В качестве подтверждения достоверности этого выражения рассмотрим возмущение вида

$$\varepsilon R = -\varepsilon u, \tag{7.32}$$

соответствующее постепенному увеличению глубины в КдВ-модели движения волн на мелководье.

Из равенства (7.31) видно, что эволюция скорости солитона определяется ОДУ первого порядка

$$\frac{dv}{dt} \doteq -\frac{4}{3}\varepsilon v, \tag{7.33}$$

где знак $\doteq$ указывает на то, что в оценке были опущены изменения формы солитона порядка ε.

Из (7.24) видно, что v пропорциональна амплитуде солитона. Тогда из (7.33) следует, что амплитуда эволюционирует с течением времени в соответствии с законом

$$A(t) \doteq A(0)\, e^{-4\varepsilon t/3}, \tag{7.34}$$

что согласуется с результатом, полученным в 1970-м году Оттом и Суданом [23], и подтверждается численными исследованиями Киккербоккера и Нюелла, выполненными десятилетием ранее [15].

Несмотря на то, что этот пример подтверждает возможность использования в рассматриваемой задаче энергетического анализа, возникают некоторые вопросы. При анализе мы использовали единственный факт — то, что энергия остается постоянной на решениях невозмущенной системы. Однако, КдВ-уравнение, будучи интегрируемым, имеет бесконечное число подобных постоянных движения. Получим ли мы аналогичный результат, если будем использовать любую из этих сохраняющихся величин?

В качестве примера рассмотрим одну из этих величин

$$Q_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2\, dx,$$

которая очевидно остается постоянной для всех u, являющихся решениями КдВ-уравнения. Можно показать, что с использованием предложенного выше подхода можно получить уравнение (7.33) и, следовательно, показать, что амплитуда солитона уменьшается в соответствии с законом (7.34).

Однако, если рассмотреть

$$Q_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u\, dx,$$

то мы получим

$$\frac{dv}{dt} \doteq -2\varepsilon v$$

и, следовательно,

$$A(t) \doteq A(0)\, e^{-2\varepsilon t}, \tag{7.35}$$

что противоречит равенству (7.34) и численным результатам [15]. В чем дело?

Парадокс «теряющейся массы» рассматривался несколькими исследователями и его разрешение связано с возникновением «шельфа» (уступа) (shelf) конечной длины и постоянной амплитуды турбулентного следа солитона [2,8,10,15,16,22]. Поскольку высота этого шельфа порядка ε, а его длина пропорциональна времени, он абсорбирует разность порядка εt между оценками (7.34) и (7.35). В случаях использования H и Q_2 мы получали корректные результаты вследствие того, что на них не оказывает влияние шельф порядка ε. С более общей точки зрения, возникновение шельфа может рассматриваться как излучение из солитона, индуцированное возмущением. Следствием рассмотрения этого примера должно являться то, что проведение энергетического анализа следует совмещать с проведением численного анализа, который позволяет выявить скрытые аспекты проблемы.

Из проведенного анализа возмущений следует, что поступление энергии в систему, обусловленное наличием диссипативного возмущения (7.32), не приводит к увеличению длительности существования солитона. В действительности, продолжительность существования одиночной волны малой амплитуды равна $1/\varepsilon$, в то время как продолжительность существования солитона меньше этой величины на 25% и равна $3/4\varepsilon$.

7.3.2. Солитоны уравнения синус-Гордона

Рассмотрим СГ-уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R, \tag{7.36}$$

где εR — возмущение. При $\varepsilon = 0$ решение одиночного кинка имеет следующий вид:

$$u(x,t) = 4\operatorname{arctg}\left[\exp\left(\frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right]. \tag{7.37}$$

Несмотря на то, что волновое решение невозмущенного уравнения содержит два параметра v и x_0, соответствующее выражение для энергии не зависит от x_0 — положения кинка в момент $t = 0$. Поэтому, если возмущение R не зависит от x, мы можем использовать энергетический анализ, представленный в предыдущем разделе.

