Тема лекції

Солітонна теорія збурень

План лекції

1. Методи теорії збурень для лінійної системи: осцилятор з тертям
   - Метод балансу енергії
   - Часове мультимасштабування
2. Солітонна теорія збурень
   - Енергетичний аналіз динаміки солітону
     - Солітони Кортвега–де–Вріза
     - Солітони рівняння синус Ґордон
   - Мультимасштабна теорія збурень для СҐ–рівняння
     - Мультимасштабна теорія збурень для кінка

План лекції

1. Методи теорії збурень для лінійної системи: осцилятор з тертям
   - Метод балансу енергії
   - Часове мультимасштабування
2. Солітонна теорія збурень
   - Енергетичний аналіз динаміки солітону
     - Солітони Кортвега–де–Вріза
     - Солітони рівняння синус Ґордон
   - Мультимасштабна теорія збурень для СҐ–рівняння
     - Мультимасштабна теорія збурень для кінка

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t$$

- $\omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$, $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t$$

- $\omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$, $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t$$

- $\omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$, $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t$$

- $\omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$, $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t$$

- $\omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$, $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

- $\varepsilon = 0$: $x(t) = \cos t$
- $\varepsilon = 0$: енергія $\mathscr{E} = \frac{\dot{x}^2+x^2}{2} = \frac{A^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$
- $0 < \varepsilon \ll 1$: $x(t) = A(t)\cos t \Rightarrow$ енергія $\mathscr{E} \approx \frac{A^2(t)}{2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \approx A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon\dot{x}^2$ $\dot{x}(t) \approx -A(t)\sin t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon A^2(t)\sin^2 t$
- $\langle\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t}\rangle = \frac{\varepsilon}{2}A^2(t) = A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -\frac{\varepsilon}{2}A \Rightarrow A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t$$

- $\omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$, $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

- $\varepsilon = 0$: $x(t) = \cos t$
- $\varepsilon = 0$: енергія $\mathscr{E} = \frac{\dot{x}^2+x^2}{2} = \frac{A^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$
- $0 < \varepsilon \ll 1$: $x(t) = A(t)\cos t \Rightarrow$ енергія $\mathscr{E} \approx \frac{A^2(t)}{2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \approx A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon\dot{x}^2$ $\dot{x}(t) \approx -A(t)\sin t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon A^2(t)\sin^2 t$
- $\langle\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t}\rangle = \frac{\varepsilon}{2}A^2(t) = A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -\frac{\varepsilon}{2}A \Rightarrow A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t$$

- $\omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$, $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

- $\varepsilon = 0$: $x(t) = \cos t$
- $\varepsilon = 0$: енергія $\mathscr{E} = \frac{\dot{x}^2+x^2}{2} = \frac{A^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$
- $0 < \varepsilon \ll 1$: $x(t) = A(t)\cos t \Rightarrow$ енергія $\mathscr{E} \approx \frac{A^2(t)}{2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \approx A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon\dot{x}^2$ $\dot{x}(t) \approx -A(t)\sin t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon A^2(t)\sin^2 t$
- $\langle\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t}\rangle = \frac{\varepsilon}{2}A^2(t) = A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -\frac{\varepsilon}{2}A \Rightarrow A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t$$

- $\omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$, $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

- $\varepsilon = 0$: $x(t) = \cos t$
- $\varepsilon = 0$: енергія $\mathscr{E} = \frac{\dot{x}^2+x^2}{2} = \frac{A^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$
- $0 < \varepsilon \ll 1$: $x(t) = A(t)\cos t \Rightarrow$ енергія $\mathscr{E} \approx \frac{A^2(t)}{2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \approx A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon\dot{x}^2$
  $\dot{x}(t) \approx -A(t)\sin t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon A^2(t)\sin^2 t$
- $\langle\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t}\rangle = \frac{\varepsilon}{2}A^2(t) = A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -\frac{\varepsilon}{2}A \Rightarrow A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t$$

- $\omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$, $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

