Лекция 9

1. Уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко

В этой лекции будет выведено уравнение обратной задачи рассеяния в случае отсутствия *дискретного спектра*, то есть всюду в этой лекции будем предполагать, что

$$a(\lambda) \neq 0 \quad \text{для всех } \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0. \tag{9.1}$$

Наша задача – восстановить потенциал $u(x)$ в уравнении Шредингера (7.6)

$$\Phi_{xx}+(\lambda^2+u(x))\Phi = 0 \tag{9.2}$$

по его данным рассеяния $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$:

$$\Phi \to \begin{cases} \mathrm{e}^{-i\lambda x}, & x \to -\infty, \\ a(\lambda)\mathrm{e}^{-i\lambda x}+b(\lambda)\mathrm{e}^{i\lambda x}, & x \to +\infty. \end{cases} \tag{9.3}$$

Нам понадобится также каноническое решение Θ, определенное выше уравнением Шредингера (7.6)

$$\Theta_{xx}+(\lambda^2+u(x))\Theta = 0, \tag{9.4}$$

$$\Theta \to \mathrm{e}^{i\lambda x}, \quad x \to +\infty. \tag{9.5}$$

Выведем сначала *формулу обращения* для потенциала $u(x)$ по известной функции Φ.

Поскольку интегральное уравнение (7.7) для Φ эквивалентно уравнению (7.9) для $\chi(\lambda, x) = \Phi(\lambda, x)\mathrm{e}^{i\lambda x}$,

$$\chi(\lambda, x) = 1 - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2i\lambda(x-\xi)}}{2i\lambda} u(\xi)\chi(\lambda, \xi)\, d\xi.$$

Используя аналитичность χ по λ при $\operatorname{Im}\lambda > 0$, перейдем к пределу при $\lambda \to \infty$. Воспользовавшись оценкой

$$|\, \mathrm{e}^{2i\lambda(x-\xi)} \,| = \mathrm{e}^{-2\operatorname{Im}\lambda(x-\xi)} \to 0, \quad \lambda \to \infty, \quad x > \xi,$$

получаем

$$u(x) = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\lambda\to\infty} 2i\lambda(\chi(\lambda,x)-1) = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\lambda\to\infty} 2i\lambda(\Phi(\lambda,x)\mathrm{e}^{i\lambda x}-1). \qquad (9.6)$$

Приступая непосредственно к выводу уравнения обратной задачи, напишем соотношение рассеяния (9.3) несколько по-другому. Считая λ вещественным, введем третье решение $\overline{\Theta}(x,\lambda)$ уравнения Шредингера (7.6):

$$\overline{\Theta}_{xx}+(\lambda^2+u(x))\overline{\Theta} = 0, \qquad (9.7)$$

$$\overline{\Theta} \to \mathrm{e}^{-i\lambda x}, \quad x \to +\infty. \qquad (9.8)$$

Тогда между тройкой функций Φ, Θ и $\overline{\Theta}$ существует линейное соотношение, поскольку они являются решениями одного и того же уравнения (7.6) второго порядка. Коэффициенты этого соотношения достаточно вычислить в какой-нибудь одной точке x, так как они от x не зависят. В силу асимптотик (9.3), (9.4) и (9.7) имеем

$$\Phi(\lambda,x) = a(\lambda)\overline{\Theta}(\lambda,x)+b(\lambda)\Theta(\lambda,x) \quad \text{для любых } x,\lambda\in\mathbb{R}.$$

Разделим на $a(\lambda)$ обе части этого соотношения и умножим на экспоненту $\exp(i\lambda y)$, где y – вещественный параметр.

$$\frac{\Phi(\lambda,x)}{a(\lambda)}\mathrm{e}^{i\lambda y} = \left[\overline{\Theta}(\lambda,x)+\frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}\Theta(\lambda,x)\right]\mathrm{e}^{i\lambda y} = \left[\overline{\Theta}(\lambda,x)+r(\lambda)\Theta(\lambda,x)\right]\mathrm{e}^{i\lambda y}.$$