Невозмущенное СГ-уравнение может быть получено из плотности лагранжиана

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}u_t^2 - \tfrac{1}{2}u_x^2 - (1 - \cos u),$$

Соответствующая плотность гамильтониана определяется равенством (см. Приложение А)

$$\mathcal{H} = u_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \mathcal{L} = \tfrac{1}{2}u_t^2 + \tfrac{1}{2}u_x^2 + (1 - \cos u). \tag{7.38}$$

Так же как и в случае КдВ-уравнения, интересно рассмотреть полную энергию H, определяемую равенством (7.27). В предположении о медленном изменении с течением времени скорости v и используя (7.27) и (7.36), можно получить выражение для производной по времени полной энергии:

$$\frac{dH}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} (u_{tt} - u_{xx} + \sin u)u_t\, dx = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} Ru_t\, dx. \tag{7.39}$$

(Заметим, что для невозмущенного СГ-уравнения ($\varepsilon = 0$) энергия сохраняется.) Подставляя решение одиночного кинка в (7.27) и пренебрегая медленным изменением с течением времени скорости v, получаем

$$H = \frac{8}{\sqrt{1 - v^2}}. \tag{7.40}$$

С практической точки зрения интересно рассмотреть возмущение, описывающее потерю энергии и ее поступление в систему [30]

$$\varepsilon R = -\alpha u_t + \beta u_{xxt} - \gamma, \tag{7.41}$$

поскольку возмущение этого типа соответствует случаю диссипации магнитного потока в длинном сверхпроводящем туннельном переходе Джозефсона (см. рисунок 7.1).

Член при α описывает потерю энергии при туннелировании нормальных (т. е. несверхпроводящих) электронов через барьер на переходе. Член βu_{xxt} также соответствует потере энергии, обусловленный конечностью глубины проникновения электромагнитного поля в сверхпроводящую пленку [27]. Пространственно однородный ток смещения определяется членом γ.

В предположении, что скорость постоянна (т. е. пренебрегая медленными изменениями скорости v), интеграл (7.39) может быть вычислен для решения одиночного кинка и с учетом выражения для возмущения (7.41). С другой стороны, производная по времени H в левой части (7.39) может быть вычислена с использованием (7.40) и это позволяет определить медленные изменения с течением времени скорости v. Таким образом, ОДУ первого порядка для скорости солитона имеет следующий вид [18]:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi\gamma}{4}(1 - v^2)^{3/2} - \alpha v(1 - v^2) - \frac{\beta}{3}v. \tag{7.42}$$

Справедливость этого уравнения подтверждается многими экспериментальными и численными исследованиями.

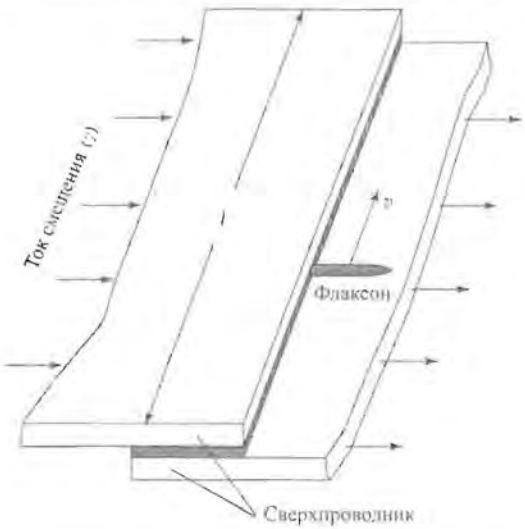


Рис. 7.1. Сверхпроводящий переход Джозефсона длины l с флаксоном (кинком), двигающимся в x-направлении со скоростью v.

С использованием этого уравнения можно исследовать влияние различных членов возмущения на динамику кинка. Два члена при α и β замедляют движение правого и левого распространяющихся кинков. Положительный ток смещения γ смещает кинк вправо, а отрицательный ток смещения смещает кинк влево. Если вышеприведенные выкладки проводятся для антикинка, в уравнении (7.42) член при γ должен изменить знак на противоположный. В этом случае положительный ток смещения смещает кинк влево, а отрицательный ток смещения смещает кинк вправо.

При достаточно длинном переходе уравнение (7.42) имеет равновесное решение v_∞ при $t \to \infty$, определяемое условием $\dot{v} = 0$. При $\beta = 0$ это уравнение может быть решено аналитически:

$$v_\infty = \left[1 + (4\alpha/\pi\gamma)^2\right]^{-1/2}. \tag{7.43}$$

Это стационарное значение скорости соответствует балансу энергии между диссипативными эффектами и поступлением энергии, обусловленным наличием тока смещения γ. Величину v_∞ принято называть «скоростью баланса энергии».

