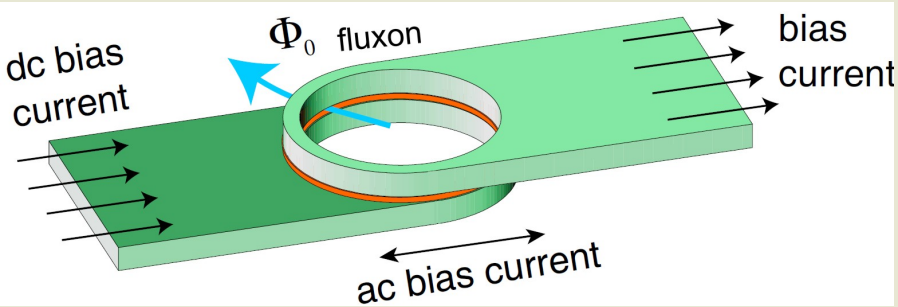
Збурене рівняння синус Ґордон: приклад

Зразок кільцевого контакту Джозефсона



Довгий джозефсонів контакт

- $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon R$
- $\varepsilon R = -\alpha u_t + \beta u_{xxt} - \gamma$
  α — втрати енергії при тунелюванні нормальних електронів на переході
  β — втрати завдяки скінченій довжині проникнення електромагнітного поля в надпровідник
  γ — струм зсуву

Швидкість флюксона

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi\gamma}{4}(1-v^2)^{3/2} - \alpha v(1-v^2) - \frac{\beta}{3}v$$

Рівноважне значення швидкості солітону при $\beta = 0$: $v_\infty = \frac{1}{\sqrt{1+(2\alpha/\pi\gamma)^2}}$

Мультимасштабна теорія збурень для СҐ–рівняння

Мультимасштабування

- Швидкі змінні: $T_0 = t$, $X_0 = x$
- Повільні змінні: $T_1 = \varepsilon t$, $X_1 = \varepsilon x$
- $u(x,t) = u(X_0, T_0, X_1, T_1)$.
- $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}$
  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1}$
- Локалізована біжуча хвиля:
  $u(x,t) = u(X_0, T_0, T_1)$.

Мультимасштабна теорія збурень для СҐ–рівняння

Збурене рівняння СҐ

- $$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{xx} + \sin(\cdot) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}.$$

- Перший крок теорії збурень: $u = u_0 + \varepsilon u_1$
- Другий крок теорії збурень — система рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} - \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial X_0^2} + \sin u_0 = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial T_0}\begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial T_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_{X_0X_0} + \cos u_0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial T_0} \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} -\frac{\partial u_0}{\partial T_1} \\ R - \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} \end{bmatrix}. \end{cases}$$

- Третій крок теорії збурень — розв'язування рівнянь:

u_0 — незбурений розв'язок, але $u_0 = u_0(X_0, T_0, T_1)$

u_1 — збурений розв'язок, $u_1 = u_1(X_0, T_0, T_1)$

Мультимасштабна теорія збурень для кінка

Приклад: кінк

- Уособлений кінк (антикінк)

$$\operatorname{tg} u_0 = \pm \exp\left[\frac{X_0 - X(T_0, T_1)}{\sqrt{1 - v^2(T_1)}}\right], \qquad \frac{\partial X}{\partial T_0} = v(T_1).$$

- Рівняння для u_1:

$$L \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{1\,T_0} \end{bmatrix} = \mathscr{F}$$

$$L = \begin{bmatrix} \partial_{T_0} & -1 \\ (-\partial_{X_0,X_0} + \cos u_0) & \partial_{T_0} \end{bmatrix}$$

$$\mathscr{F} = \begin{bmatrix} -u_{0v}, \dot{v} - u_{0,X}\dot{X} \\ R - u_{0,T_0,v}\dot{v} - u_{0\,T_0,X}\dot{X} \end{bmatrix}$$

- $L^\dagger \psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi \perp \mathscr{F}$
- Умова ортогональності: $\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} R u_t \mathrm{d}x$

Мультимасштабна теорія збурень для кінка

Умова ортогональності $L^{\dagger}\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi \perp \mathscr{F}$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}T_1} = \frac{1}{4}(1-v^2)^{3/2} I_1, \qquad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}T_1} = -\frac{1}{4}(1-v^2)^{3/2} I_2$$

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{R\left[u_0(\theta)\right]}{\operatorname{ch}\theta}\mathrm{d}\theta, \qquad I_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta R\left[u_0(\theta)\right]}{\operatorname{ch}\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$u_0(\theta) = \pm \operatorname{arctg}\left(e^{\theta}\right), \qquad \theta = \frac{X_0 - X(T_0, T_1)}{\sqrt{1-v^2(T_1)}}$$

Розв'язок

$$u_0(x,t) = 4\operatorname{arctg}\left[\exp\left(\frac{x - \int\limits_0^t v(t')\mathrm{d}t' - x_0(t)}{\sqrt{1-v^2(t)}}\right)\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon}{4}(1-v^2)^{3/2} I_1, \qquad \frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t} = -\frac{\varepsilon}{4} v(1-v^2) I_2.$$