Проинтегрируем это соотношение по λ, вычтя из обеих частей экспоненту $\exp(-i\lambda(x-y))$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\Phi(\lambda,x)}{a(\lambda)}\mathrm{e}^{i\lambda y}-\mathrm{e}^{-i\lambda(x-y)}\right]d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{i\lambda y}\left[\overline{\Theta}(\lambda,x)-\mathrm{e}^{-i\lambda x}+r(\lambda)\Theta(\lambda,x)\right]d\lambda. \qquad (9.9)$$

Интегралы в последней формуле определены корректно, поскольку их сходимость на бесконечности следует из оценки подынтегральных функций $O\left(\lambda^{-1}\exp(i\lambda(x-y))\right)$, которая, в свою очередь, обеспечена асимптотиками (9.3), (9.4), (9.7) и свойством 4.

Функции $\Phi(\lambda, x)$ и $a(\lambda)$ аналитичны по λ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$, причем имеет место оценка

$$\frac{\Phi(\lambda, x)}{a(\lambda)} e^{i\lambda y} - e^{-i\lambda(x-y)} = O\left(\lambda^{-1} e^{-i\lambda(x-y)}\right), \quad \lambda \to \infty.$$

Деформируем контур интегрирования в левой части (9.9) с вещественной оси на параллельную ей прямую $-\infty < \operatorname{Re}\lambda < +\infty$, $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Поскольку $|e^{-i\lambda(x-y)}| = e^{\operatorname{Im}\lambda(x-y)} \to 0$ при $(x-y) < 0$, $\operatorname{Im}\lambda \to +\infty$, то в силу последней оценки экспонента пропадет и интеграл в левой части занулится.

Уравнение (9.9) принимает вид

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda y} \left[\overline{\Theta}(\lambda, x) - e^{-i\lambda x} + r(\lambda)\Theta(\lambda, x)\right] d\lambda. \tag{9.10}$$

Будем искать его решение в виде

$$\overline{\Theta}(\lambda, x) = e^{-i\lambda x} + \int_x^{\infty} K(x, y) e^{-i\lambda y} dy, \tag{9.11}$$

где K – новая неизвестная вещественная функция. Это представление справедливо в силу интегрального уравнения (7.12), выведенного выше при рассмотрении прямой задачи рассеяния:

$$\Theta(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} \frac{\sin\lambda(x-y)}{\lambda} u(y)\Theta(\lambda, y) dy.$$

Подставляя эту функцию в уравнение (9.10) и заменяя переменную интегрирования y на ξ, получим

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda y} \left[\int_x^{\infty} K(x, \xi) e^{i\lambda\xi} d\xi + r(\lambda)\left(e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} K(x, \xi) e^{i\lambda\xi} d\xi\right)\right] d\lambda. \tag{9.12}$$

Первый двойной интеграл здесь – суть последовательно примененные прямое и обратное преобразования Фурье. Точнее, вводя функцию

$$\hat{K}(x, y) = \begin{cases} K(x, y), & x < y, \\ 0, & x > y, \end{cases}$$

имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i\lambda y} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{K}(x,\xi)\mathrm{e}^{-i\lambda\xi} d\xi\, d\lambda = 2\pi\hat{K}(x,y).$$

Уравнение (9.12) теперь перепишется при $x < y$ так:

$$0 = 2\pi K(x,y) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} r(\lambda)\mathrm{e}^{i\lambda(x+y)} d\lambda + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} r(\lambda)\mathrm{e}^{i\lambda y} \int\limits_{x}^{\infty} K(x,\xi)\mathrm{e}^{i\lambda\xi} d\xi d\lambda.$$

Введем обозначение

$$F(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} r(\lambda)\mathrm{e}^{i\lambda z}\, d\lambda$$