В практических ситуациях пространственные размеры всегда конечны и поэтому следует накладывать граничные условия. Показанный на рисунке 7.1 случай перекрытия имеет важное практическое значение и ему соответствуют граничные условия разомкнутой цепи:

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0.$$

При отражении кинка от границы замкнутой цепи он становится антикинком и, следовательно, показанная на рисунке 7.1 система может рассматриваться как флаксонный осциллятор. В такой системе последовательность динамических событий следующая: (i) кинк движется направо, накапливая энергию от γ, (ii) он отражается от границы замкнутой цепи и становится антикинком, (iii) антикинк движется налево, снова накапливая энергию от γ, (iv) он отражается от другой границы замкнутой цепи и становится кинком, (v) и т.д.

С точностью до членов нулевого порядка в выражении для возмущений (т. е. в предположении, что α, β и γ равны нулю) равенство (3.80) описывает подобные колебания в терминах эллиптических функций, что предоставляет основу для проведения энергетического анализа [5]. Таким образом выходная мощность P_{out} равна входной мощности тока смещения минус диссипация. Выражение для этого баланса мощности может быть получено с использованием (7.39) и (7.41):

$$P_{\text{out}} = \left| \gamma \int_0^l u_t \, dx \right| = \int_0^l (\alpha v_t^2 + \beta u_{xt}^2) \, dx. \tag{7.44}$$

В этой формулировке выходная мощность высвобождается путем излучения на одном из концов устройства. При этом амплитуда A в (3.80) самоподстраивается так, чтобы было выполнено условие (7.44). Если в качестве γ выступает прямой ток, мы получаем устройство, преобразующее электрическую энергию в колебания с частотой колебания несколько терагерц.

7.3.3. Солитоны нелинейного уравнения Шредингера

Возмущения играют важную роль в приложениях НУШ и должны быть включены в него для полноты описания исследуемой физической системы. Возмущенное НУШ имеет вид

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = \varepsilon R. \tag{7.45}$$

При $\varepsilon = 0$ мы можем получить из (3.106) следующее выражение для точного решения одиночного солитона:

$$u(x,t) = a \operatorname{sech}[a(x - v_e t - x_0)] \exp\left[i\tfrac{1}{2} v_e x + (a^2 - \tfrac{1}{4} v_e^2)t - i\sigma_0 \right],$$

где a — амплитуда и v_e — групповая скорость, x_0 и σ_0 — константы, соответствующие центру соответственно огибающей и несущей волн. Для проведения последующего анализа удобно ввести переменную $\xi \equiv v_e/2$ и записать выражение для солитона в следующей форме:

$$u(x,t) = a \operatorname{sech}(a\theta) \exp(i\xi\theta + i\sigma), \tag{7.46}$$

где

$$\theta = x - 2\xi t - x_0 \quad \text{и} \quad \sigma = (a^2 + \xi^2)t - \sigma_0 + \xi x_0.$$

Заметим, что это выражение содержит четыре независимых параметра a, ξ, x_0 и σ_0, но последние два определяют положение солитона и фазу его несущей и поэтому не участвуют в процедуре вычисления энергии.

Плотность лагранжиана для невозмущенного НУШ определяется равенством

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(u^* u_t - u_t^* u) - |u_x|^2 + |u|^4, \tag{7.47}$$

где u^* — комплексно сопряженная величина для u. Переменные u и u^* независимы, т. к. u определяется двумя независимыми вещественными функциями: вещественной и мнимой частями этой величины. Вычисляя вариацию $\mathcal{L}$ по u^*, мы получаем невозмущенное НУШ, а вычисляя вариацию по u — комплексно сопряженное уравнение.

Плотности импульсов определяются равенствами

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} = +\frac{i}{2} u^*$$
$$\pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*} = -\frac{i}{2} u$$

и, следовательно, плотность гамильтониана

$$\mathcal{H} = u_t \pi + u_t^* \pi^* - \mathcal{L} = |u_x|^2 - |u|^4$$

и полная энергия

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H} \, dx. \tag{7.48}$$

С использованием возмущенного НУШ (7.45) мы получаем

$$\frac{dH}{dt} = -\int_{-\infty}^{\infty} (u_{xx} + 2|u|^2 u) u_t^* \, dx + \text{cc} =$$
$$= -\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} R u_t^* \, dx + \text{cc}, \tag{7.49}$$

где «cc» обозначает комплексное сопряжение предшествующих членов.

Для одиночного солитона (7.46) гамильтониан (7.48) имеет вид

$$H = 2a\xi^2 - \tfrac{2}{3} a^3 \tag{7.50}$$

и, следовательно, производная энергии по времени определяется равенством

$$\frac{dH}{dt} = 2(\xi^2 - a^2)\frac{da}{dt} + 4a\xi \frac{d\xi}{dt}. \tag{7.51}$$