тали этого «анализа временного мультимасштабирования» приведены в Приложении G, где показаны методологические основы получения равенства (7.21).

Поскольку анализ ограничивался членами порядка $O(\varepsilon^2)$, в нем использовались переменные растянутого времени того же порядка. Другим словами, для проведения анализа возмущений использовались только переменные T_0, T_1 и T_2. Если при анализе используются разложения в ряд порядка $O(\varepsilon^n)$, то необходимо использовать переменные масштабирования T_i, $i = 0, 1, \ldots, n$.

7.3. Энергетический анализ динамики солитона

В главе 3 были рассмотрены классические уравнения солитона и их общее свойство — на решениях этих систем энергия сохраняется. При исследовании систем реального мира это свойство часто нарушается вследствие эффектов диссипации энергии и наличия внешних воздействий. Таким образом, для анализа подобных систем в классические уравнения для солитона необходимо ввести дополнительные члены, описывающие эти возмущения. В этих случаях для получения достоверных с качественной и количественной точки зрения решений следует использовать комбинацию теории возмущений и численного анализа.

7.3.1. Солитоны Кортевега-де Вриза

В этом разделе будет исследовано возмущенное КдВ-уравнение с использованием представленного в предыдущем разделе энергетического анализа. Это уравнение с введенным в правую часть членом возмущения имеет следующий вид: [1]

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = \varepsilon R, \tag{7.23}$$

где ε — малый параметр и εR представляет собой член, который явно зависит от x, t, u и частных производных по u.

При $\varepsilon = 0$ односолитонное решение КдВ-уравнения имеет вид

$$u(x,t) = 3v\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt)\right). \tag{7.24}$$

Введем функцию w равенством $w_x \equiv u$. Тогда КдВ-уравнение может быть получено из плотности лагранжиана (см. Приложение A)

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}w_x w_t + \tfrac{1}{6}w_x^3 - \tfrac{1}{2}w_{xx}^2. \tag{7.25}$$

[1] Здесь используется другая нормализация КдВ-уравнения, поскольку множитель «−6» при члене uu_x не играет существенной роли при анализе возмущений.

Соответствующая плотность гамильтониана определяется равенством

$$\mathcal{H} = w_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial w_t} - \mathcal{L} = -\tfrac{1}{6}w_x^3 + \tfrac{1}{2}w_{xx}^2 \tag{7.26}$$

и представляет собой плотность энергии системы.

Основная идея энергетического анализа динамик солитона заключается в том, чтобы рассмотреть вариации полной энергии системы при возмущениях, описывающих потери и приток энергии, и в предположении, что член εR настолько мал, что можно пренебречь изменениями порядка ε в решении одиночного солитона (7.24). В этом случае воздействие возмущений будет выражаться в медленном изменении с течением времени скорости v. Если возмущения известны, при выполнении численных вычислений следует проверять выполнение указанного предположения. (Заметим, что этот анализ не позволяет исследовать возникновение и разрушение солитона. Мы также не будем учитывать волны малой амплитуды, которые могут возникать под воздействием возмущений.)

Для КдВ-уравнения полная энергия определяется равенством

$$H = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{H}\,dx, \tag{7.27}$$

и ее производная по времени

$$\frac{dH}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty}(w_x w_{xt} + w_{xxxx})w_t\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}(-w_{xt} + \varepsilon R)w_t\,dx. \tag{7.28}$$

Это выражение получено при интегрировании по частям в предположении, что производные w стремятся к нулю при $x \to \pm\infty$. Тогда

$$\frac{dH}{dt} = \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}Rw_t\,dx. \tag{7.29}$$

Подставим (7.24) в (7.27) и вычислим интегралы, пренебрегая медленным изменением с течением времени скорости v. Тогда

$$H = -\frac{36}{5}v^{5/2}. \tag{7.30}$$

Дифференцируя (7.30) по времени с учетом $w_t = -vw_x = -vu$ и приравнивая к (7.29), получаем результат

$$\frac{dv}{dt} = +\frac{\varepsilon}{18\sqrt{v}}\int_{-\infty}^{\infty}Ru\,dx. \tag{7.31}$$

В качестве подтверждения достоверности этого выражения рассмотрим возмущение вида

$$\varepsilon R = -\varepsilon u, \tag{7.32}$$

соответствующее постепенному увеличению глубины в КдВ-модели движения волн на мелководье.