- $\varepsilon = 0$: $x(t) = \cos t$
- $\varepsilon = 0$: енергія $\mathscr{E} = \frac{\dot{x}^2+x^2}{2} = \frac{A^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$
- $0 < \varepsilon \ll 1$: $x(t) = A(t)\cos t \Rightarrow$ енергія $\mathscr{E} \approx \frac{A^2(t)}{2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \approx A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon\dot{x}^2$ $\dot{x}(t) \approx -A(t)\sin t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon A^2(t)\sin^2 t$
- $\left\langle \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \frac{\varepsilon}{2}A^2(t) = A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -\frac{\varepsilon}{2}A \Rightarrow A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t$$

- $\omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$, $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

- $\varepsilon = 0$: $x(t) = \cos t$
- $\varepsilon = 0$: енергія $\mathscr{E} = \frac{\dot{x}^2+x^2}{2} = \frac{A^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$
- $0 < \varepsilon \ll 1$: $x(t) = A(t)\cos t \Rightarrow$ енергія $\mathscr{E} \approx \frac{A^2(t)}{2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \approx A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon\dot{x}^2$ $\dot{x}(t) \approx -A(t)\sin t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon A^2(t)\sin^2 t$
- $\left\langle \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \frac{\varepsilon}{2}A^2(t) = A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -\frac{\varepsilon}{2}A \Rightarrow A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$

Лінійний приклад: осцилятор з тертям

Осцилятор: точний розв'язок

- Рівняння осцилятора:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

- Точний розв'язок

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t$$

- $\omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4}$, $A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$, $B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Енергетичний аналіз

- $\varepsilon = 0$: $x(t) = \cos t$
- $\varepsilon = 0$: енергія $\mathscr{E} = \frac{\dot{x}^2+x^2}{2} = \frac{A^2(0)}{2} = \frac{1}{2}$
- $0 < \varepsilon \ll 1$: $x(t) = A(t)\cos t \Rightarrow$ енергія $\mathscr{E} \approx \frac{A^2(t)}{2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \approx A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon\dot{x}^2$ $\dot{x}(t) \approx -A(t)\sin t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon A^2(t)\sin^2 t$
- $\langle\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t}\rangle = \frac{\varepsilon}{2}A^2(t) = A\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$
- $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -\frac{\varepsilon}{2}A \Rightarrow A(t) = e^{-\varepsilon t/2}$

Лінійний приклад: Послідовні наближення

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t) = e^{-\varepsilon t/2},\ B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$$

Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від ε:
  $x(t,\varepsilon) =$
  $x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2x_0}{\mathrm{d}t^2} + x_0 = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} + x_1 = -\dfrac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0(t) = \cos t \\ x_1(t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t \end{cases}$$

Лінійний приклад: Послідовні наближення

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=0 \qquad x(0)=1, \quad \dot{x}(0)=0.$$

$$x(t)=A(t)\cos\omega t+\frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega=\sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t)=e^{-\varepsilon t/2},\ B(t)=\frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$$

Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від ε:
  $x(t,\varepsilon)=$
  $x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2x_2(t)+\cdots$
- $$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}^2x_0}{\mathrm{d}t^2}+x_0=0\\ \frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2}+x_1=\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t}\end{cases}$$
- $$\begin{cases}x_0(t)=\cos t\\ x_1(t)=\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}t\cos t\end{cases}$$

Лінійний приклад: Послідовні наближення

Осцилятор: точний розв'язок

$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$

$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t) = e^{-\varepsilon t/2},\ B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від ε: $x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots$
- $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2x_0}{\mathrm{d}t^2} + x_0 = 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} + x_1 = \frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t} \end{cases}$
- $\begin{cases} x_0(t) = \cos t \\ x_1(t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t \end{cases}$

Лінійний приклад: Послідовні наближення

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=0 \qquad x(0)=1, \quad \dot{x}(0)=0.$$

$$x(t)=A(t)\cos\omega t+\frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega=\sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t)=e^{-\varepsilon t/2},\ B(t)=\frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$$

Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від ε: $x(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2x_2(t)+\cdots$
- $$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}^2x_0}{\mathrm{d}t^2}+x_0=0\\ \frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2}+x_1=\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t}\end{cases}$$
- $$\begin{cases}x_0(t)=\cos t\\ x_1(t)=\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}t\cos t\end{cases}$$

Лінійний приклад: Послідовні наближення

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=0 \qquad x(0)=1, \quad \dot{x}(0)=0.$$

$$x(t)=A(t)\cos\omega t+\frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega=\sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t)=e^{-\varepsilon t/2},\ B(t)=\frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$$

Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від ε: $x(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2x_2(t)+\cdots$
- $$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}^2x_0}{\mathrm{d}t^2}+x_0=0\\ \frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2}+x_1=\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t}\end{cases}$$
- $$\begin{cases}x_0(t)=\cos t\\ x_1(t)=\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}t\cos t\end{cases}$$

Лінійний приклад: Послідовні наближення

Осцилятор: точний розв'язок

$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon\frac{dx}{dt} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$

$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t) = e^{-\varepsilon t/2},\ B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від ε: $x(t,\varepsilon) = x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2 x_2(t)+\cdots$
- $\begin{cases} \frac{d^2x_0}{dt^2} + x_0 = 0 \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} + x_1 = \frac{dx_0}{dt} \end{cases}$
- $\begin{cases} x_0(t) = \cos t \\ x_1(t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t \end{cases}$

- $x(t) = A(\varepsilon t)\cos(\omega(\varepsilon)t) + \varepsilon B(\varepsilon t)\sin(\omega(\varepsilon)t)$
- $\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \cdots$
- $k_1 = 0,\ k_2 = -\frac{1}{8},\ A(\varepsilon t) = e^{-\varepsilon t/2},$ $B(\varepsilon t) = \frac{1}{2}e^{-\varepsilon t/2}$

Лінійний приклад: Послідовні наближення

Осцилятор: точний розв'язок

$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon\frac{dx}{dt} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$

$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t) = e^{-\varepsilon t/2},\ B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від ε: $x(t,\varepsilon) = x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2 x_2(t)+\cdots$
- $\begin{cases} \frac{d^2x_0}{dt^2} + x_0 = 0 \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} + x_1 = \frac{dx_0}{dt} \end{cases}$
- $\begin{cases} x_0(t) = \cos t \\ x_1(t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t \end{cases}$

- $x(t) = A(\varepsilon t)\cos(\omega(\varepsilon)t) + \varepsilon B(\varepsilon t)\sin(\omega(\varepsilon)t)$
- $\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \cdots$
- $k_1 = 0,\ k_2 = -\frac{1}{8},\ A(\varepsilon t) = e^{-\varepsilon t/2},$ $B(\varepsilon t) = \frac{1}{2}e^{-\varepsilon t/2}$

Лінійний приклад: Послідовні наближення

Осцилятор: точний розв'язок

$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon\frac{dx}{dt} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$

$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t) = e^{-\varepsilon t/2},\ B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від ε: $x(t,\varepsilon) = x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2 x_2(t)+\cdots$
- $\begin{cases} \frac{d^2x_0}{dt^2} + x_0 = 0 \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} + x_1 = \frac{dx_0}{dt} \end{cases}$
- $\begin{cases} x_0(t) = \cos t \\ x_1(t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t \end{cases}$

- $x(t) = A(\varepsilon t)\cos(\omega(\varepsilon)t) + \varepsilon B(\varepsilon t)\sin(\omega(\varepsilon)t)$
- $\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \cdots$
- $k_1 = 0,\ k_2 = -\frac{1}{8},\ A(\varepsilon t) = e^{-\varepsilon t/2},\ B(\varepsilon t) = \frac{1}{2}e^{-\varepsilon t/2}$

Лінійний приклад: Послідовні наближення

Осцилятор: точний розв'язок

$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$

$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t) = e^{-\varepsilon t/2},\ B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Осцилятор: Секулярне рівняння

