює закон дисперсії фононів
- Кінк зумовлює ефективний безвідбивальний потенціал для фононів
- Результат взаємодії — асимптотичний зсув фази фонону

Квантова поправка до енергії кінка — енергія Казіміра фононів завдяки присутності кінка

Квантування солітонних розв'язків

Кінк–фононна взаємодія

Кінк в рівняння СҐ

- Рівняння СҐ: $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Кінк u^K : $\operatorname{tg} \dfrac{u^K}{4} = \exp\left(\pm \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}\right)$
- Фонон Ψ : $\Psi(x,t) = \exp(ikx - i\omega t)$
- Дисперсія фононів: $\omega(k) = \sqrt{1 + k^2}$

Взаємодія кінків і фононів: ідеї

- Кінк не змінює закон дисперсії фононів
- Кінк зумовлює ефективний безвідбивальний потенціал для фононів
- Результат взаємодії — асимптотичний зсув фази фонону

Квантова поправка до енергії кінка — енергія Казіміра фононів завдяки присутності кінка

Кінк–фононна взаємодія: розрахунок

Кінк + фонон в рівняння СҐ

- Рівняння СҐ: $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Розв'язок у вигляді: $u(x,t) = u^K + \Psi(x,t)$
- Фонони $\Psi = \sum_k \psi_k(x) e^{i\omega_k t}$
- Лінеаризація за Ψ : $H\psi_k = \omega^2 \psi, \qquad H = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2 x^2} + V(x)$
- Ефективний потенціал $V(x) = 1 - \frac{2}{\mathrm{ch}^2 x}$ — безвідбивальний

Кінк–фононна взаємодія: розрахунок

Кінк + фонон в рівняння СҐ

- Рівняння СҐ: $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Розв'язок у вигляді: $u(x,t) = u^K + \Psi(x,t)$
- Фонони $\Psi = \sum_k \psi_k(x) e^{i\omega_k t}$
- Лінеаризація за Ψ : $H\psi_k = \omega^2 \psi, \qquad H = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2 x^2} + V(x)$
- Ефективний потенціал $V(x) = 1 - \dfrac{2}{\mathrm{ch}^2\, x}$ — безвідбивальний

Кінк–фононна взаємодія: розрахунок

Кінк + фонон в рівняння СҐ

- Рівняння СҐ: $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Розв'язок у вигляді: $u(x,t) = u^K + \Psi(x,t)$
- Фонони $\Psi = \sum_k \psi_k(x) e^{i\omega_k t}$
- Лінеаризація за Ψ : $H\psi_k = \omega^2 \psi, \qquad H = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2 x^2} + V(x)$
- Ефективний потенціал $V(x) = 1 - \frac{2}{\mathrm{ch}^2\, x}$ — безвідбивальний

Кінк–фононна взаємодія: розрахунок

Кінк + фонон в рівняння СҐ

- Рівняння СҐ: $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Розв'язок у вигляді: $u(x,t) = u^K + \Psi(x,t)$
- Фонони $\Psi = \sum_k \psi_k(x) e^{i\omega_k t}$
- Лінеаризація за Ψ : $H\psi_k = \omega^2 \psi$, $\qquad H = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2 x^2} + V(x)$
- Ефективний потенціал $V(x) = 1 - \dfrac{2}{\mathrm{ch}^2\, x}$ — безвідбивальний

Кінк–фононна взаємодія: розрахунок

Кінк + фонон в рівняння СҐ

- Рівняння СҐ: $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$
- Розв'язок у вигляді: $u(x,t) = u^K + \Psi(x,t)$
- Фонони $\Psi = \sum_k \psi_k(x) e^{i\omega_k t}$
- Лінеаризація за Ψ : $H\psi_k = \omega^2 \psi, \qquad H = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2 x^2} + V(x)$
- Ефективний потенціал $V(x) = 1 - \dfrac{2}{\mathrm{ch}^2\, x}$ — безвідбивальний