Из равенства (7.31) видно, что эволюция скорости солитона определяется ОДУ первого порядка

$$\frac{dv}{dt} \doteq -\frac{4}{3}\varepsilon v, \tag{7.33}$$

где знак $\doteq$ указывает на то, что в оценке были опущены изменения формы солитона порядка ε.

Из (7.24) видно, что v пропорциональна амплитуде солитона. Тогда из (7.33) следует, что амплитуда эволюционирует с течением времени в соответствии с законом

$$A(t) \doteq A(0)\, e^{-4\varepsilon t/3}, \tag{7.34}$$

что согласуется с результатом, полученным в 1970-м году Оттом и Суданом [23], и подтверждается численными исследованиями Киккербоккера и Нюелла, выполненными десятилетием ранее [15].

Несмотря на то, что этот пример подтверждает возможность использования в рассматриваемой задаче энергетического анализа, возникают некоторые вопросы. При анализе мы использовали единственный факт — то, что энергия остается постоянной на решениях невозмущенной системы. Однако, КдВ-уравнение, будучи интегрируемым, имеет бесконечное число подобных постоянных движения. Получим ли мы аналогичный результат, если будем использовать любую из этих сохраняющихся величин?

В качестве примера рассмотрим одну из этих величин

$$Q_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2\, dx,$$

которая очевидно остается постоянной для всех u, являющихся решениями КдВ-уравнения. Можно показать, что с использованием предложенного выше подхода можно получить уравнение (7.33) и, следовательно, показать, что амплитуда солитона уменьшается в соответствии с законом (7.34).

Однако, если рассмотреть

$$Q_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u\, dx,$$

то мы получим

$$\frac{dv}{dt} \doteq -2\varepsilon v$$

и, следовательно,

$$A(t) \doteq A(0)\, e^{-2\varepsilon t}, \tag{7.35}$$

что противоречит равенству (7.34) и численным результатам [15]. В чем дело?

Парадокс «теряющейся массы» рассматривался несколькими исследователями и его разрешение связано с возникновением «шельфа» (уступа) (shelf) конечной длины и постоянной амплитуды турбулентного следа солитона [2,8,10,15,16,22]. Поскольку высота этого шельфа порядка ε, а его длина пропорциональна времени, он абсорбирует разность порядка εt между оценками (7.34) и (7.35). В случаях использования H и Q_2 мы получали корректные результаты вследствие того, что на них не оказывает влияние шельф порядка ε. С более общей точки зрения, возникновение шельфа может рассматриваться как излучение из солитона, индуцированное возмущением. Следствием рассмотрения этого примера должно являться то, что проведение энергетического анализа следует совмещать с проведением численного анализа, который позволяет выявить скрытые аспекты проблемы.

Из проведенного анализа возмущений следует, что поступление энергии в систему, обусловленное наличием диссипативного возмущения (7.32), не приводит к увеличению длительности существования солитона. В действительности, продолжительность существования одиночной волны малой амплитуды равна $1/\varepsilon$, в то время как продолжительность существования солитона меньше этой величины на 25% и равна $3/4\varepsilon$.

7.3.2. Солитоны уравнения синус-Гордона

Рассмотрим СГ-уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R, \tag{7.36}$$

где εR — возмущение. При $\varepsilon = 0$ решение одиночного кинка имеет следующий вид:

$$u(x,t) = 4\operatorname{arctg}\left[\exp\left(\frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right]. \tag{7.37}$$

Несмотря на то, что волновое решение невозмущенного уравнения содержит два параметра v и x_0, соответствующее выражение для энергии не зависит от x_0 — положения кинка в момент $t = 0$. Поэтому, если возмущение R не зависит от x, мы можем использовать энергетический анализ, представленный в предыдущем разделе.

Невозмущенное СГ-уравнение может быть получено из плотности лагранжиана

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}u_t^2 - \tfrac{1}{2}u_x^2 - (1 - \cos u),$$