- Розв'язок залежить від ε: $x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots$
- $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2x_0}{\mathrm{d}t^2} + x_0 = 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} + x_1 = \frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t} \end{cases}$
- $\begin{cases} x_0(t) = \cos t \\ x_1(t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t \end{cases}$

- $x(t) = A(\varepsilon t)\cos(\omega(\varepsilon)t) + \varepsilon B(\varepsilon t)\sin(\omega(\varepsilon)t)$
- $\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \cdots$
- $k_1 = 0,\ k_2 = -\frac{1}{8},\ A(\varepsilon t) = e^{-\varepsilon t/2},\ B(\varepsilon t) = \frac{1}{2}e^{-\varepsilon t/2}$

Часове мультимасштабування

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=0 \qquad x(0)=1, \quad \dot{x}(0)=0.$$

$$x(t)=A(t)\cos\omega t+\frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega=\sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t)=e^{-\varepsilon t/2},\ B(t)=\frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$$

Часове мультимасштабування

1. $T_0=t,\ T_1=\varepsilon t,\ T_2=\varepsilon^2 t,\ \ldots$
2. Обмежимось другим порядком: $x(t)=x(T_0,T_1,T_2)$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial T_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}$
4. $x=x_0(T_0,T_1,T_2)+\varepsilon x_1(T_0,T_1,T_2)+\varepsilon^2 x_2(T_0,T_1,T_2)$

Часове мультимасштабування

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t) = e^{-\varepsilon t/2},\ B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$$

Часове мультимасштабування

- $T_0 = t,\ T_1 = \varepsilon t,\ T_2 = \varepsilon^2 t,\ \ldots$
- Обмежимось другим порядком: $x(t) = x(T_0, T_1, T_2)$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}$
- $x = x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2)$

Часове мультимасштабування

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t) = e^{-\varepsilon t/2},\ B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$$

Часове мультимасштабування

- $T_0 = t,\ T_1 = \varepsilon t,\ T_2 = \varepsilon^2 t,\ \ldots$
- Обмежимось другим порядком: $x(t) = x(T_0, T_1, T_2)$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}$
- $x = x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2)$

Часове мультимасштабування

Осцилятор: точний розв'язок

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t) = e^{-\varepsilon t/2},\ B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$$

Часове мультимасштабування

- $T_0 = t,\ T_1 = \varepsilon t,\ T_2 = \varepsilon^2 t,\ \ldots$
- Обмежимось другим порядком: $x(t) = x(T_0, T_1, T_2)$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}$
- $x = x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2)$

Часове мультимасштабування

Осцилятор: точний розв'язок

$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$

$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t) = e^{-\varepsilon t/2},\ B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Часове мультимасштабування

- $T_0 = t,\ T_1 = \varepsilon t,\ T_2 = \varepsilon^2 t,\ \ldots$
- Обмежимось другим порядком: $x(t) = x(T_0, T_1, T_2)$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}$
- $x = x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2)$

Часове мультимасштабування

Осцилятор: точний розв'язок

$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$

$x(t) = A(t)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2}B(t)\sin\omega t,\ \omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4},\ A(t) = e^{-\varepsilon t/2},\ B(t) = \frac{e^{-\varepsilon t/2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}}$

Часове мультимасштабування

- $T_0 = t,\ T_1 = \varepsilon t,\ T_2 = \varepsilon^2 t,\ \ldots$
- Обмежимось другим порядком: $x(t) = x(T_0, T_1, T_2)$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}$
- $x = x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2)$

Часове мультимасштабування

- $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$
- $$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial x_0}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2}\cos\left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right)t\right] + \frac{1}{2}\varepsilon e^{-\varepsilon t/2}\sin\left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right)t\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Часове мультимасштабування

- $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$
- $\begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial x_0}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$

Часове мультимасштабування

- $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$
- $$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial x_0}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

Часове мультимасштабування

- $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$
- $$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial x_0}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