и в уравнении переставим порядок интегрирования в последнем двойном интеграле:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i\lambda y} r(\lambda) \int\limits_{x}^{\infty} K(x,\xi)\mathrm{e}^{i\lambda\xi} d\xi d\lambda =$$

$$= \int\limits_{x}^{\infty} K(x,\xi) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} r(\lambda)\mathrm{e}^{i\lambda(\xi+y)} d\lambda d\xi = \int\limits_{x}^{\infty} K(x,\xi) 2\pi F(\xi+y) d\xi.$$

Окончательно получается *уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко*

$$K(x,y) + F(x+y) + \int\limits_{x}^{\infty} K(x,\xi) F(\xi+y) d\xi = 0, \quad x < y. \tag{9.13}$$

2. Формула обращения

Нам осталось сделать последний шаг в схеме метода обратной задачи рассеяния – перейти от решения $K(x,y)$ уравнения ГЛМ к искомому решению уравнения КдФ $u(x,t)$. Этот переход дается модификацией формулы обращения (9.6), выведенной в начале этой лекции.

Перепишем выражение (9.6) для потенциала u в терминах функции $\Theta = \chi\mathrm{e}^{-i\lambda x}$:

$$u(x) = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\lambda\to\infty} 2i\lambda(\chi(\lambda,x)-1) = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\lambda\to\infty} 2i\lambda(\Theta(\lambda,x)\mathrm{e}^{-i\lambda x} - 1).$$

Подставим сюда выражение (9.11) для $\Theta(\lambda, x)$

$$\Theta(\lambda, x) = \mathrm{e}^{i\lambda x} + \int\limits_x^{+\infty} K(x, \xi)\mathrm{e}^{i\lambda\xi} d\xi,$$

что дает

$$u(x) = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\lambda\to\infty} 2i\lambda \left(\int\limits_x^{\infty} K(x, \xi)\mathrm{e}^{i\lambda(\xi - x)} d\xi \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\lambda\to\infty} 2 \int\limits_x^{\infty} K(x, \xi) d\left(\mathrm{e}^{i\lambda(\xi - x)}\right) =$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial x} \lim_{\lambda\to\infty} \left\{ -K(x, x) - \int\limits_x^{\infty} \mathrm{e}^{i\lambda(\xi - x)} K_\xi(x, \xi) d\xi \right\} =$$

$$= -2\frac{\partial}{\partial x} K(x, x) + 2\frac{\partial}{\partial x} \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{i\lambda} \left\{ K_\xi(x, x) + \int\limits_x^{\infty} \mathrm{e}^{i\lambda(\xi - x)} K_{\xi\xi}(x, \xi) d\xi \right\}.$$

Здесь последнее слагаемое обращается в нуль, поскольку интеграл в силу гладкости $K(x, \xi)$ имеет порядок $O(\lambda^{-N})$ при $\lambda \to \infty$, N – любое положительное число (N раз проинтегрировать по частям).

Таким образом, окончательно получим следующую формулу, которая называется формулой обращения:

$$u(x) = -2\frac{\partial}{\partial x} K(x, x). \tag{9.14}$$

Подводя итог всему сказанному, сформулируем стандартный алгоритм решения обратной задачи рассеяния для уравнения КдФ.

- По данным рассеяния $a(\lambda) = a(\lambda, 0)$ и $b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)\mathrm{e}^{-8i\lambda^3 t}$ находим коэффициент отражения

$$r(\lambda, t) = \frac{b(\lambda, t)}{a(\lambda, t)} = \frac{b(\lambda, 0)}{a(\lambda, 0)} \mathrm{e}^{-8i\lambda^3 t}.$$

- Вычисляем ядро уравнения ГЛМ

$$F(z,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} r(\lambda,t)\mathrm{e}^{i\lambda z}\, d\lambda.$$

- Решаем уравнение ГЛМ (9.13)

$$K(x,y,t)+F(x+y,t)+\int\limits_{x}^{\infty} K(x,\xi,t)F(\xi+y,t)d\xi = 0, \quad x < y.$$

- Находим решение уравнения КдФ по формуле обращения (9.14)

$$u(x,t) = -2\frac{\partial}{\partial x}K(x,x,t).$$