- $x_0 = A(T_1, T_2)e^{iT_0} + B(T_1, T_2)e^{-iT_0}$
- $\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -i\left(A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1}\right)e^{iT_0} + i\left(B + 2\frac{\partial B}{\partial T_1}\right)e^{-iT_0}$
- Відсутність секулярних доданків: $e^{\pm iT_0} \Rightarrow te^{\pm iT_0}$:

$$A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} = 0 \Rightarrow A(T_1, T_2) = A_1(T_2)e^{-T_1/2},\ B(T_1, T_2) = B_1(T_2)e^{-T_1/2}.$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2}\cos\left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right)t\right] + \frac{1}{2}\varepsilon e^{-\varepsilon t/2}\sin\left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right)t\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Часове мультимасштабування

- $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$
- $$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial x_0}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

- $x_0 = A(T_1, T_2)e^{iT_0} + B(T_1, T_2)e^{-iT_0}$
- $\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -i\left(A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1}\right)e^{iT_0} + i\left(B + 2\frac{\partial B}{\partial T_1}\right)e^{-iT_0}$
- Відсутність секулярних доданків: $e^{\pm iT_0} \Rightarrow te^{\pm iT_0}$:

$$A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} = 0 \Rightarrow A(T_1, T_2) = A_1(T_2)e^{-T_1/2},\ B(T_1, T_2) = B_1(T_2)e^{-T_1/2}.$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2}\cos\left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right)t\right] + \frac{1}{2}\varepsilon e^{-\varepsilon t/2}\sin\left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right)t\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Часове мультимасштабування

- $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$
- $$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial x_0}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

- $x_0 = A(T_1, T_2)e^{iT_0} + B(T_1, T_2)e^{-iT_0}$
- $\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -i\left(A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1}\right)e^{iT_0} + i\left(B + 2\frac{\partial B}{\partial T_1}\right)e^{-iT_0}$
- Відсутність секулярних доданків: $e^{\pm iT_0} \Rightarrow te^{\pm iT_0}$:

$$A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} = 0 \Rightarrow A(T_1, T_2) = A_1(T_2)e^{-T_1/2},\ B(T_1, T_2) = B_1(T_2)e^{-T_1/2}.$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2}\cos\left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right)t\right] + \frac{1}{2}\varepsilon e^{-\varepsilon t/2}\sin\left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right)t\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Часове мультимасштабування

- $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$
- $$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial x_0}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

- $x_0 = A(T_1, T_2)e^{iT_0} + B(T_1, T_2)e^{-iT_0}$
- $\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -i\left(A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1}\right)e^{iT_0} + i\left(B + 2\frac{\partial B}{\partial T_1}\right)e^{-iT_0}$
- Відсутність секулярних доданків: $e^{\pm iT_0} \Rightarrow te^{\pm iT_0}$:

$$A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} = 0 \;\Rightarrow\; A(T_1, T_2) = A_1(T_2)e^{-T_1/2},\; B(T_1, T_2) = B_1(T_2)e^{-T_1/2}.$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2}\cos\left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right)t\right] + \frac{1}{2}\varepsilon e^{-\varepsilon t/2}\sin\left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right)t\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Часове мультимасштабування

- $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0 \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$
- $$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -\frac{\partial x_0}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial T_0} - 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial x_0}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} \end{cases}$$

- $x_0 = A(T_1, T_2)e^{iT_0} + B(T_1, T_2)e^{-iT_0}$
- $\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -i\left(A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1}\right)e^{iT_0} + i\left(B + 2\frac{\partial B}{\partial T_1}\right)e^{-iT_0}$
- Відсутність секулярних доданків: $e^{\pm iT_0} \Rightarrow te^{\pm iT_0}$:

$$A + 2\frac{\partial A}{\partial T_1} = 0 \;\Rightarrow\; A(T_1, T_2) = A_1(T_2)e^{-T_1/2},\; B(T_1, T_2) = B_1(T_2)e^{-T_1/2}.$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t/2}\cos\left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right)t\right] + \frac{1}{2}\varepsilon e^{-\varepsilon t/2}\sin\left[\left(1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2\right)t\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$